

論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラム開発 (1)

— 小学校第5学年における移行を促す算数での実践的研究 —

村上 良太 川崎 正盛 妹尾 進一 植田 敦三
松浦 武人

1. はじめに

中学校数学科における論証理解の困難性に関する調査研究、学習指導の改善に関する実証的・実践的研究は従来からも精力的になされているが(國宗, 1987; 小関ほか, 1987), 今日においても生徒の学習状況の改善を必要としているのが現状である。一方, 生徒にとっての論証理解の困難性は, 単に中学校数学科における課題であるというだけではなく, 小学校算数科における学習指導上の課題でもある。とりわけ, 性質間の関係の認識は小学校算数科における図形の性質理解にとっても不可欠であることに留意したい。図形指導の体系を研究した前田は, 「性質の理解は, 関係の把握と不離一体である。」(前田, 1979, p.127)と述べ, 性質理解に対する関係把握の重要性を指摘している。

これらの先行研究を踏まえると, 今日, 小学校における算数としての図形認識から数学の図形認識へと移行を促す押し上げ教材の開発の必要性と, 小学校算数科における図形指導の再構成が求められていると考える。しかし, この分野における実質的な研究は緒に就いたばかりである。

2. 研究の目的・方法

(1) 研究の目的

本研究の最終的な目的は, 岡崎・岩崎(2003)が提起する「算数から数学への移行」を促す学習指導の枠組みに基づき, 義務教育9か年の図形領域のカリキュラムを開発することである。そこで, 本稿では, 図形の性質の発見, 理解を促すとともに, 図形認識を算数から数学へと押し上げる教材, すなわち, 図形の性質の顕在化及び性質間の関係の意識化・対象化を促す教材として作図を取り上げ, 授業をとおして検討することを目的とする。

(2) 研究の方法

①授業設計の手順

思考力・判断力等の高次の学力に関する近年の教育

評価研究において, WigginsとMcTigheは, カリキュラムや単元を設計する際には「逆向きの設計(Backward Design)」の発想に立ち, 明確な評価計画に基づく指導計画を立てる必要性を指摘している(Wiggins & McTighe, 2005)。

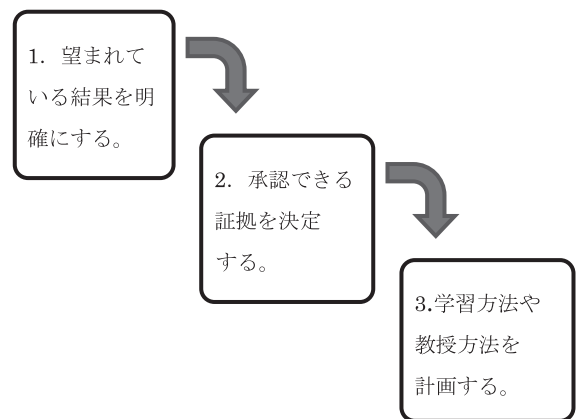


図1 逆向きの設計(Backward Design)の過程

図1はWigginsとMcTigheの提唱する逆向きの設計の過程を示したものである。一般に, 指導計画を立てるに当たってはまず目標が考えられるのが通常であるが, 目標が理念的なものにとどまり, 具体的に子どもにどのような姿が見られれば達成されたと考えられるのかが明確でないことが多い。また, 評価法については, 指導の構想に基づいて考えられがちである。それに対して, WigginsとMcTigheは, カリキュラムや単元を設計する際に, 望まれている結果を明確にする(第1ステージ), 承認できる証拠を決定する(第2ステージ), 学習方法や教授方法を計画する(第3ステージ)という手順を踏むことにより, 学習の目標, 内容, 方法が一層明確化されると主張し, このプロセスを「逆向きの設計(Backward Design)」と称している。この設計においては, 子どものどのようなパフォーマンス

スをどのような基準で評価するかという評価構想に基づいて評価規準を達成するための指導の構想を練ることになる。つまり、評価の構想と指導の構想の順序を逆転する発想に立つものである。

