

算数学習における理解過程に関する研究(Ⅱ)

—第2学年における三角形と四角形の内容を中心—

磯部 年晃 小山 正孝 中原 忠男
赤井 利行 中村 武司
(協力者) 影山 和也 吉田 香織 橋本 三嗣
和田 信哉 中西 正治 岩田 耕司

1. 目的と方法

本研究は、算数学習における子どもの理解過程を、理論的・実証的に解明しようとするものである。これまでの数学の理解過程に関する研究^{1), 2)}によって、数学的概念や原理・法則などを理解するという事は、本質的には、個々の子どもの心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、他方では、教室で行われる算数学習においては、子どもの理解過程はその子どもと教師、子ども同士の社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。そこで、本研究では、算数学習における理解過程を、これら個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて解明することを目的とする。

そのために、まず本研究の第1報³⁾では、理論的研究として、小山が構築した数学理解の2軸過程モデルについて、このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を、文献解釈的方法によって再検討した。そこで、本研究の第2報である本稿では、本研究における実証的研究として、小学校第2学年の子どもが三角形や四角形の内容を学習する際の理解過程に焦点を当て、事前調査、授業実践、事後調査を通して、これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明することとする。

2. 本研究の特色

幾何学習における数学的思考の特質を明確にとらえた数学学習の理論の1つに、ファン・ヒーレ (van Hiele) の「学習水準理論」がある^{4), 5)}。この理論では5つの思考水準が同定されているが、本稿で対象としている小学校第2学年における図形の学習は、次の

ような第1水準から第2水準への移行期に相当する⁶⁾。

第1水準 この水準では、幾何図形が全体として考察され、その形のみによって識別される。しかしながら、この水準では、図形の構成要素に着目することはできない。

第2水準 この水準では、知覚される形の分析が行われ、その結果、それらの諸性質が明らかにされる。しかしながら、この水準では、図形の諸性質が理論的にはまだ整理されないで、実験的な方法のみによって確立されている。

このようなファン・ヒーレの思考水準についてのこれまでの研究^{7), 8)}においては、質問紙調査によって子どもの思考水準を同定する研究は多くなされ、その結果が報告されているが、図形学習を通して子どもの思考水準がどのように変容するかについてはほとんど報告されていない。本研究は、対象とする子どもの数が少ないので一般性には欠けるが、授業実践を通して、教室における個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて、その変容の過程を具体的に解明しようとしている点に大きな特色がある。

3. 2年生の三角形概念の理解に関する事前調査

まず、授業実践を行う前の第2学年の子どもたちの平面図形(特に三角形と四角形)についての理解の程度を調べるために、平成13年11月26日に、1クラス38名(男子20名、女子18名)の子どもたちを対象にして、40分間で質問紙法により事前調査を行った。

以下では、三角形についての子どもの理解の程度を調べるために行った事前調査についてのみ述べる。

(1) 事前調査のねらい

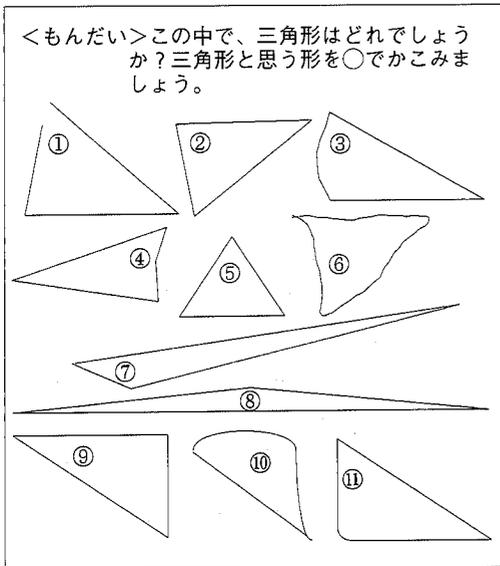
この事前調査では、次のことをねらいとした。

Toshiaki Isobe, Masataka Koyama, Tadao Nakahara, Toshiyuki Akai, Takeshi Nakamura, Kazuya Kageyama, Kaori Yoshida, Mitsugu Hashimoto, Shinya Wada, Masaharu Nakanishi, and Koji Iwata: Research on the Process of Understanding in Elementary School Mathematics Learning (Ⅱ)—Focusing on Second Graders' Conception of Triangle and Quadrilateral—

閉じている図形や閉じていない図形、直線や曲線で構成された図形の中から、「三角形はどれか」という観点で同定させることを通して、学習前の子どもたちの三角形概念についての理解の程度を把握する。すなわち、図形を頂点の数に着目して見ているか、直線で構成されているかどうかに着目して見ているか、閉じているかどうかに着目して見ているか、また概形や大きさ、向きに惑わされていないか、などを明らかにすることである。

(2) 事前調査の問題

そのために、次のような11個の図形を子どもたちに提示し、三角形の同定を行わせた。



(3) 事前調査の結果

子どもの反応

・①を選択した子ども	……………	3名/38名 (8%)
・②を選択した子ども	……………	33名/38名 (87%)
・③を選択した子ども	……………	0名/38名 (0%)
・④を選択した子ども	……………	11名/38名 (29%)
・⑤を選択した子ども	……………	38名/38名 (100%)
・⑥を選択した子ども	……………	0名/38名 (0%)
・⑦を選択した子ども	……………	23名/38名 (61%)
・⑧を選択した子ども	……………	25名/38名 (66%)
・⑨を選択した子ども	……………	31名/38名 (82%)
・⑩を選択した子ども	……………	0名/38名 (0%)
・⑪を選択した子ども	……………	2名/38名 (5%)

