広島大学教育学部　第二部　第46号　1997

幾何教材の背景としての線形理論

—相似と相似変換—

今　岡　光　範

(1997年9月9日受理)

Linear Theory as a Background of Geometric Teaching Materials
—Similarity and Similar Transformations—

Mitsunori Imaoka

In this paper, we show a process of similarity in the framework of linear theory. Similarity of figures is one of the fundamental concepts in Euclidean geometry, and an elementary definition of it uses the notion of a site or a center of similarity. Another definition of similarity is given using a similar transformation, which enables us to consult methods developed in linear algebra. We investigate a relation between such definitions, and the effect of the comparison. Main subjects include the following:

How to find a cite and a center of similarity for given similar figures;

how to apply properties of the orthogonal transformation to the study of similarity.

Linear algebra is a well investigated subject in mathematics, which has given us an abundant idea for linear theory. The purpose of our study is to describe functions of linear algebra as a background of fundamental properties of figures.

1．はじめに

現代の数学において，複雑系などの非線形な理論の研究が盛んであるが，線形理論は，よく理解され応用力のある理論として，依然その支持基盤をもっている。現今の学校数学においては，線形性の根源である1次方程式が中学校で導入され，線形理論の中心となるベクトルが高校で導入される。ベクトルは，動的な空間図形の記述においても優れた概念である。

大学では，線形理論は線形代数によって導入される。線形代数学は，行列や行列式などの演算をもつ代数的対象と，ベクトル空間という幾何的解析的対象とを融合し，両者の関係を通して線形理論を展開していく学問である。基礎教科として線形代数を学ぶ学生は，その線形性の考え方を専門分野で広く応用していくことが期待される。

かって Dieudonné は，幾何教育においてベクトルと線形代数を優先させることを主張し，大きな論争を巻き起こした。そのように線形代数的な考え方は強力なのである。ただし，図形的直観の育成なしに線形代数を推進することは真の空間認識に決してつながらない，という見解には説得力がある。Freudenthal [1] は，角度という天賦の図形性質がベクトルからは直接引き出せないと指摘している。しかし，Dieudonné による線形代数の教科書 [2] は，ユークリッド幾何との関係を重視した理論展開を示していて，図形性質の背景としての線形理論を考える上で参考になる。

本稿では，図形の相似性というユークリッド図形の基本概念をとりあげ，その背景にある線形理論を考察する。相似変換の性質がその線形理論に相当し，それが伝統的な相似の考え方にどのように関わり，その関わりが概念のどのような発展をもたらすか，ということを調べる。ベクトル空間を基軸にしたユークリッド幾何の公理として Weyl の公理 [3] がある。その公理によれば，ユークリッド図形の基本概念は線形理論を用いて記述できる。その意味では，当然，図形の相似性も線形理論で記述でき，本論は単にそれを確認しているにすぎないということになる。しかし，筆者は，図形の基本性質について，それに関わる数学理論を具体的かつ統一的に洗い出し，その性質の普遍性を捉え直し整理することは，一般論とは別の意味があり，広義の幾何教材研究につながると考えている。本論ではそ

の主旨に即して，相似の基本的な定義と相似変換による定義を比較し，その比較を通して得られる性質を普遍的に捉え，必要となる線形代数の概念を具体的かつ統一的に記述することをめざす。

2．図形の相似

ユークリッド幾何はユークリッド原論にその起源をもつが，そこでは，どのように長さの単位を設定しても共通に得られる性質が論じられている。それゆえ，２つの図形が「等しい」とはそれらが合同であることをさすが，２つの図形が「同じ形」であるとはそれらが相似であることを意味する。角度の概念は相似な図形に共通な性質であり，正多面体が5種類であるという正多面体の分類も相似ということを基準にした分類である。このように，相似性はユークリッド幾何において基本となる性質である。

２つの図形 T, T' が合同であるとは，「一方を移動して他方に重ね合わすことができる」ことである。つまり，Tを移動して T'の上に重ね合わすという表現は，TとT' が等しい図形であることを「移動」という操作を用いて表現したものである。一方，図形の相似性には，「拡大・縮小」という操作が加わる。現今のカリキュラムでは，相似は中学校の２年で導入される。その導入時の表現の仕方は教科書によって多少異なるが，いずれも拡大・縮小ということを用いている。たとえば，「ある図形を，形を変えないで拡大または縮小するとき，その図形ともとの図形は相似であるという」(学校図書 [4])というように表現される。それでは，この拡大・縮小という操作を数学的に処理しやすい形で定義するにはどうすればよいだろうか。1つの確実な方法は，後でとりあげる相似変換を用いる方法であるが，もっと拡大・縮小の直観的な意味に近い方法として，次の定義がよく知られている。(寺坂 [5], 岩田 [6] 参照)

