広島大学　学部・附属学校共同研究紀要
〈第30号　2002. 3〉

中学校・高等学校における新しい数学科教育課程の研究開発(5)
――教育課程の高・大連接の問題について――

中原　忠男　小山　正孝　下村　哲
松本　堯生　久保　泉　吉田　清
井上　芳文　井ノ迫泰弘　喜田　英昭
河野　芳文　酒井　秀二　砂原　徹
富永　和宏　仲渡　雅史　吉村　直道

1．はじめに

本研究の（1）～（4）においては，学校5日制の完全実施やそれに伴う学習指導要領改訂などの様々な社会情勢を踏まえながら，主として小学校・中学校・高等学校の12年間の算数・数学科の教育課程を考察の対象とし，特に中学校・高等学校の教育課程改善への実践的な示唆を導出することを目ざしてきた。

一方，新教育課程の実施が近づくとともに，主張の妥当性は別として，「分数ができない大学生」（岡部・戸瀬・西村編，1999）に代表される学力低下を危惧する声は社会全般に高まり，学習指導要領改訂中止を求める声さえ聞かれるようになってしまった（西村編，2001)。その影響もあってか文部科学省も，学習指導要領はミニマム・エッセンスであるとの見解へ傾きつつあるようであるが，実際の学習指導をどうするのか，入試はどうなるのか，問題はそう簡単ではない。

今回の学習指導要領改訂では，3割削減が基本方針とされ，基本的な内容であるにもかかわらず小学校から中学校へ，中学校から高等学校へと移行された事柄も多い。しかしながら，初等・中等教育をすべて終え，大学での高等教育を受けようとする高等学校3年卒業時までに求められている内容は，と考えてみるとき，必ずしも軽減されているわけではなく，また，大学初年度の教育内容を例えば従来の高等学校3年程度から始めようということになっているわけでもなさそうである。仮にそのようなことをしてしまうと，大学での専門教育がままならないことは明らかであろう。

ではどうすればよいのか。本研究プロジェクトが大学教官と附属中・高等学校教官の共同研究である利点を生かし，今年度は第5報として，大学教官のスタッフを教育学部（教育学研究科）に加えて理学部（理学研究科)，総合科学部にも求め，数学科教育課程における高等学校から大学への連接の問題を考えることにした。

2．現状の認識

この問題を考える手がかりとして，広島大学教育学部，理学部，総合科学部で数学の講義を担当している教官へのアンケートを実施した。平成元年告示の現学習指導要領に基づく現在の教育課程で学んで高等学校を卒業し，大学でも引き続き数学を学んでいく学生がどのような状況になっているのか，現状を把握することがその目的である。アンケートの内容は次の通りである。

> 1．a）学生を指導されていて，最近の学生の思考力や論理的表現力が低下してきていると感じることがありますか。
> b）学生の学力が10年以上前に比べて低下してきているとの意見があります。あるとお考えならば，どのようなことに原因があるとお考えですか。また，何かデータがあればお教えください。
>
> 2．a）実際に講義をしていて，この程度のことは高等学校で学習しておくことが望ましいと感じることがありますか。
> b）その他，何か感じることがあれば書いてください。

Tadao Nakahara, Masataka Koyama, Tetsu Shimomura, Takao Matsumoto, Izumi Kubo, Kiyoshi Yoshida, Yoshifumi Inoue, Yasuhiro Inosako, Hideaki Kida, Yoshifumi Kohno, Shuji Sakai, Toru Sunahara, Kazuhiro Tominaga, Masafumi Nakato, and Naomichi Yoshimura: A Study on Curriculum Development of Mathematics in Junior and Senior High Schools(5) —On the Problem of the Curriculum Mismatch between High School and University—

3．実際に学生を指導していて，高等学校で学習したにも関わらず定着率が低いと感じられる分野・項目がありますか。また，その原因はどこにあるとお思いですか。

4．その他

アンケートの項目や方法については，吟味がやや不足していたことは否めないが，どのような回答が出てくるのか予測しにくかったこともあって，とりあえず自由記述式で回答を集めることにした。したがって，回答の統計的な整理は容易でないが，結果を整理・公表し，検討の材料とするために回答を以下に掲げる。回答人数は，教育学部５名，理学部11名，総合科学部６名である。

1．a）について

＜教育学部＞

・自分の頭で考えることをほとんどしていない。

・1年生に $\varepsilon-\delta$ を教えているが，それほど悲観的な状況ではない。群のような簡単な概念すら抽象的だとして心理的に拒絶しているように見える。証明する，それを表現する，工夫して伝える，それらがあまりにもできない学生が多い。

・$\varepsilon-\delta$ 論法などの一般化された位相空間の概念は，かなりできのよい学生でもなかなか理解できないようである。一般に，式を用いていろいろな概念を表現する力が落ちている。少し抽象的なことになると，具体例と結びつけて考えられなくなる。空間をイメージする力はかなり弱くなっている。数学的な記述を実際の図形を結びつけて考える力がついていない。それは論証力の弱さとも関係している。

・帰納法や背理法などが定着していない。基本的な微積の計算が弱い。公式の証明ができない。

＜理学部＞

・概念を正しく理解し，正確に論証することができない学生が多い。ただし十分能力を持ち合わせていなくてそうなっているというよりもむしろ，“正しく理解する”という教育を受けてこなかったことに由来するような気がする。“理解＝計算できる”になっている学生が多い。

