日本機械学会論文集(C編)
69巻682号(2003-6)

論文 No. 02-0325

不確定特異摂動システムのロバストフィルタ設計*

向谷博明*1, 田中良幸*2, 水上孝一*3

Design for Robust Filtering of Singularly Perturbed Uncertain Systems

Hiroaki MUKAIDANI*4, Yoshiyuki TANAKA and Koichi MIZUKAMI

*4 Hiroshima University, Graduate School of Education,
1-1-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima-shi, Hiroshima, 739-8524 Japan

In this paper, we study the quadratic guaranteed cost estimator for singularly perturbed systems with uncertainties. The state estimation results by Petersen and McFarlane[1] are applied to the singularly perturbed systems which depend on the uncertain parameters. First, we derive the sufficient condition corresponding to the perturbation parameter such that the proposed algorithm is quadratic convergence. Second, we propose the new algorithm for solving the generalized algebraic Lyapunov equation of singularly perturbed system. A numerical example is given to show the potential of the proposed technique.

Key Words: Singularly Perturbed Uncertain Systems, Newton's Method, Algebraic Riccati Equations, Quadratic Guaranteed Cost State Estimator

1. 緒言

機械システムの動特性を表現する微分方程式が

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1,\ x_2,\ t),\ x_1 \in \mathbf{R}^{n_1} \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= f_2(x_1,\ x_2,\ t),\ x_2 \in \mathbf{R}^{n_2} \end{aligned}$$

の形をとるシステムを特異摂動システムという．ここで，εは摂動項と呼ばれる正の物理定数であり，実際には無視できない微少質量や慣性等の寄生要素を表す．このようなシステムは一般に航空機モデル，乗用車モデル等に現れることが良く知られている[2, 12]．特異摂動システムを扱う場合，摂動項の影響により，係数行列の高次元化，並びに各パラメータ間のオーダの違いがおこる．このため，計算機の物理的容量及びアルゴリズムの悪条件化からコントローラの設計に必要なリカッチ方程式の解を得ることは大変困難であることが従来から報告されている[2, 4]．

特異摂動システムに対する様々なフィルタリング問題は，1970年代以降，多くの有用な結果が報告されている[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]．最近では，特異摂動法[2]による近似カルマンフィルタやLQG制御問題の実機への応用例が報告されている[6]．しかし，十分小さくない摂動項に対して，特異摂動法による近似カルマンフィルタでは最適性を保証しないことが示されている[4, 6]．後に，最適性を保証するため，再帰的アルゴリズム(Recursive algorithm)[4]，あるいは厳密分解法(Exact decomposition technique)[5, 6]を利用したフィルタ設計が研究されている．1990年代半ば以降には，Shenら[7]またはLimら[8]は特異摂動システムに対するH_∞最適フィルタを厳密分解法を利用して構築している．しかし，特異摂動システムにパラメータ変動やモデル化誤差等の不確定要素が存在する場合，カルマンフィルタやH_∞最適フィルタを適用することができない．著者らが知る限り，現在までに不確定要素を含む特異摂動システムに対するロバストフィルタリング問題に関する研究は行われていない．実際の航空機等の機械システムでは，外部の環境変化や経年変化によるモデル化誤差等の不確定要素を含んでいることを考慮すれば，不確定特異摂動システムに対するロバストフィルタの設計は必須である．

本論文では，不確定要素が含まれていてもフィルタが設計できる2次コスト保証フィルタ[1]を特異摂動システムに適用することによって，ロバストなフィルタ設計を提案する．その結果，実システムに対して環境変化や経年変化によるモデル化誤差等の不確定要素を考慮したロバストなフィルタが設計可能となる．本論文の最後に，提案されたアルゴリズムの有用性を確認

* 原稿受付 2002年3月20日．
*1 正員，広島大学大学院教育学研究科(〒739-8524 東広島市鏡山1-1-1)．
*2 広島大学大学院工学研究科(〒739-8527 東広島市鏡山1-4-1)．
*3 広島国際学院大学電子工学科(〒739-0321 広島市安芸区中野6-20-1)．
E-mail: mukaida@hiroshima-u.ac.jp

するために F–8 戦闘機モデルに対してシミュレーションを行う．シミュレーションの結果，直接 MATLAB を使用してリカッチ方程式の解を求めると，最適な設計パラメータを決定することができないのに対して，本論文で提案される手法を利用すれば最適な設計パラメータを得られることが示される．

本論文では，以下の記号を利用する．$\mathcal{S}^T$ は行列 $\mathcal{S}$ の転置，Trace $\mathcal{S}$ は行列 $\mathcal{S}$ の固有和をそれぞれ表す．$I_n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は n 次の単位行列を表す．$\|\mathcal{S}\|$ は行列 $\mathcal{S}$ のノルムを表す．vec$\mathcal{S}$ は，行列 $\mathcal{S}$ の列ベクトル化を表す[15]．$\mathcal{U}_{lm}$ は行列 $\mathcal{S} \in \mathbf{R}^{l\times m}$ に対して $\mathcal{U}_{lm}\mathrm{vec}\mathcal{S} = \mathrm{vec}\mathcal{S}^T$ を満足する置換行列である[15]．最後に $\|G\|_\infty$ は，伝達関数 G の H_∞ ノルムを表す．

2. 2次コスト保証フィルタ問題

以下のノルム有界型不確定要素を含む特異摂動システムを考える．

$$\dot{x}_1 = [A_{11} + \Delta A_{11}]x_1 + [A_{12} + \Delta A_{12}]x_2 + B_1 w_1$$

$$x_1(t_0) = x_1^0 \tag{1a}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2 = [A_{21} + \Delta A_{21}]x_1 + [A_{22} + \Delta A_{22}]x_2 + B_2 w_1$$

$$x_2(t_0) = x_2^0 \tag{1b}$$

$$y = [C_1 + \Delta C_1]x_1 + [C_2 + \Delta C_2]x_2 + w_2 \tag{1c}$$

ここで，システム (1b) 中の ε は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ，$x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$，$(i = 1,\ 2,\ N = n_1 + n_2)$ は状態ベクトル，$y \in \mathbf{R}^l$ は観測出力，初期値 $x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1^T(t_0) & x_2^T(t_0) \end{bmatrix}^T$ は平均 0 であるガウスランダムベクトルと仮定する．また，$w_1 \in \mathbf{R}^m$，$w_2 \in \mathbf{R}^l$ はそれぞれ平均 0，以下の共分散行列をもつガウス白色雑音である．

$$E\left[\left[\begin{array}{c} w_1 \\ \hline w_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} w_1^T & w_2^T \end{array}\right]\right] = \left[\begin{array}{c|c} V_1 & 0 \\ \hline 0 & V_2 \end{array}\right] > 0$$

また，ノルム有界型時変不確定要素は以下のマッチング条件を満足する．

$$\begin{bmatrix} \Delta A_{11}(t) & \Delta A_{12}(t) \\ \Delta A_{21}(t) & \Delta A_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{a1} \\ H_{a2} \end{bmatrix}\Delta(t)\begin{bmatrix} E_{a1} & E_{a2} \end{bmatrix} = H_a\Delta(t)E_a$$

$$\begin{bmatrix} \Delta C_1(t) & \Delta C_2(t) \end{bmatrix} = H_b\Delta(t)E_a$$

