数学教育における直観的能力の育成について

—— E. Fischbeinらの研究との比較を中心にして——

小 山 正 孝
（広島大学大学院）

1. 問題意識と研究の目的

わが国において，数学教育の立場から認知心理学的あるいは大脳生理学的アプローチによる直観の研究をしている人は，ほとんどいないと言ってもよいのではなかろうか。世界的にも数少ないように思われる。[1]

もしも，数学教育における生徒の直観的能力（筆者は，直観的理解能力と直観的解決能力の２つを考えている。）が，上述のようなアプローチによって測定できて明らかにされるならば，このことの数学教育に与える影響は大きなものであると思われる。

そこで，本研究の目的は，直観的能力の育成をめざした数学教育を構築するための基礎づくりをすることにある。すなわち，フィッシュバイン(E. Fischbein)らの研究との比較を中心にして，哲学的アプローチによらないで，生徒の直観的能力を測定できるかどうかを明らかにし，そこから得られる数学教育への示唆について考察することである。

2. 研究方法と結果

本研究においては，フィッシュバインらの研究「数学的陳述の直観的容認は測定可能か」[2] を先行研究と考え，方法はその方法をほぼそのまま採用した。

彼らの研究方法は，全部で８つの問題を解かせ，その後で答の説明も書かせ，最後に各問題に対して６項目のチェック質問（このうち３項目は明らかさの程度を測定するためのものであり，残りの３項目は確信の程度を測定するためのものである。）に，「はい」か「いいえ」で答えさせるというような質問紙法である。

彼らは，直観の一般的特質の中で，直接的知識ということを重視している。そして，直接性すなわち直観的容認の程度（Ｉ）を，２つの互いにまとめることのできない要素 — 確信の程度（Ｃ）と明らかさの程度（Ｏ）によって測定しようとしているのが彼らの研究の特徴である。

彼らは，ＣとＯを測定するためのチェック質問のグループのそれぞれが，階層分析の結果，ガットマン尺度[3] をなすことを確認している。また，これら２つの尺度の再現係数[3] が各問題のそれぞれに対して，0.9以上であることを確認し，これら２つの尺度の妥当性を述べている。

そこで，本研究では以下のような主旨のもとにアンケート調査を行ない，それによって表１のような結果を得た。

- アンケート調査の目的
  (1)フィッシュバインらの研究結果との比較をすること。
  (2)フィッシュバインらの研究の妥当性を確かめること。
  (3)日本の高校生（普通科）の直観的能力について，次の視点から検討をすること。 (i)学校差，(ii)学年差，(iii)男女差
- アンケート調査の内容
  (1)８つの問題（ほとんど全てが，無限に関するものである。）
  (2)６つの質問事項（Ｃレベルとｏレベルのチェック質問）
  これらの問題と質問事項に関しては，フィッシュバインらが用いたものを日本語に翻訳したものを用いる。（(2)を参照）
- アンケート調査の対象
  広島県立Ｉ高等学校と岡山県立Ｔ高等学校の２校
  各校とも１，２，３学年の各２クラスずつ，計529名
- アンケート調査の実施年月と実施時間
  1983年（昭和58年）８月下旬から９月上旬
  40分をかけて実施
- アンケート調査の処理方法
  被験者の回答用紙に記されていることを，以下のように数値化し，答えのみによる処理（Ａ処理）と答えとその理由説明による処理（Ｂ処理）を，マイコンによって行なう。