このような事前調査の結果から、学習前の子どもたちの実態として、以下のことが明らかになった。

ア. 図形③、⑥、⑩を選択した子どもが一人もいないことから、すべての子どもが三角形を直線で構成されているものと理解している。

イ. 図形①、⑪を選択した子どもが2、3名いることから、3本の直線で構成されている場合には完全に閉じていない図形でも、あるいは1つの角が多少丸みをおびている図形でも、それを三角形であると判断する子どもが少しいる。

ウ. 図形②、⑨を選択した子どもが30余名で、数名の子どもが選択しなかったということから、図形の向きによっては（特に、典型的な上向きに置かれていない場合には）、それを三角形と判断できない子どもが数名いる。

エ. 図形⑦、⑧を選択した子どもが60%余で、約40%の子どもが選択しなかったことから、図形の大きさによっては（特に、最も長い辺に対する高さが極端に小さく細長い場合には）、それを三角形と判断できない子どもが4割近くいる。

オ. 図形④の凹四角形を選択した子どもが約30%いることや、図形⑦、⑧の細長い三角形を選択しなかった子どもが約40%いることから、子どもが図形を同定する際の視点としては、頂点や辺などの構成要素の数よりも「概形としてのかたち」という全体的な見えの方が優位である。

4. 第2学年「三角形と四角形」における授業の検討

(1) 理解過程を明らかにするための授業の全体計画

平面図形をその全体的なかたち（概形）として見ている第2学年の子どもたちが、その構成要素をもとにどのように理解していくのか、これが研究の出発点である。子どもたちは第1学年の学習において、平面図形や立体図形をその機能的な側面に着目して分類することができるようになってきている。その際の図形を分類する視点は、主に「概形としてのかたち」である。その上に立って第2学年では、平面図形を構成要素をもとに分析的に理解することがねらいとされている。その際の子どもの平面図形に対する認識の変化は何によって促されるのであろうか。そのことを明らかにするために、第2学年単元「三角形と四角形」を設定し、実践研究を行った。

【授業担当者】広島大学附属小学校 磯部 年晃

【授業学年】広島大学附属小学校 2部2年

(男子20名、女子18名 計38名)

①単元名 「ジオボードで形をつくろう」

(教科書単元名 「三角形と四角形」)

②指導目標

- ジオボードで構成された図形を観察・分類するなど、算数的に処理することのよさに気づくことができる。また、図形の調和のとれた形の美しさや、組み合わせでできる美しさを、具体的な操作活動を通して感じることができる。
- ものの形についての観察や構成などの活動を通して、その相違や共通点、図形の性質を考えることができる。
- ものの形についての観察や構成などの活動を通して、三角形や四角形を弁別したり、作図したりすることができる。
- 直線概念を理解し、三角形と四角形の定義や性質が分かる。

③指導計画（全11時間）

第1次 ジオボードで形をつくろう……………2時間

第2次 三角形・四角形を調べよう……………5時間

第3次 直角のある図形をつくろう……………4時間

本稿では、以下に、この授業の全体計画における第1次の2/2時と第2次の3/5時の2時間の授業について詳しく述べる。

(2) 第1次の2/2時の授業の計画

実態調査から明らかになった「図形を概形で見る見方」から、本単元の目標である「図形を構成要素の数で見る見方」への、図形理解の変容を明らかにするために、次の2つの点に着目して授業づくりを行った。

- ① 第1学年で獲得した、図形をその機能で見る見方や概形で見る見方といった現在の自分自身の図形に対する認識をもとに、図形を分類・操作することができる課題追究の場の工夫
- ② 図形の多様な認識のよさを共有し、吟味することができる社会的相互作用にもとづく反省化の場の工夫

①課題の提示と課題追究の場の工夫

本時（第1次の2/2時）においては、前時までのジオボード、ジオペーパーによる図形の構成活動で作りだされた多様な三角形、四角形の分類の仕方を課題として取り上げる。この段階において子どもの図形のとらえ方は子どもによって個々ばらばらであり、そのズレは子どもの今までの図形の見方の違いである、ととらえられる。

図形の多種多様な分類の仕方を課題として取り上げることで、図形の見方を子ども自身にはっきりと意識させ、授業後に、新たに加わった見方は何か、それによって図形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせることができるように工夫した。

②図形の多様な認識を共有し、吟味することができる

社会的相互作用の場の工夫

子どもたちが分類する図形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値ある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な分類の視点を意味づけたり、関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして、子どもたちに多様な図形分類の視点を表出させ、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得いく考えを創り出させることが考えられる。

本時においては、反省化の段階において、子どもたちの図形のとらえ方のズレを吟味する段階がこれにあたる。より数学的な図形の見方を子ども自身にはっきりと意識させ、社会的相互作用によって新しい図形の見方の形成を図ることにした。