ただし，$\Delta(t) \in \mathbf{R}^{p\times s}$ は $\Delta(t)^T\Delta(t) \le I_s$ を満足する各要素がルベーグ可測である未知の時間関数行列である．また，各係数行列は適当な次元をもつと仮定する．本論文では定常状態フィルタリング問題を考えるので，$t_0 \to -\infty$ と仮定する[1]．システム (1) に対して，以下の仮定を導入する．

仮定 1 A_{22} は正則行列である．さらに，A_{22} 及び $A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ は安定であり，以下のノルム条件を満足する．

$$1 > \max\{\|G_f(s)\|_\infty,\ \|G_s(s)\|_\infty\}$$

$$G_f(s) := E_{a2}(sI_{n_2} - A_{22})^{-1}H_{a2}$$

$$G_s(s) := \tilde{E}_a(sI_{n_1} - A_0)^{-1}\tilde{H}_a + \tilde{D}$$

$$\tilde{E}_a := E_{a1} - E_{a2}A_{22}^{-1}A_{21}$$

$$\tilde{H}_a := H_{a1} - A_{12}A_{22}^{-1}H_{a2},\ \tilde{D} := -E_{a2}A_{22}^{-1}H_{a2}$$

(注意 1) 仮定 1 はシステム (1) の 2 次安定性を保証する[10]．一方，仮定 1 が成立しない場合，制御入力を付加して安定化出力フィードバックの構築が必要となる[1]．

特異摂動システムの 2 次コスト保証フィルタリングに対して，仮定 1 が成立するとき，Petersen ら[1]の結果を応用すれば以下の補題が得られる．

補題 1 仮定 1 のもと，特異摂動システム (1) を考える．$\mu \in (0,\ \tilde{\mu})$，$(\tilde{\mu} > 0)$ を満足する全ての μ に対し，リカッチ方程式 (2) が正定対称安定化解をもつような $\tilde{\mu}$ が存在する．

$$A_\varepsilon U_\varepsilon + U_\varepsilon A_\varepsilon^T + \mu U_\varepsilon E_a^T E_a U_\varepsilon + \frac{1}{\mu}H_{a\varepsilon}H_{a\varepsilon}^T + B_\varepsilon V_1 B_\varepsilon^T = 0 \tag{2}$$

ただし

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix},\ B_\varepsilon = \begin{bmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{bmatrix}$$

$$H_{a\varepsilon} = \Pi_\varepsilon^{-1}H_a,\ \Pi_\varepsilon = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{n_2} \end{bmatrix}$$

さらに，$\mu \in (0,\ \tilde{\mu})$ を満足するある μ に対して，リカッチ方程式 (3) は，$W_\varepsilon \le U_\varepsilon$ となるような正定対称安定化解 W_ε をもつ．

$$[A_\varepsilon - H_{a\varepsilon}H_b^T\hat{R}C]W_\varepsilon + W_\varepsilon[A_\varepsilon - H_{a\varepsilon}H_b^T\hat{R}C]^T + \mu W_\varepsilon E_a^T E_a W_\varepsilon - \mu W_\varepsilon C^T\hat{R}CW_\varepsilon + \frac{1}{\mu}H_{a\varepsilon}[I_p - H_b^T\hat{R}H_b]H_{a\varepsilon}^T + B_\varepsilon V_1 B_\varepsilon^T = 0 \tag{3}$$

ただし，$\hat{R} = (\mu V_2 + H_b H_b^T)^{-1}$ である．このとき，フィルタ (4)

$$\dot{\xi}(t) = (A_\varepsilon + \mu W_\varepsilon E_a^T E_a)\xi(t) + (\mu W_\varepsilon C^T + H_{a\varepsilon}H_b^T)\cdot\hat{R}[y(t) - C\xi(t)],\quad \xi(t_0) = \xi^0 \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\xi}(t) = F_\varepsilon\xi(t) + G_\varepsilon y(t)$$

ただし,

$$\xi(t) := \begin{bmatrix} \xi_1^T(t) & \xi_2^T(t) \end{bmatrix}^T$$
$$F_\varepsilon := A_\varepsilon + \mu W_\varepsilon E_a^T E_a - (\mu W_\varepsilon C^T + H_{a\varepsilon} H_b^T)\hat{R}C$$
$$G_\varepsilon := (\mu W_\varepsilon C^T + H_{a\varepsilon} H_b^T)\hat{R}$$

は, ある与えられた $\delta > 0$ に対して, $W_\varepsilon < \tilde{W}_\varepsilon < W_\varepsilon + \delta I_N$ を満足するコスト行列 $\tilde{W}_\varepsilon$ を伴う特異摂動システム (1) の 2 次コスト保証フィルタである. また, 偏差を $e(t) := x(t) - \xi(t)$ と定義したとき,

$$\lim_{t_0 \to -\infty} E[e(t)e^T(t)] \le \mathrm{Trace}[W_\varepsilon] < \mathrm{Trace}[\tilde{W}_\varepsilon]$$

が成立する. ただし, $\xi(t) \in \mathbf{R}^n$ は状態推定ベクトル, ξ^0 は平均 0 の性質をもつ初期条件ガウスランダムベクトルである.

(注意 2) Petersen ら[1]が扱っているシステムには, B_ε が含まれていない. しかし, Petersen ら[1]の証明で, $V_1 \to B_\varepsilon V_1 B_\varepsilon^T$ と考えることによって, 補題 1 が成立することは容易に証明される. したがって, 本論文では証明を省略している.

リカッチ方程式 (2), (3) の解に関して, 以下の構造が良く知られている[2, 4, 11].

補題 2 リカッチ方程式 (2), (3) の解 U_ε, W_ε はそれぞれ以下の構造をもつ.

$$U_\varepsilon = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{12}^T & \varepsilon^{-1}U_{22} \end{bmatrix},\ W_\varepsilon = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & \varepsilon^{-1}W_{22} \end{bmatrix}$$

Petersen ら[1]の *Remark* によれば, 本論文で考える問題は以下のように述べることができる.

