広島大学教育学部紀要　第二部　第43号　1994

数学理解の超越的再帰理論に関する一考察

小　山　正　孝
（1994年9月9日受理）

On Transcendent Recursive Theory of Understanding Mathematics

Masataka Koyama

There has been much interest in mathematical understanding and a variety of approaches to study of it in the area of research on mathematics education. The aim of this paper is to study the transcendent recursive theory of understanding mathematics which has been developed and elaborated by S. Pirie and T. Kieren in their work over the past six years.

The theory and its model are examined thoroughly from view points of its foundamental ideas, features and usefulness as a theory of understanding mathematics in order to answer the following questions.

1) Why does this theory regard the growth of child's understanding mathematics as a whole, dynamic, levelled but non−linear, transcendently recursive process?
2) What are features of this theory? In particular, what are properties of eight potential levels or distinct modes as basic elements of this theory?

0．緒　　論

数学教育において，「理解」は「技能」のための補助手段ではなく，それ自身独立した教育目標である。ところが，理解はわれわれ人間の内面的な活動であるがゆえに，その本性を捉えることはむずかしい。しかし理解の本性がまったくわからないでは，理解を数学教育の目標として位置づけてみても，その達成はおぼつかない。このような認識のもとに，筆者（1985, 1991a, 1991b, 1992, 1993）は，児童・生徒が算数・数学を理解するとはどういうことか，どのようなメカニズムで理解が深化するのかを明らかにしようとしてきた。

その結果，まず，数学教育において理解のモデルを構想する意義を明らかにし，理解のモデル化の観点を提案した。また，理解のモデルが，教授＝学習活動としての数学教育において有効なものであるためには，それが記述的特性だけでなく規範的特性をも備えていなければならない，ということを主張した。そして，数学理解の深化の過程を解明するための一つの理論的枠組みとして，階層的水準と「直観的段階→反省的段階→分析的段階」という学習段階を，それぞれ縦軸と横軸にもつ，いわゆる「2軸過程モデル（two axes process model)」を構想した。

1．本稿の背景とねらい

この2軸過程モデルは，数学理解の過程に焦点をあてたいくつかの過程モデルを比較検討することを通して明らかになった共通の構成要素，つまり階層的水準，学習段階及び反省的思考をキー概念として構想されたものである。その際，Pirie と Kieren (1989) が提案した数学理解の「超越的再帰理論（transcendent recursive theory)」を取り上げて，その理論の特徴や，van Hiele の「幾何学における学習水準理論」との類似点を指摘した（小山，1991a)。

しかしながら，この指摘を行ったときには，次のような疑問が残っていた。

(1) 超越的再帰理論では理解を再帰的現象として捉えているが，その根拠は何か。

(2) 超越的再帰理論のモデルでは8つの水準が設定されているが，それらはいかなる性質のものか。また，その理論はその他にどのような特徴をもっているか。

その後，Pirie と Kieren は超越的再帰理論の研究を進め，その成果を単著あるいは共著論文において発表してきている（Kieren and Pirie, 1991, 1992; Pirie and Kieren, 1992a, 1992b; Kieren, 1993; Pirie and Kieren, 1994）。また，筆者は文部省在外研究の一貫として，8カ月半，Pirie 博士から直接指導を受ける機会に恵まれた。

そこで，本稿では，Pirie と Kieren がこれまでに発表してきた数学理解の超越的再帰理論についての論文と，Pirie 博士から直接受けた指導をもとに，上記の疑問点を解明するとともに，このモデルについてさらなる考察を行うこととする。それは，筆者の2軸過程モデルを理論的に精緻化するための基盤をつくることになると考えるからである。

以下では，まず，超越的再帰理論の概要を述べる。そして，この理論について，その基底，特徴及び有用性の観点から考察する。

2．超越的再帰理論の概要

まず，数学理解の超越的再帰理論を概観しておきたい。以前，筆者（1991a）は，この理論の概要を述べたことがある。しかし，その後，その理論の基本的考えや基本構造は変わってはいないが，研究の進展にともなっていくつかの改良や精緻化がなされている。したがって，ここでは，これらのことを踏まえて，再度，この理論の概要を述べることにする。

2.1. 超越的再帰理論の基底

Pirie と Kieren が共同して数学理解の研究に取り組み始めた一つの契機は，Pirie が，中等学校第1学年（11歳－12歳）のある女子生徒の分数の理解に注目したことである。Pirie (1988) は，数学的理解を表出する子どもたちの活動を観察者としての研究者や教師が識別するには，それまでの理解研究で主としてなされてきた試み，すなわち，異なった種類の理解を記述することが不適切であることを示唆した。そして，《必要なものは，理解していく過程全体についての鋭敏で洞察に富む見方である》（Pirie and Kieren, 1989, p. 7）と述べ，そのような見方の一つとして超越的再帰理論を提案した。

Pirie と Kieren の数学理解についての理論は，子どもたちの理解の成長をよりよく記述しようとするものである。より厳密に言えば，《それは，全体的，力動的で，いくつかの水準からなるが決して直線的でない，超越的で再帰的な一つの過程としての数学的理解の成長についての一つの理論である》（Pirie and Kieren, 1994, p.166）。