(3) 第2次の3/5時の授業の計画

子どもの凹四角形の理解の変容を明らかにするために、自分自身の図形に対する認識を明らかにすることができる課題追究の場と、図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用にもとづく反省化の場の2つに着目して、以下のようにして授業づくりを行った。

①課題の提示と課題追究の場の工夫

ア. 子どもたちに共有させる課題提示の場の工夫

本時（第2次の3/5時）においては、前時までのジオボードによる三角形や四角形の構成活動で作りだされた凹四角形のとらえ方を課題として取り上げる。この図形のとらえ方は子どもによって個々ばらばらであり、そのズレは子どもの図形の見方の違いであるととらえられる。

凹四角形のとらえ方を課題として取り上げることで、図形の見方を子ども自身にはっきりと意識させ、授業後に、新たに加わった見方は何か、それによって図形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせることができるように工夫した。

イ. 多様な学習具による課題追究活動の場の工夫

子どもたちに「凹四角形は三角形か四角形か」という課題について、自分自身の図形の見方をはっきりさせるためには、学習具を限定せずに追究させることが大切であると考え。例えば、辺の数に着目した子どもにとっては、辺の数がよく分かる数え棒で図形をつくりかえることで自分の見方をはっきりするであろう。また、課題の条件にあう他の図形を構成しようとする子どもにとっては、頂点の位置を自由に変えて図形をつくりことができる「ジオボード」や「ジオペーパー」という教具をつかった方が分かりやすいであろう。このように、多様な学習具を子どもが自己選択できるように場を工夫することで、子どもに自分自身の図形の

とらえ方を明確にさせることができると考えた。

②多様な凹四角形の認識を共有し、新たな図形認識の観点から凹四角形を吟味することができる社会的相互作用の場の工夫

子どもたちが意味づける凹四角形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値ある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な発想を意味づけたり、関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして、子どもたちに図形の多様なとらえ方を表出させ、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得いく考えを創り出させることが考えられる。

本時においては、反省化の段階において、子どもたちの凹四角形のとらえ方のズレを吟味する段階がこれにあたる。より数学的に凹四角形をみる見方を子ども自身にはっきりと意識させ、社会的相互作用によって新しい図形の見方の形成を図ることにした。

5. 第2学年「三角形と四角形」における授業の実際

(1) 第1次の2/2時の授業の実際

《本時の目標》

ジオボードで作りだした多種多様な三角形や四角形、五角形を、辺の数、頂点の数、全体的な形、角の形といった視点から分類することができる。

《授業の流れ》

[意識化]

まず、前時までに構成した図形を提示し、「自分なりの視点で仲間わけしよう」という本時の学習活動の方向性を確認する段階である。

T1 みなさん、今日は、この図形（図1～10）をつかって研究をしたいと思います。どんな研究ができますか。気づいたことを発表してください。

C1 この前の時間、みんなで作った図形だ。さんかくやしかくがたくさんあります。

C2 さんかくの帽子をつけたお家みたいな図形（図4）もあります。

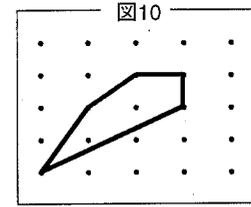
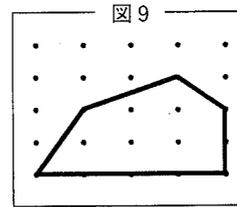
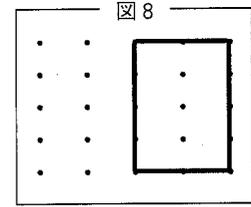
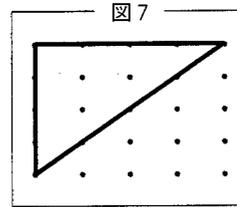
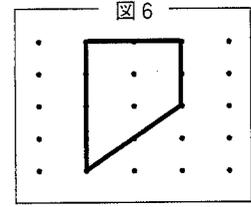
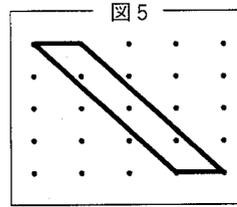
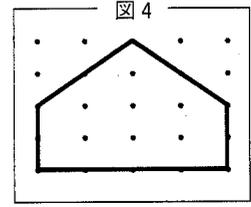
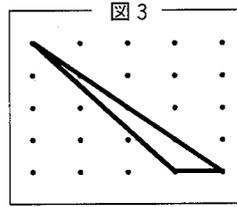
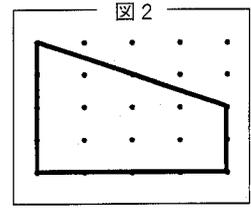
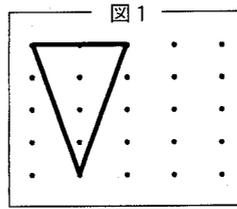
C3 カッターナイフの刃みたいな図形（図6）もあるよ。