・三段論法ができない（使えない）。関数の変数が言えない。$\mathbb{R}^n$ 以外のベクトル空間が理解できない。ベクトル＝数といった等式を平気で書くなど，自分がどこで作業しているか全く理解していない。幾何で代数や解析を使うと，それは幾何ではないという反応がまま見られる。論証能力は平均的には末期的に低い。

・自明な例すらあげることができない。抽象的事例に対してイメージを描くことができない。

・定義・定理の区別が曖昧で，理解が浅い。商群の概念等，一般に同値類全体の集合に代数的・幾何的構造を入れたものが理解しづらい。式で表された図形，特に空間図形を描けない。平面図形でもその図形の特徴（漸近線，対称性など）を図で表現できない。

・抽象的な問題でもとりあえず手を動かしてみることが苦手なようである。

・一つ一つの論理的な思考が積み重ねられない。

・計算はある程度できるが，証明・論証ができる学生は１～２割。抽象的なものを与えられたものと考える傾向が強く，本当の理解に結びつかない。自分で考える習慣をつけてほしい。線形代数と空間の理解が連動しない。初等幾何の問題を出すと新鮮な感じで取り組む学生も多い。証明とは何かを高校で教えてもらえるとありがたい。

＜総合科学部＞

・計算力の低下を感じる。線形代数では，線形写像の表現，部分空間の次元は理解が難しいようである。論証に対する嫌悪感は増しているようである。論証を積み重ねる授業が困難な風潮を感じる。

・一次変換を大学で教えても，なかなか理解されない。

・直線・空間の方程式を理解できない。計算はできても，イメージがつかめない。

・以前からのことであり，特に最近の学生についての問題とは思われない。

・計算力がなくなっている。$\varepsilon-\delta$ 論法を教えられる状態ではない。意味を考えることなく，操作・処理だけですませてしまう傾向が顕著。空間図形が弱くなり，直線・平面の相互の位置関係をつかむのが苦手。

b）について

＜教育学部＞

・型通りの練習問題の訓練だけしか経験していないと思われる層が増えていて，自分で試行錯誤することに弱い。

・学力は低下しているかもしれないが本質的ではない。自分の興味・関心もないのに，数学ができると思い込んで安易に進学してしまうことが問題。

・思考の自由性を保証していないことが原因。

・子どもの数の減少とともに学生の質が落ちてきているのは事実であろうが，全体のバランスは変わっていないと思う。

＜理学部＞

・初等・中等教育で同じことを複数回教えない。科学的なものの見方を小学校で教えない。数学に限らず，科学的な現象をとにかく見せるという回数が少ない。

・学力の低下はある。何ができないからということよ

り，もっと基本的なことが欠けているので，それがたまたま学力の低下として現れていると思う。一口で言えば“我慢ができない”と表すしかない。
・能力等は決して低下しているとは思わないが，知的好奇心が薄らいでいるように感じる。理由はわからない。
・高校までに教える内容が少なくなってきていることに原因がある。自分で考える訓練を受けていないことにもあるかもしれない。
・落ち着いて自己と向き合って考える時間が不足（ない）ことに主な原因があると考える。
・高校までの学習内容の低下はカリキュラムとしては仕方ないとしても，理解力・学習能力の低下は覆うべきもない。さらに，高度なことに関心を持たせようにもその気になる学生が少ない。
<総合科学部>
・小・中・高を通じて数学の勉強時間が減ったことではないか。
・空間における直線，平面の方程式をやっていないためか，空間での図形の理解が弱い。
・論理的思考を伴う内容が削除されたため，論理的にものを考える力が低下している。
・特に学力が低下しているとは思わない。
・学習時間が少ない。反復練習ができていない。
2．a）について
<教育学部>
・教科書の十分な理解が必要。問題の意味をよく理解せずに何となく解いている気がする。
・1次変換が昔の状態まで戻らないと，結局大学での到達地点も落ちてしまう。
・解析に関しては，現状の内容で十分。単なる計算ではなく，本質的な意味がわかればよい。一般的に式の変形を意味を理解しながらできれば，代数的な内容は現状で十分。高校までの段階で空間（立体）に関する内容が非常に少ない。せめて空間における平面や直線の方程式あたりまでは高校で学べる内容だと思う。
・基本となる公式や定理への理解，特にその証明をきちんとやってもらいたい。
<理学部>
・計算できるということと理解するということを区別できるように教育してほしい。多くのことをわかった気になるよりも，1つ1つ大事に理解していくほうがあとあと重要。
・高校生なりに物事を論理的に考えるということ。積分は足し算であるということ。直線や平面の式を見てグラフをかくこと。平面内の曲線としての関数のグラフをもっとたくさん見てきてほしい。
・微分積分と物理学の関係について，行列が線形写像や1次変換に対応していることについて，空間図形の方程式をもっと詳しく，学習してきてほしい。
・簡単な微分方程式の解法，3次元空間での図形・ベクトルのセンス。
・線形代数に関連して，空間における直線・平面の方程式などを扱ってほしい。また，初歩の物理に絡んだ知識があるとよい。論理的に表現する力を育ててほしい。
・数学は総合的に発展してきたわけであり，そのような観点から問題を選ぶべきである。
・計算が単に手法記憶にのみに依っている傾向が強すぎるので，もっと理論が計算に有効なことを教えてほしい。平面の方程式の感覚は是非ほしい。多項式の計算も維持してほしい。意外と初等幾何に興味を示す学生が多いので，証明という感覚を是非覚えさせてほしい。
<総合科学部>
・計算力の向上。2次導関数まで用いてグラフをかくこと。数以外で群，環の構造をもつものを教えてほしい。論証に慣れてもらうには初等幾何で頑張るしかないか。
・直線・平面の方程式など。
・理系では，計算は大学でもできるので，理論についてより詳しく。文系では，3次以上の多項式の積分。理・文系とも，行列は計算だけでは意味がないので，1次変換，直線・平面の方程式まで含めて扱ってほしい。複素数は，やるならばきちんと。ベクトルは幾何学的感覚を磨くために重要なので，割合を増やしてほしい。
・最低限の計算力はつけてほしい。写像がよくわかっていない。平面の方程式ぐらいは高校で教えるべき。
b）について
<教育学部>
・数学は計算が主目的ではない。証明こそが本質であるのに，満足な文章としての答案が書けない。
・高等学校で学習しておいてほしい内容はたくさんあるが，時間的制限や理解力などを考えれば，むしろ大学での教育がもっと基本から始めなければならないように感じる。
・教科書だけで学ぶのではなく，もっと市販の数学関連の本を読んでもらいたい。
<理学部>
・わかるということがどういうことなのか，自分なりに知ってほしい。人にきちんと自分の考えを伝えられるようになっていてほしい。
・数学を学ぶ必要性を感じない生徒が多いように思う。背景や必然性，社会との関わりなど，数学への関わり方や数学を学ぶことは当然のことと思わせることも大切ではと思う。