①学校 ＜ 岡山県立Ｔ高等学校 — 0 ／ 広島県立Ｉ高等学校 — 1

②学年 ＜ 1 ／ 2 ／ 3　　③性別 ＜ 男性 — 0 ／ 女性 — 1

④答 ＜ 正答 —— 0 ／ 誤答(a)〔正答に近いと判断されるもの〕—— 1 ／ 誤答(b)〔明らかな誤答，わからない，空白〕— 2

⑤理由 ＜ 正しいと思われる理由説明〔定義など〕—— 0 ／ 誤まった理由説明 —— 1 ／ 空白〔なんとなく，直観，直感など〕—— 2

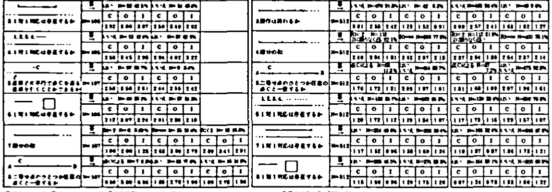
⑥質問項目　1. ＜ ×— 1×3 ／ ○— 0×3　2. ＜ ×— 1×2 ／ ○— 0×2　3. ＜ ×— 1×1 ／ ○— 0×1
4. ＜ ×— 1×1 ／ ○— 0×1　5. ＜ ×— 1×3 ／ ○— 0×3　6. ＜ ×— 0×2 ／ ○— 1×2
（注；６番だけ反対の数値化）

- Ａ処理
  正答 { 0 ／ 1 }
  誤答 2
  (答)
- Ｂ処理
  正答 { 0 0 ／ 0 2 ／ 1 0 ／ 1 2 }
  誤答 { 0 1 ／ 1 1 ／ 2 0 ／ 2 1 ／ 2 2 }
  (答)(理)

Ｉ値 $= \sqrt{C_n \times O_n}$ の平均値

表１ E.フィッシュバインからの研究結果
P.M.E. 3rd 1979, pp. 70 − 71より

本 研 究 結 果　　A処理　　B処理



3. フィッシュバインらの研究結果との比較

まず，確信のレベルと明らかさのレベルを，質問がある程度的確に把握できているかどうかが問題となる。これについては，指標の役割をもつ「対頂角の相等問題」の正答のＩ値が最高であるということから，本研究においても把握できていると判断して比較的考察を行なう。

両結果を比較してまず指摘できることは，全体的な傾向についてはあまり類似性があるとは言えないということである。以下，もう少し細かく類似点および相違点を分析・整理してみる。

1) 彼らの結果をみると，2,3の例外はあるにせよ，Ｃ値，Ｏ値，Ｉ値は同じ順序に従い，しかもＣ値＜Ｏ値ということがわかる。しかしながら，本研究の結果をみると，表１の上から５番目までについてはＣ値＞Ｏ値が成り立ち，残りの３問については，逆にＣ値＜Ｏ値が成り立っていることがわかる。

2) 「自然数と直線」，「線分と直線」，「線分と正方形」の１対１対応の問題の正答のＩ値が，彼らの結果ではかなり高いが，本結果ではかなり低い。しかし，これら３つの問題に対する正答者の割合にだけ着目すると，その順序は同じである。

3) 「平行線の問題」については，正答者の割合が高いということ，および誤答のＩ値が類似しているが，正答のＩ値が，本結果の方が高いと言える。

4) 「二等分点の一致問題」については，正答者の割合が極めて低いという類似点は指摘できるものの，彼らの結果ではＣ値とＯ値にかなりの差がありＩ値も低いけれども，本結果ではＣ値とＯ値にはほとんど差が認められないという相違がみられる。

5) 「線分の和の問題」については，彼らが誤答として処理している答「和＜２」を正答と考えて結果をみれば，この問題に対する正答者の割合もＩ値も比較的よく似ている。

これらのことから，まず，わが国では無限の概念や有理数・無理数の概念および１対１対応の概念が，実際の授業においてあまり徹底されて教授＝学習されていないのではないかということが指摘できる。というのは，彼らの研究の被験者よりも本研究の被験者の方が豊富な数学的知識を学んでいるはずなのに，上述の概念についての理解度が劣っているからである。