定義 1． 図形SとS'が相似であるとは，Sを適当に移動してS'とたがいに相似の位置にあるようにできることをいう。

ここで，S と S' が相似の位置にあるとは，

「ある定点 C があり，S上の各点 P に対して，
直線 CP 上にある点 P' で，$CP' : CP = k$ (一定)となる P' 全体が S' である」

というものである。

そのとき，定点 C を相似の中心，定数kをSとS'の相似比と呼ぶ。ただし，比$CP' : CP = k$は長さCP'とCPの向きづけられた比がkであることを表し，それは次のような意味である：kは零でない正負の実数である；$k > 0$ならば，PとP'はCに対して常に同じ側にあり，CP と CP' の長さの比が k である；$k < 0$ のときは，PとP' が Cに対して常に反対側にあり，CP と CP' の長さの比が $-k$ である；$C = P$ならば $C = P'$ である。$k = \pm 1$のとき，Cを中心に回転または対称移動することによってSをS'に重ね合わすことができるので，SとS'は合同である。

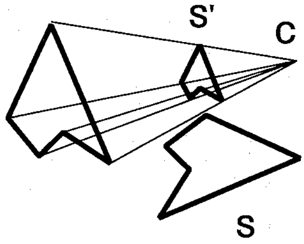

図1

合同に比べて相似の定義は，このように表現が少し長くなるが，それは移動と拡大・縮小の２つの操作を必要とすることに起因する。後で述べるように，相似変換を使えばより短い表現が可能になる。しかし，その場合には逆に，その定義が上の直観的な定義と同値であることを確かめる必要が生じる。

例１． ２つの円 C_1, C_2 はつねに相似であり，相似比は半径の比 $r_1 : r_2$ に等しい。円 C_1 の中心が円 C_2 の中心になるようにC_1を移動すれば，そのとき，これらは相似の位置にあり，相似の中心はC_2の中心である。もしC_1 と C_2 の２つの共通接線が１点 A で交われば，そのとき C_1 と C_2 は相似の位置にあり，A が相似の中心である。一般に，あたえられた２つの円はつねに相似の位置にあり，そのときの相似の中心はそれぞれの円の中心を $r_1 : r_2$ に内分または外分する点のいずれかであることがわかる。

円や多角形などの場合には定義1は比較的明白な意味をもつ。ところが，相似性が図形の形にのみ依存する性質であるにもかかわらず，定義１では図形の位置関係が関与するため，一般の図形の場合にかならずしも明白な意味をもつとはかぎらない。ただし，図形の位置関係を調べることは，幾何の重要な研究対象でもある。

２つの図形が「同じ形」であることを，最初に述べたように，一方の単位の長さを変えると他方に合同になることとすると，次のような問いが生じる。

(Q 1) 「同じ形」の２つの図形に対して，かならず相似の位置があるか。

(Q 2) 相似の位置やその中心をどのようにしてみつけるか。

(Q1)は，たとえば佐々木 [7] の定理 80 によって正しい。ただし，定理80の証明は「読者に委せる」とある。これらの問いに対する考察を次節で行う。与えられた位置が相似の位置ではない例はいくらでもある。

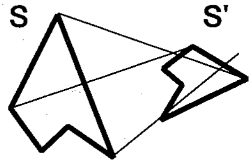

図２

相似変換は一対一対応であるが(３節参照)，この一対一対応ということを用いると，以下のことが考えられる。まず，相似の中心Cの定義は，「Sの点PとS'の点P'との一対一対応で，P'は直線CP上にありCP'：$CP=k$（一定）である，ことをみたすものが存在する」と表現することもできる。この定義に対して，C, P, P'がかならずしも一直線上にないとしたらどうだろうか。すなわち，次のような定点Aを考えるのである。

「Sの点PとS'の点P'との一対一対応で，AP'：$AP=k$（一定）かつ$\angle P_1AP_2=\angle P'_1AP'_2$である，ことをみたすものが存在する。」

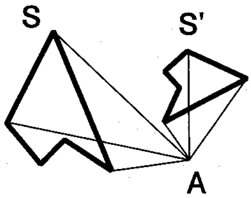

図３

ここで，角度$\angle P_1AP_2$または$\angle P'_1AP'_2$は，それぞれ，３点A, P_1, P_2またはA, P'_1, P'_2を含む平面上での，0°から180°の間の角度である。もしそのような点Aが存在すれば，AをSとS'の**広義の相似の中心**とよぶことにしよう。相似の位置にある図形の相似の中心は当然この広義の相似の中心でもある。２つの合同な図形の場合，広義の相似の中心が存在しない例は容易にみつかる。たとえば，対称性をもたない２つの合同な多角形が平行の位置にある場面を考えればよい。しかし，合同でない２つの相似な図形の場合には，広義の相似の中心が存在しない例をつくることは難しい。それゆえ，次を問いが生じる。