本研究では、Wiggins等の逆向きの設計の考えに基づき、次項に示す順序で授業を設計した。

②評価と指導の構想

＜学習目標の設定＞

「望まれている結果」としての学習目標を次のように明確化した。

「長方形の作図の仕方について、図形の定義や性質に基づき論理的に説明する活動を通して、図形の性質の一部を定めることによって図形が確定できることに気づく。」

＜パフォーマンス課題及びルーブリックの作成＞

学習目標（「望まれている結果」）を児童がどの程度達成したのかを具体的に示す「承認できる証拠」として、パフォーマンス課題及びルーブリックを次のように設定した。

〔パフォーマンス課題〕

次の図は、長方形の一辺アイをかいたところです。

①正確な長方形になるように、続きをかきましょう。



②どのようにして作図したのか、できるだけくわしく説明しましょう。

③作図した図形が、どうして長方形であるといえるのか、説明しましょう。

〔評価規準〕

長方形の作図において、図形の性質の一部を定めることによってできた図形が他の性質を持っていることを、合同な直角三角形を用いて理由を付けて説明しようとしている。

〔ルーブリック〕

本研究では、パフォーマンス課題に対するルーブリック（表1）を作成した。表中のパフォーマンス事例は、児童が実際にパフォーマンス課題に取り組んだ際のパフォーマンスを想定し、各評価基準の記述語を具体的に示すパフォーマンスを事例として添付したものである。なお、評価基準V、IVのパフォーマンス事例として示した事例の中で「…長方形になります。」等の表現は、中学校数学における論証のように、長方形

の定義や決定条件についての理解に基づいた論理的説明を意味するのではなく、長方形を作図する際に用いていない長方形の性質が作図した図形でも成り立っていることを確認する行動を指している。また、ここでは評価基準IVの段階で評価規準を達成したものと見なす¹⁾。

3. 実験授業について

(1) 対象児童 第5学年38名

(2) 単元名 図形の性質

(3) 実験授業の目標

長方形の作図の仕方について、図形の定義や性質に基づき論理的に説明する活動を通して、図形の性質の一部を定めることによって図形が確定できることに気づく。

(4) 実験授業の実際

①長方形の性質の確認

授業が始まってすぐに、教師が黒板に四角形を作図して見せてから図形の名前を児童に問うたところ、「長方形」「四角形」という二つの意見があった。その後、話し合いのなかで児童は長方形だとはいえない根拠を発表した。

さらに児童にどうすれば長方形が作図できるのかを問うと、作図のときに長方形の性質をすべて使い、確かめながら作図すればよいことが確認された。

②直観的に図形を見る児童

夾角を直角とした2辺をかき、コンパスで各辺の長さをとってその交点を頂点とする作図方法を児童に見せ、長方形かどうかを判断させた（図2）。長方形の性質を確認した直後であるにもかかわらず、児童のなかには長方形であると判断する根拠として、「だいたいそう見える」と発言する姿が見られた。また、長方形だと判断するためには性質を実測によって確かめるのがいいという思いが児童の共通認識となっていた。

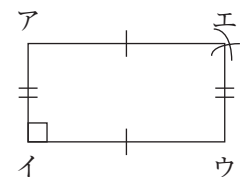


図2

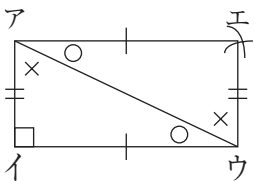
この時点では、図形の性質が論理的思考の対象として顕在化されていないといえる。ましてや性質間の関係を把握する状態にもない。

