

## 杭の鉛直非線形挙動の逆解析

山本 春行

広島大学大学院国際協力研究科・助教授

〒739 東広島市鏡山1-7-2

富永 晃司

広島大学大学院国際協力研究科・教授

〒739 東広島市鏡山1-7-2

柴田 直子

山陽工業株式会社・社員

〒730 広島市中区十日市1-1-9

### 1. 序

杭の鉛直方向の荷重～沈下関係を推定する方法は、伝達関数による解析法 (Seed and Reese, 1955)、弾性論による解析法 (Poulos and Davis, 1968) ならびに有限要素による解析法 (Ellison and Thiers, 1971) など精粗様々あるが、非線形挙動を簡便に扱うことのできる伝達関数による解析法がよく用いられている。

この伝達関数による解析法では、杭の周面摩擦力を杭の変位の関数、ならびに杭の先端抵抗を先端変位の関数で与える必要があり、またこれらの挙動性状は地盤の複雑性や杭の施工条件の影響を受けるために、これまでに様々な関数形や関数に含まれる定数について調査・研究がなされてきた (山肩, 1961)。

従来の方法は、測定区間毎に独立に関数のパラメータを決定していた。これに対して、本論文ではこれらの関数を双曲線モデルとし、その定数値を客観的ならびにシステムティックに同定するための逆解析手法を応用し、その適用性について検討した。そして、変動性の多いパラメータの決定に関して本手法の有効性を示した。

### 2. 解析モデルと解析法

解析モデルを図1に示す。同図に示すように杭体を一次元棒要素で表し、分割した各要素における杭周面摩擦応力度  $f$  ～変位  $u$  関係および杭先端における先端応力度  $\sigma_p$  ～先端変位  $u_p$  関係を (1) 式的双曲線関数でモデル化した。これらの伝達関数としては、他にバイリニア近似ならびに指数関数等が利用されているが、非線形性を滑らかに表現でき、かつ最大値 (最大摩擦応力度あるいは最大先端応力度に対応) を明確に定義できることより、本論文では双曲線関数を採用することとした。なお図2に示すように、(1) 式における定数値  $a$  および  $b$  は、物理的にはそれぞれ最大摩擦応力度ならびに  $f \sim u$  関係の初期勾配の逆数を意味している。定数値  $a_p$  および  $b_p$  も同様に、最大先端応力度ならびに  $\sigma_p \sim u_p$  関係の初期勾配の逆数を意味している。

$$f = u / (a u + b),$$

$$\sigma_p = u_p / (a_p u_p + b_p) \dots \dots \dots (1)$$

以上のモデルから分るよう非線形問題となるため増分法により定式化すれば、杭-地盤系全体の増分型仮想仕事式は (2) 式となる。

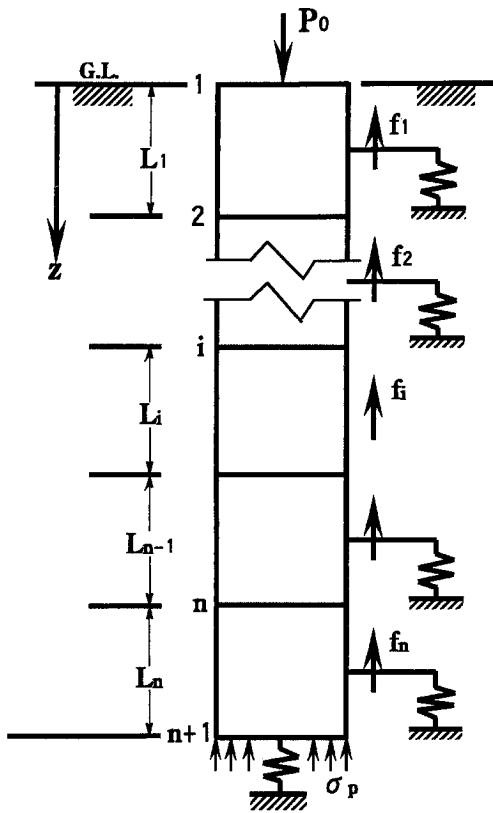
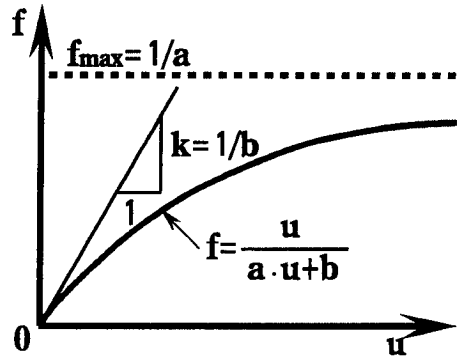
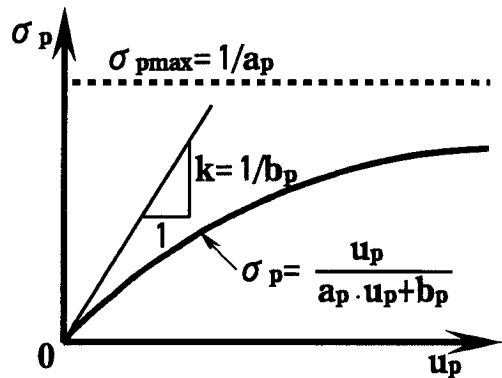


