

算数学習における理解過程に関する研究 (Ⅲ)

——第5学年における「台形の面積の求め方」を中心に——

赤井 利行 小山 正孝 中原 忠男
中村 武司 磯部 年晃
(協力者) 影山 和也 和田 信哉 中西 正治
岩田 耕司

1. 目的と方法

本研究は、算数学習における子どもの理解過程を、理論的・実証的に解明しようとするものである。これまでの数学の理解過程に関する研究^{1), 2)}によって、数学的概念や原理・法則などを理解するということは、本質的には、個々の子どもの心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、他方では、教室で行われる算数学習においては、子どもの理解過程はその子どもと教師、子ども同士の社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。そこで、本研究では、算数学習における理解過程を、これら個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて解明することを目的とする。

そのために、まず本研究の第1報³⁾では、理論的研究として、小山が構築した数学理解の2軸過程モデルについて、このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を、文献解釈的方法によって再検討した。そして、第2報⁴⁾では、その実証的研究として、「図形」領域の学習において、小学校第2学年の子どもが三角形や四角形概念を学習する際の理解過程に焦点を当て、事前調査、授業実践、事後調査を通して、これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明した。

第3報である本稿では、「量と測定」領域の学習において、小学校第5学年の子どもが台形の面積の求め方を学習する際の理解過程を実証的に解明することを目的とする。台形の求積公式そのものはこのたびの学習指導要領(平成10年告示,平成14年度実施)では削除された内容であるが、台形の面積の求め方を子ども自ら工夫して考えることは価値ある学習である⁵⁾。そこで、本稿では「台形の面積の求め方」についての授

業を計画・実施し、その授業実践を通して、教室における個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて、子どもの理解過程を具体的に解明することとする。

2. 授業の計画

(1) 計画の概要

【授業学年】 広島大学附属小学校 2部5年
(男子19名 女子20名 計39名)

①単元名 面積

②単元目標

- 図形の求積に必要な部分の長さに着目して、計算で面積を求めようとする。(関心・意欲・態度)
- 既習の求積方法を基にして、倍積変形・等積変形などの操作を通して公式にまとめることができる。(数学的な考え方)
- 求積公式を適切に活用し、図形の面積を求めることができる。(表現・処理)
- 三角形・平行四辺形・ひし形・台形の面積の求め方や求積公式の意味がわかる。(知識・理解)

③指導計画(全15時間)

第1次	面積の求め方の工夫	1時間
第2次	三角形の面積	4時間
第3次	平行四辺形・ひし形の面積	4時間
	(習熟度別編成)	
第4次	台形などの面積	3時間
第1時	台形の面積の求め方(本時)	
第2時	台形の求積公式	
第3時	五角形の面積	
第5次	辺の長さとの関係	2時間
第6次	まとめの練習	1時間

(2) 事前研究

①教材分析

本単元は、既習の図形の求積方法を基に、三角形及び平行四辺形などの四角形の面積を求めることが主なねらいである。子どもたちは、本学年までに正方形や長方形などの図形の面積の求め方を学習してきた。

本単元では、三角形や平行四辺形、台形などを長方形に変形したり、学習した図形を活用したりして新たな図形の面積を求める算数的活動を行う。この算数的活動では、既習の求積可能な図形の面積の求め方を基に考えたり、求積公式を作り出したりする。そして、この活動の過程で一般化の考えや論理的な考えなど数学的な考え方を育成することが重要である。したがって、新たに面積を求める図形に対して既習の図形の求め方を活用するなど、面積を求める過程を重視して学習することが必要である。また、このような数学的な考え方を獲得することで、一般の四角形、五角形などの様々な図形に対して、子どもたちは自らの考えに基づいて工夫し、面積を求めることができる。

本時は、台形の面積の求め方を考えるという算数的活動を行う。この算数的活動は、平行四辺形や三角形の面積の求め方を活用したものである。そして、この学習は平行四辺形や三角形の面積の求め方の発展的内容の学習である。したがって、本時は子どもの既習の学習を生かし、子ども自身が学習を構成していくという展開で進めていく。

