日本機械学会論文集(C編)
69巻681号(2003-5)
論文 No. 02-0889

不確定大規模むだ時間システムの分散2次コスト保証制御*

向谷博明*1, 水上孝一*2

Decentralized Quadratic Guaranteed Cost Control of Uncertain Large-Scale Interconnected Delay Systems

Hiroaki MUKAIDANI*3 and Koichi MIZUKAMI

*3 Graduate School of Education, Hiroshima University,
1-1-1 Kagamiyama, Higashi-hiroshima-shi, Hiroshima, 739-8524 Japan

The guaranteed cost control problem of the decentralized robust control for large-scale interconnected delay systems with the norm-bounded time-varying parameter uncertainties and a given quadratic cost function is considered. Sufficient conditions for the existence of guaranteed cost controllers are given in terms of linear matrix inequality (LMI). It is shown that the decentralized local state feedback controllers can be obtained by solving the LMI.

Key Words: Uncertain Large-Scale Interconnected Systems, Guaranteed Cost Control, Decentralized Control, LMI, Time Delay

1. はじめに

近年, 不確定要素を含む大規模システムのロバスト分散制御は広範囲に研究されている(1-9,15,18). 大規模システムとは, 互いに干渉を伴う複数のサブシステムを結合させせることによって, 工学(物理)モデルを数学的手法によって表現したものである. 例えば, 機械システムでは, アクティブサスペンションのモデル化において, 個々の車輪モデルをサブシステムとみなし総合的に1つのシステムと考える場合, 大規模システムとして捉えることが可能である(20). このような問題に対して, 主に2つの異なった設計方法が提案されている. 1つは非線形制御理論に基づく手法(3-7)であり, もう1つは線形制御理論に基づく手法(8, 9, 15)である. 文献(3-5)では, リアプノフ関数及びリカッチ方程式をベースにした非線形ロバスト分散制御が提案されている. 後に, Wangら(8)は同様の制御問題に対して, 線形ロバスト分散制御を提案している.

通常, 不確定要素を含む大規模システムを制御する場合, ロバスト安定性だけでなく適切なレベルのコストパフォーマンスを保証する制御システムを設計することが同じく望まれる. この問題の1つのアプローチは, いわゆる2次コスト保証制御(10,11,13-15)である. このアプローチは, システムに不確定要素を含んでいる場合においても与えられた評価関数の上限が計算できる利点を持っている. 2次コスト保証制御問題を解くには, 現在2つの異なった設計方法が提案されている. 1つはリカッチ方程式の理論に基づく手法(10, 11)であり, もう1つは, 線形行列不等式(Linear Matrix Inequality)の理論に基づく手法である(13). 最近では, LMIアプローチに基づいているむだ時間システムのための2次コスト保証制御問題が研究されている(12, 14). 非常に最近では, 非線形大規模システムに対して, 状態フィードバックによる2次コスト保証制御が提案されている(14, 18). しかしながら, これまでのところ, 不確定要素及びむだ時間の両方を含む大規模システムに対する2次コスト保証分散制御問題は研究されていない.

文献(18)ではアクティブサスペンションモデルに対してアクチュエータのむだ時間を考慮したロバスト安定化問題が考慮されているが, コストパフォーマンスには触れられていない. したがって, 本論文では, ノルム有界な不確定要素, 及びむだ時間の両方を含む大規模システムに対して, 状態フィードバックによる2次コスト保証分散制御問題を研究する. 本論文の目的は, 設計パラメータに依存するLMIを解くことによって2次コスト保証分散制御則を構築することである. 従来扱われた大規模システム(15, 18)と本論文で研究される大規模システムの間の決定的な相違は, システムにむだ時間が含まれていることである. また, 文献(21)と異なり, 不確定要素を含んでいることである. した

* 原稿受付 2002年7月12日.
*1 正員, 広島大学大学院教育学研究科(〒739-8524 東広島市鏡山1-1-1).
*2 広島国際学院大学工学部(〒739-0321 広島市安芸区中野6-20-1).
E-mail: mukaida@hiroshima-u.ac.jp

がって, 従来より広範囲な大規模システムに対して制御則が構築可能である. さらに, 従来研究[1, 2, 21]と比較して, 安定性だけでなくコストパフォーマンスを実現している.