・計算力。すべての計算が遅いために思考が中断してしまい，理解力を奪っている。
・集合の基本的なことについて，また論理的な言葉づかいについて，学習してきてほしい。
・集合は教えていないのか，少し知っているだけでも抵抗がなくなるように思う。
・自己意志で入ってくる学生が少ないことは残念。
＜総合科学部＞
・証明が書けない。何をどの程度に書いたらよいのかわかっていない。
・高校において理論をしないで計算だけしていると，大学にきたからといって理論がわかるとは思われない。
3．について
＜教育学部＞
・合成関数，無限級数の収束がわかっていない学生が目立つ。大学2年で簡単な置換積分法，部分積分法すらできなくなっている学生が多い。
・数学A，Bのコンピュータなど無用。
・位置ベクトルのとらえ方が弱い学生が多い。同時に，空間ベクトルの内容が中途半端であるので，大学での扱いとかなりギャップがある。
・有理数・無理数への理解が劣る。微積の基本的計算力，意味への理解。
・深く考える習慣がついていない。
＜理学部＞
・計算できるのに，理解できていないということが多い。大学2年，3年となると，高校で習った事柄もできなくなる。
・多くの学生は，高等学校で「学習」していないと思われる。一般的なイメージよりも計算能力は高い。
・小・中・高を通して計算力を。反復的なトレーニングが必要。
・微分の定義は高等学校で学習しているはずであるが，きちんと書ける学生は意外と少ない。定義を形式的にしか教えておらず，計算に重点を置いているせいではないか。三角関数の加法定理はきちんと覚えているが，その証明を述べられる学生は少ない。自分で工夫して証明できるような力を育てられないか。
・指数・対数関数の性質やグラフ。2次関数のグラフと2次方程式の解の性質との関係。
・微分・積分の記号の意味の理解が不足している。
・高校で学習していることについてはよく理解できている。ベクトルと行列についてはもっと掘り下げた内容を知っていてほしい。
＜総合科学部＞
・行列とその応用。考える動機がはっきりしないせいか，違和感を抱えている学生は多い。
・数学的帰納法が使えない。
・複素数の積を写像と考えるように指導しているため，回転移動と複素数の差が理解できなくなり，1次変換がどうしても理解できない。混乱を来すおそれのあるところはむしろ教えないでほしい。1次変換のない行列は意味がないし，学生もそれを察して勉強しない。
・一般的に，知識が頭の中に定着せず，上滑りしているような状況を感じる。
4．について
論理的に考える力，説明するための表現力，自ら考えようとする学習意欲や態度，自己学習力，基本的な計算力，概念のきちんとした理解などについて，現状にはかなり不満であり，その改善が課題であることが多数指摘された。しかしながら，ここでは紙幅の都合で回答の詳細は割愛させていただく。

これらの意見から，①高等学校までに修得しておくべき（しておくほうが望ましい）数学の内容や考え方，②数学を学ぶ意欲や態度，の2点が大学教官の中で共通に大きく問題視されているといえる。
そこで，教育課程の高・大の連接の問題を考えるにあたって，本稿では主として①に関するいくつかの指摘に基づいて，具体的に考察することにしたい。

3．高等学校教育課程の改善に向けて

今回のアンケートは，大学で数学の講義を担当している教官に対して行ったものである。したがって，専攻分野にはいくらかの幅があるが少なくとも大学でさらに数学を学んでいこうとする学生の実態を把握しようとしたものであり，以下の検討においても，主として従来から理科系と呼ばれている学部・学科等へ進学しようとする生徒の教育課程をどう改善すべきかという視点を前提としたい。
アンケートで多く指摘された高等学校までに修得しておくべき（しておくほうが望ましい）数学の内容や考え方について，具体的に項目を整理すると，A．論証，B．ベクトルと空間概念，C．行列といろいろな曲線，の3つにまとめることができ，これはそのまま高等学校学習指導要領での数学A，B，Cの内容に対応する。
数学A，B，Cは数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲのコアに対してオプションと呼ばれる科目であり，コアに入らなかった領域・内容を並行して学習できるようにした科目である。コアだけでも一つの学習の流れとしては完成したものになるが，解析的内容が中心となっており，代数的内容や幾何的内容については，オプション科目も学習しなければ触れる機会が激減することになる。