[問題] 拘束条件であるリカッチ方程式 (3) の正定対称安定化解 W_ε に対して, Trace $[W_\varepsilon]$ が最小となる μ を決定せよ. 即ち,

$$\mu^* = \mathrm{Arg}\min_\mu \mathrm{Trace}\ [W_\varepsilon] \quad (5a)$$
$$\alpha = \min_\mu \mathrm{Trace}\ [W_\varepsilon] \quad (5b)$$

2・1 解の存在条件 フィルタの設計の前に, リカッチ方程式 (2), (3) の安定化解の存在条件を摂動項に無関係な条件として導出する. 補題 1 より, リカッチ方程式 (2) の正定対称安定化解が存在すればリカッチ方程式 (3) の正定対称安定化解の存在が保証される. したがって, リカッチ方程式 (2) の安定化解が存在する μ の条件を考えれば十分である. まず, リカッチ方程式 (2) を分割計算して, さらに $\varepsilon = 0$ とおいた以下の 0–オーダ方程式 (6) を準備する. ただし, リカッチ方程式 (6c) は正定対称安定化解をもつと仮定する[11].

$$A_0\bar{U}_{11} + \bar{U}_{11}A_0^T - \bar{U}_{11}S_0\bar{U}_{11} + Q_0 = 0 \quad (6a)$$
$$\bar{U}_{12} = -M_2 + \bar{U}_{11}M_1 \quad (6b)$$
$$A_{22}\bar{U}_{22} + \bar{U}_{22}A_{22}^T - \bar{U}_{22}S_{22}\bar{U}_{22} + Q_{22} = 0 \quad (6c)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
A_0 &:= A_{11} + A_{12}M_1^T + M_2S_{12}^T + M_2S_{22}M_1^T \\
S_0 &:= S_{11}^T + S_{12}M_1^T + M_1S_{12}^T + M_1S_{22}M_1^T \\
Q_0 &:= Q_{11} - A_{12}M_2^T - M_2A_{12}^T - M_2S_{22}M_2^T \\
M_2^T &:= \Gamma_4^{-1}\bar{Q}_{21},\ M_1^T := -\Gamma_4^{-1}\Gamma_3 \\
\Gamma_1 &:= A_{11} - \bar{U}_{12}S_{12}^T - \bar{U}_{11}S_{11} \\
\Gamma_2 &:= A_{12} - \bar{U}_{12}S_{22} - \bar{U}_{11}S_{12} \\
\Gamma_3 &:= A_{21} - \bar{U}_{22}S_{12}^T,\ \Gamma_4 := A_{22} - \bar{U}_{22}S_{22} \\
\bar{Q}_{21} &:= \bar{U}_{22}A_{12}^T + Q_{12}^T,\ \Gamma_0 := \Gamma_1 - \Gamma_2\Gamma_4^{-1}\Gamma_3
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} := -\mu E_a^T E_a = S \quad (6d)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & \varepsilon^{-1}Q_{12} \\ \varepsilon^{-1}Q_{12}^T & \varepsilon^{-2}Q_{22} \end{bmatrix} := \frac{1}{\mu}H_{a\varepsilon}H_{a\varepsilon}^T + B_\varepsilon V_1 B_\varepsilon^T = Q_\varepsilon \quad (6e)$$

リカッチ方程式 (6c) の正定対称安定化解が存在すると仮定するとき, リカッチ方程式 (2) の解の存在条件及び構造情報に関して以下の補題が知られている[11]. ただし, 2 つの値 $\hat{\mu}_f$, $\hat{\mu}_s$ を定義する.

(i) $\hat{\mu}_f := \sup\{0 < \mu \le \tilde{\mu}|$ リカッチ方程式 (6c) が正定対称安定化解 $\bar{U}_{22}$ をもつ. すなわち, $\bar{U}_{22} > 0$ かつ $A_{22} - \bar{U}_{22}S_{22}$ は安定である. $\}$

(ii) $\hat{\mu}_s := \sup\{0 < \mu \le \tilde{\mu}|$ リカッチ方程式 (6a) が正定対称安定化解 $\bar{U}_{11}$ をもつ. すなわち, $\bar{U}_{11} > 0$ かつ $A_0 - \bar{U}_{11}S_0$ は安定である. $\}$

補題 3 $0 < \mu < \hat{\mu} = \min\{\hat{\mu}_s,\ \hat{\mu}_f\} \le \tilde{\mu}$ となる μ を選択するとき, $\varepsilon \in (0,\ \bar{\varepsilon}_1)$ を満足するすべての ε に対して, リカッチ方程式 (2) が正定対称安定化解 $U_\varepsilon > 0$ をもつような $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ が存在する. このとき, 正定対称安定化解 U_ε は以下の構造をもつ.

$$U_\varepsilon = \Pi_\varepsilon^{-1}U = U^T\Pi_\varepsilon^{-1} = \Pi_\varepsilon^{-1}\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \varepsilon U_{12}^T & U_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \Pi_\varepsilon^{-1}\left(\begin{bmatrix} \bar{U}_{11} & \bar{U}_{12} \\ \varepsilon\bar{U}_{12}^T & \bar{U}_{22} \end{bmatrix} + O(\varepsilon)\right) \quad (7)$$

ただし, $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0}\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} < \infty$.

補題 1 より, $0 < \mu < \hat{\mu}$ を満足するある μ に対して, リカッチ方程式 (3) の解の構造情報は以下の補題で与えられる[11].

補題 4 リカッチ方程式 (9a), (9c) が正定対称安定化解をもつと仮定する. $0 < \mu < \hat{\mu} = \min\{\hat{\mu}_s,\ \hat{\mu}_f\} \le \tilde{\mu}$

となる μ を選択するとき，$\varepsilon \in (0,\ \bar{\varepsilon}_2)$ を満足するすべての ε に対して，リカッチ方程式 (3) が正定対称安定化解 $W_\varepsilon > 0$ をもつような $\bar{\varepsilon}_2 > 0$ が存在する．このとき，正定対称安定化解 W_ε は以下の構造をもつ．

$$W_\varepsilon = \Pi_\varepsilon^{-1} W = W^T \Pi_\varepsilon^{-1} = \Pi_\varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ \varepsilon W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \Pi_\varepsilon^{-1} \left(\begin{bmatrix} \bar{W}_{11} & \bar{W}_{12} \\ \varepsilon \bar{W}_{12}^T & \bar{W}_{22} \end{bmatrix} + O(\varepsilon) \right) \qquad (8)$$

ただし，$\bar{W}_{11}$，$\bar{W}_{22}$ はそれぞれリカッチ方程式 (9a)，(9c) の正定対称安定化解であり，$\bar{W}_{21}$ は方程式 (9b) の解である．

$$\hat{A}_0 \bar{W}_{11} + \bar{W}_{11} \hat{A}_0^T - \bar{W}_{11} \hat{S}_0 \bar{W}_{11} + \hat{Q}_0 = 0 \qquad (9a)$$

$$\bar{W}_{12} = -\hat{M}_2 + \bar{W}_{11} \hat{M}_1 \qquad (9b)$$

$$\hat{A}_{22} \bar{W}_{22} + \bar{W}_{22} \hat{A}_{22}^T - \bar{W}_{22} \hat{S}_{22} \bar{W}_{22} + \hat{Q}_{22} = 0 \qquad (9c)$$