図1 解析モデル



(a) f ~ u 関係



(b) sigma\_p ~ u\_p 関係

図2 双曲線モデル

$$\sum_i \left( \int_V \delta \Delta \epsilon \cdot \Delta \sigma dV + \int_S \delta \Delta u \cdot \Delta f dS \right) + \int_S \delta \Delta u_p \cdot \Delta \sigma_p dS = \{ \delta \Delta u \}^T \{ \Delta F \} \dots \dots (2)$$

ここに、 $\Delta \epsilon$ ：杭軸方向ひずみ増分、 $\Delta \sigma$ ：杭軸方向応力度増分、および $\{ \Delta F \}$ ：節点荷重増分。

さらに、変位は要素内で線形変化するものと仮定し、離散化すれば、(2)式より(3)式の増分型の連立方程式が得られる。

$$[K] \cdot \{ \Delta u \} = \{ \Delta F \} \dots \dots (3)$$

ここに、 $[K]$ ：増分型剛性マトリックス

$\{ \Delta u \}$ ：節点変位ベクトルの増分量

つぎに、定数値 $a_i, b_i$  ( $i$ は要素番号)、 $a_p$ ならびに $b_p$ を最適化パラメータと置き、ある仮定した定数値を用いて(3)式で計算変位を求め、対応する計測変位との誤差が十分小さくなるまで定数値を反復修正する直接定式化法を用いる。総荷重ステップ数 $N_s$ 、総節点数 $N_d$ の計測変位を $\bar{u}_j^n$ とし、定数値を仮定して(3)式より得た計算変位が $u_j^n$ であるとすれば、計算変位と計測変位の誤差の2乗和を最小にする定数値を求める最適化問題として、(4)式のように評価関数が定義できる。そ

して同式に対する制約条件は (5) 式である。

$$J = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (\bar{u}_j^i - u_j^i)^2 \dots \dots \dots (4)$$

$$a_i, b_i, a_p, b_p > 0 \dots \dots \dots (5)$$

(4) 式の最適化問題は解析上、陽には解けないので、共役勾配法を用いた収束計算を行う (村瀬ら, 1990)。

まず、 $\{a_i\}$ ,  $\{b_i\}$ ,  $a_p$ ,  $b_p$ の初期値をそれぞれ  $\{a_i\}_0$ ,  $\{b_i\}_0$ ,  $a_{p0}$ ,  $b_{p0}$ とおき、第  $k$  回 ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 反復計算の時点で (6) 式の勾配ベクトルよりベクトル  $\{r_{k+1}\}$  を (7) 式のようにおけば、 $\{a_i\}_k$ ,  $\{b_i\}_k$  から  $\{a_i\}_{k+1}$ ,  $\{b_i\}_{k+1}$  への増分方向である共役ベクトルは (8) 式となる。

$$\Delta J^T = \left[ \frac{\partial J}{\partial a_i} \dots \frac{\partial J}{\partial a_p}, \frac{\partial J}{\partial b_i} \dots \frac{\partial J}{\partial b_p} \right] \dots \dots \dots (6)$$

$$\{r_{k+1}\} = -\Delta J(\{a_k, b_k\}) \dots \dots \dots (7)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \{a_k\} &\equiv \{a_1 \dots a_p\}_k \\ \{b_k\} &\equiv \{b_1 \dots b_p\}_k \end{aligned}$$

$$\{v_{k+1}\} = \{r_{k+1}\} + \frac{\{r_{k+1}\}^T \{r_{k+1}\}}{\{r_k\}^T \{r_k\}} \{v_k\}$$

ただし ( $\{v_i\} \equiv \{r_i\}$ )  $\dots \dots \dots (8)$

つぎに、増分の大きさ  $\theta_{k+1}$  を (9) 式のように評価関数  $J$  を最小にするように決定すれば、第  $k+1$  回目の最適化パラメータは (10) 式のように計算される。さらに、十分小さな許容誤差  $\epsilon_0$  に対して (11) 式が成立すれば、それが求める解である。(11) 式が成立していなければ、成立するまで (7) から (10) 式の操作を繰り返し行う。なお、後述の数値解析例ならびに現場実大実験への適用例における解析では、許容誤差  $\epsilon_0$  をつぎのように設定した。すなわち、第  $k$  回目と第  $k+1$  回目における (11) 式の値の差が、第  $k+1$  回目の (11) 式の値の  $1/1000$  となった時点で収束したものと見なした。

$$J(\{a_k, b_k\} + \theta_{k+1} \cdot \{v_{k+1}\}) \rightarrow \min \dots \dots \dots (9)$$