(Q3) 合同でない２つの相似な図形に対して，つねに広義の相似の中心は存在するか。

実際，(Q3)が肯定的に成立することを４節で示す。それゆえ，相似の次のような定義も可能になる。

「図形Sと S' が相似であるとは，それらが合同であるか，または，広義の相似の中心をもつことである。」

この定義の利点は，相似の位置という位置関係が関与しないことであるが，その代わり，角度が定義に入り込む。さらに，次の問いが生じる。

(Q4) 合同でない２つの相似な図形に対して，その広義の相似の中心をどのようにしてみつけるか。

次節以降で，相似変換による，(Q1)から(Q4)の解法を示す。その場合，大事なことは，これらの問いを個々の図形の関係としてのみ捉えるのではなく，空間全体の移動との関係で捉えることができる，ということである。

３．相似変換．

３．１．ユークリッド空間.

２つの実数の組 (x_1, x_2) は座標系によって平面の点と考えられる。同時に，位置ベクトルの考え方によって，平面ベクトルxの成分とも考えられる。同じように，3つの実数の組は，空間の点または空間のベクトルと考えられる。一般に自然数nに対して，n個の実数の組 $\mathrm{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ をn次元空間の点またはベクトルという。そして，それら全体の集合を

$$\mathbf{R}^n=\left\{\mathrm{x}=(x_1,\cdots,x_n)\middle| 各 x_i は実数\right\}$$

で表す。ゆえに，$\mathbf{R}^2$は平面の点全体の集合，$\mathbf{R}^3$は空間の点全体を表す。この集合$\mathbf{R}^n$において，２点間の距離は実数

$$d(\mathrm{x},\mathrm{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

として与えられ，この距離を導入するとき，$\mathbf{R}^n$をn次

元ユークリッド空間という。２次元または３次元のユークリッド空間はそれぞれ平面または空間であり，その距離はそれぞれ平面または空間で通常考える距離である。

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ はユークリッド幾何が展開される舞台であり $\mathbf{R}^n$ の部分集合 $K \subset \mathbf{R}^n$ をユークリッド図形または単に図形という。特に，平面図形は $\mathbf{R}^2$ の部分集合であり，空間図形は $\mathbf{R}^3$ の部分集合である。

Klein は Erlangen 大学での就任演説(エルランゲンの目録)で，幾何における変換群の重要性を指摘した。ユークリッド幾何では，それは後に述べる合同変換や相似変換を考えることに相当する。まず変換から始める。

写像 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は，各点 x に対して点 $f(\mathrm{x})$ を指定する対応をいうが，写像 f が一対一対応のとき，それを $\mathbf{R}^n$ の変換という。ここで，一対一対応であるとは次の (a) と (b) を同時にみたすことである:

(a) 異なった点 $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$ に対しては異なった点 $f(\mathrm{x}_1) \neq f(\mathrm{x}_2)$ が対応する；

(b) $f(\mathrm{x})$ を x の像というが，像全体が $\mathbf{R}^n$ と一致する。

たとえば，$I(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ で与えられる最も簡単な変換 $I: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は**恒等変換**という変換である。変換で重要なのは，２つの変換の合成を考えることである。変換 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ と変換 $g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ に対して，その合成 gf は $gf(\mathrm{x}) = g(f(\mathrm{x}))$ によって定義されるが，このとき $gf: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は変換であり，**合成変換**という。$\mathbf{R}^n$ の変換全体は，この合成変換を考えることにより，「群」を形成する。群の概念は変換の合成による性質を有効に機能させる考え方である。以下で考える合同変換全体や相似変換全体は変換全体の部分集合であるが，それ自身で群を形成し，それぞれ「合同変換群」および「相似変換群」という。Klein の変換群の考え方は，ユークリッド幾何の構造的な理解において，これらの変換群がその中心的な役割をはたすというものである。

次に，変換 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が**合同変換**であるとは，すべての２点間の距離を保つ変換をいう。すなわち，f は，$\mathbf{R}^n$ のすべての点 x, y に対して，$d(f(\mathrm{x}), f(\mathrm{y})) = d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ をみたす変換である。図形 K と L が合同であることは，合同変換を用いれば，次のように表される:

「K と L が合同であるとは，ある合同変換 f で $f(K) = L$ をみたすものが存在する。」

ここで，$f(K) = \{ f(\mathrm{x}) \mid \mathrm{x} \in K \}$ は K の f による像である。距離を保つ変換によって K が L の上に写されるということは，K を移動して L の上にきっちりと重ね合わせるということであり，最初の合同の定義にほかならない。$\mathbf{R}^n$ の合同変換全体は合同変換群を形成し，このことを通して，合同性と線形理論との関係がでてくる。

３．２．相似変換.