③論理的な説明を促す学習課題の設定

その後、教師が提示した図形を児童にも作図してみようように促し、誰が作図しても長方形になることが実測により確かめられた。そして学習課題を設定した。

教師：なぜ、いつも直角になるのだろうか？この理由をこれまで学習してきたことを使いながら説明してみよう。

表1 ルーブリック

	評価基準	パフォーマンス事例
V	<p>長方形の作図において図形の性質の一部を定めることによって、できた図形が他の長方形の性質を持っていることを、合同な直角三角形を用いて理由を付けて説明することができる。</p>	 <p>・対角線を入れて長方形を二つの三角形に分けました。二つの三角形は三つの辺の長さが等しいので大きさも形も同じ三角形になります。だから角エは角イと同じ直角になります。角アと角ウは、どちらも○と×の角でできていて同じ大きさになります。三角形の三つの角の和は180°なので、○と×は合わせて90°となります。(四角形の四つの角の和は360°なので、角アと角ウを足すと180°になります。)だから角アも角ウも直角になります。四つの角がすべて直角なので長方形になります。</p>
IV	<p>長方形の作図において、図形の性質の一部を定めることによって、できた図形が他の長方形の性質を持っていることを、合同な直角三角形を用いて理由を付けて説明しようとしている。</p>	<p>(図は上記に同じ)</p> <p>・対角線アウを入れると、同じ三角形が二つできます(同じ三角形がなぜできるかの説明はない)。だから、角イと角エは等しく90°(直角)です。四角形の四つの角の和は360°です。だから、360°から$90 \times 2 = 180^\circ$をひくと、残りは180°になります。角アと角ウも○と×で等しいので、$180 \div 2$で90°になります。角が四つとも直角だから長方形になります。</p> <p>・対角線アウを入れると、三角形が二つできます。この三角形は三つの辺の長さが等しいので、形も大きさも同じです。だから、角エは角イと等しく90°(直角)です。四角形の四つの角の和は360°です。だから、360°から$90 \times 2 = 180^\circ$をひくと、残りは180°になります。角アと角ウも等しいので(なぜ等しいかについての説明はなされていない)、$180 \div 2$で90°になります。</p>
III	<p>長方形の一部の性質(四つの角が全て直角であることを含む)を用いて作図したことを根拠として、できた図形が長方形であることを説明しているが、他の性質について説明しようとしていない。</p>	<p>・三角定規の角をあてて四つの角を全部直角にしたので、長方形です。</p> <p>・四つの角を直角にしました。そして、向かい合う辺の長さも同じ長さにしたので長方形です。</p> <p>・四つの角を全部直角にして、向かい合う辺が平行になっているし、長さも同じなので長方形です。</p>
II	<p>長方形の性質の一部(四つの角が全て直角であること以外の性質の一部)を用いて作図したことを根拠にして、できた図形が長方形であることを説明しようとしているが、他の性質について説明しようとしていない。</p>	<p>・辺アエと辺イウ、辺アイと辺ウエの長さを等しくしたから長方形です。</p> <p>・角アと角イを直角にして、辺アエと辺イウの長さを同じにするようにしているので長方形になります。</p> <p>・対角線アウとイエの長さが等しくなっているので長方形になります。</p>
I	<p>長方形の性質に基づいて正確に作図することができておらず、できた図形が長方形の他の性質を持っていることを説明しようとしていない。</p>	<p>・(角ア、角ウを感覚的に直角にとり) 辺アエと辺イウを同じ長さにしてエとウを結びました。だから長方形です。</p> <p>・(無答)</p>

④直観から論理による説明をしようと変容していた児童の姿

論理的な根拠を考える児童のなかに、対角線をひいて考えていた児童が見られた。もし、対角線をひく児童があらわれなかったときは、教師が提示しようとする前に考えていた。教師はこの児童の考えを全員で共有するために意図的に取り上げた。そして四角形を対角線で区切ってみると二つの三角形が見えてくる(図3)。

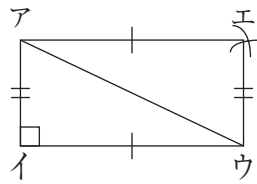


図3

S1: 対角線で区切ると同じ三角形が二つだから二つ 合わせたら四角形になるので…

教師: どこに同じ三角形が見えた?

S2: 三角形アイウと三角形アエウです。

教師: 本当にこの二つの三角形は同じ三角形ですか? 同じ三角形といえるのはなぜでしょう?