$$\{a_{k+1}, b_{k+1}\} = \{a_k, b_k\} + \theta_{k+1} \cdot \{v_{k+1}\} \dots \dots \dots (10)$$

$$|\theta_{k+1} \cdot \{v_{k+1}\}| \leq \epsilon_0 \dots \dots \dots (11)$$

以上の手順に基づけば、本論文における逆解析の場合の勾配ベクトルは、(12) 式の荷重ステップ  $n$  での全体剛性方程式と (13) 式の荷重ステップ  $n$  での要素剛性マトリックスから計算され、最適化パラメータ  $\{a_i\}$  に関しては (14) から (16) 式のように、また最適化パラメータ  $\{b_i\}$  に関しては (17) から (19) 式のように展開される。

$$\{\Delta u^i\} = [K]^{-1} \{\Delta F^i\} \dots \dots \dots (12)$$

$$[K_i] = \frac{AE_i}{l_i} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{b_i \varphi_i l_i}{6(a_i U_i^{n-1} + b_i)^2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (13)$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \{2(\bar{u}_j^i - u_j^i) \cdot (-1) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Delta u_j^i}{\partial a_i}\} \dots \dots \dots (14)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Delta u^i}{\partial a_i} \right\} = -[K]^{-1} \cdot \frac{\partial [K]}{\partial a_i} \cdot \{\Delta u^i\} \dots \dots \dots (15)$$

$$\frac{\partial [K_i]}{\partial a_i} = - \frac{b_i \varphi_i l_i \cdot (U_i^{n-1} + a_i \frac{\partial U_i^{n-1}}{\partial a_i})}{3(a_i U_i^{n-1} + b_i)^2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (16)$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \{2(\bar{u}_j^i - u_j^i) \cdot (-1) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Delta u_j^i}{\partial b_i}\} \dots \dots \dots (17)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Delta u^i}{\partial b_i} \right\} = -[K]^{-1} \cdot \frac{\partial [K]}{\partial b_i} \cdot \{\Delta u^i\} \dots \dots \dots (18)$$

$$\frac{\partial [K_i]}{\partial b_i} = \frac{\varphi_i l_i \cdot (a_i U_i^{n-1} - 2a_i b_i \frac{\partial U_i^{n-1}}{\partial a_i} - b_i)}{6(a_i U_i^{n-1} + b_i)^2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (19)$$

ここに、 $[K_i]$ ：要素  $i$  の要素剛性マトリックス  
 $a_i, b_i$ ：要素  $i$  の双曲線関数の定数值

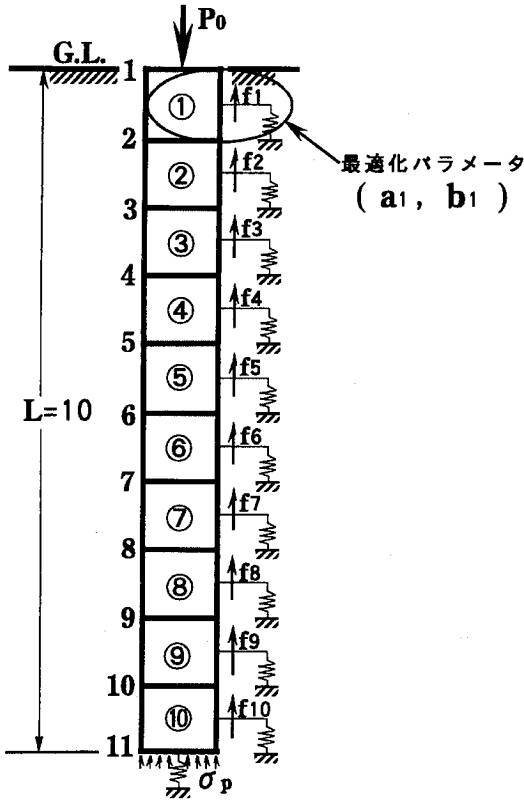


図3 数値計算例

- $AE_i$ : 要素  $i$  の杭軸剛性
- $\psi_i$ : 要素  $i$  の杭周長さ
- $l_i$ : 要素  $i$  の分割長さ
- $U_i^n$ : 荷重ステップ  $n$  での要素  $i$  の上下節点の平均変位:  $(u_i^n + u_{i+1}^n)/2$

### 3. 数値解析例による検討

数値解析例に本逆解析手法を適用し、解の収束性について検討を行う。数値解析例のモデルは図3に示すとおりであり、杭体を均等に10区別している。まず、表1に示す無次元化した諸元ならびに定数 ( $a_1 \sim a_{10} = b_1 \sim b_{10} = a_p = b_p = 1.0$ ) を図3のモデルに設定し、荷重増分法により通常の順解析を行った。その際、荷重増分は0.1として合計275ステップの計算を実行した。

表1 数値計算例の解析に用いた諸元

杭 径 $D$	1.0
杭 長 $L$	10
杭 軸 剛 性 $AE$	1000
杭 要 素 分 割 $n$	10
モデル定数値 $a_1 \sim a_{10}$	1.0
モデル定数値 $b_1 \sim b_{10}$	1.0
モデル定数値 $a_p, b_p$	1.0