この理論の根底には，次の相互に密接な関連のある二つの基本的な考えがあるといえよう。その一つは構成主義であり，もう一つは超越的再帰である。Pirie と Kieren (1994) が理解を，人がその人自身の知識構造を組織化する，絶え間ない過程として捉えている点で，構成主義的立場に立っている。そして，氏等の理論では，理解のこの構成主義的な定義をより詳細に精緻化しようとしている。

このように構成主義的立場に立って理解の成長をみるための方法論（methodology）が，超越的再帰である。それは，子どもたちの数学的理解や問題解決などの数学的経験をみるための「眼鏡」であり，一つの本質的で有効なメタファーであると考えられている（Kieren and Pirie, 1991）。

2.2. 超越的再帰的モデルと理論の特徴

このような理論の一つのモデルが，超越的再帰的モデルと呼ばれるものである。このモデルが最初に発表されたのは，1989年であった（Pirie and Kieren, 1989）。その後，このモデルをめぐっての議論と研究の進展にともなって，いくつかの変更や精緻化が行われている（Pirie and Kieren, 1992a, 1994）。そして，その最新のモデルは，1994年の論文に見ることができる。そこで，以下では，主としてこの論文をもとに，超越的再帰的モデルを概観することにする。

数学理解の超越的再帰的モデルは，8つの潜在的水準，あるいは異なった様相から構成される。それらは，以下のようにまとめられるが，ある数学的トピックについてのある個人の理解の成長において認められるものである（Pirie and Kieren, 1992a, 1994）。

(1) 超越的再帰的モデルを構成する8つの水準

第1水準：初源的認識（Primitive Knowing）

これは，あらゆる数学的理解の過程の出発点である。したがって，「初源的」という言葉は，低水準の数学ということを意味するものではない。それは，理解しつつある個人が最初にできるであろうと，観察者，教師あるいは研究者が仮定するものである。

第2水準：イメージづくり（Image Making）

ここでは，人は，特別な課題を通して，先の認識（初源的認識）の中での区別をなし，それを新しい方法で用いることが要求される。

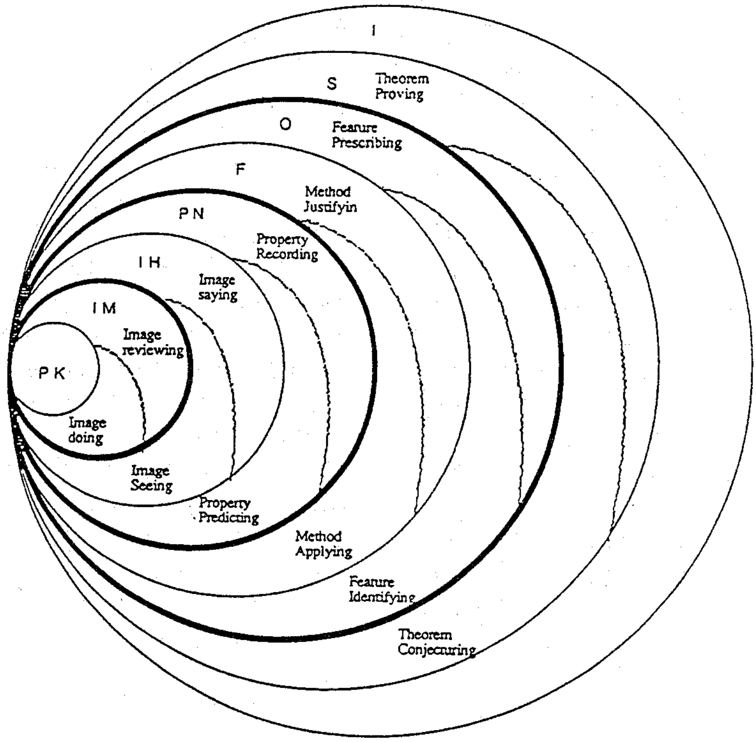

図1．数学理解の超越的再帰的モデル図（Pirie and Kieren, 1994, p.176）

第3水準：イメージ所有（Image Having）

ここでは，個々の対象に目を向けた活動が，一つの心的対象にとって代わられる。すなわち，この水準では，人は，あるトピックについての心的構成をもたらしたいくつかの特別な活動を実際にすることなく，その心的構成を用いることができる。

第4水準：性質認知（Property Noticing）

これは，人が，文脈に特殊な，文脈に関連した性質を構成するために，その人のイメージの諸側面を操作したり組み合わせたりすることができるときに起こる。ここでは，いくつかのイメージ間の差異，組み合わせ，あるいはつながりに気づいたり，それらがいかにして達成されるかを予見したり，そのような関係を記録したりする。

第5水準：形式化（Formalizing）

ここでは，人は，その人が気づいた性質を特徴づけた，先のイメージに依存する実際的知識から，ある方法や共通な性質を抽象する。それによって，人は，有意味なイメージに依存しない，一つの類のような心的対象をもつ。

第6水準：観察（Observing）

ここでは，人は，その人自身の形式的な思考について考えたり言及したりする。つまり，自分の形式化を観察し，観察したことを組織化したりする。

第7水準：構造化（Structuring）

ここでは，人は，その人の仮定や，観察したことのつながりを意識し，それらの相互関係を論理的につくることができる。これには，論理的に正当化したり確かめたりするということが含まれる。