相似性も合同性と同じように変換を用いて表すことができる。２点間の距離という観点からは，合同性は距離を保つということであり，相似性は距離を定数倍(相似比倍)することである。それゆえ，相似性は相似変換を用いて次のように与えられる。

定義 ２． 変換 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が相似比 $k > 0$ の**相似変換**であるとは，任意の２点 x と y に対して，$d(f(\mathrm{x}), f(\mathrm{y})) = k \cdot d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ がなりたつことをいう。

図形 K と L が相似であるとは，$f(K) = L$ を満たす相似変換 f が存在することである。

定義の仕方により，相似比 $k = 1$ の相似変換は合同変換である。また，相似比 k の相似変換 f と，相似比 l の相似変換 g の合成変換 $h = fg$ は，$d(h(\mathrm{x}), h(\mathrm{y})) = d(f(g(\mathrm{x})), f(g(\mathrm{y}))) = k \cdot d(g(\mathrm{x}), g(\mathrm{y})) = kl \cdot d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ をみたすから，相似比 kl の相似変換である。$\mathbf{R}^n$ の相似変換全体は群を形成し，これを相似変換群という。

定義２での相似は，２点間の距離を定数倍(相似比倍)するというものであるが，それは単位の長さを変えることに相当する。つまり，相似比 k の相似変換 f によって $f(K) = L$ であるとき，図形 K から単位の長さを k 倍してできる図形を K' とすると，K' は L と合同であることを意味する。これは(Q1)で言うところの「同じ形」ということにほかならない。したがって，定義２は，「図形 K と L が同じ形である」ということを意味する。ゆえに，(Q1)で問うていることは，定義２による相似性が定義１の相似性を意味するか，ということになる。

まず，その逆の，定義１の相似性は定義２の相似性を意味する，ことを確認する。いま，図形 S と S' が，定義１の意味で，相似比 k の相似な図形であるとする。つまり，S を適当に移動した図形 $\bar{S}$ が S' と相似の位置にあり，その相似の中心が c であるとする。このことは，変換を用いて表現すると以下のようになる。ある合同変換 g（相似比１の相似変換）が存在し，$\bar{S} = g(S)$ となり，次の変換 f によって $f(\bar{S}) = S'$ となる：

(1) $$f(\mathrm{x}) = k\mathrm{x} + (1-k)\mathrm{c}.$$

この f は c を中心にして定数 k の拡大・縮小を行なう変換であり，これを**伸張変換**（dilation）という。そして，$d(f(\mathrm{x}), f(\mathrm{y})) = d(k\mathrm{x}, k\mathrm{y}) = |k| d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ となるので，f

は相似比 $|k|$ の相似変換である。このとき，合成変換 $h = fg$ は相似比 $|k|$ の相似変換であり，$h(S) = f(\bar{S}) = S'$ となるから，S と S' は確かに定義２の意味でも相似である。以上により，定義１の相似性は定義２の相似性を意味することがわかった。

上の(1)の中における演算は $\mathbf{R}^n$ のベクトル空間としての和，差とスカラー倍である。すなわち，$\mathrm{y} \pm \mathrm{z} = (y_1 \pm z_1, \cdots, y_n \pm z_n)$ は y と z の和，差であり，$r\mathrm{y} = (ry_1, \cdots, ry_n)$はスカラー倍である。

伸張変換が $k > 0$ のときは，すなわち，相似変換

(2) $$g(\mathrm{x}) = k\mathrm{x} + (1-k)\mathrm{a} \quad (k > 0)$$

を考えるとき，g を点 a のまわりの相似比 k の相応(stretch)という(佐々木[7]参照)。

さて，定義２の相似性が定義１の相似性を意味することを示そう。まず，次の命題２を変換群の考え方によって証明する。

命題２．相似比 k の相似変換 f は，任意の点 a のまわりの相似比 k の相応 g とある合同変換 h の合成変換 gh である。すなわち，$f(\mathrm{x}) - \mathrm{a} = k(h(\mathrm{x}) - \mathrm{a})$が $\mathbf{R}^n$ のすべての点 x に対してなりたつ。

証明．相似変換の合成変換は相似変換であった。相応の定義により，g は $g(\mathrm{x}) = k\mathrm{x} + (1-k)\mathrm{a}$ で与えられる。同様に，$g'(\mathrm{x}) = (1/k)\mathrm{x} + (1 - 1/k)\mathrm{a}$ で与えられる変換 g' は a のまわりの相似比 $1/k$ の相応であり，$g'g = I$ かつ $gg' = I$ をみたす。ここで，I は恒等変換であり，このようなとき，g' を g の逆変換という。

変換 h を合成変換 $h = g'f$ として与えると，$f = gg'f = gh$ であり，$f(\mathrm{x}) - \mathrm{a} = k(h(\mathrm{x}) - \mathrm{a})$となる。変換 h は，相似比 k の相似変換と相似比 $1/k$ の相似変換の合成変換であるから，合同変換であり，証明は完成した。