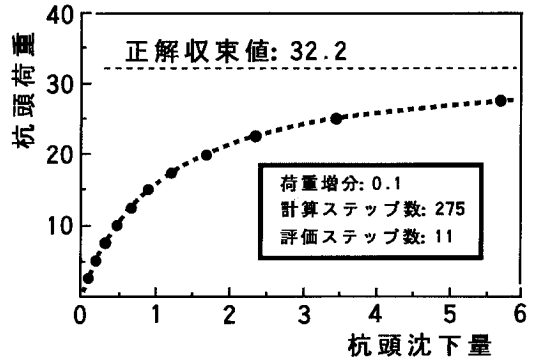


図4 杭頭荷重～杭頭沈下量の解析結果

同解析結果の杭頭荷重～杭頭沈下量関係を図4に示す。つぎに、図3に示すように、第一要素における定数値  $a_1, b_1$  を最適化パラメータとおき、図4に示す評価ステップ（順解析における荷重増分計算ステップ25回毎）の変位を計測値として与え、定数値  $a_1, b_1$  を本逆解析手法により推定する。

図5は、最適化パラメータが  $0.1 \leq a_1 \leq 10.0, 0.1 \leq b_1 \leq 10.0$  の領域における評価関数  $J$  の分布を示したものである。そして、図5における  $a_1, b_1$  の領域の四隅点の座標を初期値とした場合の最適化パラメータの収束状況を図6に示す。

これらの図より、評価関数  $J$  は極値が一つだけの滑らかな曲面であり、最適化パラメータは初期

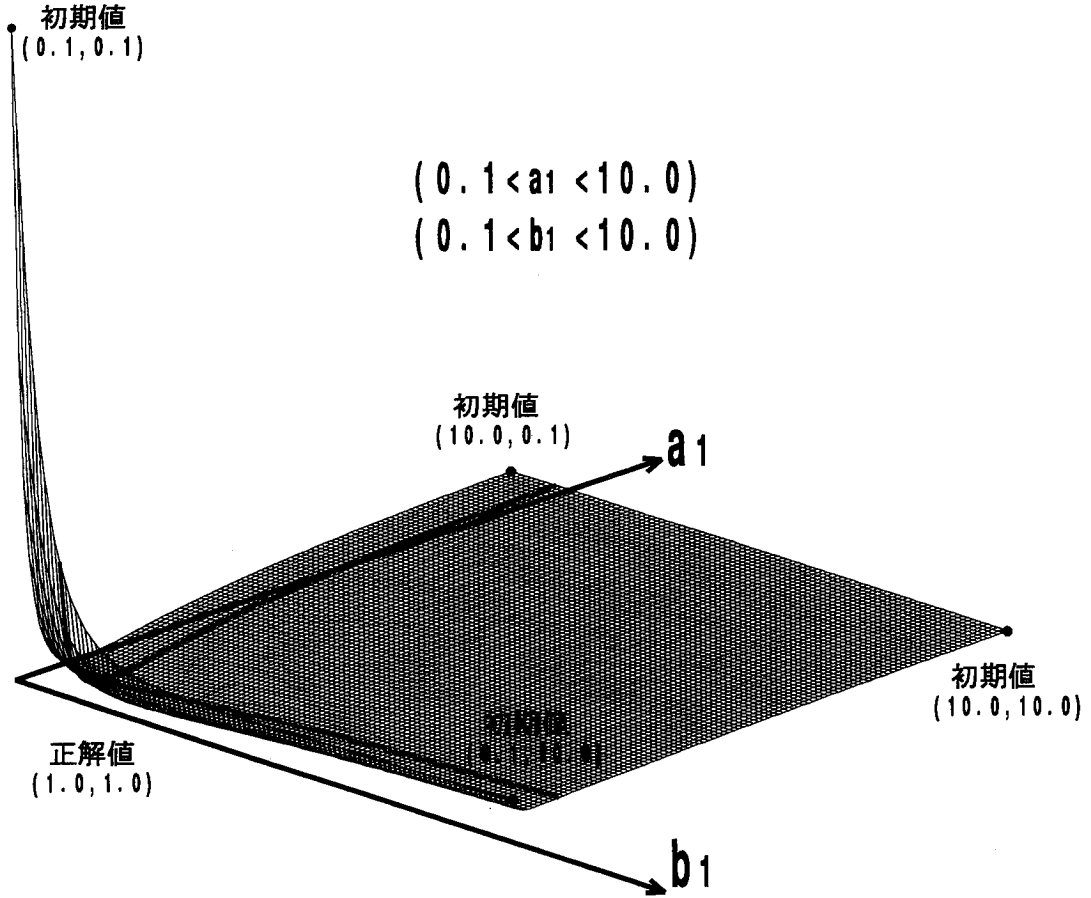


図5 評価関数Jの分布

の設定値にかかわらず同一の正解値に収束していることが分る。したがって、本解析手法には逆解析においてしばしば困難な障害となる多峰性（探索領域内に評価関数Jの極値が複数個存在する性質）の問題は無く、大域解が得られていると言える。