第8水準：発明化（Inventising）

この水準にいる人は，あるトピックにおいて十分に構造化された理解をもっている。それゆえ，このような理解をもたらした先入観から離れて，まったく新しい概念に成長するような，新しい質問を創造することができるであろう。

これら8つの水準あるいは様相は，超越的再帰的モデルの基本的な構成要素で，図1のように前の水準が次の水準に包含されるように組み込まれる。この図は，子どもたちの数学理解の活動が直線的に成長するものではないという力動性と，ある水準での理解がそれ以

前の水準での理解をそれと両立しうるように統合するという超越性を表現できるように工夫されている。

(2) **超越的再帰理論の特徴**

数学理解の超越的再帰理論の特徴として,「折り返し」,「不必要な境界」, そして「行為と表現の相補性」があげられる。

「折り返し」は理解の成長にとって必要不可欠な活動である, と捉えられている。そして, 数学の理解が一定方向に進むものではないという, 数学理解の特質をこれによって明らかにしようとしている。つまり,《人は, どの水準にあっても, すぐには解決できないような問題や疑問に直面したとき, 自分のその時点での不適切な理解を拡張するために, 内側の水準へ折り返すことが必要になる。しかしながら, この折り返しによって戻ってきた内側の水準での活動は, その水準でのもとの活動と同一ではない。つまり, 今やそれは, 外側の水準での関心や理解によって特徴づけられ形作られるのである。》(Pirie and Kieren, 1994, P.69)

第二の「不必要な境界」という特徴は, 基礎的概念をいちいち参照することなく記号的水準で活動することができるという, 数学の一つの長所を反映しようとするものである。これは図1の太線の輪として表されている。つまり, この境界を超えると, その外側の水準での認識を生んだ特別な内側の理解を必要としないという意味で, これを「不必要な境界」と呼んでいる(Pirie and Kieren, 1992a, p. 249; 1994, p.172)。

第三の「行為と表現の相補性」という特徴は, 上述の二つの特徴とはちがって, 超越的再帰理論が最初に発表された1989年には明確にされておらず, 1994年の論文で初めて明示された。これは, モデルの構成要素である水準の内部構造に関わるものである。すなわち,《初源的認識という水準の外側にある各水準は, 行為と表現という一つの相補性から構成される。そして, 理解の成長のこれらの側面のいずれもが, 水準の移行に必要である》(Pirie and Kieren, 1994, p.175)と考えられている。この考えは超越的再帰的モデルに組み込まれ, 図1において, 各水準の内部の点線によって表されている。

3. 超越的再帰理論についての考察

これまで, 数学理解の超越的再帰理論を, その基底や特徴及びモデルの構成要素の観点から概観してきた。そこで, 以下では, この理論についてさらに考察してみたい。具体的には, 超越的再帰理論の基底, 特徴及び有用性について考察することにする。

3.1. 超越的再帰理論の基底について

数学理解の研究に限らず, 一般に数学教育の研究において, 研究者の数学観や子ども観が, 多かれ少なかれ, その研究目的や方法を決定づけると考えられる。この意味で, Pirie と Kieren は, 数学的理解の成長を, いわゆる構成主義の立場に立って, 超越的再帰というアプローチによって研究している, と指摘できるであろう。

Pirie と Kieren の数学理解についてのこれまでの研究は,《教室で観察される, 子どもたちの数学的理解の成長をよりよく記述すること》(Pirie and Kieren, 1994, p.165) を目的としている。それは, 換言すれば, 本質的には直接知ることのできない, 子どもたちの内面的活動としての理解の成長を, 観察者としての研究者や教師たちがよりよく捉えるための理論やモデルを構築することである。

さて, すでに上で簡単に指摘したように, 数学理解の超越的再帰理論の基底には, 次のような基本的な考えがある。それは, 数学観や子ども観に関わる構成主義とオートポイエーシス・システム論及び方法論に関わる超越的再帰である。ここでは, これら三つの考えが氏等の理論の根底にあることを, もう少し詳しく検討してみたい。

(1) **構成主義**

数学教育における構成主義とは, 端的にいえば, (i) 知識は認識主体によって能動的に構成されるもので, 環境から受動的に受け取られるものではない, (ii) 知るということは, 認識主体が自らの経験界を組織化する適応過程であり, 認識主体の心の外に独立して先在する世界を発見することではない, という一つの認識論的な見解である(小山, 1990)。

Pirie と Kieren 自身がこのような認識論的議論をしているわけではないが, 氏等が構成主義の立場に立っていることは, たとえば次の引用から明かである。

《子どもたちにとっての数学は, 彼らがそれをして, 彼ら自身の知識の上にそれを構築するとき, 一つの複雑な現象である。》(Kieren and Pirie, 1991, p.78)

《このように, われわれの理論は, その根底において構成主義的であり, 人がその人自身の知識構造を構築したり再組織化したりすることとしての理解の本性を詳しく述べている。》(Pirie and Kieren, 1992, p.243)

《この理論は, 過程としての理解という構成主義的記述に応ずるものである。》(Kieren, 1993, p.71)

(2) **オートポイエーシス・システム論**

また, Pirie と Kieren は, Maturana と Varela のオートポイエーシス・システム論に影響を受けたことを, 次のように述べている。

《この理論は，システム哲学者の Maturana と Varela の研究に刺激された。彼らは，人々を，言語を通して，自己の行動を区別したり，環境や他者との相互作用を区別したりできる，自己言及的存在とみなしている。》(Kieren, 1993, p.72)