図形 K と L が定義２の意味で相似比 k の相似であるとする。つまり，相似比 k のある相似変換 f が存在し，$f(K) = L$ をみたすとする。命題２によって，任意の点 a に対して，a のまわりの相似比 k の相応 g とある合同変換 h によって $f = gh$ となる。ゆえに，$g(h(K)) = L$ である。このことは，まず合同変換 h によって K を合同な $h(K)$に移動し，a のまわりの相応 g によって $h(K)$ を L の上に重ね合わすことができることを示している。そのとき，a は $h(K)$と L の相似の中心であり，$h(K)$と L は相似の位置にある。ゆえに，定義２の意味での相似は，定義１による相似であり，h によって相似の位置が確定できることになる。つまり，(Q1)と(Q2)の問いに対して，次のことが判明した。

系３．図形 K と L が，ある相似変換 f によって $f(K) = L$ であるならば，それらは定義１の意味で相似であり，その逆も成り立つ。そのとき，任意の点aに対して，命題２を満たす合同変換 h をとれば，$h(K)$と L は，a を相似の中心とし，相似比 $k > 0$ の相似の位置にある。

この系３によって，任意の点を相似の中心にとることができ，そのときの相似の位置は，与えられた相似変換 f に対して，命題２の合同変換 h による移動で実現される。hを具体的に計算する方法は次節で示す。以上のことから，次のことが観察できる。

- 定義１と定義２と同値性は，「拡張・縮小」と「同じ形」の双方の直観的な意味を明確に数学化する。
- 相似変換により，変換群による方法が自然に入り込み，相似の意味が明確になる。
- 相似変換は個々の図形と空間全体の関係を記述する。

４．相似変換の線形性.

４．１．直交変換.

変換 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は一次写像のとき線形変換という。すなわち，$\mathrm{x} = (x_1, \cdots, x_n)$の像 $\mathrm{y} = f(\mathrm{x})$を $\mathrm{y} = (y_1, \cdots, y_n)$とするとき，各 y_j が x_i の一次式

$$y_j = a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n \quad (1 \le j \le n)$$

になる。そのとき，各係数 a_{ij} を(i, j)成分とする n 次正方行列を A とすると

$$f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

がなりたつ。この行列 A を f の表現行列という。ここで右辺は A と x の行列の積である。このとき，線形変換 f は任意の点 x, y と任意の実数 r, s に対して，線形性

(3) $$f(r\mathrm{x} + s\mathrm{y}) = rf(\mathrm{x}) + sf(\mathrm{y})$$

をみたす。逆に，線形変換はこの線形性をみたす変換であるとしても定義できる。

$\mathbf{R}^n$ の２点 $\mathrm{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\mathrm{y} = (y_1, \cdots, y_n)$に対する内積は，実数

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

である。そして，$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ を x のノルムという。このとき，これらと $\mathbf{R}^n$ の距離との関係は，

$$d(x, y) = \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)} = \|x - y\|$$

で与えられる。

$\mathbf{R}^n$の直交変換とは，内積を保つ線形変換のことをいう。すなわち，直交変換 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は次の(a)と(b)をみたす変換である。

(a) 線形変換である。
(b) $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ をみたす。

直交変換の表現行列を直交行列という。

この直交変換と相似変換の関係は次のようになる。

命題4．相似比 k の相似変換fは，ある直交変換 g によって$f = kg + f(\mathbf{0})$と表される。すなわち，すべての点 x に対して，

$$f(x) = kg(x) + f(\mathbf{0})$$

がなりたつ。ここで，$\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$は $\mathbf{R}^n$ の原点である。

証明．結果を逆用すると，変換 g は $g(x) = (1/k)(f(x) - f(\mathbf{0}))$として与えられるので，この$g$が直交変換あることを示せばよい。$f$が相似比 k の相似変換であることから，$d(g(x), g(y)) = (1/k)\, d(f(x) - f(\mathbf{0}), f(y) - f(\mathbf{0})) = (1/k)\, d(f(x), f(y)) = d(x, y)$となり，$g$ は合同変換である。そして，$g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ がなりたつ。ゆえに，$\| g(x) \| = \| g(x) - g(\mathbf{0}) \| = d(g(x), g(\mathbf{0})) = d(x, \mathbf{0}) = \| x \|$となり，$g$ はノルムを保つ。そして，$\| g(x) - g(y) \|^2 = d(g(x), g(y))^2 = d(x, y)^2 = \| x - y \|^2$ と関係 $x \cdot y = (1/2)(\| x \|^2 + \| y \|^2 - \| x - y \|^2)$，および，$g$がノルムを保つことから，$g$は内積を保つ。すなわち，$g(x) \cdot g(y) = x \cdot y$ がすべての点 x, y に対して成り立つ。ゆえに，g が(b)をみたすことが分かったので，(a)を示す。すなわち，g が(3)をみたすことを示す。g は内積とノルムを保つので，次の式変形ができる。

$$
\begin{aligned}
&\|g(rx + sy) - rg(x) - sg(y)\|^2 \\
&= \|g(rx + sy)\|^2 + r^2\|g(x)\|^2 + s^2\|g(y)\|^2 \\
&\quad -2rg(rx + sy)\cdot g(x) - 2sg(rx + sy)\cdot g(y) \\
&\quad +2rsg(x)\cdot g(y) \\
&= \|rx + sy\|^2 + r^2\|x\|^2 + s^2\|y\|^2 \\
&\quad -2(rx + sy)\cdot(rx) - 2(rx + sy)\cdot(sy) \\
&\quad +2(rx)\cdot(sy) \\
&= \|(rx + sy) - rx - sy\|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