また，方程式 (9) の係数行列は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}
\hat{A}_0 &:= \hat{A}_{11} + \hat{A}_{12} \hat{M}_1^T + \hat{M}_2 \hat{S}_{12}^T + \hat{M}_2 \hat{S}_{22} \hat{M}_1^T \\
\hat{S}_0 &:= \hat{S}_{11}^T + \hat{S}_{12} \hat{M}_1^T + \hat{M}_1 \hat{S}_{12}^T + \hat{M}_1 \hat{S}_{22} \hat{M}_1^T \\
\hat{Q}_0 &:= \hat{Q}_{11} - \hat{A}_{12} \hat{M}_2^T - \hat{M}_2 \hat{A}_{12}^T - \hat{M}_2 \hat{S}_{22} \hat{M}_2^T \\
\hat{M}_2^T &:= \Sigma_4^{-1} \mathcal{Q}_{21},\ \hat{M}_1^T := -\Sigma_4^{-1} \Sigma_3 \\
\Sigma_1 &:= \hat{A}_{11} - \bar{W}_{12} \hat{S}_{12}^T - \bar{W}_{11} \hat{S}_{11} \\
\Sigma_2 &:= \hat{A}_{12} - \bar{W}_{12} \hat{S}_{22} - \bar{W}_{11} \hat{S}_{12} \\
\Sigma_3 &:= \hat{A}_{21} - \bar{W}_{22} \hat{S}_{12}^T,\ \Sigma_4 := \hat{A}_{22} - \bar{W}_{22} \hat{S}_{22} \\
\mathcal{Q}_{21} &:= \bar{W}_{22} \hat{A}_{12}^T + \hat{Q}_{12}^T,\ \Sigma_0 := \Sigma_1 - \Sigma_2 \Sigma_4^{-1} \Sigma_3
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \varepsilon^{-1} \hat{A}_{21} & \varepsilon^{-1} \hat{A}_{22} \end{bmatrix} := A_\varepsilon - H_{a\varepsilon} H_b^T \hat{R} C = \hat{A}_\varepsilon \qquad (9d)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} := \mu (C^T \hat{R} C - E_a^T E_a) = \hat{S} \qquad (9e)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \varepsilon^{-1} \hat{Q}_{12} \\ \varepsilon^{-1} \hat{Q}_{12}^T & \varepsilon^{-2} \hat{Q}_{22} \end{bmatrix} := \frac{1}{\mu} H_{a\varepsilon} [I_p - H_b^T \hat{R} H_b] H_{a\varepsilon}^T + B_\varepsilon V_1 B_\varepsilon^T = \hat{Q}_\varepsilon \qquad (9f)$$

2・2 ニュートン法に基づくアルゴリズム　通常，特異摂動システムに対するフィルタリング問題では，摂動項の値は既知でないと設計できない[2]．ここで，注意しなければならない点は，摂動項の値が既知であるからといって，Schur 分解法による MATLAB の `are` を安易に利用してリカッチ方程式の正確解を得ることが出来ないことである．仮に`are` を利用しても，先に述べたアルゴリズムの悪条件化により，正確解を得ることができない．特に，2 次コスト保証フィルタでは 2 乗推定誤差の最小値を計算するためにリカッチ方程式の解が必要であり，正確解を求めなければ最適なフィルタを得ることができない．本論文では，摂動項の値は既知であることを利用して，数値計算の悪条件を克服するリカッチ方程式の新たな数値解法を提案する．本論文で使用するフィルタ型リカッチ方程式を解くためのアルゴリズムは，ニュートン法に基づいている．ニュートン法によるフィルタ型リカッチ方程式の数値解法は，既に著者らによって提案されている[13]．しかし，従来の報告[13]では，2 次収束を保証する ε の存在は示されていても，どれくらいの大きさの ε ならアルゴリズムが 2 次収束であるかどうかを判定することができなかった．そこで，本論文では，アルゴリズムの 2 次収束を判定する ε に関する条件式を新たに確立する．

リカッチ方程式 (3) の正定対称安定化解 W_ε を高精度に求めるために，ニュートン法に基づく以下のアルゴリズム (10) を提案する．

$$[\hat{A} - W^{(i)} \hat{S}] W^{(i+1)T} + W^{(i+1)} [\hat{A} - W^{(i)} \hat{S}]^T + W^{(i)} \hat{S} W^{(i)T} + \hat{Q} = 0,\ (i = 0,\ 1,\ \cdots) \qquad (10a)$$

$$W^{(0)} = \begin{bmatrix} \bar{W}_{11} & \bar{W}_{12} \\ \varepsilon \bar{W}_{12}^T & \bar{W}_{22} \end{bmatrix} \qquad (10b)$$

ここで，$W^{(i)}$ $(i = 1,\ 2, \cdots)$ 及び $\hat{A}$，$\hat{Q}$ は以下の構造で定義される．

$$W^{(i)} = \begin{bmatrix} W_{11}^{(i)} & W_{12}^{(i)} \\ \varepsilon W_{12}^{(i)T} & W_{22}^{(i)} \end{bmatrix},\ W_{11}^{(i)} = W_{11}^{(i)T}$$

$$W_{22}^{(i)} = W_{22}^{(i)T},\ \hat{A} = \Pi_\varepsilon \hat{A}_\varepsilon,\ \hat{Q} = \Pi_\varepsilon \hat{Q}_\varepsilon \Pi_\varepsilon$$

従来，フィルタ型リカッチ方程式 (3) に対して，ε が与えられたとき，アルゴリズム (10) が 2 次収束するかどうか判定する条件は示されていない．そこで，本論文では，アルゴリズム (10) が 2 次収束するかどうか判定するための ε に関する条件式を新規に導出する．

定理 1 仮定 1 が成立するとする．また，リカッチ方程式 (6a)，(6c) の正定対称安定化解 $\bar{W}_{11}$，$\bar{W}_{22}$ がそれぞれ存在し，ヤコビ行列 (11) に $\bar{W}_{11} \to W_{11}$，$\bar{W}_{12} \to W_{12}$，$\bar{W}_{22} \to W_{22}$，$\varepsilon_0 \to \varepsilon$ を代入した行列 $\mathbf{J}_0 := \mathbf{J}(\bar{W}_{11},\ \bar{W}_{21},\ \bar{W}_{22},\ \varepsilon_0)$ が正則であると仮定する．このとき

$$2\theta := 4 \|\hat{S}\| \cdot \|\mathbf{J}_0^{-1}\|^2 \cdot \|F(W^{(0)})\| < 1 \qquad (12)$$

であるならばアルゴリズム (10a) は 2 次収束である．すなわち (13) を満足する．

$$\|W^{(i)} - W^*\| = \frac{O(\varepsilon^{2^i})}{2^i},\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \qquad (13)$$

$$\nabla\mathcal{F}(\mathbf{w}) := \frac{\partial\mathcal{F}(\mathbf{w})}{\partial\mathbf{w}^T} = \mathbf{J}(W_{11},\ W_{12},\ W_{22},\ \varepsilon)$$
$$= \begin{bmatrix} I_{n_1}\otimes\Phi_{11}+\Phi_{11}\otimes I_{n_1} & (I_{n_1}\otimes\Phi_{12})\mathcal{U}_{n_1n_2}+\Phi_{12}\otimes I_{n_1} & 0 \\ \Phi_{21}\otimes I_{n_1} & \Phi_{22}\otimes I_{n_1}+\varepsilon[I_{n_2}\otimes\Phi_{11}] & (I_{n_2}\otimes\Phi_{12})\mathcal{U}_{n_2n_2} \\ 0 & \varepsilon[I_{n_2}\otimes\Phi_{21}+(\Phi_{21}\otimes I_{n_2})\mathcal{U}_{n_1n_2}] & I_{n_2}\otimes\Phi_{22}+\Phi_{22}\otimes I_{n_2} \end{bmatrix} \quad (11)$$
$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) := \begin{bmatrix} \mathrm{vec}F_{11}^T(\varepsilon) & \mathrm{vec}F_{12}^T(\varepsilon) & \mathrm{vec}F_{22}^T(\varepsilon) \end{bmatrix}^T,\ \mathbf{w} := \begin{bmatrix} \mathrm{vec}W_{11}^T & \mathrm{vec}W_{12}^T & \mathrm{vec}W_{22}^T \end{bmatrix}^T$$