#### 4. 現場実大実験結果への適用

実大実験が実施された場所の地盤概要ならびに試験杭の諸元を、図7および表2にそれぞれ示す。杭はプレボーリング拡底・根固め工法により施工されており、根入れ長さは24 mである。本

実大実験では一段階の載荷荷重を490 kNとし、最大荷重5.88 MNまで12段階の載荷を行っている。そして、各載荷段階における杭頭での荷重 $P_0$ と沈下量 $u_0$ 、ならびに杭の軸ひずみ $\epsilon$ を図7中の杭姿図の②～⑤の4断面の位置で計測している。

逆解析に与えるデータは、12段階載荷における各段階で測定された、 $P_0$ および $u_0$ 値の他、測定 $\epsilon$ 値から換算した各断面の沈下量 $u_i$ である。ただし、実際の解析では、地表面位置の沈下量として杭頭の沈下量から杭頭突出部の縮み量を差し引いた値、および杭先端部の沈下量として、図7中の④、⑤断面の $\epsilon$ から外挿して値を求め、これらを含めて計6断面の沈下量を計測値として与えた

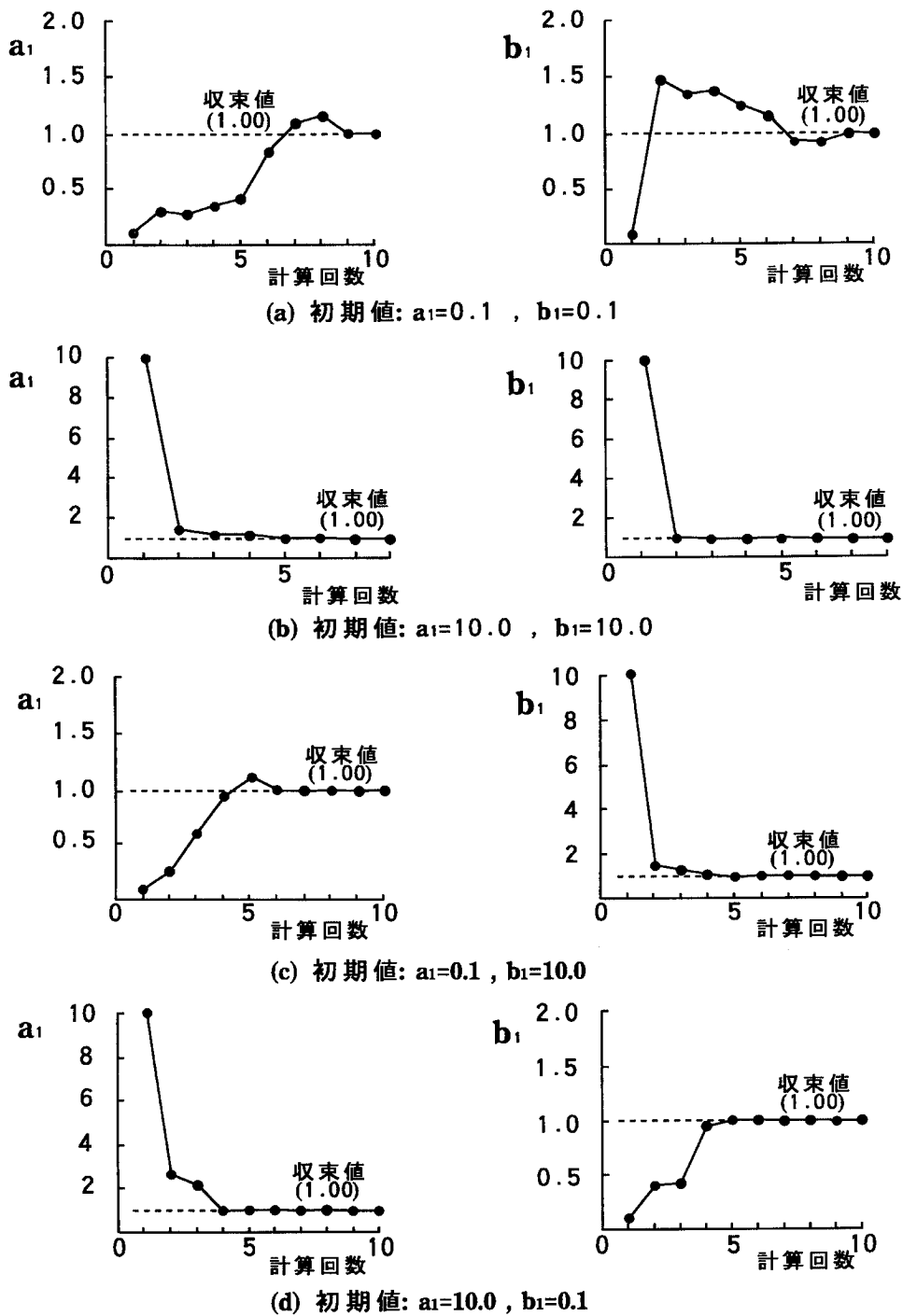


図6 収束状況

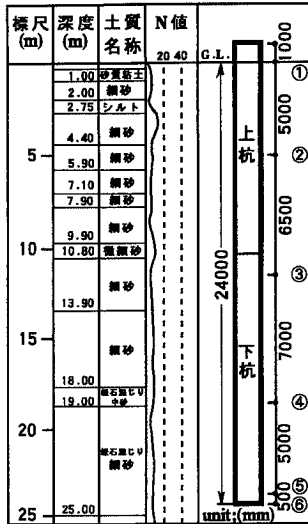


図7 実大実験の地盤概要

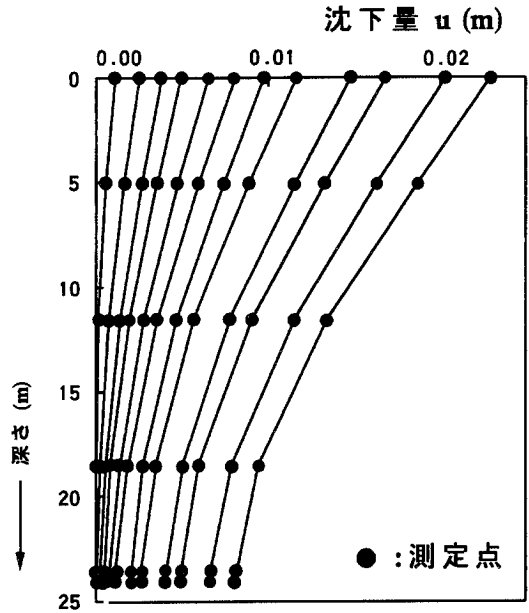


図8 沈下量分布

表2 実大実験杭の諸元

項目	名称及び数値
杭の名称	PHCパイプA種、B種
外径	φ600 mm
肉厚	90 mm
PC鋼棒	A種 φ9.2 mm 12本 (下杭) B種 φ11.0 mm 18本 (上杭)
施工法	埋込み: プレボーリング 拡底・根固め

表3 モデル定数の同定値

要素番号	a (m <sup>2</sup> /tf)	b (m <sup>3</sup> /tf)
要素①	0.940x10 <sup>-1</sup>	0.576x10 <sup>-3</sup>
要素②	0.185	0.765x10 <sup>-3</sup>
要素③	0.368x10 <sup>-1</sup>	0.274x10 <sup>-3</sup>
要素④	0.599x10 <sup>-1</sup>	0.205x10 <sup>-3</sup>
要素⑤	0.750x10 <sup>-1</sup>	0.194x10 <sup>-3</sup>
