広島大学教育学部紀要　第二部　第42号　1993

高校数学教育における問題解決的教授学習の展開

小　山　正　孝
(1993年9月10日受理)

On Development of the Teaching and Learning of "Problem-Solving Centered Mathematics" at Senior High School Level

Masataka Koyama

At senior high school mathematics level, it is a critical task to realize the transfer from "passive learning" to "active learning". The aim of this paper is to propose the teaching and learning of "problem-solving centered mathematics" as one promising scheme. The word of "problem-solving centered mathematics" should be interpreted in a wide sense. In this scheme, students pose mathematical problems from a given situation, solve them using their acquired mathematical knowledge and skills, and then make new mathematical problems using a so-called "what if not?" strategy.

As an example of this scheme, we explore a typical development of mathematical problems which can be posed from a situation; consider squares inscribed in a certain square. The development of them is summarized in a lesson plan.

0．はじめに

平成元(1989)年3月に告示された高等学校学習指導要領では，その「総則」の中で，高等学校教育全般にかかわることとして，次のことが強調されている[1]。

(1)　自ら学ぶ意欲の育成
(2)　社会の変化に主体的に対応できる能力の育成
(3)　基礎的・基本的な内容の指導
(4)　個性を生かす教育

これを受けて，数学科では，①数学における基本的な概念や原理・法則の理解，②事象を数学的に考察し処理する能力，③数学的な見方や考え方のよさの認識，④それらを積極的に活用する態度[2]を深化・育成することをその目標としている。こうした目標を達成し，社会の情報化と生徒の多様化とに一層的確に対応するために，コア・オプションの考え[3]のもとに数学科カリキュラムを構成することが意図されている。

そして，いよいよ平成6年度から学年進行の形で，この新学習指導要領に即した数学教育が実施されようとしている。このような時期に，高等学校におけるこれまでの数学教育を反省して問題点を明らかにし，その改善策を考えることは，これからの数学教育の実践及び数学科教員養成にとって意義あることであろう。

そこで，本稿では，高校数学教育の問題点を明らかにするとともに，その改善策の一つとして問題解決的教授学習を提案し，その具体的な展開を述べることとする。

1．高校数学教育の問題点

平成4(1992)年1月に，広島大学/ミネソタ大学共同研究の一環として，広島大学教育学部を卒業した高校数学科教員を対象にして，数学教育に関するアンケート調査を郵送法によって実施した。その有効回答数は112であったが，分析の結果[4]，数学の授業形態と指導方法について，次のような全体像が明らかになった。

数学の授業形態については，一斉指導が常時行われ，それに個別指導が組み込まれるが，小グループ指導はほとんど行われていない。そして，数学の指導方法については，説明・解説や発問・応答を主要な方法とし，課題や学習プリントを与えて生徒に個別学習をさせているが，OHPやコンピュータ等の教育機器の利用，生

徒同士の話し合い，個人やグループでの操作や実験はほとんど行われていない，ということである。

こうした姿は，事前にある程度は予想できたし，一斉指導が必ずしも悪いわけではない。しかし，こうした画一的で教師主導型の数学教育には深刻な問題点が内在していると思われる。

そこで，平成5(1993)年4月に，中学校・高等学校の数学科教員を志望している広島大学教育学部及び理学部の3年生79名を対象に，彼らが受けてきた中学・高校の数学の授業についてその印象を書かせてみた。数学の授業に対する学生の印象をそのままの形でいくつか列挙すると，次のようである。

○高校の時の先生は，難しい問題を黒板でさらさら解くのではなく，生徒と一緒になって考えながら説明するので，後まですごく印象が残った。

○分かりやすく丁寧な授業だった。

○中学校時代の先生の授業は，先生の個性が全面に押し出され，楽しい授業であった。私にも大変わかりやすかった。

●決して興味を覚えられるものではなかった。教科書を説明して，応用問題を解くというのの繰り返しだった。

●受け身的で，先生から知識を与えてもらう，という授業だった。

●先生が教科書の内容をたどっていく授業なので，授業の中で，「あ，分かった！」というような感動というか，感情を抱いたことがない。

●受験の影響もあるだろうが，「面白い」とか「楽しい」といった印象は数学の授業では少ないような気がする。

このように，数学の授業に対してプラスの印象(○)をもっている学生はごく少数である。それに対して，大多数の学生が，教科書通りの受け身的な授業で，「分かった」とか「面白い」とかの感動のない授業，というマイナスの印象(●)をもっている。これが大学生一般の数学の授業に対する印象ならともかく，数学科教員志望の数学専攻の学生の印象であるから，問題は一層深刻である。

これら二つの調査からいえる，高校数学教育の最も重大な問題点は，生徒が「受動的な学習」を行っていることである。これでは，自ら学ぶ意欲や社会の変化に主体的に対応できる能力を育成することはきわめて困難であろう。そして，こうした受動的な学習を経験し，数学の授業に対してマイナスの印象をもった学生がそのまま数学科教員になれば，「反面教師」と同じことをすることも考えられる。