C4 すごく細い図形もあります。

C5 これ（図3）とこれ（図5）は、とっても形が似ているね。

C6 えー。これ（図3）は、こっち（図1）とよく似ているよ。

T2 みなさんの気づきを聞いてみると、みなさんがつくった図形は、よく似たものがたくさんあるみたいですね。今日の研究では、前の時間にみなさ



んがつくった図形を仲間わけしてみましょう。仲間わけをするときには、どんなところを見ていきますか。

C7 形で見えていきます。

T3 形を見るって、もっと詳しく言ったらどんなところを見るのですか。

C8 さんかくとかしかくとかいった形です。

C9 他にもあるよ。太った形とかやせっぽっちの形とかでも見られます。

T4 たくさん出てきたね。他の見方で見る人はいないかな。

C10 かどっこがいくつあるかで仲間わけをします。

C11 線が何本あるかで仲間わけができそうです。

——子どもの反応——

- ① さんかくやしかくといった概形から図形を分類しようとしている 8名/38名 (21%)
- ② 細長い形, 太った形といった特徴から図形を分類しようとしている 3名/38名 (8%)
- ③ 辺の数を調べて図形を分類しようとしている 11名/38名 (29%)
- ④ 頂点の数を調べて図形を分類しようとしている 15名/38名 (39%)
- ⑤ 角の形をもとに図形を分類しようとしている 1名/38名 (3%)

[操作化]

次に、子どもが自分なりの視点で図形を分類する段階である。子どもたちは、上述の観点から、次のように図形を分類した。

——子どもの反応——

- ① <さんかくやしかくといった概形から図形を分類しようとしている子ども>
 - ア) 図6, 図9, 図10を集めて、「カッターナイフの刃の形」の仲間として、1つの集合をつくった。 3名/38名 (8%)
 - イ) 図2, 図4, 図9を集めて、「お家の形」の仲間として、1つの集合をつくった。 5名/38名 (13%)
- ② <細長い形, 太った形といった特徴から図形を分類しようとしている子ども>
 - ウ) 図3, 図5, 図9, 図10を集めて、「細長い形」の仲間として、1つの集合をつくった。 2名/38名 (5%)
 - エ) 図4, 図6, 図7, 図9を集めて、「太った形」の仲間として、1つの集合をつくった。 1名/38名 (3%)
- ③ <辺の数を調べて図形を分類しようとしている子ども>と
- ④ <頂点の数を調べて図形を分類しようとしている子ども>
 - オ) 辺の数, 頂点の数がそれぞれ5つずつあることから、「5つの辺」の仲間や「5つの角」の仲間として、図4, 図9, 図10を集めて、1つの集合をつくった。 26名/38名 (68%)
- ⑤ <角の形をもとに図形を分類しようとしている子ども>
 - カ) 直角に着目し, 図2, 図4, 図6, 図7, 図8, 図9, 図10を集めて1つの集合をつくり, 「まっすぐな角がある」仲間とした。

1名/38名 (3%)

[反省化]

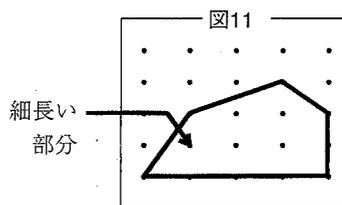
この段階では、子どもたちの図形の分類の視点について吟味を行い、図形の見方の共通点や相違点の気づきを出しながら、より数学的に価値ある、子どもたちにとって納得のいくとらえ方へと高めていく段階である。

(まず初めに、形での分類を取り上げて…)

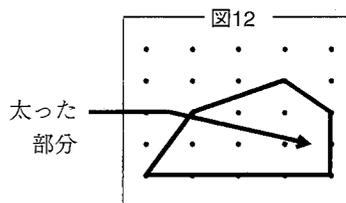
C12 ほくは、これとこれとこれとこれ(図3, 図5, 図9, 図10)を集めて、「細長い形」の仲間になりました。

C13 えー, おかしいよ。これ(図9)は細長くないよ。太ってるよ。

C14 そんなことないよ。ここ(図11の矢印部分)はだんだん細くなっているよ。だから、「細長い形」の仲間だよ。



C15 絶対ちがうよ。後ろの方(図12の矢印部分)は太ってるよ。これは、「太った形」の仲間だよ。



T5 意見が分かれていますね。みんなは、どちらのとらえ方に賛成ですか。

C16 ほくは、細長い仲間だと思います。太った仲間だとすると、太った仲間はこれ(図2)もはいるから、おかしくなると思います。

C17 私は、賛成でも反対でもないです。これ(図9)は、「カッターナイフの刃」の仲間だと思います。だから、これ(図9)はこっち(図6, 図10)の仲間です。

T6 どんどん考えが分かれていますね。形で分けていない人は、どんな意見を持っていますか。

C18 形で分けるといろいろな名前が付いて面白いけど、みんなバラバラで分からなくなりそうです。

T7 それでは、みんながこれだったら納得できると

思える考えの人はいませんか。

- C19 わたしは、角の数でしらべました。角の数だとこれ(図1)は3つのがすぐ分かるから便利です。
- T8 そうするとこれ(図9)は、どんな仲間になるのかな。
- C20 これは、角が5つだから、これとこれとこれ(図4, 図9, 図10)で「角が5つ」の仲間です。
- C21 ぼくも一緒になったよ。ぼくのは「線が5つ」の仲間だけど、仲間にした図形は一緒だよ。
- T9 角の数や線の数で調べた人はみんな一緒になったみたいですね。形で調べた人は、この考えをどう思いますか。
- C22 そのやり方のほうが、みんなバラバラにならないから便利だと思います。