オプション科目には制度的には内容選択制が取り入れられるなど，運用上の自由度が特徴である。そのオプション科目の内容に関して，アンケートで指摘されたように，さらにその後数学を学んでいくうえで支障が生じているということであれば，そのような生徒を対象として，もう少し内容を深めた科目内容の設定を考えるべきではないかということになろう。教育課程全体を考えると，単位数増はあまり現実的でないので現行の単位数内でということになるが，学習指導要領で定められている数学A，B，CをそれぞれBasic科目とするのに対して，将来さらに数学を学んでいこうとする生徒にはそれらに代わるAdvanced科目を編成し，履修させることを提案したいと考える。

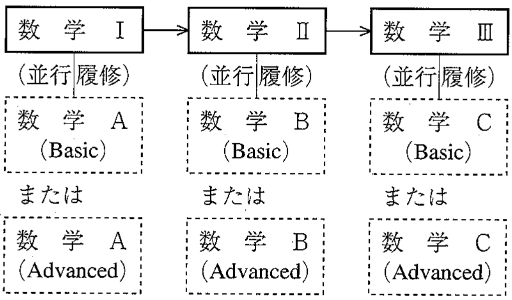

図1　高等学校教育課程　改善案

以下，学習指導要領とは原則として平成11年告示の学習指導要領を示すものとし，それを基にして数学A，B，Cのそれぞれについて，数学を将来も学んでいく生徒を対象とした数学A（Advanced），数学B（Advanced），数学C（Advanced）の科目設定・編成について個々に検討する。

4．「数学A（Advanced)」について

数学Aは，平面図形，集合と論理及び場合の数と確率について理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し処理する能力を育てるとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識できるようにすることを目標として次のように構成されている。(1)平面図形では，中学校から移行されてきた三角形の性質や円の性質を中心に扱う。(2)集合と論理は，集合と要素の個数や命題と証明といった，従前の数学Iおよび数学Aを整理・統合したかたちでまとめている。(3)場合の数と確率では，従前の数学Iの個数の処理の一部と確率をまとめて簡易化して扱う。

平成元年改訂の学習指導要領と比較すると，内容の整理・統合や精選の観点から，多くの箇所で科目（学年）間で内容が移動しているが，特に注目すべきは，平面幾何の内容が，これまで中学校で扱っていたものも含めて，数学Aで多くの生徒が学習することになりうるという点である。

アンケートでは，論理的な思考の能力の不足，論証の能力の低下が多く指摘されており，特に「証明する，それを表現する，工夫して相手に伝える」ことのできない学生の多さが指摘されている。新しい教育課程のもとで，数学Aにおいてこの「論理的な思考力」「論証する能力」の育成のために，発展的な内容を加味した数学A（Advanced）の編成を具体的に検討したい。ただし，数学A（Advanced）では数学A（Basic）と項目に差異をつけるのではなく，内容の取扱いについての改善を提案することにする。

①集合と命題について

集合と論理 　ア　集合と要素の個数 　イ　命題と証明

この領域では，図や表などを用いて集合についての基本的な事項を理解し，ものの集まりを統合的に見ることの有用性を理解させることが目標となる。それに関連して，学習指導要領でも論理的な思考力を伸ばすとともに，それらを命題などの考察に生かすことが目標として掲げられている。

「ア　集合と要素の個数」では，集合に関する基本的なことがらを指導し，図や表を用いて要素の個数に関する基本的な事項を扱う。その内容の取扱に関しては，複雑なものは扱わないこととなっている。しかし，極度に抽象性が高くならないように問題の設定に配慮しながら，さらに付加的な内容の学習も可能であると思われる。例えば，集合の要素の個数に関する公式であっても，3つ以上の集合に関わる公式などを，それまでの学習内容をもとにしながら発展させていくことは，論理的に物事を考えるという視点に立てば十分に意義のある学習となる。

また，「イ　命題と証明」においては，集合の包含関係と関連させながら命題について理解させる。ここでは，与えられた命題の仮定から結論を直接導く従来の証明に加えて，様々な証明方法を学習する。その際，単にその方法を形式的に適用して問題を解決するだけでなく，なぜその方法で証明したことになるのか，といった点の理解が重要である。ここでも，深入りはしないことが明記されているが，この分野が論理的な思考力を育成するのに格好の場面であることを考えると，証明方法の学習に関して，高等学校段階で学習可能な範囲で，付加的な内容を検討する必要性は十分にある。

このような立場から，数学A（Advanced）においー

ては，「集合と論理」において，それぞれの内容を深化させるように，内容の取扱いとして，

・3つ以上の集合間の関係を扱う。
・間接証明法についての内容を豊富にする。

を提案する。この領域が調査で低下が指摘された論証の能力を直接的に扱う部分であることから，数学A（Advanced）では，内容をより発展的に扱うことで，その能力の定着をはかり，論理的に考える力を育成したい。

②平面図形について

平面図形
　ア　三角形の性質
　イ　円の性質

ここでは，三角形や円などの基本的な図形の性質について理解を深めることが学習の中心となり，図形の見方を豊かにするとともに，図形の性質を論理的に考察し処理できるようにすることが目標とされる。よって，これまで中学校で扱われていた三角形の重心や円周角の定理の逆なども含めて，いろいろな図形の性質を学習する。その中で図形の性質を論理的に証明することになるが，その過程では論理的な思考力を養うための様々な場面を用意することが可能である。