《われわれの基本的な考え方は，自己言及的システムにおける生物学的認知理論によって，さらに刺激された。》(Pirie and Kieren, 1994, p.165)

ここで自己言及的システムにおける生物学的認知理論というのは，Maturana と Varela (1980) のオートポイエーシス・システム論である。このシステム論は難解であり，それを正確に捉えることは筆者の力の及ぶところではない。ただ，この理論を生命システムをオートポイエーシス・システム，つまり，《自律的，自己言及的，自己構成的な閉鎖系》(Maturana and Varela, 1980) として特徴づける理論であると捉えれば，それが Pirie と Kieren の基本的な考え方を刺激したことは想像に難くない。なぜなら，氏等は，知るということを，人が自らの経験界を組織化する適応過程であるという立場に立って，数学的理解の過程を《成長，拡張及び再創造のための折り返しを含む一つの力動的な過程》(Kieren, 1993, p.245) として捉えているからである。

(3) **超越的再帰**

超越的再帰は，Pirie と Kieren が数学的理解を研究するための方法論の一つの主要な概念である。このことは，研究者の数学観や子ども観が，その研究目的や方法を決定づけるという，上での指摘の一例である。

まず，再帰を個人的な数学的知識や理解の現象をみるためのメタファーとして用いる理由として，Kieren と Pirie (1991) は次の二つをあげている。

《第一に，それ（再帰）は，全体がいかなる時もその以前の状態に，還元されはしないが，構造的に類似しているような複雑な現象を記述するための一つの方法だからである。第二に，Marurana と Varela (1980) と同様に，われわれは，数学を知るものとしての子どもたちを含めた人間を，オートポイエーシス・システムの典型例とみなしているからである。》(p.79)

このような理由で，再帰を，一つの全体としての数学的理解の成長を見る方法としている。ただし，氏等は，子どもたちの数学的知識，あるいは知識構築や問題解決という数学的活動が本質的に再帰的であるとは考えていない。再帰という視点からそれらを観察することが可能であり，そうすることでわれわれはそれらについて多くの洞察を得られるので，再帰をメタファーとして用いているのである (p.79)。

氏等は，埋め込み性，自己相似性，水準移行性及び自己言及性という，再帰のもつ特性を重視している。さらに，子どもたちの数学的理解の成長において，新しい水準での知識がそれ以前にもっていた知識と互換性を保ちながら越えていくということ，つまり超越性を重視している。そして，これらの特性をもった概念として「超越的再帰」を定義し，数学理解の超越的再帰理論を構築しようとしている。

3.2. 超越的再帰理論の特徴について

数学理解の超越的再帰理論では，上でみたように，8つの潜在的水準あるいは異なった様式がその構成要素となっている。そして，その理論には，「折り返し」，「不必要な境界」及び「行為と表現の相補性」という特徴がある。ここでは，これらの構成要素と特徴について詳しく検討してみたい。

(1) **8つの潜在的水準**

Pirie と Kieren (1994) は，ある人の数学的理解の成長においては，それがいかなるトピックについての理解であろうとも，8つの潜在的水準あるいは異なった様式があるという (p. 170)。

ところで，これらの水準はいかにして設定されたのであろうか。これらの水準をみるとき，図1の外側の水準は内側の水準より，より高度な数学に対応しているようにも思われるが，氏等はこうした単純な捉え方はしていない。そのことは，次の引用にはっきりと述べられている。

《われわれの理論の一つの主要な考えは，より外側の水準での知識はより高度の数学を必ずしも意味しない。同様に，その逆もまた真である。すなわち，高度の数学的トピックは，人が適切な形式や構造を探し始めることができるようになる前に，イメージづくりの水準で取り組まれる必要がある。》(p.188)

ここで注意すべきことは，これらの水準はあくまでも子どもたちの理解の成長をみる観察者の領域にある，ということである。つまり，まず，数学をしている子どもたちや大人を観察することを通して理論的構成を行い，その後，人々の数学的行動の中にそれと適合する事例を見つけることによって，その有効性を確かめるという方法論によって，これらの水準は設定されているのである。

しかし，いくら観察を通して理論的構成を行うといっても，観察のもとにはある種の見方があると考えられる。実際，氏等の数学理解についての共同研究の場合には，それは，Kieren (1988) が個人的な有理数の認識を，4つのタイプの認識，つまり，民族数学的認識（E），直観的認識（I），専門的・記号的認識（TS）及び公理的・演繹的認識（AD）によって特徴づけた，