〔協定化〕

最後は、子どもたちが新しく獲得した図形を分類する視点について整理し、次時への課題を構成する段階である。

- T10 今日の研究で、発見したことを発表してください。
- C23 仲間に分けるときは、形で名前を付けるのが面白いけど、みんなに分かるのは線とか角の数で調べるやり方です。
- C24 角の数で分けるのが一番簡単な。だって目で見て分かるもん。
- T11 そうですね。では、次の時間はどのような研究ができますか。
- C25 角が3つの形や4つの形をもっともってつくってみたいです。
- T12 それでは、次の時間は、角や線の数を決めて図形をたくさんつくってみましょう。

《授業の考察》

①課題の提示と課題追究の場の工夫について

本時(第1次の2/2時)においては、前時に子どもたちがジオボード(5×5)で構成した図形の中から、特徴的なものを取り上げ、分類することを課題とした。子どもたちのC1, C2, C3, C4の発言からも明らかのように、この段階では子どもの図形の見方の違いを明確にすることができたと言える。また、C5, C6の発言から、子どもたちは、互いの図形のとらえ方に違いがあることに気づいていることが分かる。

このことから、前時に構成した図形を取り上げ、どのように分類できるかを課題として提示したことは、子どもに自分自身の図形の見方をはっきりさせ、自分のもっている数学的な知識を用いて、平面図形を意味づける姿を生み出すことができたと考えられる。

②図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫について

本時の課題追究の場においては、形で見る見方と線(辺)や角(頂点)といった構成要素で見る見方に、意識化の段階から分かれていた。そこで、反省化においては形で見る見方による分類をはじめに取り上げ、形で見る見方は多様であるが、図形を統一的にとらえにくいことを明らかにすることができた。そこで、みんなが納得できるとらえ方はないかを話し合う中で、辺や頂点の数で見るよさを明らかにできたと言える。

このようにして、それまで概形に着目してしまっていた図形の構成要素に着目することができなかった11名(①と②)の子どもたちも、反省化の段階で図形をみる新たな見方のよさを実感したことにより、図形の認識を変化させることができたのである。それゆえ、子どもの図形の理解を深めるためには、図形の多様な認識を共有し、吟味し合う場が有効であると言える。

③事後調査の結果

この授業の終了後に、事前調査と同一問題を用いて、子どもたちの三角形概念の認識について再調査した。

——子どもの反応——

- | | | |
|------------|------|---------------|
| ・①を選択した子ども | ………… | 0名/38名(0%) |
| ・②を選択した子ども | ………… | 38名/38名(100%) |
| ・③を選択した子ども | ………… | 0名/38名(0%) |
| ・④を選択した子ども | ………… | 8名/38名(21%) |
| ・⑤を選択した子ども | ………… | 38名/38名(100%) |
| ・⑥を選択した子ども | ………… | 0名/38名(0%) |
| ・⑦を選択した子ども | ………… | 36名/38名(95%) |
| ・⑧を選択した子ども | ………… | 35名/38名(92%) |
| ・⑨を選択した子ども | ………… | 38名/38名(100%) |
| ・⑩を選択した子ども | ………… | 0名/38名(0%) |
| ・⑪を選択した子ども | ………… | 0名/38名(0%) |

このような事後調査の結果から、学習後の子どもたちの実態として、以下のことが明らかになった。

ア. 事前調査の結果と同様に、図形③, ⑥, ⑩を選択した子どもが一人もいないことから、すべての子どもが三角形を直線で構成されているものと理解している。

イ. 事前調査では図形①, ⑪を選択した子どもが2, 3名いたが、事後調査では一人も選択しなかったことから、完全に閉じていない図形や1つの角が多少丸みをおびている図形を三角形であると判断する子どもがいなくなった。

ウ. 事前調査では数名の子どもが図形②, ⑨を選択しなかったが、事後調査ではすべての子どもがこれらの図形を選択したことから、図形の向きという三角形

概念にとって本質的でない属性が捨象されている。

エ. 事前調査では約4割の子どもが図形⑦, ⑧を選択しなかったが, 事後調査では90%余りの子どもがこれらを三角形であると判断できるようになった。しかし依然として, 2, 3名の子どもはこれらを三角形と判断できていない。

オ. 事前調査では図形④の凹四角形を選択した子どもが約30%いたが, 事後調査でも依然として約20%の子どもがこの図形を三角形だと判断している。

これらのことから, 子どもたちにとって, 図形を特定する際の視点としては, 「概形としてのかたち」という全体的な見えよりも頂点や辺などの構成要素の数の方が優位になってきていることが分かる。しかしながら, 図形④の凹四角形については, 図形を構成要素の数に着目して見る見方を活用できていないことが分かった。その理由として, 凹四角形の形の特殊性が考えられる。そこで, 次の第2次の授業実践では, 子どもの図形認識を広く活用できるようにすることを目的として, 凹四角形の認識を課題として取り上げ, 実践を行った。