S3: 四角形を対角線で二つに折り紙のように折って 切ってみると、同じ図形が二つできますね。 だから同じ三角形だと思います。

対角線をひいて見えてきた二つの三角形が合同かどうかを話し合っている場面であるが、S1の発言に見られる「同じ三角形」である根拠は論理的ではなく直観的なものである。またS3は操作による説明をすることで二つの三角形が合同であることを主張しようとしている。この様子からも児童の図形に対する見方が形や見た目といった直観的なものに左右されていることがよくわかる。そのため、教師は児童の直観的な見方を論理的な説明に変容させるために、1つ1つ立ち止まりながら根拠となる論理を確認していく必要があった。その後、S8の発言をもとに、教師が三辺の長さが等しいことに目を向けさせるように指導することで三角形アイウと三角形ウエアが合同な三角形であることを全員で確認することができた。

教師: 角エは直角です。残りは角アとウが直角だと説明できればいいね。

S4: じゃあその逆をすれば?

教師: 逆ってどういうこと?

S5: もう1つ対角線を斜めにひけばいい。 そうすれば同じことができる。

教師: 同じことができるってどういうこと?

S6: さっきと同じように二つの三角形が同じ三角形だから、角アと角ウも直角だといえると思います。

教師: 本当? 角アと角ウが等しいのはわかる。でも直

角かどうかはわからないでしょう。

S7: アの角度がまだわからんよ。だからどっちも90°だとはわからない。

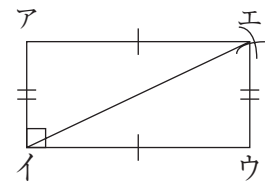


図4 S5が説明した対角線

S8: このままではわからないので…角ウがわからないから敷き詰めみたいにつないでみたら。例えば敷き詰めをしたときにここが180°だから角ウも90°ってわかるから、角アも90°だってわかると思います。

児童: あー、なるほど。

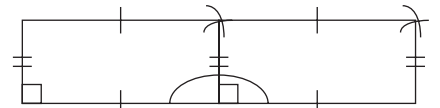


図5 S8が考えた敷き詰め図

S8の「敷き詰め」の考え方が発表されると、ほとんどの児童が声をあげて納得していた(図4)。児童にとって既習の経験である「敷き詰め」を活用した直観的な図形の見方をもとにした説明はとてもわかりやすく、納得できるものであった。その後、さらに三角定規をもとにした発言も続いた。

S9: 二つの三角形は直角三角形だから三角形の角アとウは30°と60°になりますね。だから二つの直角三角形を合わせると、角アとウは90度になります。

S10: でも三角定規にはもう1つあって、同じ直角三角形でも45°と45°だから必ず30°と60°にはならないと思います。

S9, S10の意見のやりとりは、多くの児童が納得した。その理由は三角定規をイメージすることで具体的な角度の数値を児童が思い浮かべることができたからであろう。しかし、S9, S10の児童の説明は、直角三角形のなかでも三角定規という特殊な場合に当てはまる説明であり、一般化につながる説明になっていない。そこで、一般的な説明につながるように、教師から○と×の記号を導入し児童に説明を促した(図6)。

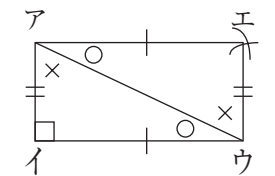


図6

○と×による記号化によって、どんな数字が当てはまっても角アと角ウは同じ大きさの角度であることを確認した。さらに、四角形の内角の和を活用して角アとウが直角であることを説明した。

S11: ○と×をたしたものと○と×をたしたものがい

つも同じだから180°を…

教師：どうすればいいのかな？

児童：2で割ればいい。

教師：2で割ると90°だね。それで必ず角アとウは直
角だといえるね。

教師：これでこの四角形が、長方形であることが説明
できました。そこで、思い出してください。授
業のはじめに確認したけれど、長方形を作図す
るには長方形の性質をすべて使わないと描けな
いのかな？