本論文では, 以下の記号を利用する. $\mathcal{S}^T$ は $\mathcal{S}$ の転置, **block − diag** はブロック対角行列, Trace $\mathcal{S}$ は行列 $\mathcal{S}$ の固有和をそれぞれ表す. 最後に $I_n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は n 次の単位行列を表す.

2. 問題設定

文献 (21) と比較して, 不確定要素を含む大規模むだ時間システム (1a), (1b) および評価関数 (1c) を考える.

$$\dot{x}_i(t) = [A_i + \Delta A_i(t)]x_i(t) + [B_i + \Delta B_i(t)]u_i(t) + \sum_{j=1}^{N}[A_{ij}^d + \Delta A_{ij}^d(t)]x_j(t-\tau_{ij}) \quad (1a)$$

$$x_i(t) = \phi_i(t),\ t \in [-\tau_i, 0], i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N \quad (1b)$$

$$J = \sum_{i=1}^{N}\int_0^{\infty}[x_i^T(t)Q_ix_i(t) + u_i^T(t)R_iu_i(t)]dt$$
$$Q_i = Q_i^T > 0,\ R_i = R_i^T > 0 \quad (1c)$$

ここで, $x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$, $u_i \in \mathbf{R}^{m_i}$ は, それぞれ i 番目のサブシステムの状態ベクトル, 制御入力である. 行列 A_i, B_i および A_{ij}^d はそれぞれ適切な次元をもつ定数行列である. $\tau_i > 0$ および $\tau_{ij} > 0$ は, $\tau_i := \max(\tau_{i1}, \cdots, \tau_{iN})$ を満足するむだ時間を表す. ただし, 文献 (1), (2) と異なり, 扱っているシステムのクラスを拡張するために, i 番目の状態 $x_i(t)$ にもむだ時間を含むと仮定する. さらに不確定要素は以下の構造をもつと仮定する.

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i(t)\ \Delta B_i(t)\ \Delta A_{i1}^d(t) \cdots \Delta A_{iN}^d(t) \end{bmatrix} = D_iF_i(t)\begin{bmatrix} E_{1i}\ E_{2i}\ E_{i1}^d \cdots E_{iN}^d \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$I_{r_i} \geq F_i^T(t)F_i(t) \quad (2b)$$

ここで, $F_i(t) \in \mathbf{R}^{p_i\times r_i}$ は不等式 (2b) を満足する各要素がルベーグ可測である未知の時間関数行列である.

ここで, 本論文で考慮されているような状態 $x_i(t)$ にむだ時間を含んでいるシステムは, 従来より研究されているが[1, 2, 21], 安定性のみを論じているだけで, コストに関しては何ら議論されていないことに注意されたい.

まず, 2次コスト保証制御の定義を与える[10].

定義 1 システム

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t)$$

がフィードバック制御 $u(t) = Kx(t)$ によって閉ループシステムが漸近安定かつ, 評価関数がある定数でおさえられる. すなわち, 以下の不等式

$$J = \int_0^{\infty}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt < \bar{J}$$
$$Q > 0,\ R > 0$$

を満足するとき, フィードバック制御は *2* 次コスト保証制御とよばれる.

補題 1 不確定要素を含む大規模むだ時間システム (1) に対し, フィードバック制御 $u(t) = Kx(t)$ による閉ループシステムを考える. もし, すべての不確定要素 (2) に対して, 行列不等式 (3) を満足するような正定対称行列 $P_i \in \mathbf{R}^{n_i\times n_i}$ が存在すれば, 分散制御 $u_i(t) = K_ix_i(t)$, $(i = 1, \cdots, N)$ は2次コスト保証分散制御である.

$$\mathcal{M}_i = \begin{bmatrix} \Theta_i & P_i\tilde{A}_{i1}^d & \cdots & P_i\tilde{A}_{iN}^d \\ \tilde{A}_{i1}^{dT}P_i & -V_{i1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{iN}^{dT}P_i & 0 & \cdots & -V_{iN} \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