(2) 第2次の3/5時の授業の実際

《本時の目標》

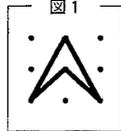
凹四角形は三角形か四角形かについて, 辺の数, 頂点の数という視点から明らかにすることができる。

《授業の流れ》

[意識化]

まず, 前時までに構成した図形の中から, 子どもたちが十分に分類できなかつた凹四角形を提示し, 「三角形か, 四角形かにしよう」という本時の学習活動の方向性を確認する段階である。

T1 みなさん, 今日はこの図形(図1)をつかって研究をしたいと思えます。どんな研究ができますか。気づいたことを発表してください。



C1 この前の時間, みんなで悩んだ図形だ。これ三角形だよな。

C2 四角形だよ。へっこんでいる三角形なんておかしいよ。

C3 絶対, 三角形だよ。こんな形の四角形なんてないよ。

C4 角が4つあるから四角形だよ。

C5 ここ(図2の○の部分)は角って言わないよ。外にとんがってないよ。だからこれは三角形だよ。



T2 みんなの意見を聞いてみると, この図形は, 三角形か四角形かはっきりしないみたいですね。今日の研究では, この図形が三角形か

四角形かをはっきりさせましょう。どうしたらはっきりさせることができるかな。

C6 辺の数を調べたらいいです。

C7 これと似た形をジオボードでたくさん作って調べたら, 三角形という証拠がたくさん出てくると思います。

C8 数え棒をつかって同じ形を作ってみたら, 辺や頂点がいくつあるか分かると思います。

——子どもの反応——

- ① 凹四角形を概形から三角形だととらえている
12名/38名 (32%)
- ② 凹四角形を構成要素の数から四角形だととらえている
22名/38名 (58%)
- ③ 凹四角形は三角形か四角形かはっきり分からない
4名/38名 (11%)

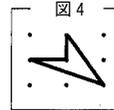
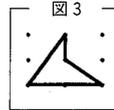
[操作化]

次に, 凹四角形が三角形か四角形かの根拠を探す段階である。

——子どもの反応——

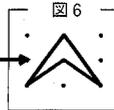
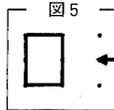
① <凹四角形は三角形と考えている子ども>

ア) ジオボードで凹四角形を数個つくり, 概形が三角形になることを確かめている。(図3, 4)



7名/38名
(18%)

イ) 正方形や長方形との違いを調べて, 三角形になることを確かめている。(図5, 6)

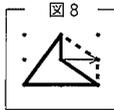
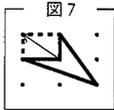


5名/38名
(13%)

② <凹四角形は四角形と考えている子ども>

ウ) 辺の数, 頂点の数をはっきりさせるために, 粘土と数え棒で図1と同じ形を構成し, 四角形になることを確かめている。15名/38名 (39%)

エ) ジオボードでへこんだ角の部分进行操作して, 辺の数と頂点の数を確かめている。(図7, 8)



7名/38名
(18%)

③ <凹四角形は三角形か四角形か, はっきり分からない子ども>

イ) 正方形や長方形との違いを調べて, 三角形になることを確かめている。

1名/38名(3%)

ウ) 辺の数, 頂点の数をはっきりさせるために, 粘土と数え棒で図1と同じ形を構成している。

3名/38名(8%)

[反省化]

この段階では, 子どもたちの凹四角形のとらえ方について吟味を行い, 図形の見方の共通点や相違点の気づきを出しながら, より数学的に価値ある, 子どもたちにとって納得のいくとらえ方へと高めていく。

(上記のア, イ, ウの図形のとらえ方を発表させて…)

C9 (ウ) 辺の数と頂点の数は確かに4つになると思います。でもそれだったら, いままで三角って思っていたものも, 四角形になったりするから分かりにくくなります。

C10 でも, 三角形は辺も頂点も3つだから, やっぱり三角形じゃないと思います。

C11 やっぱり四角形には見えないよ。ぱっと見て三角っぽいから三角形でいいんじゃないかな。

C12 見た目で決めたら絶対おかしいよ。辺の数が4つだから絶対, 四角形だよ。

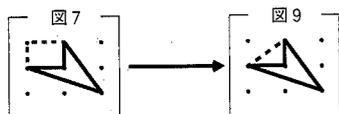
T3 なかなかみんなが納得できませんね。他の調べ方で三角形になるか四角形になるかを調べたお友達に発表してもらいましょう。

(エの操作による図形のとらえ方を発表させて…)

T4 このやり方(エの操作)だと, 今日の課題の形は四角形になるけど, みなさんの考えはどうですか。

C13 これ(エの操作)だと点の場所が1つ外側に行っただけで, 四角に見えてくるから, やっぱり四角形になると思います。

C14 えっ, 点の場所をずらしていいのなら, こんなずらし方(図9)でも, いいじゃないですか。これだったら三角形だよ。

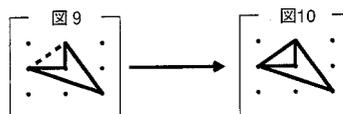


C15 それは, おかしいと思います。それ(図9のやり方)だったら, 頂点が1つなくなっています。それだったら, 四角形は全部三角形になってしまいます。

C16 点の数を変えるのはルール違反だよ。

C17 今の(図9の操作)を見て思ったんだけど, (ジオボードにもう1本輪ゴムをかけて), こうやったら(図10)2つの三角形ができるよ。2つの三角形に分けられるから, やっぱり四角形じゃ