先端要素	0.201x10 <sup>-2</sup>	0.366x10 <sup>-5</sup>

(柴田ら, 1995)。このようにして求めた、各載荷段階における深さ方向の沈下量分布をまとめて図8に示す。

これらのデータを基に逆解析を行った結果、表3に示すような値を得た。ただし、計算効率の観点から、最適化パラメータの探索範囲を既往の調査結果(山肩ら, 1982)を参考にし、表4に示すように定めた。初期値として、表4の探索範囲に

におけるそれぞれの最適化パラメータの上限値と下限値の二組を設定して逆解析を行っているが、両組の場合ともに同一の解に収束している。

以上のようにして求めた解析モデルの定数値を用いて、(3)式による杭の鉛直挙動の順解析を行った。その結果として、杭頭荷重と各断面位置

表4 最適化パラメータの探索範囲

$1.0 \times 10^{-4} < a_p < 1.0 \times 10^{-2} \text{ (m}^2/\text{tf)}$	$\leftarrow$	$980 < \sigma_{pmax} < 98000 \text{ (kPa)}$
$1.0 \times 10^{-6} < b_p < 1.0 \times 10^{-3} \text{ (m}^3/\text{tf)}$	$\leftarrow$	$9800 < k_{p0} < 9800000 \text{ (kPa/m)}$
$1.0 \times 10^{-2} < a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 < 1.0 \text{ (m}^2/\text{tf)}$	$\leftarrow$	$9.8 < f_{max} < 980 \text{ (kPa)}$
$1.0 \times 10^{-5} < b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 < 1.0 \times 10^{-3} \text{ (m}^3/\text{tf)}$	$\leftarrow$	$9800 < k_{f0} < 980000 \text{ (kPa/m)}$

$\sigma_{pmax}$ : 最大先端応力度       $k_{p0}$ : 先端応力度～先端沈下量関係の初期勾配  
 $f_{max}$ : 最大摩擦応力度       $k_{f0}$ : 摩擦応力度～沈下量関係の初期勾配