ただし, $W_\varepsilon^* = \Pi_\varepsilon^{-1}W^* = W^{*T}\Pi_\varepsilon^{-1}$ である. また,

$$\begin{aligned} F(W) &:= \hat{A}W^T + W\hat{A}^T - W\hat{S}W^T + \hat{Q} \\ &= \begin{bmatrix} F_{11}(\varepsilon) & F_{12}(\varepsilon) \\ F_{12}^T(\varepsilon) & F_{22}(\varepsilon) \end{bmatrix} \\ \Phi_{11} &:= \hat{A}_{11} - W_{12}\hat{S}_{12}^T - W_{11}\hat{S}_{11} \\ \Phi_{12} &:= \hat{A}_{12} - W_{12}\hat{S}_{22} - W_{11}\hat{S}_{12} \\ \Phi_{21} &:= \hat{A}_{21} - W_{22}\hat{S}_{12}^T - \varepsilon W_{12}^T\hat{S}_{11} \\ \Phi_{22} &:= \hat{A}_{22} - W_{22}\hat{S}_{22} - \varepsilon W_{12}^T\hat{S}_{12} \end{aligned}$$

(証明) 簡単な計算から以下の関係式を得る.

$$\nabla F(W) = \frac{\partial\mathrm{vec}F(W)}{\partial(\mathrm{vec}\ W)^T}$$
$$= (I_{N^2} + \mathcal{U}_{NN})[(\hat{A} - W\hat{S})\otimes I_N] \quad (14)$$

したがって, $\|I_{N^2} + \mathcal{U}_{nn}\| = 2$ に注意して, 任意の行列 W_1, W_2 およびベクトル $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ に対して

$$\|\nabla F(W_1) - \nabla F(W_2)\| \le 2\|\hat{S}\|\cdot\|W_1 - W_2\|$$
$$\Rightarrow\quad \|\nabla\mathcal{F}(\mathbf{w}_1) - \nabla\mathcal{F}(\mathbf{w}_2)\| \le 2\|\hat{S}\|\cdot\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|$$

が得られる. 次に, $\mathbf{J}_0$ は正則であると仮定されているので $\mathbf{J}_0^{-1}$ は存在する. したがって, 文献[17]にある Newton–Kantorovich 定理の θ は

$$\theta = \|\mathbf{J}_0^{-1}\|^2\cdot\|F(W^{(0)})\|\cdot 2\|\hat{S}\| \le \frac{1}{2}$$

と計算される. したがって上式より不等式 (12) を得る. すなわち, 不等式 (12) を満足すれば, アルゴリズム (10a) は 2 次収束である. □

注意 1 ε が十分小さくない場合, 収束条件 (11) は満足しない. しかしながら, ニュートン法の局所 2 次収束の定理より, やはり 2 次収束が保証される.

2・3 一般化リアプノフ方程式の数値解法 本論文では, 行列計算のワークスペースを低次元化するために, ニュートン法 (10a) に含まれる一般化リアプノフ方程式を解くためのアルゴリズムを新たに提案する. 提案されるアルゴリズムは, 特異摂動システムのサブシステムである境界層システム及び退化システムと同一次元で数値計算できる. 一般に特異摂動システムでは, 全次元システムの次数 ($N := n_1 + n_2$) が大きくなることから, 低次元 ($\max\{n_1,\ n_2\}$) で計算できることは工学的に大変有用である.

ニュートン法に基づくアルゴリズム (10a) を一般化したリアプノフ方程式 (15) を考える.

$$X\Lambda^T + \Lambda X^T + \Xi = 0 \quad (15)$$

ただし, Λ 及び Ξ は以下の構造をもつ既知の定数行列であり, X は以下の構造をもつ未知の定数行列である.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix},\ \Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{12}^T & \Xi_{22} \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ \varepsilon X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix}$$
$$\Lambda_{11},\ \Xi_{11},\ X_{11} \in \mathbf{R}^{n_1},\ \Lambda_{22},\ \Xi_{22},\ X_{22} \in \mathbf{R}^{n_2}$$
$$\Xi_{11} = \Xi_{11}^T,\ \Xi_{22} = \Xi_{22}^T,\ X_{11} = X_{11}^T,\ X_{22} = X_{22}^T$$

従来, 特異摂動システムにおけるリアプノフ方程式を解くためのアルゴリズムとして再帰的アルゴリズム[4]が提案されている. しかし, 再帰的アルゴリズムは, 解の精度が 0–オーダ解に依存する欠点を有する. そこで, 新規にアルゴリズムを提案する. その前に, 一般化リアプノフ方程式 (15) において, 一般性を失うことなく以下の標準的な仮定を導入する[4].

仮定 2 Λ_{22} は正則行列かつ Λ_{22} 及び $\Lambda_0 = \Lambda_{11} - \Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{21}$ は安定である.

まず, 一般化リアプノフ方程式 (15) を分割計算すれば方程式 (16) を得る.

$$X_{11}\Lambda_{11}^T + \Lambda_{11}X_{11}$$
$$+X_{12}\Lambda_{12}^T + \Lambda_{12}X_{12}^T + \Xi_{11} = 0 \quad (16a)$$
$$X_{11}\Lambda_{21}^T + X_{12}\Lambda_{22}^T$$
$$+\Lambda_{12}X_{22} + \varepsilon\Lambda_{11}X_{12} + \Xi_{12} = 0 \quad (16b)$$
$$X_{22}\Lambda_{22}^T + \Lambda_{22}X_{22}$$
$$+\varepsilon(X_{12}^T\Lambda_{21}^T + \Lambda_{21}X_{12}) + \Xi_{22} = 0 \quad (16c)$$

仮定 2 が成立するものとして, 以下に不動点アルゴリズム[18]に基づく求解アルゴリズムを与える.

$$X_{22}^{(k+1)}\Lambda_{22}^T + \Lambda_{22}X_{22}^{(k+1)}$$

$$+\varepsilon(X_{12}^{(k)T}\Lambda_{21}^T+\Lambda_{21}X_{12}^{(k)})+\Xi_{22}=0 \quad (17a)$$
$$X_{11}^{(k+1)}\Lambda_0^T+\Lambda_0X_{11}^{(k+1)}+\Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}\Xi_{22}\Lambda_{22}^{-T}\Lambda_{12}^T$$
$$-\varepsilon\Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}X_{12}^{(k)T}\Lambda_0^T-\varepsilon\Lambda_0X_{12}^{(k)}\Lambda_{22}^{-T}\Lambda_{12}^T$$
$$-\Xi_{12}\Lambda_{22}^{-T}\Lambda_{12}^T-\Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}\Xi_{12}^T+\Xi_{11}=0 \quad (17b)$$
$$X_{12}^{(k+1)}=-(X_{11}^{(k+1)}\Lambda_{21}^T+\Lambda_{12}X_{22}^{(k+1)}$$
$$+\varepsilon\Lambda_{11}X_{12}^{(k)}+\Xi_{12})\Lambda_{22}^{-T} \quad (17c)$$
$$X_{12}^{(0)}=0\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots) \quad (17d)$$

不動点アルゴリズム (17) に対して, 以下の性質が成立する.