ゆえに，$g(rx + sy) = rg(x) + sg(y)$となり，$g$ は線形変換である。以上より，g は直交変換であり，証明は完成した。

命題２と命題４を併せると次の系が成り立つ。

系５．fを相似比kの相似変換とする。$f(K) = L$によって相似となる図形KとLについて，点 a を相似の中心とする相似の位置は，K を合同変換 $h(x) = g(x) + (1/k) f(\mathbf{0}) + (1 - 1/k)\, a$ によって移動することで実現できる。ここで，g はfに対する命題４の直交変換である。

このように，相似変換の線形性を考える上で直交変換が中核的な役割をもつ。直交変換，および，その表現行列である直交行列は，線形代数学での中心概念であり，種々のよい性質をもつ。たとえば，直交行列Aの行列式は$|A| = \pm 1$であり，次は直交行列の標準化とよばれる性質である(佐武[8]参照)。

命題６．n 次直交行列A に対して，ある n 次直交行列Tが存在し，

$$
T^{-1}AT = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_c \end{pmatrix} \quad (a + b + c = n)
$$

となる。ここで，T^{-1} はTの逆行列，I_a と I_b はそれぞれ a 次と b 次の単位行列であり，

$$
A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \quad (1 \le i \le c)
$$

は２次の直交行列である。

また，命題4から相似変換はアフィン変換であることがわかる。$\mathbf{R}^n$ のアフィン変換$F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は，ある線形変換 G とある定点 a によって，$F(x) = G(x) + a$ の形になるものをいう。このGとして命題４の kg をとれば，相似変換はアフィン変換ということになる。$\mathbf{R}^n$の直線または平面はそれぞれ１または２次元のアフィン部分空間であり，アフィン変換はm次元アフィン部分空間をm次元アフィン部分空間に写す。さらに，$\mathbf{R}^n$において１直線上にない３点や，１平面上にない４点

を独立な点というが，$\mathbf{R}^n$ のアフィン変換 F は $n+1$ 個の独立な点 $x_0,\cdots,x_n$ の像によって定まる。すなわち，アフィン変換 $F'\neq F$ に対して，$F'(x_0)=F(x_0),\cdots,F'(x_n)=F(x_n)$ はおこりえない。ゆえに，これらのことは相似変換に対してもあてはまる。

系７．(1) 相似変換は，m 次元アフィン部分空間を m 次元アフィン部分空間に写す。特に，相似変換によって，直線または平面はそれぞれ直線または平面に写される。

(2) $\mathbf{R}^n$ の相似変換は，$n+1$ 個の独立な点の像によって定まる。特に，平面の相似変換は１直線上にない３点の像によって，また，空間の相似変換は１平面上にない４点の像によって定まってしまう。

これにより，多面体の相似性などは，いくつかの頂点などに着目すればよいことがわかる。

４．２．広義の相似の中心.

２つの相似な図形 K, L に対して，相似変換 f が $f(K)=L$ をみたすとする。このとき，もし x_0 が f の不動点であるならば，つまり $f(x_0)=x_0$ であるならば，x_0 は K と L の広義の相似の中心になる。実際，x_0 が f の不動点ならば，K の各点 x に対して $d(f(x),x_0)=d(f(x),f(x_0))=kd(x,x_0)$ となり，比 $f(x)x_0:xx_0=k$ がなりたつ。また，２点 x_1,x_2 に対して，$\theta=\angle x_1x_0x_2$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{(x_1-x_0)\cdot(x_2-x_0)}{\|x_1-x_0\|\|x_2-x_0\|}$$

であるから，命題４によって，

$$\angle f(x_1)x_0f(x_2)=\angle g(x_1)g(x_0)g(x_2)=\theta$$

となり，角度を保つ。ゆえに，一対一対応 f によって，x_0 は確かに広義の相似の中心である。

次の定理８で，相似比が $k\neq 1$ のどのような相似変換にも不動点が存在することと，その不動点の求め方を示す。これらのことにより，(Q3)が肯定的に成立し，(Q4)も解決することになる。