ないかな。



C18 えー。四角形は全部三角形に分けられるの。

C19 三角形も点と点を結んだら2つの三角形ができると思います。

T5 みんなの中から, 三角形か四角形かをはっきりさせる面白い考えが出てきたね。それでは, 別の三角形や四角形で試してみましよう。

C20 今まで研究してきた三角形は, 分けられないよ。

C21 四角形は, 1つとばしの点で2つの三角形に全部分けられるよ。

C22 やっぱり四角形みたいだね。

T6 三角形は2つに分けられないみたいですね。

C23 三角形には1つとばしの点がないからです。

[協定化]

最後は, 子どもたちが新しく獲得した凹四角形のとらえ方について整理し, 次時への課題を構成する段階である。

T7 今日の課題の図形は, 三角形ととらえられるかな, それとも四角形ととらえられるかな。

C24 四角形だと思います。はじめは三角形だと思っていたけど, 分けられるから四角形になると思います。

T8 今日の研究で, みんなが納得できる図形の見方は図形のどんなところを見ていくことかな。

C25 辺の数や頂点の数です。

C26 それだけじゃないよ。分けることができると, 一番ははっきり分かるよ。

C27 先生, 四角形っていろいろあるんだね。

T9 そうですね。では, 次の時間はどのような研究ができますか。

C28 もっといろいろな形の四角形をたくさん見つけたい。

C29 もっと点々がたくさんあるジオボードで四角形をつくってみたい。

T10 次の時間は, もっと点がたくさんあるジオボードで, もっとたくさんの四角形を見つけてみましょう。

《授業の考察》

①課題の提示と課題追究の場の工夫について

本時(第2次の3/5時)においては, それまでの学習の流れと子どもの疑問を重視して, 教科書では普通扱わない凹四角形のとらえ方を, 敢えて学習課題として取り上げた。実際, 子どもたちのC1, C2, C

3, C4の発言からも明らかなように、この授業の意識化の段階では子どものこの図形に対する見方の違いを明らかにすることができた。

また、子どもたちに「凹四角形は三角形か、四角形か」についての自分自身の図形の見方をはっきりさせるために、学習器具を限定せずに追究させたことは、操作化の段階に見られるように、子ども自身のもっている数学的な知識を用いて平面図形を意味づける活動につながったと言える。

②図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫について

本時の最初の課題追究の場においては、平面図形を分割するという方法は、子どもたちの発想にはなかった。しかし、その後の反省化の段階で、ジオボードを用いて図形を操作する中から「四角形は、1つとばしの頂点を結ぶことで、2つの三角形に分割できる」という新たな発想が創発した。このことが結果として、「凹四角形は、三角形ではなく、四角形だ」という全員の納得を生み、子どもたちの平面図形の理解を深めることにつながった。このようにして、それまで凹四角形についてはその概形に着目してしまっただけで構成要素に着目することができなかった12名の子どもたちも、この授業の反省化の段階で、図形を見る新たな見方が加わったことにより、図形の認識を変化させることができたのである。それゆえ、子どもの図形の理解を深めるためには、図形の多様な認識を共有し、吟味し合う場が有効であると言える。

6. 結論

本稿では、小学校第2学年の子どもが三角形や四角形を学習する際の理解過程に焦点を当てて、事前調査、授業実践、事後調査を通して、これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明しようとした。本稿で対象としている小学校第2学年における図形の学習は、ファン・ヒーレの思考水準における第1水準から第2水準への移行期に相当する。そして、対象とする子どもの数（1クラス38名）が少ないので一般性には欠けるが、授業実践を通して、教室における個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて、その変容の過程を具体的に解明しようとしている点に本研究の大きな特色があると言える。

小学校第2学年の子どもが三角形や四角形を学習する前に実施した事前調査によって、①すべての子どもが三角形を直線で構成されているものとして理解している、②完全に閉じていない図形でも、あるいは1つの角が多少丸みをおびている図形でも、それを三角形であると判断する子どもが少しいる、③図形の

向きによっては、それを三角形と判断できない子どもが数名いる、④図形の大きさによっては、それを三角形と判断できない子どもが4割近くいる、⑤子どもが図形を同定する際の視点としては、頂点や辺などの構成要素の数よりも「概形としてのかたち」という全体的な見えの方が優位である、という理解の程度が明らかになった。

そこで、こうした実態を踏まえて、子どもたちが三角形や四角形を、構成要素に着目して分析的に理解できるようにするために、全11時間の授業計画を立てて、実践した。さらに、事後調査を実施して、学習による子どもの理解の変容を把握しようとした。

第1次の2/2時の授業後に実施した事後調査の結果から、①すべての子どもが三角形を直線で構成されているものとして理解している、②完全に閉じていない図形や1つの角が多少丸みをおびている図形を三角形であると判断する子どもはいない、③図形の向きという三角形概念にとって本質的でない属性が捨象されている、④図形の大きさ（形）に惑わされる子どもはほとんどいない、⑤約2割の子どもが依然として凹四角形を三角形だと判断している、とうことが明らかになった。