定理 2 仮定 2 が成立するとする. このとき, 不動点アルゴリズム (17) は, 解 X_{ij} の正確な値に $O(\varepsilon^{k+1})$ の高精度で収束する, すなわち,

$$\|X_{ij}-X_{ij}^{(k)}\|=O(\varepsilon^k),\quad ij=11,\ 12,\ 22, \quad (18)$$
$$(k=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

(証明) 定理 2 の証明は, 数学的帰納法を利用して行う. まず, 求解アルゴリズム (17) において $k=0$ とすれば, $X_{12}^{(0)}=0$ を考慮して以下の方程式を得る.

$$X_{22}^{(1)}\Lambda_{22}^T+\Lambda_{22}X_{22}^{(1)}+\Xi_{22}=0$$
$$X_{11}^{(1)}\Lambda_0^T+\Lambda_0X_{11}^{(1)}+\Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}\Xi_{22}\Lambda_{22}^{-T}\Lambda_{12}^T$$
$$-\Xi_{12}\Lambda_{22}^{-T}\Lambda_{12}^T-\Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}\Xi_{12}^T+\Xi_{11}=0$$
$$X_{12}^{(1)}=-(X_{11}^{(1)}\Lambda_{21}^T+\Lambda_{12}X_{22}^{(1)}+\Xi_{12})\Lambda_{22}^{-T}$$

一方, 方程式 (16) で $\varepsilon=0$ としたとき, $\bar{X}_{ij}$ に関する 0–オーダ方程式は以下で与えられる.

$$\bar{X}_{22}\Lambda_{22}^T+\Lambda_{22}\bar{X}_{22}+\Xi_{22}=0$$
$$\bar{X}_{11}\Lambda_0^T+\Lambda_0\bar{X}_{11}+\Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}\Xi_{22}\Lambda_{22}^{-T}\Lambda_{12}^T$$
$$-\Xi_{12}\Lambda_{22}^{-T}\Lambda_{12}^T-\Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}\Xi_{12}^T+\Xi_{11}=0$$
$$\bar{X}_{12}=-(\bar{X}_{11}\Lambda_{21}^T+\Lambda_{12}\bar{X}_{22}+\Xi_{12})\Lambda_{22}^{-T}$$

したがって, 上式の差をとれば, 仮定 2 より Λ_{22}, Λ_0 が安定であるので $\bar{X}_{ij}-X_{ij}^{(1)}=0$ が示され, $\|X_{ij}-X_{ij}^{(1)}\|=O(\varepsilon)$ が成立する. $k=\mathcal{N}\geq 2$ のとき $\|X_{ij}-X_{ij}^{(\mathcal{N})}\|=O(\varepsilon^{\mathcal{N}})$ が成立すると仮定する. 求解アルゴリズム (17) において $k=\mathcal{N}$ と設定し, 仮定である $\|X_{ij}-X_{ij}^{(\mathcal{N})}\|=O(\varepsilon^{\mathcal{N}})$ を利用して方程式 (16) から差をとれば以下を得る.

$$(X_{22}-X_{22}^{(\mathcal{N}+1)})\Lambda_{22}^T+\Lambda_{22}(X_{22}-X_{22}^{(\mathcal{N}+1)})$$
$$+O(\varepsilon^{\mathcal{N}+1})=0$$
$$(X_{11}-X_{11}^{(\mathcal{N}+1)})\Lambda_0^T+\Lambda_0(X_{11}-X_{11}^{(\mathcal{N}+1)})$$
$$+O(\varepsilon^{\mathcal{N}+1})=0$$
$$(X_{12}-X_{12}^{(\mathcal{N}+1)})=-[(X_{11}-X_{11}^{(\mathcal{N}+1)})\Lambda_{21}^T$$
$$+\Lambda_{12}(X_{22}-X_{22}^{(\mathcal{N}+1)})+O(\varepsilon^{\mathcal{N}+1})]\Lambda_{22}^{-T}$$

Λ_{22}, Λ_0 が安定であるので, リアプノフ方程式の性質[16] [1] より $\|X_{ij}-X_{ij}^{(\mathcal{N}+1)}\|=O(\varepsilon^{\mathcal{N}+1})$ が示される. 以上より全ての自然数 k に対して (18) が成立する. □

最後に, 2 次コスト保証フィルタ (4) の具体的な設計方法を説明する.

Step 1. ある適当な小さな正の定数 μ に対して, (2) 式の A_ε, (6d) 式の S, (6e) 式の Q_ε を利用して, A_0, S_0 及び Q_0 を計算する[9].

$$H_0:=H_1-H_2H_4^{-1}H_3=\begin{bmatrix} A_0^T & -S_0 \\ -Q_0 & -A_0 \end{bmatrix}$$

ただし,

$$H_1:=\begin{bmatrix} A_{11}^T & -S_{11} \\ -Q_{11} & -A_{11} \end{bmatrix},\ H_2:=\begin{bmatrix} A_{21}^T & -S_{12} \\ -Q_{12} & -A_{12} \end{bmatrix}$$
$$H_3:=\begin{bmatrix} A_{12}^T & -S_{12}^T \\ -Q_{12}^T & -A_{21} \end{bmatrix},\ H_4:=\begin{bmatrix} A_{22}^T & -S_{22} \\ -Q_{22} & -A_{22} \end{bmatrix}$$

Step 2. 低次元リカッチ方程式 (6a), (6c) が, 共に正定対称安定化解を持つような $\hat{\mu}=\min\{\hat{\mu}_s,\ \hat{\mu}_f\}\leq\bar{\mu}$ を 2 分法を用いて探索する.