例えば，三角形の五心の学習に関連して，3本の直線が1点で交わることを証明する場面がある。このとき，2本の直線の交点を3本目の直線が通ることを示すことによって，これらの3本の直線が1点で交わることを証明する。この方法では，平行でない2本の直線には交点が存在することを利用して，証明すべきことがらをより焦点化することで結論への道筋を明確にすることができる。このようにいろいろな場面で様々な証明の方略を理解させるような指導が重要となる。

また，一般の三角形に関することがらを証明する際にも，実際の証明ではある特定の三角形をとり，その頂点に名前を付けたり補助線を引くなどの場面設定を行って論証をすすめていく。そこでは，一般性を失わないことへの配慮とその方法の理解が重要となる。

このように，図形の題材では，様々な場面で数学的な考え方のよさを理解させるとともに，視点を変えて考えることのよさを体感させることもできるだろう。このような立場から，事実の羅列という意味ではなく，いろいろな視点で物事を見る機会を増やすという観点より，図形の発展的な性質を扱うことも考えられる。このことから，学習指導要領改訂によって数学Aから姿を消すことになる図形の変換についても，積極的に扱うことを提案する。

内容の精選がいわれる中で，数学A（Basic）では命題の逆を扱わなかったり，厳密な証明を避ける場合も想定されるが，先の論証能力の低下という指摘に対しては，この部分の学習にも積極的に取り込むことが必要となるであろう。

このような立場から，数学A（Advanced）においては，平面図形の指導内容において

・発展的な内容（チェバの定理やメネラウスの定理など）を扱ったり，定理の逆について考える。
・図形の変換（合同変換・相似変換）を扱う。

を加えることを提案する。

論理的な思考力や論証の能力は，もちろん他の領域でも可能ではあるが，図形が身のまわりのものに結びつきやすいということや不思議な魅力と美しさを持っていることから，学習者の持つ問題解決の動機付けは，より高くなることが期待される。

③学習方法について

既に述べたように，今回のアンケートでは大学教育の立場から，特に論証問題における学生の抱える問題点として，論理的な思考力に加え，表現力や課題に対する姿勢が十分でないことが指摘されている。

これに対しては，論理的に考える力やその内容を他者にわかるように表現する力を養うために，論証を重要視して扱うことが求められよう。無論，これは数学の学習全般の中で考えるべきことがらで，数学Aだけで扱うものではない。しかし，集合と論理，平面幾何を内容にもつ数学Aは，論証を重点的に扱うためのキーになる科目と言えよう。

ただ，論理の厳密性を追求したがために証明のための証明となってしまい，図形の性質の理解や数学的な見方や考え方のよさを感じ取らせることができないようでは，本来の目標から大きく外れてしまう。

そこで，ここでは数学A（Basic）と数学A（Advanced）で，証明問題の学習方法について，次のように扱うことを提案する。

ア．数学A（Basic）
①具体的な事例を，模型やコンピュータによるシミュレーションなども利用して数多く扱い，直観も含めて図形の性質の理解に重点をおく学習を進める。
イ．数学A（Advanced）
①発展的な課題も含めて，多様な証明問題を扱い論理の重要性や概念の理解，形成に努める。
②表現力を養うために，コミュニケーションを重視した学習を進める。

特に，イ②に挙げたように，表現力を養うには情報の受け手が必要不可欠である。しかし，受け手から不十分な点について指摘が受けられなければ，それは一方的な説明で終わり，表現力を養うことはできない。したがって，互いに受け手を務めながら気づいた点を指摘し，ともに思考力や表現力を養い合うようなコミュニケーションを重視した学習を進めることが望ましい。具体的には，小グループに分かれて各々が交代で課題の証明を行い，その是非をグループ内で検討し合う学習などが考えられる。ただし，このような学習を進めるには，普段の学習においてコミュニケーション能力の向上に努めておくことが求められる。また，指導内容の徹底や指導者にかかる負担などの問題もあり，TTなどいろいろな指導法も取り入れながらの実施を検討する必要があろう。

5．「数学B（Advanced)」について

今回改訂された数学Bでは，複素数と複素数平面，確率分布が削除され，数列が従前の数学Aから移動，統計とコンピュータ，数値計算とコンピュータは，従前の数学Aの計算とコンピュータ，数学Bの算法とコンピュータ，及び数学Cの数値計算から精選されて再構成されている。数学Bのメインの内容となるのは数列とベクトルであると考えられる。しかし，この2つの内容は学習指導要領改訂のたびに内容が削減され，基礎的内容だけが残っている。特に数列の内容である数学的帰納法については「簡単な命題について，数学的帰納法を用いて証明させ，その方法の意味を理解させることに重点を置く」とあるように，簡単な命題が与えられ，その命題に対して数学的帰納法を用いることを指示されて証明するというように，証明法としての数学的帰納法ではなく，数列の応用としての感が強い。また空間座標とベクトルでは，前回の改訂において代数・幾何の内容から空間における点・直線・平面，空間図形の方程式が削減されたままで，空間座標とベクトルについて直観的に理解させるに留まり，空間におけるベクトル方程式は扱わないことになっている。これらを厳選した理由として，教育内容の精選による時間的問題や内容の扱いが技巧的になりやすいなどの内容的問題の2点が考えられるであろう。しかし，内容を厳選しすぎた感のあるこの学習指導要領では，大学で学ぶ数学の内容とのギャップが大きすぎて，数学という学問に対して混乱を招き，学習または研究意欲の減退につながってしまうことが危惧される。