これらの概念の指導においては，それら相互の関連および直観的理解を確固たるものにするための直観的背景づくりに十分な時間と注意を払うべきである。

次に，相違点1)について，彼らの結果には疑問が残る。Ｃ値とＯ値の大小が逆転することは，次のような解釈によると，むしろ当然のことのように思われる。

縦断的観点からみたときの一次的（本来的）あるいは二次的直観というものは，有限の対象物や事象を取り扱うという日常の経験から形造られる。操作的観点から言えば，前操作的（操作外）直観あるいは操作的直観と言えるものである。[(4)] しかしながら，他方，無限は人間のすべての実際的（精神的・肉体的）経験を超えている。それゆえに，無限がわれわれにとって何らかの意味を持つとすれば，それには直観的な飛躍が必要であろう。よって，無限の概念が，かなり高いレベルで直観的に容認されるとすれば，そのときには確信のレベルの方が明らかさのレベルよりも優位にあるのは当然であろう。このような意識をもって本結果をみると，生徒の心理的葛藤を読み取れる。

第三に，彼らが問題の分類のカテゴリーを提示しているので，本結果からどのようなカテゴリーを設定できるか考えてみる。

彼らの研究結果と本結果との間には，すでに指摘したように，かなりの相違があるため，３つのカテゴリーは変更する必要はないが，その条件とそれに属する問題にはかなりの違いがでてくる。これらを考慮してまとめたのが，表２と表３である。

表２　３つのカテゴリー（フィッシュバインらの研究より）

①第１のカテゴリー　＜直観とよくあう問題＞

条件
- i) 正答の割合が高い
- ii) 直観的容認の程度が高い
- iii) Ｃ値とＯ値がかなり接近している

「対頂角の相等問題」，「操作の終わりを問う問題」

②第２のカテゴリー　＜内的矛盾をひき起こす問題＞

条件
- i) 正答と誤答の割合が比較的接近している
- ii) 正答と誤答のＩ値がかなり高い
- iii) Ｃ値とＯ値とＩ値の間の差がかなり小さい

「線分と直線の１対１対応の問題」
「線分と正方形の１対１対応の問題」

③第３のカテゴリー　＜直観に反する問題＞

条件
- i) 正答の割合が大へん低い
- ii) 正答に対する直観的容認の程度が大へん低い
- iii) Ｃ値とＯ値の差が比較的大きい

「二等分点のひとつが任意の点と一致するかという問題」
「線分の和の問題」

表３　３つのカテゴリー　（本研究より）

①第１′のカテゴリー　＜直観とよくあう問題＞

条件
- i) 正答の割合が高い
- ii) 正答に対する直観的容認の程度が高い
- iii) Ｃ値とＯ値がかなり高く，Ｃ値＞Ｏ値である

「対頂角の相等問題」，「操作の終わりを問う問題」
「平行線の問題」(*)

②第２′のカテゴリー　＜内的矛盾をひき起こす問題＞

条件
- i) 正答と誤答の割合が比較的接近している
- ii) 正答のＩ値と誤答のＩ値がかなり低い
- iii) Ｃ値とＯ値がかなり低く，Ｃ値＜Ｏ値である

「自然数と直線の１対１対応の問題」(*)
「線分と直線の１対１対応の問題」
「線分と正方形の１対１対応の問題」

③第３′カテゴリー　＜直観に反する問題＞

条件
- i) 正答の割合がかなり低い
- ii) 正答のＩ値も誤答のＩ値も低く，誤答のＩ値の方が正答のＩ値よりも少し高い
- iii) Ｃ値もＯ値もあまり高くなく，Ｃ値＞Ｏ値である

「二等分点のひとつが任意の点と一致するかという問題」
「線分の和の問題」

（註 (*)印の問題は，多少条件に適合しないところもある問題である。）

表の３つのカテゴリーを，生徒の情緒的側面から説

明すれば，情緒的に最も安定しているのが第１のカテゴリー，不安定なのが第２のカテゴリー，そして誤答に対して安定しているのが第３のカテゴリーと言える。

ここで注意しておきたいことは，ある問題があるカテゴリーに属するということは，—例えば，「線分の和の問題」が第３（あるいは第3'）のカテゴリーに属するということは，その問題の本性にのみ係わることではないということである。つまり，教授＝学習によって，その問題はより直観的容認の程度の高いカテゴリーの問題になり得るということである。