S12：どれかを使えば、描けます。

教師：そうだね。作図するのにすべての性質を使う必
要はなくて、性質の一部分を使えば図形が決ま
るといことですね。

ここまでの学習のなかで、児童は、直観的な図形の
見方と論理的な図形の見方を何度も行き来した。児童
にとって、これまでの学習における「敷き詰め」経験
や「三角定規」の認識の強さがわかる。そのため、そ
のつど立ち止まり教師が論理的な説明につながるよう
に指導・支援していくことで直観から論理を伴った説
明をしようとする児童の変容を生み出すことができ
た。

4. 成果と課題

実験授業の2日後に、上述したパフォーマンス課題
とルーブリックによる評価を行った²⁾。その結果、基
準Ⅴは0人、基準Ⅳは11人、基準Ⅲは23人、基準Ⅱは
4人、基準Ⅰは0人であった。表2は、実験授業の自
力解決時を事前、授業後を事後として評価規準を達成
しているか否かという視点からルーブリックに基づく
児童のパフォーマンスの変容を示したものである³⁾。

表2 事前事後のパフォーマンスの変容

評価基準		事後		
		V~Ⅳ	Ⅲ~Ⅰ	計
事前	V~Ⅳ	1	2	3
	Ⅲ~Ⅰ	10	25	35
	計	11	27	38

表2から、事前と事後における評価規準を達成した
児童の比率の差に有意差が認められた (McNemarの
検定, $p < .05$)。

本研究では、図形の性質の発見、理解を促すととも
に、図形認識を算数から数学へと押し上げる教材、す
なわち、図形の性質の顕在化及び性質間の関係の意識
化・対象化を促す教材として作図が機能するかどうか
を実践を通して検討することが目的であった。結果と

して、事前と事後における評価規準を達成した児童の
比率に有意差が認められたことから作図の教材とし
ての有効性が示唆された。本稿の最後に研究を通して
確認できた小学校算数科における移行前期教材とし
ての作図の持つ可能性について述べるとともに、今後の
課題を整理しておきたい。移行前期教材としての作図
の持つ可能性は以下の3点である。

まず第一に、作図教材には児童の既習の知識を活用
させ、その認識を高める機能がある。作図する過程や、
作図してできた図形について論じ合うことで図形の性
質を顕在化させることができた。

第二に、図形の性質間の順序性に関する素朴な理解
を促す機能がある。実験授業当初、長方形を作図する
ために必要だと考える図形の性質は、児童にとって羅
列的なものであった。しかし、学習を通して「図形の
性質の一部を定めることによって図形が確定する (長
方形となる)」という認識へと変容する姿が見られた。

第三に、作図は、図形の経験的認識を論理的認識へ
と促すきっかけを与える機能がある。実験授業当初、
作図した図形が長方形かどうかを確かめるのに「測れ
ばいい」と声があがっていた。しかし、授業中盤には
既習である「敷き詰め」や、「分度器」を活用して説
明するなかで、一般化につながる記号化を活用した論
理的な説明を促すことができた。そして次時の授業で
は実験授業での記号化による論理的な説明を生かして
発言する児童の姿が見られた。

これらの機能は、授業を通して作図した図形を子ど
も自身が問い直す場を積極的に設定することで発揮さ
れる。作図の手続きや役割を一方的に教え込むのでは
なく、教師が本時の目標を明確にし、目指す児童の姿
を引き出せるように積極的に指導・支援していくこと
が重要である。

ところで、上に述べた移行前期教材としての作図の
機能は岡崎・岩崎 (2003) が移行後期教材として整理
した作図の機能と類似したものとなった。算数から数
学への図形認識の移行を促す教材としての作図という
点からすると、移行前期における教材としての作図の
機能と移行後期におけるそれとの間に類似点を確認で
きたことは、作図が移行前期と移行後期との間のス
ムーズな接合を可能にする教材として位置づけること
が可能であるということを示唆している。しかし、小
学校における作図はあくまでも算数としての図形認識
を主題とするものであり、本校で整理した作図の機能
は暗黙的に働くのに対して、中学校での作図はそれ自
体が対象として扱われ作図の機能が明示的に働くとい
う違いがある。