ただし,

$$\mathcal{M}_i \in \mathbf{R}^{\tilde{N}\times\tilde{N}},\ \Theta_i := \tilde{A}_i^TP_i + P_i\tilde{A}_i + \bar{R}_i + \bar{V}_i$$

$$\tilde{A}_{ij}^d := A_{ij}^d + \Delta A_{ij}^d = A_{ij}^d + D_iF_i(t)E_{ij}^d,\ \bar{V}_i := \sum_{j=1}^{N}V_{ji}$$

$$\tilde{N} := n_i + \sum_{j=1}^{N}n_j,\ \tilde{A}_i := \bar{A}_i + D_iF_i(t)\bar{E}_i$$

$$\bar{A}_i := A_i + B_iK_i,\ \bar{E}_i := E_{1i} + E_{2i}K_i$$

$$\bar{R}_i := Q_i + K_i^TR_iK_i$$

(証明) 大規模むだ時間システム (1) に状態フィードバック制御 $u_i(t) = K_ix_i(t)$ を付加した閉ループシステムは (4) で与えられる.

$$\dot{x}_i = \tilde{A}_ix_i + \sum_{j=1}^{N}\tilde{A}_{ij}^dx_j(t-\tau_{ij}) \quad (4)$$

このとき, 行列不等式 (3) を満足する正定対称行列 $P_i > 0$ が存在すると仮定する. 閉ループシステム (4) の安定性を示すために, リアプノフ関数の候補として

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^{N}\left[x_i^T(t)P_ix_i(t) + \sum_{j=1}^{N}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}x_j^T(s)V_{ij}x_j(s)ds\right]$$

を用意する. ここで, むだ時間を考慮するために, 右辺に積分項が含まれていることに注意されたい[12, 14]. また, P_i, V_{ij} は変数である正定対称行列である. 閉ルー

プシステム (4) に対して, 軌道に沿っての関数 $V(x(t))$ の時間微分は以下で与えられる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}V(x(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\Bigg\{ x_i^T(t)[\tilde{A}_i^T P_i + P_i\tilde{A}_i]x_i(t) \\
&\quad +2x_i^T(t)P_i\sum_{j=1}^{N}\tilde{A}_{ij}^d x_j(t-\tau_{ij}) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{N}[x_j^T(t)V_{ij}x_j(t) \\
&\quad -x_j^T(t-\tau_{ij})V_{ij}x_j(t-\tau_{ij})]\Bigg\} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\xi_i^T(t)\begin{bmatrix} \Theta_i-\bar{R}_i & P_i\tilde{A}_{i1}^d & \cdots & P_i\tilde{A}_{iN}^d \\ \tilde{A}_{i1}^{dT}P_i & -V_{i1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{iN}^{dT}P_i & 0 & \cdots & -V_{iN} \end{bmatrix}\xi_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\xi_i^T(t)\mathcal{M}_i\xi_i(t) - \sum_{i=1}^{N}x_i^T(t)\bar{R}_i x_i(t) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$\xi_i := \begin{bmatrix} x_i^T(t) \ x_1^T(t-\tau_{i1}) \cdots x_N^T(t-\tau_{iN}) \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{\bar{N}}$$

ここで, 仮定より不等式 (3) が成立するので, 直ちに以下の不等式 (6) を得る.

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) < -\sum_{i=1}^{N}x_i^T(t)\bar{R}_i x_i(t) < 0 \qquad (6)$$

したがって, $V(x(t))$ は閉ループシステム (4) のリアプノフ関数であることが示された. 以上より, 閉ループシステム (4) は2次安定である.

続いて, 不等式 (6) の両辺を0から ∞ まで積分することによって以下の不等式を得る.

$$
\begin{aligned}
& V(x(\infty)) - V(x(0)) \\
< & -\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty x_i^T(t)\bar{R}_i x_i(t)dt = -J
\end{aligned}
$$

ここで, 閉ループシステム (4) が2次安定であることを考慮すれば $x(\infty) = 0$, すなわち $x_i(\infty) = 0$ $(i = 1,\cdots,N)$ である. したがって,

$$
\begin{aligned}
J &= \sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty x_i^T(t)\bar{R}_i x_i(t)dt \\
&< V(x(0)) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\Bigg[\phi_i^T(0)P_i\phi_i(0) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{N}\int_{-\tau_{ij}}^{0}\phi_j^T(s)V_{ij}\phi_j(s)ds\Bigg] \\
&= \bar{J}
\end{aligned}
$$

以上より, 不等式 (3) を満足する正定対称行列 P_i が存在すれば, $u_i(t) = K_i x_i(t)$ はコスト行列 $P_i > 0$ を伴う2次コスト保証分散制御である. □

以上の準備のもと, むだ時間を含む大規模システムに対する LMI を利用した2次コスト保証制御則を与える.