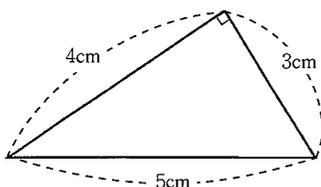
そうすることによって、子どもたちは、既習の求積可能な図形の求め方を基に、新たな図形の求め方をイメージすることができる。そして、このイメージを基に数学的なコミュニケーションをもつことで、子ども個々の求積に対する数学的な考え方が高まり、理解もより深まると考えられる。

したがって、本単元では、子ども個々の既習事項を活用した考えと、数学的なコミュニケーションに基づく社会的相互作用による理解過程を重視し、図形の面積の求め方についての知識・技能、数学的な考え方を高めていく授業を展開していく。

②子どもの実態

本時の授業に入る前の子どもたちの実態を把握するために、既習の三角形・平行四辺形の求積問題について簡単な調査を行った。その結果は次のとおりである。

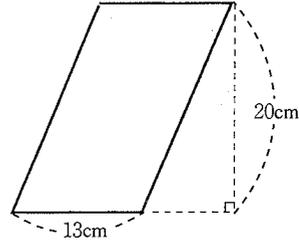
三角形の求積 (39名中 33名正答・6名誤答)
次の三角形の面積を求めなさい。



〈誤答〉

$5 \times 4 \div 2 = 10$	3名
$5 \times 3 \div 2 = 7.5$	1名
$3 \times 5 = 15$	1名
35	1名

平行四辺形の求積 (39名中 33名正答・6名誤答)
次の平行四辺形の面積を求めなさい。



〈誤答〉

$13 \times 20 \div 2 = 130$	4名
$13 \times 20 = 200$	1名
無答	1名

この結果から、子どもたちは、三角形および平行四辺形の求積については8割以上の子どもが理解している。また、両問とも間違っている子どもが3名おり、この3名はともに、本単元第3次の平行四辺形・ひし形の習熟度別指導では「じっくりコース」の子どもたちである。この点では、理解の遅い子どもに対してさらに重点的な指導が必要であるといえる。

(3) 理解過程を重視した授業づくりの工夫

①既習事項の確認

算数科授業では、新しい数学的概念や原理・原則を学習するとき、子どもたちの中で学習の方法がわからず、どのように取り組めばいいのか迷い、手がつけられずに終わることがある。これは、子どもたちの中に、新しい数学的概念や原理・原則を学習するとき、既習の学習内容を再構築して取り組むことができないことが上げられる。さらに、これから取り組む課題に対して、自分自身の今理解している内容が意識化されていないことである。

したがって、理解過程を重視した算数科授業では、子どもが数学的概念や原理・原則を理解する個々の子どもの心的活動を保証するために、学習目標に対して、自分自身が何を理解しているのか、どのような考え方が使用できるのかなど、現在の自分自身の理解を意識化しておくことが必要である。

本授業では、平行四辺形が三角形に分割して求められたことを想起させることから導入する。この既習の

図形に分割するという考え方を基に、台形の面積の求め方を考える。(図1)

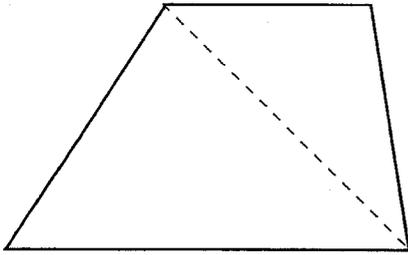


図1

②数学的な考え方を生かした発展的内容の学習

第5学年の「面積」の学習では、三角形、四角形の求積方法を理解することがねらいである。そこでは、四角形として平行四辺形やひし形を取り扱うが、台形の面積を求めることは学習指導要領では求められていない。