定理８．相似比 $k\neq 1$ の相似変換 f が命題４のように $f(x)=kAx+b$ をみたすとする。ここで，A は n 次の直交行列であり，$b=f(\mathbf{0})$ である。このとき，$I-kA$ は正則行列であり，点 $x_0=(I-kA)^{-1}b$ は f の不動点である。ただし，I は n 次の単位行列である。ゆえに，$f(K)=L$ をみたす相似な図形 K, L に対して，広義の相似の中心 x_0 が存在する。

証明．単位行列 I は恒等変換の表現行列であり，$(I-kA)x=x-kAx=x-f(x)+b$ である。ゆえに，$(I-kA)x_0=b$ をみたす点 x_0 は，$f(x_0)=x_0$ であり，f の不動点である。以下，$I-kA$ が正則行列（逆行列をもつ行列）であることを示す。そのとき，点 $x_0=(I-kA)^{-1}b$ は f の不動点となり，所要の結果を得ることになる。

行列 $I-kA$ が正則行列である必要十分条件は，その行列式 $|I-kA|$ が零でないことである。直交行列の標準化(命題6)によって，$|I-kA|=(1-k)^a(1+k)^b t_1\cdots t_c$ となる。ここで，$t_i=(1-k\cos\theta_i)^2+\sin^2\theta_i\ (1\leq i\leq c)$ である。仮定から，$k\neq\pm 1$ より，$t_i>0$ であり，$|I-kA|\neq 0$ となる。ゆえに，$I-kA$ は正則行列であり，相似変換 f は不動点 $x_0=(I-kA)^{-1}b$ をもつ。

一般に，直交行列 A は，その行列式 $|A|$ が ± 1 であるが，$|A|=1$ のとき回転と呼ばれる。そのとき，命題６より，ある直交変換 T が存在し，

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} I_a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_b \end{pmatrix}\quad(a+b=n)$$

となる。直交変換 f の表現行列 A が回転のとき，f を固有回転という。平面の固有回転は原点を中心とする回転であり，空間の固有回転は，原点を通る直線のまわりの回転である。一方，直交変換 f の表現行列 A が $|A|=-1$ のとき，f を回転鏡映 (rotational reflection) とよぶことにする。次の n 次直交行列 J は，$|J|=-1$ かつ $JJ=I$ を満たす：

$$J=\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

この J は，$\mathbf{R}^n$ の超平面 $H: x_n=0$ に関する対称移動（鏡映変換）の表現行列である。この変換も同じ J で表す。平面のとき H は x 軸，空間のとき H は xy ー平面であり，J はこれらに関する対称移動である。f が回転鏡映のとき，合成変換 $g=fJ$ は固有回転になり，$f=gJ$ より，f は鏡映変換と固有回転の合成であることがわかる。

直交変換 A と１点 a に対して，$f_a(x)=Ax+(I-A)a$ によって合同変換 f_a を定義する。この f_a は，A が回転のとき a のまわりの固有回転を表し，$|A|=-1$ のとき a を通る超平面に関する回転鏡映を表す。

さて，相似比 $k\neq 1$ の相似変換 $f=kA+b$ に対して，定理８により，不動点 $f(x_0)=x_0$ が存在する。x_0 のまわりの相似比 k の相応を g とする。逆変換 g^{-1} は相似

比 $1/k$ の相応であるが，合成変換 $h = g^{-1}f$ は $h(\mathrm{x}) - \mathrm{x}_0 = A(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)$をみたす。すなわち，$h$ は，$|A| = \pm 1$ のそれぞれに対して，x_0 のまわりの固有回転か回転鏡映になる。そして，$f = gh$ である。点 x_0 のまわりの，固有回転と相応の合成を**相応回転** (stretch rotation)，回転鏡映と相応の合成を**相応回転鏡映** (stretch rotational reflection)ということにする。以上のことより，合同でない相似変換はこれらのどれかであることが判明した。

さらに，n が奇数の場合を考える(たとえば，空間の場合)。そのとき，もし$|A| = -1$ ならば$|-A| = 1$ であり，f は$f(\mathrm{x}) = (-k)(-A) + b$ とも表される。その場合，3節の(1)の伸張変換 $g(\mathrm{x}) = -kx + (1 + k)\mathrm{x}_0$ を考える。点x_0のまわりの，固有回転と伸張変換の合成変換を**伸張回転** (dilative rotation)というとき，上と同様な理由により，$k \neq 1$ の相似変換fはすべて伸張回転となる。以上により，次の相似変換の分類が得られた。

定理9． $\mathbf{R}^n$ の相似変換は，合同変換か，相応回転か，または，相応回転鏡映である。特にnが奇数のときは，合同変換か，または，伸張回転である。

線形理論を用いずに，すなわち直交変換の性質を用いずに，定理8と定理9を平面と空間の場合に直接示す方法が Martin[9] に示されている。この[9]にある方法は，まず平面の場合に平行性を保つ変換(dilatation)の性質に着目して結果を示し，空間の場合は平面の場合に帰着する方法である。それに対して，上の我々の方法は，直交行列の標準化を用いるという，相似変換の線形性に依拠する方法であった。