定理 1 すべての自然数 i, $(i = 1,\cdots,N)$ に対して, LMI (7) を満足するような正定対称行列 $X_i = P_i^{-1} > 0 \in \mathbf{R}^{n_i\times n_i}$, $\bar{V}_{ij} = V_{ij}^{-1} > 0 \in \mathbf{R}^{n_i\times n_i}$, 行列 $Y_i \in \mathbf{R}^{m_i\times n_i}$, および正のスカラパラメータ $\mu_i > 0$ が存在すると仮定する. ただし

$$
\begin{aligned}
\Phi_i \ &:= \ A_iX_i + B_iY_i + (A_iX_i + B_iY_i)^T \\
&\quad +\mu_i(N+1)D_iD_i^T
\end{aligned}
$$

このとき, フィードバック制御 (8) は, 大規模むだ時間システム (1) に対する2次コスト保証分散制御則である.

$$u_i(t) = K_ix_i(t) = Y_iX_i^{-1}x_i(t),\ (i = 1,\cdots,N) \quad (8)$$

さらに, コストの上限は (9) で与えられる.

$$
\begin{aligned}
J &< \sum_{i=1}^{N}\Bigg[\phi_i^T(0)X_i^{-1}\phi_i(0) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{N}\int_{-\tau_{ij}}^{0}\phi_j^T(s)\bar{V}_{ij}^{-1}\phi_j(s)ds\Bigg] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

定理を証明するために, 以下の有用な補題を紹介する[10, 11].

補題 2 $\mathcal{F}\mathcal{F}^T \le I_n$ を満足する行列 $\mathcal{F}$ および任意の行列 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ に対して,

$$\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{H} + \mathcal{H}^T\mathcal{F}^T\mathcal{G}^T \le \varepsilon\mathcal{G}\mathcal{G}^T + \varepsilon^{-1}\mathcal{H}^T\mathcal{H}$$

が成立する. ただし $\varepsilon > 0$ である.

(証明) 以下のブロック対角行列を定義する.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_i &:= \mathbf{block-diag} \\
&\quad \begin{bmatrix} P_i \ I_{r_i} \ V_{i1} \ I_{r_i} \cdots V_{iN} \ I_{n_i} \ I_{m_i} \ I_{r_i} \ I_{\bar{N}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

LMI (7) の右から $\mathcal{T}_i$, 左から $\mathcal{T}_i^T$ をかければ LMI (10) を得る. ただし, $\Upsilon_i := \bar{A}_i^TP_i + P_i\bar{A}_i + \mu_i(N+1)P_iD_iD_i^TP_i$. LMI (10) に Schur complement[16, 17, 19] を適用すれば (11) を得る. ただし, $\Xi_i := \bar{A}_i^TP_i + P_i\bar{A}_i + \bar{R}_i + \bar{V}_i$. ここで, 補題2

$$\begin{bmatrix} \Phi_i & (E_{1i}X_i+E_{2i}Y_i)^T & A_{i1}^d\bar{V}_{i1} & 0 & \cdots & A_{iN}^d\bar{V}_{iN} & 0 & X_i & Y_i^T & X_i & \cdots & X_i \\ E_{1i}X_i+E_{2i}Y_i & -\mu_i I_{r_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{V}_{i1}A_{i1}^{dT} & 0 & -\bar{V}_{i1} & \bar{V}_{i1}E_{i1}^{dT} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E_{i1}^d\bar{V}_{i1} & -\mu_i I_{r_i} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{V}_{iN}A_{iN}^{dT} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{V}_{iN} & \bar{V}_{iN}E_{iN}^{dT} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & E_{iN}^d\bar{V}_{iN} & -\mu_i I_{r_i} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ X_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -Q_i^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Y_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -R_i^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ X_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{V}_{i1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{V}_{iN} \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_i & \bar{E}_i^T & P_iA_{i1}^d & 0 & \cdots & P_iA_{iN}^d & 0 & I_{n_i} & K_i^T & I_{n_i} & \cdots & I_{n_i} \\ \bar{E}_i & -\mu_i I_{r_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{i1}^{dT}P_i & 0 & -V_{i1} & E_{i1}^{dT} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E_{i1}^d & -\mu_i I_{r_i} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{iN}^{dT}P_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & -V_{iN} & E_{iN}^{dT} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & E_{iN}^d & -\mu_i I_{r_i} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I_{n_i} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -Q_i^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -R_i^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ I_{n_i} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{V}_{i1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n_i} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{V}_{iN} \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\Lambda_i := \begin{bmatrix} \Xi_i + \mu_i(N+1)P_iD_iD_i^TP_i + \mu_i^{-1}\bar{E}_i^T\bar{E}_i & P_iA_{i1}^d & \cdots & P_iA_{iN}^d \\ A_{i1}^{dT}P_i & -V_{i1}+\mu_i^{-1}E_{i1}^{dT}E_{i1}^d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{iN}^{dT}P_i & 0 & \cdots & -V_{iN}+\mu_i^{-1}E_{iN}^{dT}E_{iN}^d \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