しかし、本時では、台形の面積の求め方、特に、台形を既習の図形に分割する学習を取り扱うことにする。このような発展的な内容を取り扱うことは、既習の学習内容を活用して、子ども自らが新たな問題を解決するという理解過程で重要な子どもの心的活動を促すと考えるからである。子どもの心的活動を促す際には、単に問題を難しくしたり、次の学年の問題を提示したりするのではなく、子どもが学習し理解している数学的な考え方が活用できるようにし、数学的な考え方の活用を通して、子どもの理解を深めることにつながるようにすることが大切である。

したがって、発展的内容の学習指導のねらいは次の2つである。1つ目は、算数教育の目標である「数学的な考え方」の1つである「発展的な考え方」の育成にある。2つ目は、発展的内容の学習を通して、基礎・基本を含め既習の学習の理解を深めることとその定着にある。つまり、発展的内容の指導を次のようにとらえることが重要である。「発展的な内容を子ども自身が既習の発展的な考え方を活用して考え、解決していく。その結果、子どもは発展的に考える態度を育成し、発展的内容を理解する。さらに、発展的な考え方を深化・拡張していく。」

それゆえ、本授業実践では、三角形・平行四辺形の求積の発展的内容として、台形の求積方法を取り扱う。ここでは、三角形・平行四辺形の求積方法とりわけ、倍積変形・等積変形の求め方という数学的な考え方を活用して、台形を変形するという発展的な考え方を深化・拡張させ、子どもの理解を深めることをねらうのである。

③子どもの理解度に応じた指導

子どもたちは、学習内容に対する理解度に大きな差異が見られる。この差異の克服に向けて、今日の小学校では、算数科授業を中心に少人数授業やチームティーチングに向けた加配教員など新しい授業スタイルが模索されている。本単元では、第3次の平行四辺形とひし形の学習指導において、「じっくりコース」と「かけ足コース」の習熟度別コースを設定し、習熟度別授業を試みる。

この習熟度別に分けた少人数指導で、平行四辺形では、既習の三角形や長方形にいかに変形するかを重視して指導する。「じっくりコース」では、平行四辺形をどのように分割するか目標を決める。そしてその分割の方法を1つ1つ丁寧に確認し、既習の学習とのつながりを確かなものとする。一方、「かけ足コース」では、平行四辺形の分割の方法を1つ1つ取り上げるのではなく、子どもたち自身がそれらの分割方法を見つけ出し、その方法を全体で分析し、比較検討する。

さらに、ひし形では、対角線の位置をずらして、たこ形などの図形を発展的に取り扱う。(図2)

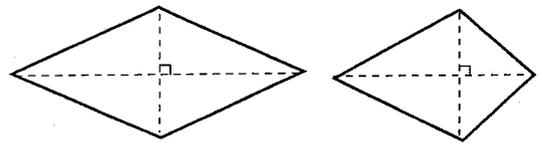


図2

3. 授業の実際

(1) 本時の目標

- 台形を既習の図形に変形したり、倍積変形の仕方工夫したりして、台形の面積の求め方を考えることができる。
- 図形の面積の求め方を、三角形に分割して求めることができることに気づく。

(2) 授業の実際

C この前の時間の、台形と円とアメーバーのようぐしゃぐしゃな形について、どの順で授業をするかということについて、今まで、三角形・四角形をしてきたので、台形を抜かして円やアメーバをするよりも、台形を終わらせてから、円やアメーバーの形をすればよい。(図3)

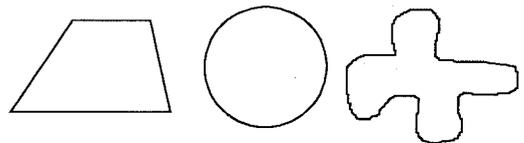


図3

C 私は、台形、円、アメーバの形がいいと思うんだけど、前の時間にたこ形をしているので、台形をした方がいいと思う。

T ジャ、今日は、台形の面積を求めます。(図4)