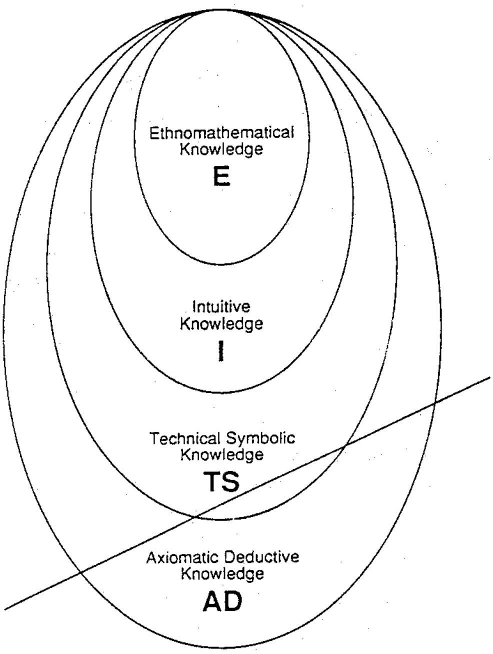

図２．数学的知識構築のモデル（Kieren, 1993, p.67）

「E－I－TS－AD モデル」であるといえよう（図２）。そのモデルでのそれぞれの認識は，次のように要約される。

民族数学的認識（E）とは，子どもや大人たちが，ある環境の中で生きてきたがゆえに，それに対してもっている認識である。直観的認識（I）とは，思考道具，イメージ及びある概念についての形式的でない言語の使用を伴う認識である。専門的・記号的認識（TS）とは，記号的表現を用いた取り組みの結果としての認識である。そして，公理的・演繹的認識（AD）とは，ある命題を一つの公理的構造の中に論理的に位置づけることを通して導かれる認識である（Kieren, 1993, pp.66－68）。

Kieren (1993) 自身は，このモデルは知識構造をいかにして組織化するかを指摘したものではなく，再帰による埋め込みという原理があるものの，そのモデルは有理数の理解をあまりうまく記述しない，と述べている（p.71）。しかしながら，超越的再帰理論の８つの水準の基礎となっている，活動，イメージ，形式及び構造の４つをそれぞれE，I，TS 及び AD にほぼ対応づけられることと，再帰による埋め込みという共通の原理によっていることから判断して，この「E－I－TS－AD モデル」が超越的再帰理論における水準の設定とその図化の原型であるといえるであろう。

(2)　「折り返し」と「不必要な境界」

つまり，「E－I－TS－AD モデル」を出発点として，子どもたちの数学的理解の成長を一つの力動的全体として記述するために，観察を通して改良し，精緻化したものが超越的再帰理論である，と捉えられる。こうした精緻化の中で最も重要なものは，「折り返し」と「不必要な境界」という特徴であろう。

すでに 2.2.(2)でみたように，氏等の理論においては，「折り返し」は理解の成長にとって必要不可欠な活動である。なぜなら，理解の成長は，一定方向的な過程ではなく，水準間での前後の動きによって表せられると考えられているからである。そして，ある水準からの「折り返し」は，単にそのすぐ前の水準へ立ち帰ることだけでなく，より内側のいかなる水準へ立ち帰ることをも含んでいる。

こうした「折り返し」が可能となるためには，理解の各水準が再帰的に埋め込まれていなければならない。このことは，各水準が連結していると言い換えることができるであろう。このような条件が満たされるとき，初めて，理解の拡張が可能となる。そのような理解の拡張を，Pirie と Kieren (1992) は次のように述べている。

《人がその人の理解を拡張することは，単にある水準でのその人の活動を一般化することによってなされるものでもないし，また，単にその人の理解を新しいより外側の水準へと反省的に抽象することによってなされるものでもない。むしろ，それは，普通，その人のより内側の水準での理解へと折り返すことによってなされるのである。そして，その結果，外側の水準での理解をさらに拡張することになる。》(p.248)

「不必要な境界」という理論のもう一つの特徴も，理解の各水準が相互に連結するように，再帰的に埋め込まれているときにのみ意味をもつ。なぜなら，「不必要な境界」という特徴は，人が，たとえば形式化の水準にあるとき，それより内側の水準でのイメージや，形式化の水準での数学的活動についての具体的な意味づけを絶えず意識する必要はないということを意味しているのであって，内側の水準へ折り返すことができないということを意味してはいないからである。むしろ，もし必要なら，より内側の水準へと折り返すことができなければならないので，そのためには各水準が再帰的に連結していなければならない。

「不必要な境界」に関してもう一つ注意すべき点は，この境界が，すべての水準間にではなく，ある特定の

水準間にのみ設定されているということである。超越的再帰的モデルの図（図1）の中の太線の輪を見ればわかるように，イメージづくりとイメージ所有，性質認知と形式化及び観察と構造化のそれぞれの水準間に「不必要な境界」が設定されている。

その理由は，2.2.(1)で説明した8つの水準の定義の中に認められる。たとえば，なぜ，イメージづくりとイメージ所有の水準間に「不必要な境界」が設定されるのに，イメージ所有と性質認知の水準間にそれが設定されないか，についてみてみよう。

イメージ所有の水準の定義によれば，この水準では，人は，その前のイメージづくりの水準での活動を実際に行うことなく，心的構成（イメージ）を用いることができる。その意味で，イメージづくりとイメージ所有の水準間の境界は「不必要」である。それとは対照的に，性質認知の水準では，人は，分脈に関連した性質を構成するために，その人のイメージの諸側面を操作したり組み合わせたりすることができる，と定義されている。つまり，性質認知の水準での活動にとって，イメージは操作の対象であり，絶えず意識する必要のあるものである。それゆえ，イメージ所有と性質認知の水準間の境界は「必要」である。