を (11) に適用する.

$$\begin{aligned} &\Lambda_i \\ &\geq \begin{bmatrix} \Xi_i & P_iA_{i1}^d & \cdots & P_iA_{iN}^d \\ A_{i1}^{dT}P_i & -V_{i1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{iN}^{dT}P_i & 0 & \cdots & -V_{iN} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} P_iD_i & P_iD_i & \cdots & P_iD_i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} F_i \begin{bmatrix} \bar{E}_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{i1}^d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{iN}^d \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \bar{E}_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{i1}^d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{iN}^d \end{bmatrix}^T F_i^T \begin{bmatrix} P_iD_i & P_iD_i & \cdots & P_iD_i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \mathcal{M}_i \end{aligned}$$

したがって $\mathcal{M}_i < 0$ となり，フィードバック制御 (8) は大規模むだ時間システム (1) に対する 2 次コスト保証分散制御則である. □

LMI (7) は凸集合解 $(\mu_i,\ X_i,\ Y_i,\ \bar{V}_{i1},\cdots,\bar{V}_{iN})$ から成る. したがって, MATLAB の LMI コントロールツールボックス[17]を利用して最適化可能である. そこで, LMI (7) に対するコスト上限の最適化問題を考える.

〔問題 **A**〕 各 i に対して，拘束条件である LMI (7),

(12)

$$\begin{bmatrix} -\alpha_i & \phi_i^T(0) \\ \phi_i(0) & -X_i \end{bmatrix} < 0 \qquad (12a)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{B}_{ij} & N_{ij}^T \\ N_{ij} & -\bar{V}_{ij} \end{bmatrix} < 0,\ (j = 1,\cdots,N) \qquad (12b)$$

$$N_{ij}N_{ij}^T := \int_{-\tau_{ij}}^{0} \phi_j(s)\phi_j^T(s)ds$$

および $\mu_i > 0$ を満足するような凸集合解 $(\mu_i,\ X_i,\ Y_i,\ \bar{V}_{i1},\cdots,\bar{V}_{iN})$ を考える．このとき，$\min_{(\mathcal{Z}_1,\cdots,\mathcal{Z}_N)} \sum_{i=1}^{N} \beta_i$ を最小化する分散制御 $K_i = Y_i X_i^{-1}$, $(i = 1,\cdots,N)$ を求めよ．すなわち，以下の最適化問題 (13) を解け．

$$\min_{(\mathcal{Z}_1,\cdots,\mathcal{Z}_N)} \sum_{i=1}^{N} \beta_i \qquad (13)$$

$$\mathcal{Z}_i \in (\mu_i,\ X_i,\ Y_i,\ \bar{V}_{i1},\cdots,\bar{V}_{iN})$$

s.t. LMI (7), (32), $\mu_i > 0$

ただし，$\beta_i := \alpha_i + \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Trace}\,[\mathcal{B}_{ij}]$.