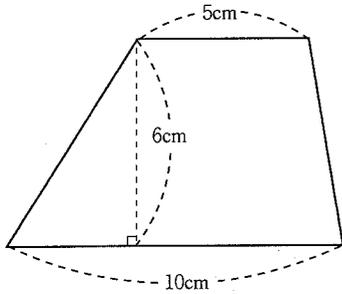


図4

T 台形の面積を求めるのに、使える考え方は何でしょう。

C 平行四辺形の求め方。

C 三角形の求め方。

C 長方形の求め方。正方形とひし形の求め方。

T 面積を求めるのに、求め方は、自分の中で、どういう求め方、どんな形にするのか、自分たちが知っているどれを使いますか。

T どういうふうに変形しますか。

C 台形を2つに分ける。

C その面積を倍にする方法。

T 倍にするのは、どういう形になるのかわかりますか。

C はい。(うなずいている)

T 等積は、いくつの方法がありますか。

C 1つある。

T 1通りしかない。

C 1つが2つある。

T わかるかな。

C (台形を斜めに、左から右、右から左へと切るジェスチャーを行ってみせる。)

T これで、倍積変形と合わせて、3つの考え方があられるんですね。

T 倍にするのは、どのような形になりますか。

C 平行四辺形です。(図5)

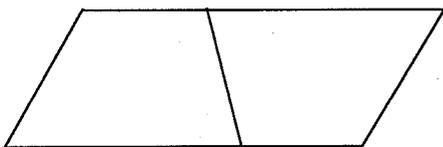


図5

T 2つに切るのは、三角形ですね。それ以外の形を考えるとできませんか。(図6)

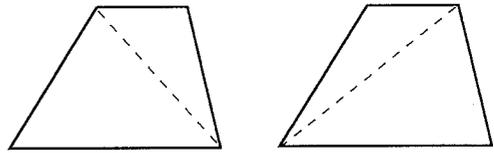


図6

T 自分が形を変形して、面積を求められる形に変えることができないかな。

T 3通りみつけた人は、その3通りをかきなさい。もっとみつけた人は、その4番目の求め方からかきなさい。

C (求め方をノートにかく)

T (机間巡視)

T (黒板に掲示する考え方を子どもたちに指示する)

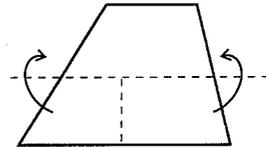


図7

T 上下半分に分けて、動かす考え方ですね。(図7)

T 次のこれは、先生がするとは思っていなかった考え方です。

T 説明してもらう前に、見てください。

C 四角形と三角形に分けています。(図8)

C 下の所は、真ん中なのですか。

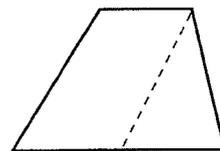


図8

T フリーハンドでかいているけれど、これはどんな形になっているかな。

C 平行四辺形です。

C 上底の5cmを使って、下におろしているところがいい。

C 三角形と平行四辺形という習っていることを生かしているのがいい。

T この形で、面積を求めてみよう。

T 次のを説明してください。

C 台形を上下に半分に分けて、台形の上の部分

(ア)を切ると下の部分(イ)とちょうど面積が等しくなると、それを動かすと2つの長方形になって面積を出すことができる。(図9)

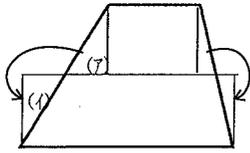


図9

- T この方法で、面積を出してみよう。
 T 次の方法の人、発表してください。
 H 縦に切って、長方形と2つの三角形に分ける。すると、この長方形の面積が出て。

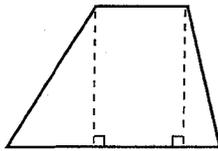


図10

- T そこで、待ってください。この長方形の部分の面積がでるのですね。
 (図10をもとに確認をする)
 C 30cm²です。
 T この三角形の面積を求めることができるのかな。
 C できる。
 T 面積は出るけれど、求められない人?
 C (数名挙手をする)
 T どうしたら、求められるのかな。
 N この三角形とこの三角形の底辺を合わせたら、5cmで、高さが6cmだから求まります。
 S 長方形をぬいて、2つの三角形をひっつけたらできます。(図11)