Step 3. $0<\mu<\hat{\mu}$ の範囲で μ を設定する. 次に, 行列 (19) を準備し, (9d) 式の $\hat{A}_\varepsilon$, (9e) 式の $\hat{S}$, (9f) 式の $\hat{Q}_\varepsilon$ を利用して, $\hat{H}_0$ を計算し, 低次元リカッチ方程式 (9a) 及び (9c) の正定対称安定化解 $\bar{W}_{11}$ 及び $\bar{W}_{22}$ を求める.

$$\hat{H}_0:=\hat{H}_1-\hat{H}_2\hat{H}_4^{-1}\hat{H}_3=\begin{bmatrix} \hat{A}_0^T & -\hat{S}_0 \\ -\hat{Q}_0 & -\hat{A}_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

ただし

$$\hat{H}_1:=\begin{bmatrix} \hat{A}_{11}^T & -\hat{S}_{11} \\ -\hat{Q}_{11} & -\hat{A}_{11} \end{bmatrix},\ \hat{H}_2:=\begin{bmatrix} \hat{A}_{21}^T & -\hat{S}_{12} \\ -\hat{Q}_{12} & -\hat{A}_{12} \end{bmatrix}$$
$$\hat{H}_3:=\begin{bmatrix} \hat{A}_{12}^T & -\hat{S}_{12}^T \\ -\hat{Q}_{12}^T & -\hat{A}_{21} \end{bmatrix},\ \hat{H}_4:=\begin{bmatrix} \hat{A}_{22}^T & -\hat{S}_{22} \\ -\hat{Q}_{22} & -\hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

さらに代数方程式 (9b) を利用して $\bar{W}_{21}$ を求めた後, 初期値を (10b) のように設定してアルゴリズムである一般化リアプノフ方程式 (10a) の解 $W^{(i+1)}$ を収束するまで求める.

Step 4. コスト (5b) を計算する.

Step 5. $0<\mu<\hat{\mu}$ を満足する全ての μ に対して, コスト (5b) を最小にする $\mu=\mu_{app}$ を求める.

Step 6. $\mu=\mu_{app}$ としたときのフィルタ (4) を計算する.

[1] 摂動項 ε を含まない定数行列 A が安定行列かつ Q が対称行列であるとき, Y に関してのリアプノフ方程式 $YA^T+AY+Q=0$ の解は $Y=\int_0^\infty e^{At}Qe^{A^Tt}dt$ である. したがって, $Q=O(\varepsilon^{\mathcal{N}+1})$ であるとき, $Y=\int_0^\infty e^{At}Qe^{A^Tt}dt=O(\varepsilon^{\mathcal{N}+1})$ となる.

(注意 3) リカッチ方程式 (3) は μ に対して凸なので, Step 5. の μ の探索には一次探索を利用すればよい[(1)].

3. シミュレーション

F-8 戦闘機のモデル[(3)]に対し, 新規に不確定要素を考慮したモデルを考える. シミュレーションの目的は, 不確定要素が加ったために, 従来法である近似カルマンフィルタや H_∞ 最適フィルタでは構築できない代わりに, 前章で提案されたロバストフィルタ (4) を設計することである. システム行列は以下で与えられる.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -0.01357 & -0.0644 \\ 0.06 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -0.003087 & 0 \\ 0.040467 & 0 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} -0.045375 & 0 \\ 0.07125 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -0.03035 & 0.075 \\ -0.075083 & -0.01674 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.463 \\ 6.07 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} -4.5525 \\ -11.262499 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 3.15 \end{bmatrix},\ V_2 = \begin{bmatrix} 6.859 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$$

$$H_{a1} = 0 \in \mathbf{R}^{2\times 2},\ H_{a2} = \begin{bmatrix} 0.0045375 & 0 \\ 0 & 0.007125 \end{bmatrix}$$

$$E_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{a2} = 0 \in \mathbf{R}^{2\times 2}$$

$$H_b = 0 \in \mathbf{R}^{2\times 2},\ \Delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) & 0 \\ 0 & \delta_2(t) \end{bmatrix}$$

ただし, 摂動項は $\varepsilon = 10^{-6}$ である. また $\delta_i(t)$, $(i = 1,\ 2)$ は $|\delta_i(t)| \le 1$ を満足するノルム有界型の不確定要素である. 本論文で扱うシステムは, 環境変化やモデル化誤差の影響が行列 A_{21} に反映されるとして, 行列 A_{21} にはノミナル値から 10%の不確定要素が含まれていると仮定する. したがって, 従来の手法[(2, 5, 8)]ではフィルタを設計できないことに注意されたい[2]. リカッチ方程式 (6c), (6a) が正定対称安定化解をもつような $\hat{\mu}_f$, $\hat{\mu}_s$ はそれぞれ $\hat{\mu}_f = \infty$, $\hat{\mu}_s = 5.7808 \times 10^3$ である. したがって, $\hat{\mu} = \min\{\hat{\mu}_s,\ \hat{\mu}_f\} \le \tilde{\mu} = 5.7808 \times 10^3$ であり, $0 < \mu < \hat{\mu} = 5.7808 \times 10^3$ の範囲で十分小さな ε に対してリカッチ方程式 (3) は正定対称安定化解をもつ. 以上の得られた値を元にロバストフィルタの設計を行う.

まず, アルゴリズム (10a) が収束するかどうか判定するために, $\mu = 0.05$ であるときの (12) の左辺を計算すれば, $2\theta = 9.7161 \times 10^{-1} < 1$ となる. したがって, $\varepsilon = 10^{-6}$ であるときアルゴリズム (10a) の 2 次収束が保証される. 次に, 収束の様子を確認する. 収束するまでの誤差のノルムの値を表 1 に与える. ただし, 収束判定を $\|F(W^{(i)})\| < 10^{-12}$ とした. 表 1 より提案されたアルゴリズムは 2 次収束であることが確認される.

Table 1. Error propagation per iteration

i	$\|F(W^{(i)})\|$
0	8.1914×10^{-5}
1	1.5108×10^{-10}
2	3.2798×10^{-13}

実際の F-8 戦闘機のモデル[(3)]は $\varepsilon = 0.025$ である. このとき, 収束条件である不等式 (12) は満足しない. しかしながら, ニュートン法の局所 2 次収束の定理より, やはり 2 次収束が保証される[(14)]. したがって $\varepsilon = 0.025$ でもロバストフィルタの設計が可能である. 実際に, $\|F(W^{(i)})\| < 10^{-12}$ を満足するリカッチ方程式の解を得ることに成功している[3].

最後に, 2 乗推定誤差 Trace $[W_\varepsilon]$ の最小値を計算する. 直接 MATLAB を使用してリカッチ方程式 (3) を解いたとき, 最適な μ^* が $\mu^{\rm mat} = 1.8500 \times 10^2$ と求められたのに対して, アルゴリズム (10a) では $\mu^{\rm new} = 1.4885 \times 10^2$ と求められた. それぞれの 2 乗推定誤差は Trace $[W_\varepsilon^{\rm mat}] = 4.351112469311488 \times 10^9$, Trace $[W_\varepsilon^{\rm new}] = 4.351117934143073 \times 10^9$ である. したがって, この時点では直接 MATLAB を使用してリカッチ方程式 (3) を解いたほうが 2 乗推定誤差が小さい. そこで, 解 W_ε の正確さを比較するために, MATLAB のリカッチ方程式を解く関数 are を利用して得られた解 $W_\varepsilon^{\rm mat}$ の誤差, アルゴリズム (10a) を用いて解いた解 $W_\varepsilon^{\rm new}$ の誤差をそれぞれ求めると $\|F(W_\varepsilon^{\rm mat})\| = 4.6831 \times 10^{-4}$, $\|F(W_\varepsilon^{\rm new})\| = 4.7682 \times 10^{-13}$ である. したがって, 直接 MATLAB を使用した場合, リカッチ方程式 (3) の解が正確に求められていないことが分かる. その結果, 2 乗推定誤差が見かけ上小さくなったと考えられる. 当然,

$$W_\varepsilon = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & \varepsilon^{-1} W_{22} \end{bmatrix}$$

[2] 本論文のシュミレーションでは行列 A_{21} のみに不確定要素を付加している. しかし, 他の行列である A_{11}, A_{12}, A_{22} に不確定要素が付加されてもリカッチ方程式 (2) の正定対称安定可解が存在する限り, ロバストフィルタの設計は可能である.