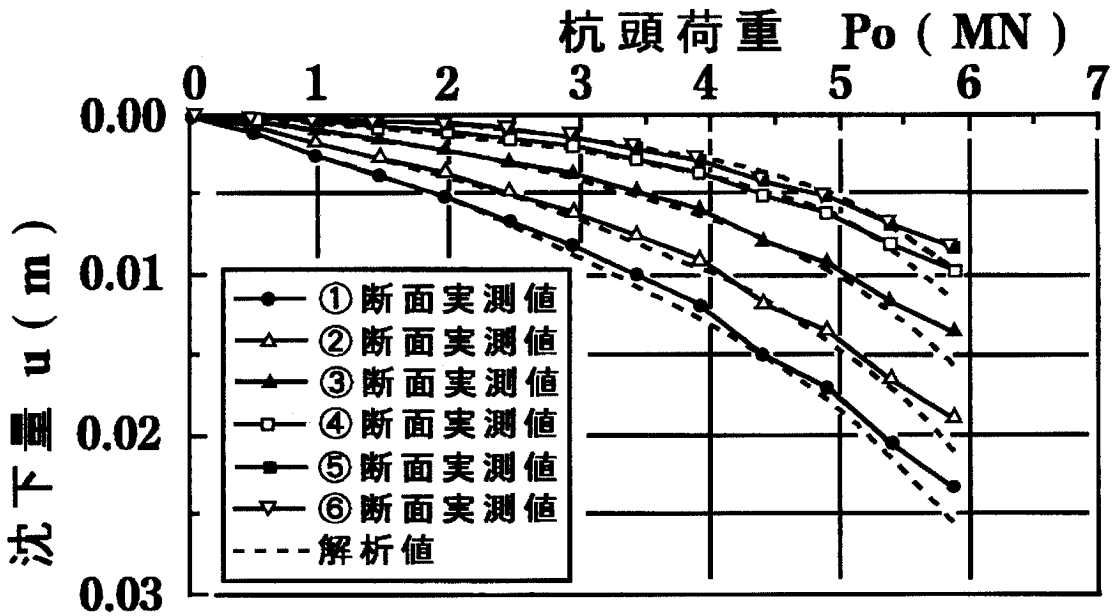


図9 杭頭荷重～各断面の沈下量関係

の沈下量との関係、各要素における摩擦応力度とその要素の平均沈下量との関係、および杭先端における先端支持応力度と先端沈下量との関係を実

験値と比較して、それぞれ図9から図11に示す。なお図9においては、⑤断面と⑥断面の位置が近接しているため、実測値ならびに解析値ともに曲



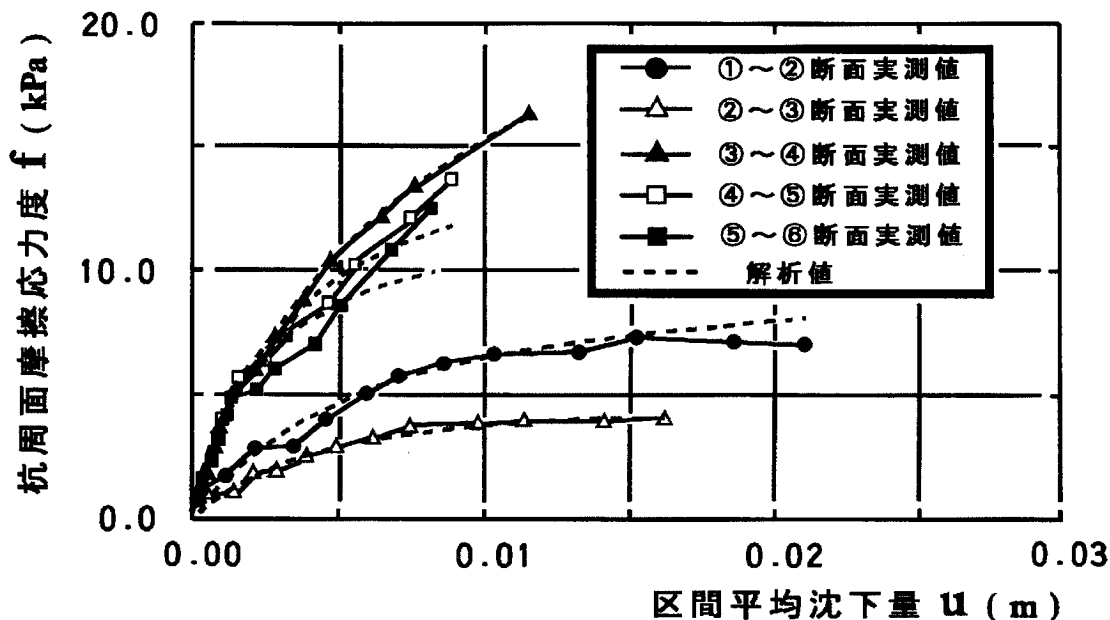


図10 摩擦応力度～区間平均沈下量関係

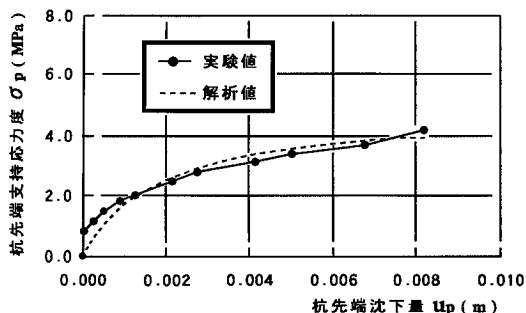


図11 杭先端支持応力度～先端沈下量関係

線がほぼ重なって示されている。

これらの図から、逆解析から得た定数値による解析結果は実測値と良く一致しており、各要素間の摩擦応力度と沈下量の関係、および杭先端位置における先端支持応力度と先端沈下量との関係を、(1) 式の双曲線関数により精度良く近似でき

ることが分る。また、図10の摩擦応力度と沈下量関係、ならびに図11の先端支持応力度と先端沈下量関係ともに、実測値のデータにはばらつきが存在するため、要素毎に単独に初期剛性を決定する従来の方法は適用し難い。しかし、全測定点ならびに全載荷段階におけるデータを同時に利用する本逆解析手法によれば、全体的にバランスのとれた値が同定されている。

## 5. 結語

杭の非線形鉛直挙動解析において、摩擦応力度と沈下量関係、ならびに先端支持応力度と先端沈下量関係に双曲線モデル関数がよく用いられている。本論文では、まずその関数の定数値を同定するための逆解析手法について、定式化を行った。

つぎに数値解析例により、本解析手法には逆解析においてしばしば困難な障害となる多峰性の問題は無く、大域解が得られていることを示した。そして、現場での実大実験結果に適用し、逆解析

から得られた定数値による順解析結果は、実験結果と良く一致していることから、本逆解析によれば、定数値を精度よく同定できるという結論を得た。ただし、地盤の層構成が複雑で大きく変化する場合には、それらの情報を取得するために、計測点を密に配置する必要がある。

## 参考文献

- [1] Ellison, R.D. and Thiers, G.R. (1971): LOAD-DEFORMATION MECHANISM FOR BORED PILES, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. SM4, pp. 661-678.
- [2] 村瀬治比古、小山修平、石田良平：共役勾配法，「順・逆解析入門」，第1版，pp. 81-84，森北出版（株），東京，（1990）
- [3] Poulos, H.G. and Davis, E.H. (1968): THE SETTLEMENT BEHAVIOUR OF SINGLE AXIALLY LOADED INCOMPRESSIBLE PILES AND PIERS, Geotechnique, Vol. 18, No. 3, pp. 351-371.
- [4] Seed, H.B. and Reese, L.C. (1955): The Action of Soft Clay along Friction Piles, Proc. of ASCE, Vol. 81, Paper No. 842, pp. 1-28.
- [5] 柴田直子、富永晃司、山本春行（1995）：埋込み杭の周面摩擦力～変位関係のモデル化，日本建築学会中国支部研究報告集，第19巻，pp. 105-108
- [6] 山肩邦男（1961）：支持ぐいの沈下に関する理論的考察，日本建築学会論文報告集，第68号，pp. 89-97.
- [7] 山肩邦男、永井興史郎、富永晃司（1982）：鋼管杭の鉛直載荷試験および水平載荷試験の結果に関する統計的検討，鋼管杭協会，pp. 41-62

**Abstract**

**Inverse Analysis for Non-linear Vertical Behavior of Piles.**

Haruyuki YAMAMOTO