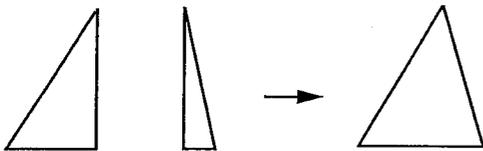


図11

- C うわあー。
 C すごい!
 T N君の考え方を説明しますね。(図11で示す)
 T 何をしようとしているのか、わかるのかな。
 C すごい。
 T すごいね。習った考え方をうまく使っているね。

C 上の辺が5cmで、結果的に三角形の底辺の長さが5cmだけど、左側の底辺を□で、右側を○にたとえたら、

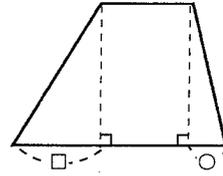


図12

- T (図12に記号を入れる)
 H 計算したら、
 左側は $\square \times 6 \div 2$ 、右側は $\bigcirc \times 6 \div 2$
 結果的に、 $(\square + \bigcirc) \times 6 \div 2 = 5 \times 6 \div 2 = 15$
 T 他の計算もかいてください。
 C (黒板にかく)
 T まだ、ないかな。
 C 上の辺を右側に伸ばして、たこ形にする。そして、右側の辺に高さを求めて面積を求めるといい。
 C たこ形の求め方を使っていい。
 C 台形は、たこ形に似ているといていたのでこの考え方はいい。
 C でも、この斜めの辺の長さがわからないので求められない。(発表者自身が気づく)
 C 等積でも倍積でもないのだけど、上の辺を伸ばして、横が10cmの長方形にして、三角形の部分を引きばいい。(図13)

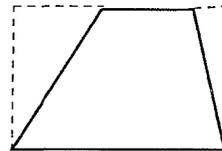


図13

- C H君の考え方に似ている。
 T H君はどうしているの。
 C たしているけれど、これは引いている。
 T 次の人。
 C 僕は、この台形を同じ三角形3つに分けて、 $5 \times 6 \div 2 \times 3$ をして、求めました。(図14)

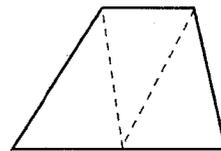


図14

- T この考え方にあるものを加えました。
- T 思い出さない？ 4枚の色板で勉強したこと。
- C (ノートを見て、確認する)
- T 特別なときだけです。(図15)

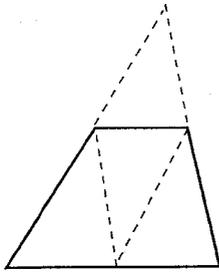


図15

- C 敷き詰めや。
- T (図示する)
- T この面積は、どうして求めるのかな。
- C 大きな三角形から、小さい三角形を引けばいい。
- T こんな風に考えたら、わかりやすいね。ここで、終わります。

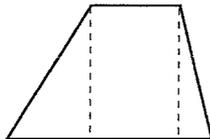
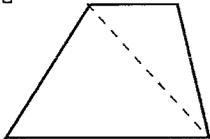
(3) 子どもの変容

三角形・平行四辺形の求積の問題を2問とも誤答した3名(K児, H児, M児)について、本授業で話し合う前に気づいていた分割と話し合い後に理解した分割を示すと次のようになる。

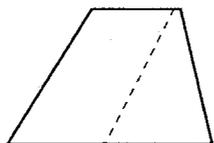
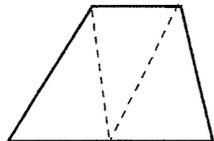
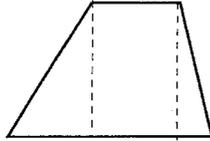
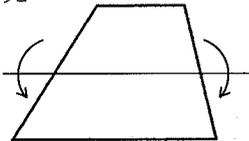
[話し合い前]

[話し合い後]

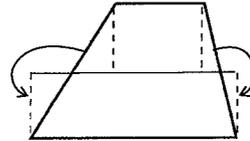
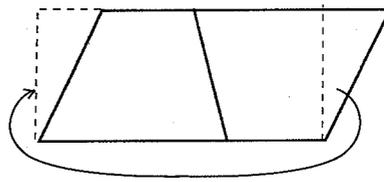
K児