実際，アンケートでも数学的帰納法と空間ベクトルに関して，空間をイメージする力，数学的記述と実際の図形を結びつけて考える力，論証力の弱さが指摘され，式で表された図形，特に空間図形が描けない，線形代数と空間の理解が連動しない，帰納法や背理法などが定着していない，“ベクトル＝数”といった混乱のようにどこで作業をしているか理解していないことなどが問題とされている。そして，高等学校に対して，空間（立体）に関する内容が非常に少ないので，空間における平面や直線の方程式あたりまで空間図形の方程式をもっと詳しく，あるいは3次元空間での図形・ベクトルのセンスを，などの意見が出されている。

アンケート結果を踏まえて，数学B（Advanced）を提案し，ここでは特に，数学的帰納法，空間ベクトルに関する具体的内容について論ずる。

①数学的帰納法について

アンケートの指摘にもあるように，一般に数学的帰納法の理解は不十分であることが多く，型通りの証明が記述されていることが多いように思われる。そこで，数学B（Advanced）の数列において，数学A（Advanced）と同様，項目上の変更ではなく，内容の取扱いを検討し，より発展的な学習に取り組ませたいと考える。

数学的帰納法の学習についての大きな問題点として，例えば「$n=1$のとき…。$n=k$のとき…。$n=k+1$のとき…。以上より…。証明終わり」と記述するように，その形式だけを覚えていて，どんなkを考えているのかや，それぞれのブロックのつながりについての理解が伴っていないことがあげられる。

数学的帰納法による命題$A(n)$についての証明は，次の2つの証明……(ア)「$A(1)$が真である」と(イ)「$k\in\mathbb{N}$，$A(k)$が真である$\Rightarrow A(k+1)$が真である」……を示して，(ウ)「すべての自然数nについて$A(n)$は真である」と結論づけることであり，

・(ア)と(イ)，2つの証明をしないといけないこと，
・その2つの証明から，結論(ウ)が導かれること，
・(イ)の中には，(ア)の場面が含まれていること，

を意識するという構造の理解が必要である。

そのために，(イ)の部分に必ず$k=1, 2, 3, \cdots$を代入して何が証明されるか考え，(ア)と(イ)のつながりを考えさせるようにしなければならない。また，(ア)と(イ)を入れ替えると，『「$A(1)$が真なら$A(2)$が真，$A(2)$が真なら$A(3)$が真，…」が証明されること，したがって，この後(ア)を出し，今「$A(1)$が真」が証明できた，だからすべての自然数nについて$A(n)$が証明された』といえることを理解させるのもよいであろう。またさらに，(ア)で$n=1$の代わりに敢えて$n=3$の証明をすれば，$n\geqq 3$の範囲で$A(n)$が証明されるということを実感させることも意味があろう。

数学的帰納法による証明において，その根幹をなす

部分は(イ)であり，帰納法の本質と言えるこの構造の理解を十分に図りたい。そのために，例えばkのステップ数を２として，nが奇数のときの証明，nが偶数のときの証明を考え，総合してすべての自然数nについての証明を完成させるといった命題の証明や，初期条件が２つあって，(イ)で「$A(k)$，$A(k+1)$が真なら，$A(k+2)$が真」を証明するといったものも積極的に扱い，掘り下げた学習によって理解を図ることも有用ではないかと考える。

簡単な命題の扱いに留める数学Ｂ（Basic）に対し，数学Ｂ（Advanced）では，簡単な命題とともに，上述のように，

- より複雑な命題の証明にも積極的に取り組む。
- 証明の展開の仕方を詳細に捉える。

といった学習に積極的に取り組んでいき，数学的帰納法の理解を図りたい。

②空間ベクトルについて

今回の改訂においてベクトルの内容は従前の数学Ｂからあまり変化せず，平面上のベクトルと空間座標とベクトルの２つで構成されており，従前の「イ　空間におけるベクトル」の「(ア) 空間座標」,「(イ) 空間におけるベクトル」が「空間座標，空間におけるベクトル」に統合され，空間におけるベクトル方程式は削除されている。前回の改訂で代数・幾何から削減された空間図形の方程式は今回も入らず，「空間におけるベクトルが，平面上のベクトルと同様に扱える」ことに重点が置かれ，空間図形の方程式としてはxy平面に平行な平面である$z=k$や原点を中心とし，半径がrである球面の方程式$x^2+y^2+z^2=r^2$を扱う程度となっている。空間図形の内容については，今回の学習指導要領改訂により中学校で空間図形から断面図，投影図が削除され，中学校における空間図形では具体物を通しながらも空間内の直線や平面の垂直，平行関係については直観的な理解に頼らざるをえない部分が多く，このことがその後の空間図形の学習における困難さの一要因であるとも考えられる。これらの学習を経て，高等学校では数学Ｂで再び空間図形を学習するわけであるが，まず空間座標が導入され，その後に空間内でのベクトルの演算，成分，内積の学習が行われる。この内容をみてみると前述のアンケートでの指摘にもあったように，空間に関する内容はほんの僅かであり，これが大学で学習する解析幾何や低次元位相幾何，または線形代数の内容につながらず，空間認識を貧弱にする原因となっていると考えられる。そこで数学Ｂ（Advanced）には空間ベクトルの内容に空間図形の方程式を付加した次のような内容を提案する。