系 1 もし問題 **A** に対して，すべての i で最適解 μ_i, $X_i, Y_i, \bar{V}_{i1},\cdots,\bar{V}_{iN}, \alpha_i$ および $\mathcal{B}_{1i},\cdots,\mathcal{B}_{iN}$ が存在するなら，分散状態フィードバック制御則 (8) はコストの上限 (9) を伴う2次コスト保証分散制御である．このとき，(13) は，コストの上限 (9) の最小値を与える．さらに，最適化問題 (13) は，各 i に対する最適化問題 $\min_{(\mathcal{Z}_1,\cdots,\mathcal{Z}_N)} \sum_{i=1}^{N} \beta_i = \sum_{i=1}^{N} \min_{\mathcal{Z}_i} \beta_i$ に変換可能である．

(証明) まず，Schur complement を LMI (12) に適用すれば以下の関係式を得る．

$$(12a) \Leftrightarrow \phi_i^T(0)X_i^{-1}\phi_i(0) < \alpha_i$$

$$(12b) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} \int_{-\tau_{ij}}^{0} \phi_j^T(s)\bar{V}_{ij}^{-1}\phi_j(s)ds$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Trace}\,[N_{ij}^T \bar{V}_{ij}^{-1} N_{ij}] < \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Trace}\,[\mathcal{B}_{ij}]$$

したがって，最適化の順序の交換を利用すれば

$$\begin{aligned} J &< \sum_{i=1}^{N}\Bigg[\phi_i^T(0)X_i^{-1}\phi_i(0) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N}\int_{-\tau_{ij}}^{0}\phi_j^T(s)\bar{V}_{ij}^{-1}\phi_j(s)ds\Bigg] \\ &< \sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i + \sum_{j=1}^{N}\mathrm{Trace}\,[\mathcal{B}_{ij}]\right] = \sum_{i=1}^{N}\beta_i \\ &< \min_{(\mathcal{Z}_1,\cdots,\mathcal{Z}_N)} \sum_{i=1}^{N} \beta_i = \sum_{i=1}^{N} \min_{\mathcal{Z}_i} \beta_i = J^* \end{aligned}$$

となる．以上より，最適化問題 (13) は，各 i に対する β_i の最小化問題を意味する． □

3. 数値例

提案された2次コスト保証分散制御の設計方法を確認するためにシミュレーションを行う．むだ時間を含む次数が2の3つのサブシステムからなる大規模システムを考える．システム (1) に対応する行列を以下に記述する．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ A_{11}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.015 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix},\ A_{13}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\ A_{21}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.03 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix},\ A_{23}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.05 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_{31}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{32}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_{33}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0.015 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ D_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{11} = E_{12} = E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0.015 \end{bmatrix}$$

$$E_{21} = E_{22} = E_{23} = \begin{bmatrix} 0.01 \end{bmatrix}$$

$$E_{11}^{dT} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix},\ E_{12}^{dT} = E_{13}^{dT} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.015 \end{bmatrix}$$

$$E_{22}^{dT} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0 \end{bmatrix},\ E_{23}^{dT} = E_{21}^{dT} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{33}^{dT} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.03 \end{bmatrix},\ E_{31}^{dT} = E_{32}^{dT} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{ij} = 1,\ (i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_3(t) = \begin{bmatrix} \exp(t+1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_i = 0.1,\ Q_i = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},\ (i = 1,\ 2,\ 3)$$

系1から，以下のように2次コスト保証分散制御 (8) の分散制御ゲイン K_i ($i=1,\ 2,\ 3$) を得る．

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2.3439 & -3.4028 \end{bmatrix}$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -2.3607 & -3.5258 \end{bmatrix}$$
$$K_3 = \begin{bmatrix} -2.3418 & -3.9400 \end{bmatrix}$$

このとき，閉ループシステムの2次コストの上限は $J^* = 27.809$ である．ただし，$\min_{\mathcal{Z}_1} \beta_1 = 11.67633$, $\min_{\mathcal{Z}_2} \beta_2 = 11.06104$, $\min_{\mathcal{Z}_3} \beta_3 = 5.072053$ である．以上より，コストの上限を最小にする分散制御則が LMI を解くことによって求められた．

4. まとめ

本論文では，むだ時間を含む不確定大規模システムに対する2次コスト保証分散制御問題を考えた．本論文の主な結果は，各サブシステムごとに設計パラメータに依存する LMI を解くことによって，2次コスト保証分散制御則が構築できることを示した点である．提案された設計方法は，各サブシステムの情報だけを利用して分散制御則を構築することが可能である．また，本論文で得られた結果は，従来の結果[15, 18]と比較して，システムにむだ時間が含まれていても2次コスト保証分散制御則が構築できる．以上より，より広いクラスの大規模システムに対し2次コスト保証分散制御が可能である．さらに，分散制御則を得るために解く必要のある最適化問題も，MATLAB の LMI コントロールツールボックスを利用して容易に解くことができる．