H児



M児



なし

子どもたちにとって、長方形に変形することと三角形に分割することは理解しやすいが、長方形と三角形2つに分割することはなかなか気づかないかようである。しかしながら、三角形を動かすなど、授業中に視覚的な活動があったため、この分割は子どもたちにとって印象的な分割であったようである。(図16)

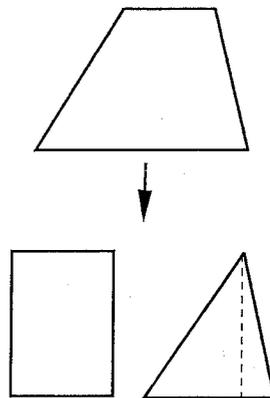


図16

また、この2名(K児, H児)以外にも15名(合計17名)の子どもたちがこの長方形と三角形2つに分割する方法を上げている。このことから、子どもたちは、単に台形の面積を求める計算の簡単な分割よりも、印象に残る動的な活動を伴う考え方の方に着目する傾向にあると言える。

4. 授業の考察

(1) 既習事項の確認について

本時の学習のねらいは、台形を既習の図形に分割して、その面積を求める方法を考えることであった。この時点での既習事項は、長方形、三角形、平行四辺形

の求積方法であった。

ここでの既習事項の確認については、次の2つの方法が考えられる。1つは、長方形の求積方法ならその図形を見せ、その求積公式を確認することである。もう1つは、それを学習したときの様子を思い浮かべて、その分解の方法を確認することである。本時は後者の方法を採用し、分割の方法をイメージする形態をとった。このことは、単に既習事項を想起させるだけでなく、その時学習した内容を思い起こさせ、既習事項を子ども自ら作り出す心的活動を促すことにつながっていた。その結果、子どもたちは、様々な分割の方法を自ら発見し、分割することができた。

また、なぜ台形の面積を求めるのかという課題を子どもなりに理解するために、台形、円、アメーバー形のどの図形の求積を考えるかという問いについて、子どもなりの説明を求めた。この説明の段階で、子どもたちは既習の学習を思い浮かべ、その既習事項とどの図形が関連性が強いかに判断していた。その結果、子どもたちは、学習の目標を明確に持つとともに、その学習に必要な既習事項を確認することができた。

(2) 発展的内容の指導について

本時までには、子どもたちは三角形・平行四辺形の求積公式は学習している。したがって本授業実践では、台形をそれらの既習の図形に変形して台形の面積が計算で求められるかが課題であった。この課題は、第5学年の内容を発展させるものだが、既習の図形を基に発展的に複雑な図形を考察するという数学的な考え方を活用できるものである。

本時では、このような既習の学習を発展させるという立場に立って、子どもたちは台形の面積の求め方を考えることができた。また、本時の取り組みは、単に発展的に考えるという方向だけでなく、既習の三角形や平行四辺形の求積方法を基に、それらの求め方の理解を深めるといふ、既習の学習内容の理解を深めるものでもあった。

このように、子どもたちの理解過程は、学習する内容に沿って、その内容を理解していただくではない。既習事項を新たな場面で活用することで、既習事項の理解を深めることができる。この意味でも、発展的内容の指導は、基礎・基本と反対のベクトルではなく、既習事項の定着をはかる、つまり基礎・基本を充実させる指導にもなっているのである。

5. 結論

本稿では、「量と測定」領域の学習において、小学校第5学年の子どもが台形の面積の求め方を学習する際の理解過程を実証的に解明しようとした。

まず、本時の授業に入る前の子どもたちの実態を把握するために、既習の三角形・平行四辺形の求積問題について簡単な調査を行った。その結果、これらの図形の求積については39名中33名が理解しているが、他方で3名の子どもが両問ともに間違っていることがわかった。こうした子どもの実態を踏まえて、本時では、台形の面積の求め方を考えるという算数的活動を行うこととした。