これと同様な議論によって，性質認知と形式化の水準間，観察と構造化の水準間に「不必要な境界」が設定される理由が説明できる。

(3)　**「行為と表現の相補性」**

これまでの考察から，8つの水準の定義と「折り返し」や「不必要な境界」という特徴だけでは，数学的理解の成長を十分に記述できないと思われる。なぜなら，たとえばイメージ所有の水準は，あるイメージをすでにもっている子どもの数学的活動をそこに位置づけることはできても，その水準で子どもはいかなる活動をしているか，いかなるメカニズムでその水準に移行するか，を十分明らかにはしないからである。

PirieとKieren (1994) が「行為と表現の相補性」を超越的再帰理論の特徴として明示して付け加えたのは，それまでの理論のこうした問題点を考慮してのことと推察される。このことは，次の引用によっても，ある程度，裏づけられる。

《さらに，成長は，少なくとも，まず行いそれから表現することを通して起こるが，もっとしばしば，これらの相補的な様相の間を行き来することを通して起こる。あるいかなる水準においても，行為は，それより内側の水準での連続性をもたらすように，それら内側の水準でのすべての理解を包み込み，表現はその特定の水準に明瞭な実質を与える。》(p.175)

そして，このような「行為と表現の相補性」という特徴は，図1の初源的認識と発明化以外の各水準の内部を点線によって，行為と表現のそれぞれに対応する部分に分けることで表されている。ただし，この特徴をモデルに組み込んだことでモデルがかなり複雑になったという印象を受けるが，そのことがどれほど有効であるかということについてはさらなる検討を要する。

3.3. 超越的再帰理論の有用性について

さて，これまで考察してきたような基底や特徴を有する超越的再帰理論は，数学理解の研究さらには数学教育の研究において，いかなる価値をもつであろうか。Pirie と Kieren (1992, 1994) が述べているように，この理論は，その本来の目的からして当然ではあるが，ある一つの数学的課題に取り組んだり，ある期間にわたって数学的な知識構造を構築したり組織化したりするときの，子どもたちの数学的行動を観察するための道具として用いられる。すなわち，観察者としての研究者や教師がこの道具を用いることによって，いろいろな学習環境における異なった子どもたちの数学的活動や思考の意味づけの水準についての緻密な解釈が可能となる，ということが最たる有用性であろう。さらに，Pirie と Kieren (1994) が示唆しているように，こうして得られた子どもたちの理解についての洞察を，数学授業の計画と実施やカリキュラム開発に利用できる，という有用性が認められる。

ここでは，超越的再帰理論を観察の道具として用いて，子どもの個人的な数学的理解の成長を，それが観察される通りに，図1のような理論のモデル図上にはっきりと描写する，マッピングについてみてみよう。

このマッピングは，次のようにして行われる。まず，観察可能な理解活動を，理論のモデル図上に点としてプロットする，そして，それらの点の間を，子どもたちの理解が連続的なつながりをもって成長していると見られるかどうかで，連続あるいは不連続の線で結ぶ (Pirie and Kieren, 1944, p.182)。また，ある一つの水準内での長い時間をかけた活動を，鋸歯状の線で表す (p.185)。

このようなマッピングの手法を用いて，実際に，8歳，10歳及び12歳の生徒の分数の加法についての個人的な理解の成長，14歳の生徒の2次方程式のグラフについての理解の成長，さらには，隠されたコンピュータ・プログラムに含まれる幾何学の特性を発見するという課題に取り組む大学生の理解の成長を，モデル図上に描写している (Pirie and Kieren, 1992, 1994)。