最後に、今後に向けての課題について述べておく。

まず、今回の指導では評価の規準に達しなかった児童への支援や指導が不十分であった。指導と評価の一体化の観点から授業づくりに取り組む必要がある。

また、小学校算数科における移行前期教材として、何をねらいとしてどんな図形をどこで作図させるかといった教材研究を深めていく必要がある。本年度(2009)は、本稿の実験授業に続いてさらに小学校第4学年、第6学年、中学校第2学年において、作図を教材とした実験授業を行なった。そのなかで、小学校中学年段階では「図形の性質理解をより深めることができるようにする」、高学年段階では「図形の性質理解を深めるとともに、性質間の関係を意識できるようにする」、中学校段階では「図形の性質理解とともに命題理解を促すことができるようにする」といった、カリキュラム開発における系統性の概要が見えてきた。

今後、本研究の最終的な目的である、義務教育9か年の図形領域のカリキュラム開発に向けて、小中連携を通じた研究および実験授業から、カリキュラムの構成原理をよりいっそう明らかにしていくことで、算数から数学への移行の全体像が明らかになっていくと考える。

[注]

1) ルーブリックの妥当性・信頼性を高めるためには、複数の評価者によって、評価基準とパフォーマンス事例を作成・調整したり、児童・生徒のパフォーマンスをルーブリックに基づいて実際に評価したりする調整作業(モデレーション)を共同で行うことが必要であると言われている(西岡, 2003)。本研究においては、この作業を共同研究者5名で行い、児童の多様なパフォーマンスに対しても評価の一貫性を確保するルーブリックとなるように検討した。なお、本論文における「評価規準」及び「評価基準」は、それぞれ以下の意味において意図的に使い分けて記述している。「評価規準」とはパフォーマンス課題に対する児童のパフォーマンスについての「到達目標を具体的に記述したもの」。「評価基準」とは到達目標としての「評価規準」に対する到達度を具体的、段階的に記述したもの。

2) 算数科の授業実践の評価方法としてルーブリックを活用した先行研究として、松浦(2007, 2009b)、岡田・土佐岡他(2008)などがある。

2) 自力解決時(事前)の学習課題においては、長方形の性質の一部を定める作図方法(夾角となる角イが直角になるように辺アイ、辺イウをかき、コンパスを用いて辺アイの長さを点ウから、辺イウの長さを点アからそれぞれとり、その交点エと点ア、点ウを結ぶ方法)がすでに示されているため、ルーブリックの基準Ⅲ及び基準Ⅰのパフォーマンスは得られない。また、基準Ⅴに位置づく児童はいなかった。

引用(参考)文献

- 1) 國宗進(1987), 「論証の意義」の理解に関する発達の研究, 数学教育学論究, Vol.47・48, pp.3-23.
- 2) 前田隆一(1979), 『算数教育論—図形指導を中心として—』, 金子書房
- 3) 松浦武人(2007), 初等教育における児童の確率概念の発達を促す学習材の開発(Ⅰ)—, 全国数学教育学会誌, 第13巻, pp.163-174.
- 4) 松浦武人(2009b), 初等教育における児童の確率概念の発達を促す学習材の開発研究—確率判断におけるヒューリスティックスの改善に焦点を当てて—, 数学教育学論究, Vol.90, pp.3-13.
- 5) 西岡加奈恵(2003), 『教科と総合に生かすポートフォリオ評価法』, 図書文化, p.158.
- 6) 岡田泰・土佐岡智子他(2008), 算数科における観察・洞察力の育成を意図した学習指導と評価に関する実証的研究, 全国数学教育学会誌, 第14巻, pp.77-88.
- 7) 岡崎正和・岩崎秀樹(2003), 算数から数学への移行教材としての作図—経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践—, 数学教育学論究, Vol.80, pp.3-27.
- 8) 小関熙純編(1987), 『図形の論証指導』, 明治図書
- 9) Wiggins, G. & McTighe, J. (2005), *Understanding by Design*, Association for Supervision and Curriculum Development, pp.13-34.