この台形の面積の求め方を考える学習は平行四辺形や三角形の面積の求め方の発展的内容の学習であるが、既習事項を生かし、子ども自身が学習を構成していくという授業展開によって、次のことが可能になると考えたからである。

- (1) 子どもたちは、既習の求積可能な図形の求め方を基に、新たな図形の求め方を考え出すことができる。
- (2) それを基にして数学的なコミュニケーションをもつことで、子ども個々の求積に対する数学的な考え方が高まり、理解もより深まる。

そこで、理解過程を重視した算数科授業では、まず数学的概念や原理・原則を理解する個々の子どもの心的活動を保証するために、学習目標に対して、自分自身が何を理解しているのか、どのような考え方が使用できるのかなど、現在の自分自身の理解を意識化しておくことが必要であるとの認識に立って、本授業では、平行四辺形が三角形に分割して求められたことを想起させることから導入し、この既習の図形に分割するという考え方を基に台形の面積の求め方を考えさせることにした。そして、本授業では、三角形・平行四辺形の求積方法とりわけ、倍積変形・等積変形の求め方という数学的な考え方を活用して、台形を変形するという発展的な考え方を深化・拡張させ、子どもの理解を深めることをねらうことにした。

その結果、本時の授業において、子どもたちは三角形や平行四辺形の求積方法について学習したときに身に付けた倍積変形・等積変形の求め方という数学的な考え方を活用して、台形を変形することができた。実際、子どもたちは個々の活動で、台形を対角線で2つの三角形に分けたり、台形を2つつなげて平行四辺形をつくらしたりする方法を比較的容易に考え出すことができた。しかしながら、台形を長方形と三角形に分割する方法には気づきにくかったようである。多くの子どもたちにとってこれは当然のことといえよう。なぜなら、台形の面積を計算で求めることだけが学習のねらいであったら、台形を長方形と三角形に分割する方法よりも、台形を対角線で2つの三角形に分けたり、台形を2つつなげて平行四辺形をつくらしたりする方法

の方がはるかに簡単だからである。

ところがこの学級の子どもたちにとっては、台形の面積を1つの方法で求めることよりも、台形のいろいろな面積の求め方を考え出すことの方が興味あることのようにであった。実際、発表の場面で、台形の上底の両端から下底に垂線を引いて、台形を長方形と三角形に分割する方法(図10)がある児童から発表されると、それが契機となって、なぜそのような方法で面積が求められるかについて活発な議論が行われている(図11, 図12)。この方法は、「うわぁー」「すごい!」という子どもたちの感嘆の声に顕著に現れているように、多くの子どもたちにとって印象的なものであった。このことは、事前調査で三角形や平行四辺形の面積を正しく求められなかった2名の子どもを含む17名の子どもたちが話し合いの後に台形を長方形と三角形に分割する方法を上げていることからわかる。

以上のように、子どもたちは本授業の学習において、既習の求積可能な図形の求め方を基に新たな図形の面積の求め方を考え出すことができ、それらについての数学的なコミュニケーション(話し合い活動)を行うことで子ども個々の求積に対する数学的な考え方が高まり、理解もより深まったと言えよう。そして、このような事例研究から、算数学習において個人的構成と社会的構成の両方の活動が行われてはじめて、教室における個々の子どもや子どもたちの理解が深化し得るということが示唆される。今後は、「数と計算」領域や「数量関係」領域の学習における子どもの理解過程を実証的に解明することが課題である。

【付記】

本稿は、平成14年度科学研究費補助金基盤研究(C)(2)(代表者小山正孝、課題番号13680306)の研究成果の一部である。

参考文献

- 1) 小山正孝(1997)「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 2) Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol.5, pp.21-33.
- 3) 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文(2000)「算数学習における理解過程に関する研究(Ⅰ)」, 『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』, 第28号, pp.117-123.
- 4) 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 中村武司(2001)「算数学習における理解過程に関する研究(Ⅱ)」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第30号, pp.89-98.
- 5) 文部省(1999)『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東洋館出版社, p.138.