図3は，分数の加法についての10歳の生徒の理解の成長を表したものである。これは，この生徒の理解の成長に関する以下のような観察に基づいている。

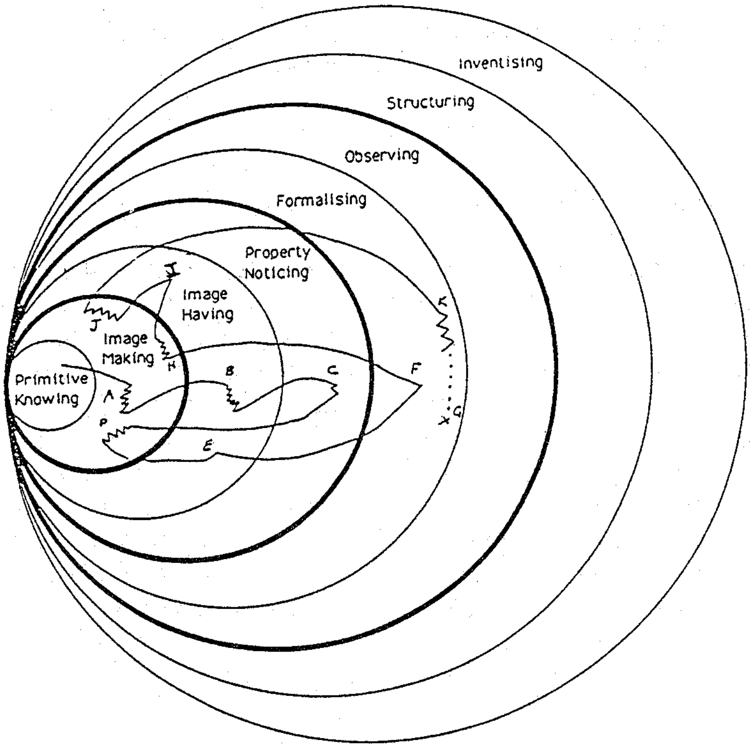

図３．ある10歳児の理解の成長のマップ（Pirie and Kieren, 1994, p.186）

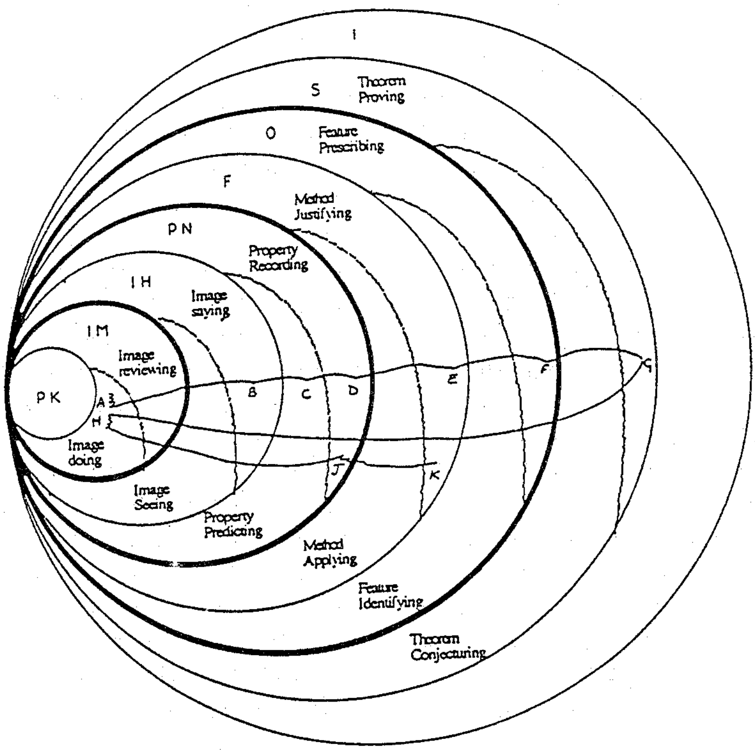

図４．ある大学生の理解の成長のマップ（Pirie and Kieren, 1994, p.184）

A．長方形の紙片を折ったり，ピザを分けることを表す絵を描いたりした。　［イメージづくり］

B．分数に対して，あるイメージをもっていた。　［イメージ所有］

C．同値という性質に気づき，2倍することによって，1/2＝2/4＝4/8＝8/16＝・・・のような，簡単な一連の分数を構成できた。　［性質認知］

D．さらに描いたり色づけしたりする活動へ折り返した。　［イメージづくり］

E．同分母分数が，それらに含まれる断片のすべての数を数えることによって合併され得る，という加法的なイメージをもった。　［イメージ所有］

F．さらに，「ある数の上にある数を書くことは，ある分数を与えるであろう。そこでは，下側の数は，折ってできた断片で，上側の数はあなたがいくつもっているかである」と言って，イメージの一部を形式化した。　［形式化］

G．半分と三分の一を合わせるという新しい課題に対して，教師が分数の加法の「規則」を与えたが，それはこの時点での理解とは結びついていなかった。　［形式化］

H．再度，ピザを描くことに折り返した。　［イメージづくり］

I．同値な分数をつくるための，すでに気づいていた性質を組み合わせて，半分と三分の一に対するイメージを形成し直した。　［イメージ所有］

J．両方のピザを六分の一に分けて考えた。　［イメージづくり］

K．自力でアルゴリズムを形式化しようと試みて，「上側の数を掛けて，下側の数を加えなさい。分母を掛けて，分子を加えなさい。」（原文のまま）と言った。　［形式化］

図3のように，子どもの理解の成長をモデル図上にマッピングすることのよさは，理解の成長の様子が一目で分かるということであろう。そして，理解が何度かの「折り返し」を含む，力動的な過程であるということがよく表されている。さらに，上の観察記録とあわせてみるとき，子どもが形式化の水準で活動していても，教師が与える形式的規則がその子どもの理解と結びつかなければ，外側の水準への拡張には役立たない，ということも読み取れる。むしろ大切なことは，より内側の水準への「折り返し」を促して，子ども自身が再構成するのを援助することである，ということが示唆される。

一方，図4は，隠されたコンピュータ・プログラムに含まれる幾何学の特性を発見するという課題に取り組んだときの，ある大学生の理解の成長を，同様の手法を用いてマッピングしたものである。この図をみると，その大学生は，かなりスムーズに，イメージづくりの水準から構造化の水準へと移行していることがわかる。しかし，彼の場合でも，その後，大きな「折り返し」が観察される。

ここで最も興味ある点は，これら二つの例に共通するが，何が契機となって「折り返し」が起こったかということである。数学教育において生徒の理解を深めることを目標とする場合に，この点を解明することが数学指導への重要な示唆を与えると考えるからである。

この点に関して，Kieren と Pirie (1992) は，教師による3種類の介入，すなわち，挑戦的介入，支援的介入及び確認的介入を同定し，研究を進めている。現在のところ，これに関するまとまった研究報告はないが，介入の本性を決めるのは，教師ではなくて，それに対する生徒の反応であることが示唆されている。

4．結　　論

Pirie と Kieren の超越的再帰理論についてのこれまでの考察を，本稿の第1節で述べた二つの疑問に答える形でまとめることにする。

まず，第一の疑問は，理解を再帰的現象と捉える根拠は何か，ということである。その根拠は，3.1. で考察したように，氏等の数学観や子ども観に関わる，相互に密接な関連のある二つの基本的な考えにあるといえる。