このように、上記⑤を除いて、学習の成果として、子どもたちが図形を同定する際の視点として、「概形としてのかたち」という全体的な見えよりも「頂点や辺の数」という構成要素の数の方が優位になった。それは、授業の考察のところで述べたように、課題の提示と課題追究の場を工夫し、子どもたちの図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場を工夫した成果であると言える。

しかしながら、上記⑤のように、凹四角形については、約2割の子どもたちが図形を構成要素の数に着目して見る見方を活用できていないことも明らかになった。しかも、第2次の1/5時の授業において、「三角形は、辺の数と頂点の数が3つの図形」、「四角形は、辺の数と頂点の数が4つの図形」という子ども同士の間での合意事項（定義に相当）にもかかわらず、「凹四角形は、三角形か、四角形か」で子どもたちは悩んでいた。そこで、第2次の3/5時の授業においては、それまでの学習の流れと子どもの疑問を重視して、教科書では普通扱わない凹四角形のとらえ方を、敢えて学習課題として取り上げた。この授業では、子どもたちみんなが納得できる「凹四角形が三角形か四角形かの根拠」をはっきりとさせることが学習のねらいとなっており、それについての学習によって、ファン・ヒーレの思考水準における第1水準から第2水準への移行を確認することができた。それは、換言すれば、小山

が構築した数学理解の2軸過程モデルの水準が上昇したことを意味している。その結果、「四角形は、1つとばしの頂点を結ぶことで、2つの三角形に分割できる」という、この教室の子どもたちはもちろん教師にとっても新しい考えが創発し、「凹四角形は、三角形ではなく、四角形である」という全員の納得を生み、子どもたちの平面図形の理解を深化させることにつながったのである。

このように子どもたちの理解が深化したのは、なぜだろうか。その結論を端的に言えば、教師が子どもたちの理解の程度や課題意識を把握して授業を計画し、子どもたち自身が個人的構成と社会的構成を行ったからだと言えよう。ここでの個人的構成とは、授業の実際のところで詳しく述べられているように、主として、意識化や操作化の段階における活動であり、社会的構成とは反省化や協定化の段階における活動である。

具体的には、第1次の2/2時の授業では、まず意識化の段階で、子どもたち自身が前時にジオボードで作りだした図形を見て、個々の子どもが独自の視点から形に着目したり、図形の類似点や相違点に気づいたりしている。そして、操作化の段階では、一人ひとりの子どもが実際に図形を仲間分け(分類)している。それをもとに、反省化の段階では、仲間分けの結果とその観点について子どもたちが話し合い、教室のみんなが納得できる考えは何かという議論から、協定化の段階では、「仲間分けがバラバラにならないで、便利な考え方」として「角(頂点)の数」,「線(辺)の数」で調べればよいことが合意されている。

また、第2次の3/5時の授業では、まず意識化の段階で、凹四角形が三角形か四角形かについて、個々の子どもが判断やそのことをはっきりさせるための見通しをもってきている。そして、操作化の段階では、一人ひとりの子どもが、粘土と数え棒、ジオボードを用いて、各自の見通しのもとに三角形か四角形かの判断の根拠を探究している。その後、反省化の段階では、判断の根拠について子どもたちが話し合っている。その中で、「ジオボードで内側に凹んだ角の部分(頂点)を操作して、凸四角形に変形して辺の数と頂点の数を確かめる」という子どもの考えと、それに対して「点(頂点)の場所をずらしてもよいなら、三角形になる」という子どもの反論が契機となって、それまでにはなかった「凹四角形は2つの三角形に分けられる」という新しい考えが創発しているのである。そして、この新しい興味深い考えを別の三角形や四角形で試すことによって、協定化の段階では、みんなが納得できる図形の見方として、「辺の数や頂点の数」,「分けることができるかどうか」ということが合意されている。

このように、算数学習において個人的構成と社会的構成の両方の活動が行われてはじめて、教室における個々の子どもや子どもたちの理解が深化し得ると考えられる。とりわけ、操作化の段階において一人ひとりの子どもの個人的構成を重視し、その結果としての多様な認識や考えを生かして、反省化の段階において教師が子どもたちの社会的構成を組織化することによって、それら多様な認識や考えを子どもたちが共有し、吟味しあうことが重要であり、そのようなことができる教室の雰囲気が必要不可欠である。

【付記】

本稿は、平成13年度科学研究費補助金基盤研究(C)(2) (代表者小山正孝, 課題番号13680306) の研究成果の一部である。

参考文献

- 1) 小山正孝(1997)「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 2) Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol.5, pp.21-33.
- 3) 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文(2000)「算数学習における理解過程に関する研究(I)」, 『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』, 第28号, pp.117-123.
- 4) van Hiele, P. M. (1986) *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press, Inc.
- 5) 小山正孝(1987)「van Hieleの『学習水準理論』について」, 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 第47・48巻, pp.48-52.
- 6) 小山正孝(2001)「数学教育における指導方法の基礎理論」, 数学教育学研究会編『新版数学教育の理論と実際(中学校・高校)』, 聖文社, pp.38-47.
- 7) Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986) Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.17, pp.31-48.
- 8) Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992) Geometry and Spatial Reasoning. In Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, pp.426-434.