今後の課題として，出力フィードバックを利用した2次コスト保証分散制御が考えられる．出力フィードバックによる2次コスト保証分散制御は，実システムに実装できる可能性を広げる意味でより現実的である．現在，出力フィードバックによる2次コスト保証制御は，3つの行列連立代数方程式を解くことによって制御則が得られることが報告されている[11]．しかしながら，現在，著者の知る限り LMI を利用した制御則の設計方法は報告はなされていない．したがって，今後は，LMI による出力フィードバック問題を研究していく予定である．

最後に，本論文に対して，有益なコメント及びご指摘を頂きました査読者の皆様方に謝意を表します．

文　献

(1) F.–C. Kung, C.–H. Lee and T.–H S. Li Decentralized robust control design for large–scale time–delay systems with time–varying uncertainties, *JSME International Journal, Series C*, **39**–3, 528–533 (1996)
(2) S. Won and J. Park : Observer–based controller design for uncertain large–scale systems with time–delays in subsystem interconnections, *JSME International Journal, Series C*, **42**–1, 123–128 (1999)
(3) Y. Wang, G. Guo and D. J. Hill : Robust decentralized non–linear controller design for multimachine power systems, *Automatica*, **33**, 1725–1733 (1997)
(4) G. Guo, Y. Wang and D. J. Hill : Nonlinear output stabilization control for multimachine power systems, *IEEE Trans. Circuits and Systems, Part 1*, **47**, 46–53 (2000)
(5) Y. Guo, D. J. Hill and Y. Wang : Nonlinear decentralized control of large–scale power systems, *Automatica*, **36**, 1275–1289 (2000)
(6) X.–G. Yan and G.–Z. Dai : Decentralized output feedback robust control for nonlinear large–scale systems, *Automatica*, **34**, 1469–1472 (1998)
(7) S. Y. Zhang, K. Mizukami and H. S. Wu : Decentralized robust control for a class of uncertain large–scale interconnected nonlinear dynamical systems, *J. Opt. Theory and Applications*, **91**, 235–256 (1996)
(8) Y. Wang, D. J. Hill and G. Guo : Robust decentralized control for multimachine power systems, *IEEE Trans. Circuits and Systems, Part 1*, **45**, 271–279 (1998)
(9) M.–L. Ni and Y. Chen : Decentralized stabilization and output tracking of large–scale uncertain systems, *Automatica*, **32**, 1077–1080 (1996)
(10) I. R. Petersen and D. C. McFarlane : Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **39**, 1971–1977 (1994)
(11) S. O. R. Moheimani and I. R. Petersen : Optimal guranteed cost control of uncertain systems via static and dynamic output feedback, *Automatica*, **32**, 575–579 (1996)
(12) S. O. R. Moheimani and I. R. Petersen : Optimal quadratic guaranteed cost control of a class of uncertain time–delay systems, *IEE Proceedings*, **144**, 183–188 (1997).
(13) L. Yu, G. Chen and J. Chu : Optimal guaranteed cost control of linear systems: LMI approach, in *Proc. 14th IFAC World Congress*, Beijing, P. R. Chaina, **G**, 541–546 (1999)
(14) L. Yu and J. Chu : An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time delay systems, *Automatica*, **35**, 1155–1159 (1999)
(15) S. Xie, L. Xie and G. Guo : Decentralized control of multimachine power systems with guaranteed peformance, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, **147**, 355–365 (2000)
(16) S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron andV. Balakrishnan : Linear Matrix Inequalities is System and Control Theory, SIAM (1994)
(17) P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali : LMI Control Toolbox; For Use with MATLAB, The MATH WORKS Inc. (1995)
(18) H. Mukaidani, Y. Takato, Y. Tanaka and K. Mizukami : The guaranteed cost control for uncertain large–scale interconnected systems, *in Proc.* 15th IFAC World Congress, (2002) (to appear).
(19) 岩崎：LMI と制御，昭晃堂 (1997)

(20) M. Salman, A. Lee and N. Boustany : Reduced order design of active suspension control, *Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **112**, 604–610 (1990)
(21) T. N. Lee and U. L. Radovic, Decentralized stabilization of linear continuous and discrete-time systems with delays in interconnections, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **33**, 757–761 (1988)