[3] 直接 MATLAB を使用してリカッチ方程式 (3) を解いた場合, $\|F(W_\varepsilon)\| = 1.8637 \times 10^{-8}$ である. したがって, 解の精度が提案手法より悪いので, 最適な μ を探索できない.

から, $\varepsilon = 10^{-6}$ を考慮すれば Trace $[W_{\varepsilon}^{\mathrm{mat}}] \approx \varepsilon^{-1}$Trace $[W_{22}] = 10^{6}$Trace $[W_{22}]$ となる. その結果, MATLAB を使用して得られた解には 10^{-4} 程度の誤差を含むため, 得られた 2 乗推定誤差は最適化には使用できない. 以上より, 正確な μ^{*} を求めることができないため, MATLAB の安易な使用は適切ではない. 最後に, $\varepsilon = 10^{-6}$, $\mu = \mu^{\mathrm{new}} = 1.4885 \times 10^{2}$ としたときのロバストフィルタ (4) を (20) に与える.

$$\dot{\xi}(t) = F_{\varepsilon}\xi(t) + G_{\varepsilon}y(t) \tag{20}$$

$$F_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -1.1767 \times 10^{-2} & -6.4400 \times 10^{-2} & -3.0870 \times 10^{-3} & -4.6318 \times 10^{-3} \\ 4.6508 \times 10^{-2} & 0 & 4.0467 \times 10^{-2} & 6.0717 \times 10^{-2} \\ -3.0554 \times 10^{4} & 0 & -3.0350 \times 10^{4} & 2.9462 \times 10^{4} \\ 9.4892 \times 10^{4} & 0 & -7.5083 \times 10^{4} & -1.2940 \times 10^{5} \end{bmatrix}$$

$$G_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2.3159 \times 10^{-1} & 1.5141 \times 10^{-7} \\ -3.0359 & -1.1331 \times 10^{-6} \\ 2.2769 \times 10^{6} & 1.2447 \\ 5.6328 \times 10^{6} & 1.9856 \end{bmatrix}$$

最後に, シミュレーションの結果を総合して, 従来の設計方法との比較を行う. 本論文で提案された設計手法にあって, 従来の結果にない特徴として, 大きく分けて以下の 3 があげられる.

(a) カルマンフィルタのような最適フィルタの手法[2, 4, 5, 8] と比較して, システムに不確定要素を含んでいてもフィルタが設計できる.

(b) MATLAB に実装されている Schur 分解法と比較して, ε が小さくても高精度なリカッチ方程式の解を得ることができる.

(c) Schur 分解法や厳密分解法と比較して, 計算に必要なワークスペースが $2N = 2(n_1 + n_2)$ から $\max\{n_1, n_2\}$ に低減された.

以上より, 提案された設計手法は工学的な見地から有用である.

4. 結　言

本論文では, Petersen ら[1]が提案している 2 次コスト保証フィルタを特異摂動システムに適用した. その結果, 本論文で得られたフィルタは, 特異摂動システムに環境変化や経年変化によるモデル化誤差等の不確定要素を含んでいても設計可能であるという意味で従来の適用範囲[2, 5, 8]を拡張している. したがって, 実システムである航空機モデル[2]や乗用車モデル[12]を扱う場合, 不確定要素を考慮することによって, より安定した状態推定が行えることが期待される.

文　献

(1) I. R. Petersen and D. C. McFarlane : Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems, IEEE Trans. A.C., **39**-9, 1971–1977 (1994)
(2) P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly : Singular Perturbation Methods in Control, Analysis and Design, Academic Press (1986)
(3) H. K. Khalil and Z. Gajic : Near-Optimum Regulator for Stochastic Linear Singularly Perturbad Systems, IEEE Trans. A.C., **29**-6, 531–541 (1984)
(4) Z. Gajic, D. Petkovski and X. Shen : Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System – A Recursive Approach, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 140, Springer–Verlag (1990)
(5) Z. Gajic and M. T. Lim : A New Filtering Method for Linear Singularly Perturbed Systems, IEEE Trans. A.C., **39**-9, 1952–1955 (1994)
(6) C. Coumarbatch and Z. Gajic : Parallel Optimal Kalman Filtering for Stochastic Systems in Multimodeling Form, Trans. ASME, J. Dyn. Sys., Meas., and Cont., **122**, 542–550 (2000)
(7) X. Shen and L. Deng : Decomposition Solution of H_{∞} Filter Gain in Singularly Perturbed Systems, Signal Processing, **55**, 313–320 (1996)
(8) M. T. Lim and Z. Gajic : Reduced–Order H_{∞} Optimal Filtering for Systems with Slow and Fast Modes, IEEE Trans. CAS I, **47**-2, 250–254 (2000)
(9) W. Tan, T. Leung, and Q. Tu : H_{∞} Control for Singularly Perturbed Systems, Automatica, **34**-2, 255–260 (1998).
(10) V. Dragan : H_{∞}–Norms and Disturbance Attenuation for Systems with Fast Transients, IEEE Trans. A.C., **41**-5, 747–750 (1996)
(11) V. Dragan : Asympotic Expansions for Game–Theoretic Riccati Equations and Stabilization with Disturbance Attenuation for Singularly Perturbed Systems, Sys. & Cont. Lett., **20**, 455–463 (1993)
(12) M. Salman, A. Lee and N. Boustany : Reduced order design of active suspension control, Trans. ASME, J. Dyn. Sys., Meas., and Cont., **112**, 604–610 (1990)
(13) H. Mukaidani, H. Xu and K. Mizukami : New iterative algorithm for algebraic Riccati equation related to H_{∞} control problem of singularly perturbed systems, IEEE Trans. A.C., **46**-10, 1659–1666 (2001)
(14) 向谷, 新田, 小林, 沖田 : リカッチ方程式の手法を利用した非標準特異摂動システムの 2 次安定化, 電気学会論文誌 C, **120**-7, 967–976 (2000)
(15) J. R. Magnus and H. Neudecker, Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, John Wiley and Sons, New York, (1999)
(16) K. Zhou : Essentials of robust control, New Jersey, Prentice–Hall (1998)
(17) 広中編: 現代数理科学辞典, 大阪書籍, (1991)
(18) 大野, 磯田監修: 新版数値計算ハンドブック, オーム社, (1990)