すべての問題について可能であるとは言えないけれども，少なくともより高い直観的容認の程度のカテゴリーに属するように指導することが重要であり，また，そのことが数学教育の重要な役割のひとつであると言える。このことは，筆者の作業仮説とも関連することなので，具体的な生徒の反応を例にとって述べる。

「操作の終わりを問う問題」（第1' のカテゴリーの問題）に対して，「終わらない」（正答）と答えた生徒のほとんどが，「線分の和の問題」（第3' のカテゴリーの問題）に対して，「どんどん増え続ける」（誤答）と答えている。このことは，生徒の言うように，「操作は終わらないのだから，付け加える限り少しずつでも和は大きくなり続けるはず」だから，ある意味では直観的に当然のことのように思われる。

しかし，このような生徒にも，「２ｍあるいは，限りなく２ｍに近づく」が正答であると直観的に理解させることができる。それは次のように説明してやればよいのである。

「AB＋BC＋CD＋・・・ と付け加えることは，見方を変えてやれば，２ｍのものを半分に，その一方を半分に，そのまた半分にというように，どんどん切っていくことと結局同じことになるね。だから，限りなく付け加えると，もとの２ｍになるのだよ。」

そうすると，それまで断固として「２ｍあるいは，限りなく２ｍに近づく」という正答を拒否していた生徒たちは，「なるほどなあ！」とか，「そう言われれば，あたりまえのことだ！」という言葉をもらすようになる。このとき，生徒たちにとっては，第3' のカテゴリーに属していた問題が，第1' のカテゴリーの問題のように思われるにちがいない。

この他，問題の答えに対する理由づけのタイプについての考察が残っているが，これについては彼らの研究結果と本結果とはほとんど同じであったことを述べるに止めておく。

4. まとめと今後の課題

哲学的アプローチによらないで，生徒の直観的能力，特に直観的理解能力を測定することは可能かどうかということについて考察することが，本稿の重要な目的のひとつであった。そして，フィッシュバインらの研究を基礎として行なった本研究によって，測定することの可能性が多少見えてきた。例えば，確信の程度と明らかさの程度の２つの尺度をもとに直観的容認の程度を知ることにより，単に問題の正答者の割合だけみたのでは気づかない生徒の内的矛盾の心理や心的葛藤を知ることができる。

しかし，問題はまだ山積している。果たして確信の程度と明らかさの程度の２つの尺度だけで十分なのか。仮に十分であるとしても，これら２つの尺度を決定するための６項目のチェック質問はうまく機能しているのか。無限の概念だけに関係する問題のみならず，他の数学的概念に関する問題に対して，Ｃ値，Ｏ値，Ｉ値はどのようになるのだろうか。等々。

多くの問題はあるにせよ，このような研究によって，生徒が問題を理解し解くときに使う基本的な直観的なパターンが明らかになってくる。そして，生徒の感ずる困難さの原因に気づき，それを克服するための数学教育における教授学的方策を考えるための出発点が与えられる。

フィッシュバインらも指摘しているように，数学は純粋な理論構造をもっているのにもかかわらず，数学的状況と取り組むときには，直観的解釈の介在を避けるわけにはいかない。数学において，われわれが本当に理解し，解き，記憶し，創造しようとするときには，直観的な表現や解釈は活動的である。このようなときに，数学の楽しさを感ずるのである。

今後は，生徒の直観的能力を育成するために，そのような能力の測定可能性をより深く追求し，数学教授学的方策を考えたい。

参考文献

1) Willem Kuyk; "A Neuropsychodynamical Theory of Mathematics Learning", Proceedings of the Sixth International Conference for the PME, Antwerp, 18-23 July 1982, pp. 48-62.

2) E. Fischbein, D. Tirosh, U. Melamed; "Is it Possible to Measure the Intuitive Acceptance of a Mathematical Statement?", 3rd PME, July 1979, pp. 67-79.

3) 高木貞二編；『心理学における数量化の研究』，東京大学出版会，1955，pp. 204〜221.

4) 拙稿；「数学教育における直観の意義について(1) — 直観の捉え方を中心に —」，数学教育学研究紀要，第９号，pp. 1〜8.（西日本数学教育学会紀要）.