その一つは構成主義である。氏等は，この立場に立って，子どもの数学的理解の成長を，子どもが自らの知識の上に知識構造を構築したり再組織化したりする，力動的な一つの全体的過程として捉えている。もう一つはオートポイエーシス・システム論である。氏等は，数学を理解しつつある子どもを，《自律的，自己言及的で自己構成的な閉鎖系》としてのオートポイエーシス・システムの典型例とみなしている。

このような基本的な考えに基づいて，数学的理解の成長を再帰的現象と捉え，一つの全体としての数学的理解の成長を見る方法，つまりメタファーとして，再帰を用いているのである。

次に，第二の疑問は，超越的再帰的モデルの構成要素としての8つの水準はいかなる性質のものか，さらに，この理論は他にどのような特徴をもつか，ということである。8つの水準は，3.2. で考察したように，子どもの理解活動を観察することを通して見いだされたものであるが，活動，イメージ，形式及び構造の4つをその基礎にもつ。そして，後（モデル図では外側）の水準がそれより前（内側）の水準を超越的に再帰的

に埋め込むような性質のものである。

さらに，この理論には，「折り返し」，「不必要な境界」及び「行為と表現の相補性」という特徴がある。その中でも「折り返し」は理解の成長にとって必要不可欠な活動である。なぜなら，ある水準で子どもが困難に直面したときには，それより内側の水準へ折り返し，その水準で再構成を行うことによって，はじめて，外側の水準へ拡張できる，と考えられているからである。

次の「不必要な境界」という特徴は，ある水準ではそれ以前の水準での具体的な活動や意味づけを意識することなく活動できる，という数学の特性を理論ならびにそのモデルに反映させようとするものである。さらに，「行為と表現の相補性」は，理解の成長をより詳細に記述するためのもので，各水準内での相補的な行為と表現の間を行き来することによって理解の成長が起こる，という考えを特徴づけるものである。

このような特徴をもった，数学理解の超越的再帰理論は，子どもの理解の成長を観察するための一つの有用な道具である。このことは，この理論のモデル図上に子どもの理解の成長を観察される通りにマッピングでき，緻密な解釈が可能となるということで例証されている。

しかしながら，この超越的再帰理論は十分に成熟したものではない。なぜなら，「折り返し」は何を契機に起きるのか，内側の水準における再構成とはいかなるもので，それがどのようにしてより外側の水準への拡張に導くのか，この理論はどの範囲の数学的理解を記述し得るのか，など重要な問題が残されているからである。

いずれにしても，この理論はまさに成長しつつある理論である。それゆえ，理論の今後の発展が期待される。

引用及び参考文献

Kieren, T., (1988), Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In Hiebert, J. and Behr, M. (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp.162−181.

Kieren, T. and Pirie, S., (1991), Recursion and Mathematical Experience. In Steffe, L. (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*, N. Y.: Springer Verlag, pp.78−101.

Kieren, T. and Pirie, S., (1992), The Answer Determines the Question: Interventions and the Growth of Mathematical Understanding. *Proceedings of the Sixteenth PME Conference*, 2, International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp. 1−8.

Kieren, T., (1993), Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In Carpenter, T. P., Fennema, E. and Romberg, T. A. (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, pp.49−84.

小山正孝, (1985), 「数学教育における「理解のモデル」に関する一考察」, 『数学教育学研究紀要』, 第11号, 西日本数学教育学会, pp.23−29.

小山正孝, (1991a), 「数学教育における理解のモデルについて」, 『兵庫教育大学研究紀要』, 第11巻, pp.25−38.

小山正孝, (1991b), 「数学の理解の過程を解明するための理論的枠組み」, 『数学教育論文発表会論文集』, 第24号, 日本数学教育学会, pp.25−30.

小山正孝, (1992), 「数学教育における理解のモデルについて」, 岩合一男先生退官記念出版会編, 『数学教育学の新展開』, 聖文社, pp.172−184.

Koyama, M., (1993), Building a Two Axes Process Model of Understanding Mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education* 1, Hiroshima University; Department of Mathematics Education, pp.63−73.

Maturana, H. R. and Varela, F. J., (1980), *Autopoiesis and Cognition: The Realization of the Living*. Dordrecht; D. Reidel Publishing Company. [河本英夫訳, (1991), 『オートポイエーシス：生命システムとはなにか』, 国文社]

Pirie, S., (1988), Understanding: Instrumental, Relational, Intuitive, Constructed, Formalised...? How can We Know?. *For the Learning of Mathematics* 8 (3), pp. 2−6.

Pirie, S. and Kieren, T., (1989), A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *For the Learning of Mathematics* 9 (3), pp.7−11.

Pirie, S. and Kieren, T., (1992a), Watching Sandy's Understanding Grow. *Journal of Mathematical Behavior* 11 (3), pp.243−257.

Pirie, S. and Kieren, T., (1992b), Creating Constructivist Environments and Constructing Creative Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 23, pp.505−528.

Pirie, S. and Kieren, T., (1994), Growth in Mathematical Understanding: How can We Characterise it and How can We Represent it?. *Educational Studies in Mathematics* 26, pp.165−190.