5．おわりに．

以前，[10]において，線形代数の授業に関する調査と考察を行い報告した。それは，教員養成系の教育学部での数学教師をめざす学生達を対象にしたものであった。そのなかで，筆者達の予想に反して，直交変換や直交行列が理解しにくいという回答が多かった。本論でものべたように，これらの概念はユークリッド図形の性質と密接に関係するもので，学校数学の教材の背景となる概念である。本稿は，そのとき感じた，理論と教材の結びつきを深めることへの必要感から出発したものである。

理工系の学問を学ぶ大学生は何らかの形で線形理論に接する。もしそれが数学科などで数学を専攻する学生であれば，線形代数学は必修教科であり，それを基盤にして他の多くの数学理論へとすすむ。物理を専攻する学生は，物理現象を解明する理論の記述のなかに，広義のベクトルの有効性を知るだろう。工学や経済学関係の専攻生であれば，たとえば線形微分方程式やグラフ理論，線形計画法などの，行列の応用が必要な場面に遭遇するかもしれない。

それならば，教育学部などで教科教育科学としての数学を学ぶ学生にとって，線形理論はどのように位置づけられるだろうか。まず，数学的な推論を学ぶ必要性という側面において，線形性は1つの主要な考え方である。また，数学の広範な理論のなかに横たわる，基軸となる理論を知る必要性という側面において，たとえば微分積分法や統計的方法のなかにもみられるように，線形性は幅広い分野で活用される理論である。幾何的側面において，線形理論は図形の性質を統一的な方法で記述するのに得した面をもち，それを活かした教材作成への動機となる。ユークリッド的方法は，平面図形に対して非常に緻密で効果的である反面，立体空間図形の性質に対しては難解で熟練された思考を必要とする場面も多い。それゆえ，空間認識に対する発展的な教材開発が必要とされるとき，線形理論の真価がそこに発揮されると考えるのは自然なことである。

その場合，幾何の教科内容と線形理論のさまざまな結びつきを具体的に調べることが必要となる。それは，単に既存の数学教材との直接的な結びつきにかぎらず，たとえば固有値などの，線形代数の核となる概念の真価が，身近な図形性質のなかに応用され理解される場面を探索することも含まれる。すでに，そのような観点の著書も少なくない (たとえば，一松[11], Rees[12], Jennings[13])。また，相似性や線形理論の数学教育的側面を著したものとして，上垣・山本[14]による教科書での相似の定義の与え方に関する史的な考察，山口[15]の行列方程式の線形理論，Harel[16]のベクトル空間の教授に関する論文などもある。このような動機にもとづき，理論と教材の結びつきの，さらに広範な考察を筆者の今後の課題としたい。

引用・参考文献

[1] Hans Freudenthal, Mathematics as an Educational Task, D. Reidel, 1973, p.445.

[2] Jean Dieudonné, *Algébre Linéaire et Géométrie élémentaire*, Hermann, Paris, 1964.

[3] H.Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, Springer, 1923 (Dover 1952).

[4] 川口 廷他，中学校 数学2，学校図書，1996, p.156.

[5] 寺坂英孝，『初等幾何学』，岩波全書，1973, pp.203-205.

[6] 岩田至康編,『幾何学大辞典 1』, 槇書店 , 1971, pp.109.

[7] 佐々木重夫,『幾何入門』, 岩波全書, 1955, pp.127-140.

[8] 佐武一郎,『線型代数学』, 裳華房 , 1982, p.173.

[9] George E.Martin, *Transformation Geometry*, Springer-Verlag, New York · Heidelberg · Berlin, 1982, pp. 136-141, 194-196.

[10] 遠藤秀機・今岡光範・門田良信,「教育学部での数学の授業から一線形代数学について一」, 和歌山大学教育学部紀要, 教育科学, 第41集, 1992, pp. 47-55.

[11] 一松信,『高次元の正多面体』, 日本評論社, 1983.

[12] Elmer G.Rees, *Notes on Geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heiderberg New York, 1983.

[13] George A. Jennings, *Modern Geometry with Applications*, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg, 1994.

[14] 上垣渉・山本裕子,「相似形の定義の生成過程に関する一考察」, 三重大学教育学部研究紀要, 第47巻, 教育科学, 1996, pp. 1-45.

[15] 山口潤一郎,「線形理論に関する基礎的研究一行列方程式を中心に一」, 修士論文, 広島大学大学院教育学研究科, 1995.

[16] Guershon Harel, "Learning and Teaching Linear Algebra: Difficulties and an Alternative Approach to Visualizing Concepts and Processes", Focus on Learning Problems in Mathematics, Spring Edition, Vol.11, No. 2, 1989, pp. 139-148.