Associate Professor, Graduate School for International Development and Cooperation,

Hiroshima University

1-7-2 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739, JAPAN

e-mail:a040564@ipc.hiroshima-u.ac.jp

Koji TOMINAGA

Professor, Graduate School for International Development and Cooperation,

Hiroshima University

1-7-2 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739, JAPAN

e-mail:tomi@ipc.hiroshima-u.ac.jp

Naoko SHIBATA

Staff, Sanyo-kogyo Co., Ltd.

1-1-9 Tokaichi Naka-ku, Hiroshima 730, JAPAN

The load-transfer method has usually been used for an analysis of nonlinear behavior of vertically loaded piles. In this method, a hyperbolic function has often been assumed as the analytical model for curves of skin friction versus settlement along the pile or point resistance versus settlement at the pile tip. This paper deals with the method of inverse analysis to estimate the constants of the hyperbolic function.

The inverse analysis was applied to an numerical example. It is found out that in this method there is not difficult problem such as the existence of multi-extremum. Furthermore the inverse analysis was applied to the full-scale experimental results of a bored pile. The constant values of the hyperbolic function were determined from the test results. And then the forward analysis of nonlinear vertical behavior of the pile was made on the basis of the constant values. As a result, the forward analysis was in good agreement with the experimental results. This result means that the actual relationships between skin friction and settlement or between point resistance and settlement can be well simulated by the hyperbolic function, and that the proposed inverse analysis is applicable to estimate the constants of hyperbolic functions for test results.