ベクトル
ア．平面上のベクトル
　(ア)　ベクトルとその演算
　(イ)　ベクトルの内積
イ．　空間座標とベクトル
　(ア)　空間座標，空間におけるベクトル
　(イ)　空間図形の方程式

「(イ)　空間図形の方程式」の内容構成としては，(1)空間内の直線の方程式，(2)空間内の平面の方程式，(3)空間内での直線と平面の位置関係(4)空間内の球面の方程式という４つの項目が考えられる。(1)，(2)の空間における直線や平面の定義では平面でのベクトルと同様に空間における直線や平面ベクトル方程式から定義し，成分表示することで直線や平面の方程式を導き出すことでx，y，zの関係式として表すことができる。さらに(3)において空間内で直線と直線の関係（交わる，またはねじれの位置にあるなど），直線と平面の関係を，空間図形の方程式を用いて考察することで，空間図形の位置関係について直観的な理解であったものが，数式として数学的に理解されることから発展した空間認識につながるのではないかと考えられる。また，球面の方程式を学習することで，３次元空間における球面と平面の関係が２次元平面における円と直線の関係と同様であることを学習すれば，２次元平面と３次元空間の関係も数式として数学的に理解されるであろう。数学Ⅱにおける平面内の直線や円などを座標や式を用いた解析幾何的な方法で表現する方法の発展的なものとして，空間内の直線，平面などについても解析幾何的な表現方法を用いることで，空間内の直線や平面の関係について直観的な把握が数学的な認識にまで高まるのではないかと考えられ，アンケートで多数指摘された空間図形をイメージする力やセンスなどを育成できるのではないかと考えられる。

６．「数学Ｃ（Advanced)」について

数学Ｃは，数学的な素養を広げようとする生徒や，将来自然科学や社会科学の分野に進もうとする生徒が特性等に応じて，その内容を適宜選択して履修できるように構成されている。(1)行列とその応用では，行列の演算とその基本的な性質及びその応用を扱う。(2)式と曲線では，二次曲線の基本的な性質，媒介変数表示及び極方程式などを扱う。(3)確率分布では，確率の概念をより数学的にまとめるとともに，確率変数とその分布を扱う。(4)統計処理では，統計的な推測の考えを扱う。ただし，従前の数学Ｃは，目標の冒頭に「応用数理の観点から，コンピュータを活用して，…」

と示され，コンピュータを活用した学習を前提として内容が構成されていたが，今回の改訂では，すべての科目で学習の効果を高めるために必要に応じてコンピュータを活用するものとされ，この科目で特別にコンピュータを活用した学習を前提とした内容の構成とはなっていない。

ところで，アンケートで明らかになったことのうち，学習者全体への根本的な問題点として，自分で考えようとしない，数学への興味・関心がない，論証能力がない等々がある。これらは数学を将来も学習し，指導や研究を行っていくには，その欠如は致命的である。この対策は容易ではないが，われわれ自身が数学を学習してきた経験から，ここでは取りあえず，①学習した知識を整理・統合して理解させ，忘れたときでも自力回復できる学習となるようにする。②もっと楽しい数学の学習の体験となるように，具体的な事象や科学的体験と結びつけるようにする。等をあげ，これらの観点からの方策を提案してみたい。

また，アンケートで明らかになった数学Cの指導への具体的な提案としては，①行列については，大学の数学へ支障なく入れるように，学習内容を深める方向で指導する。②平面内における曲線としての関数のグラフの具体的な例に高等学校でたくさん触れられるようにし，また，漸近線の存在や対称性など，その図形の特徴を式から判断できるように指導する。等があげられている。そこで，以下，行列，式と曲線について，具体的な取り扱いを提案する。

①行列とその応用について

学習指導要領では内容を次のように定めている。

ア	行列	（ア）行列とその演算
		（イ）行列の積と逆行列
イ	行列の応用	（ア）連立１次方程式
		（イ）点の移動

このうち，「ア　行列」においては，３×３行列までの行列の演算について，加法，減法，実数倍，乗法，分配法則，結合法則，および２×２行列の逆行列などを扱い，「イ　行列の応用」においては，逆行列を利用した２元１次方程式の解法と，平面上の点の移動を扱う。

「行列式」は用語としては触れないが，「$\varDelta = ad - bc$ とすると…，$\varDelta = 0$ のときは…」などは教科書でも言及しているものもある。また，行列の対角化について，具体的な行列によって対角化を利用した行列の累乗計算が扱われることもある。しかし，その場合も対角行列にするため，ある行列を与えて考えさせることが前提であり，固有値や固有ベクトルには言及せず，計算テクニックとして示される場合が多い。

さらに，行列を利用した点の移動については，学習指導要領解説に，「ここでは点の移動だけを扱う。直線は点の集合だからといって，直線の移動も扱えるということではない。」（文部省，1999）と明確に示され，直線や曲線，図形の移動は扱わないものとされている。そのため，平面上の点の原点を中心とする回転移動は扱うが，二次曲線の回転は扱わないことになっている。

数学Ｃでは図形の移動について扱わないため，円錐曲線の回転移動も扱えない。従って円錐曲線については軸が座標軸に平行な場合のみを扱っている。結果として，代数方程式という数学的記述と平面図形との関係について，高等学校では直線と，軸が座標軸に平行な円錐曲線しか扱わない。そのため，生徒は，代数方程式のうち，$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ などのきわめて特殊な場合しか図形と結びつけて考えることができないことが多く，一般の代数方程式を図形と結びつける発想がなかなか生まれない。

そこで，数学Ｃ（**Advanced**）では，次のような内容を提案する。

ア	行列	（ア）行列とその演算
		（イ）行列の積と逆行列
イ	行列の応用	（ア）連立１次方程式
		（イ）１次変換

このうち，「ア　行列（イ）行列の積と逆行列」においては，行列式の用語や，$|A||B|=|AB|$ 程度の簡単な性質も扱いたい。

「イ　行列の応用（ア）連立１次方程式」の内容については，次の１次変換を扱う時間を確保するために深入りせず，最低限度とする。「イ　行列の応用（イ）１次変換」において，直線や曲線（たとえば $y = \frac{1}{x}$，$y = \sqrt{x}$，$y = x^2$）といった図形の対称移動や回転移動，相似変換などを扱うことにより，式と曲線における代数方程式と図形の関係の学習につなげる。また，行列式と面積の関係についても，簡単に触れる。

１次変換に関連して，固有値や固有ベクトル，対角化の扱いも考えたが，２単位の授業時数では無理であると判断した。

②式と曲線について

学習指導要領では，内容を次のように定めている。

ア	二次曲線	（ア）放物線
		（イ）楕円と双曲線
イ	媒介変数表示と極座標	

（ア）曲線の媒介変数表示
（イ）極座標と極方程式

これについても，数学Ｃ（Advanced）において新たな内容を取り入れるのではなく，数学Ｃ（Advanced）向けに内容の扱いを工夫するようにしたい。

・コンピュータによる曲線の表示などを積極的に行う。これによって，２次曲線の統合的な見方やいろいろな式表現のよさなどに関する考察を深める。

二次曲線について，それぞれの基本的な性質や表現を理解させた後，統合的な見方として，関数や方程式のグラフをコンピュータによって表示してみる。行列とも関連させて，二次曲線の回転移動や対称移動についても扱う。コンピュータで描いたグラフを観察して，それぞれの式表現等の理解を深めるのである。また次のように，いろいろな離心率で二次曲線を表示し，楕円，放物線，双曲線を，統合的に理解させるとともに，媒介変数表示や極方程式の学習の後には，更に深めて式による表現方法のよさなどについての考察を行う。

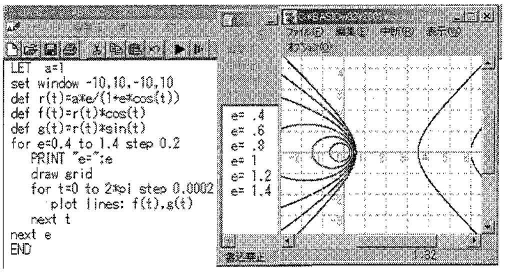

図２　十進 Basic による２次曲線の表示

これは，十進 BASIC [1)] で曲線のグラフを描かせた画面である。このソフトでは，グラフィック画面やテキスト画面が表示され，プログラムのステップ実行が可能で，プログラムの概念を理解させるのにも好都合である。離心率と楕円，放物線，双曲線との関係を目でしっかり見ることができる。

コンピュータをこのように活用する扱いによって，学習した知識を整理・統合して理解させ，忘れたときにも自力回復できる学習や，また楽しい数学学習の体験が可能となるであろう。具体的な事象や科学的体験を結びつけて考えていく手がかりにもなると思われる。

７．おわりに

本稿では，危惧する声の多い高・大教育課程のミスマッチといわれる問題について，現状の認識をできるだけ明らかにすることに努め，現実的に可能と思われる高等学校教育課程改善の一つの方策として，オプション科目数学Ａ，Ｂ，Ｃ（Advanced）を設定することと，その内容や取り扱いについて提案した。これは，単に大学からの要求に応えるためだけではなく，将来数学をさらに学んでいくためには，高等学校で修得しておくべきと考えた内容である。大学と高校はより一層連携し，学生・生徒に無理な要求をしてはいないか，今一度注意する必要があろう。

大学教官の立場から見ると，学習指導要領改訂のたびに高等学校数学の内容が，数学が本来もっているストーリーとは別にぶつ切りにされ，おもしろみがなくなってしまっているように思えて仕方がない。時間的に余裕がないのならば，例えば，集合論と論理，指数関数の微積分を大学教育に回すなど，思い切って内容を削減するのも一つの方法である。基本的な内容を一貫性，ストーリー性をもたせて構成し，その中で論理性，計算力，必然性を学ぶことができ，数学のおもしろみに浸れればと願う。

本提案には不十分な点も多々あろうと思われる。数学Ａ，Ｂ，Ｃは理科系に進学する生徒がほぼすべて選択するとはいえ，選択制である以上，学生の共通基盤がはっきりしないことに対する大学からの戸惑いも大きい。提案した教育課程の試行を附属高等学校で行いながら，問題点の検討を重ねるとともに，ご批判も仰ぎ，提案をより精緻なものにしていきたい。

謝辞

今回のアンケートにご協力いただいた広島大学教官の方々には，心より感謝申し上げたい。

参考文献等

文部省「高等学校学習指導要領解説　数学編理数編」実教出版，1999
西村和雄編「学力低下と新指導要領」岩波書店，2001
岡部・戸瀬・西村編「分数ができない大学生」東洋経済新報社，1999
１）http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/index.htm