そこで，生徒の「受動的な学習」を「能動的な学習」に転換するための一つの方策として，問題解決的教授学習を提案したい。

2．問題解決と問題解決的教授学習

1980年にアメリカの数学教師協議会（NCTM）が，その勧告の中で問題解決を学校数学の焦点として位置づけてから，すでに10余年が経過した。そして，その間，アメリカはもちろんわが国でも問題解決に関する研究が精力的に行われてきた。

これまでの数学的問題解決過程及びモデル化に関する研究から，数学的問題解決過程は，一般的には図1

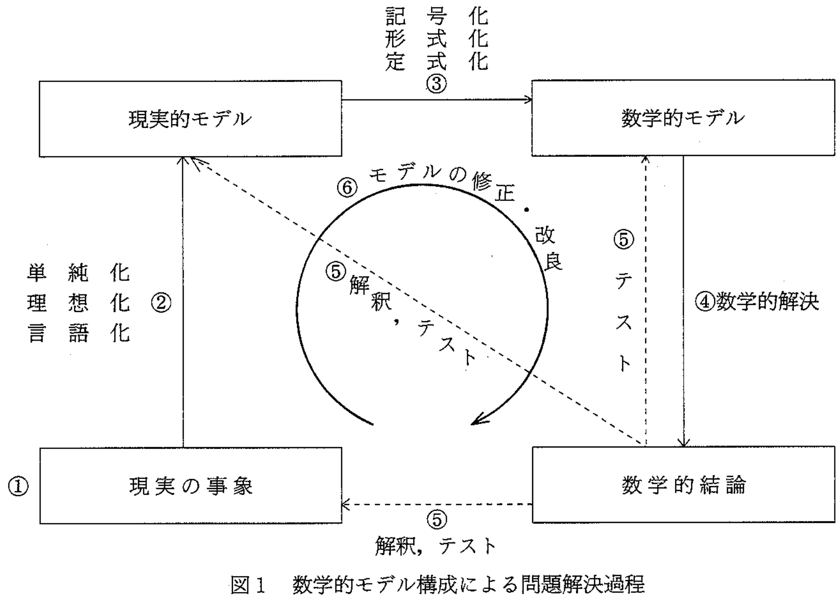
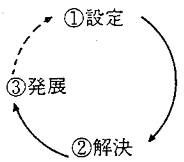


図1　数学的モデル構成による問題解決過程

のように，6段階を経て進展するととらえられる[5]。そして，問題解決を「与えられた問題を解決すること」と狭い意味にとらえるのではなく，より広い意味でとらえることの重要性が指摘されるようになった。つまり，問題を意識し解決すべき数学的問題として設定すること，その問題を解決すること，そしてさらに新しい問題を見つけること，これらすべてを含めて問題解決をとらえるのである。

本稿で「問題解決的教授学習」というときには，問題解決を後者のように広義の意味でとらえ，この言葉を使うこととする。そして，問題解決的教授学習の過程を，次の図2に示すようなサイクリックな発展的過程としてとらえる[6]。



①問題を意識し，それを数学的問題として設定する。

②その設定した問題を解決する。

③そして新たな問題を見つけだす。

図2　問題解決的教授学習の過程

3．問題解決的教授学習の展開例
－「正方形に内接する正方形」－

3．1　本展開の基本的な考え及び意図

生徒個々の問題意識や知的興味・意欲を引き出すための一方策として，ある問題状況を与えて，経験や既習事項をもとにして，その状況から生徒自身に問題をつくらせ，それを解決させ，さらに新たな問題をつくらせる，という展開を試みることにする。

本展開例では，「ある一定の正方形に内接する正方形について考えよう。」という問題状況だけを生徒に与え，生徒自身に問題をつくらせ，その問題を解決する過程で，既習の数学的知識や技能を統合したり，理解を深めたりさせる。さらに，ひとたび解決できた問題から新しい問題をつくるにはどのようにしたらよいかを理解させる。

より具体的に本展開の意図を述べれば，次のようになる。

(1)「～を求めよ。」という問題を与えずに，「ある一定の正方形に内接する正方形について考えよう。」という問題状況のみを提示することによって，生徒に問題意識を引き起こさせる。

(2)幾何的な図と代数的な式およびグラフの相互関連に着目させ，これら相互の翻訳ができるようにする。

(3)一つの問題が解決できたことに満足せず，「～でなければ，どうなるか (What if not?)」という方略を用いて，もとの問題状況の属性・条件を変更することによって，新しい問題をつくらせ[7]，その問題の解決に取り組ませる。それによって，問題設定の仕方を身につけさせる。

(4)いくつかの類似な問題を解決する過程を反省させ，一般的な問題や発展的な問題をつくってそれを解決する，いわゆる「数学をする (doing mathematics)」活動を経験させる。

以上の(1)～(4)を通して，生徒の自己学習力の育成をねらう。

3．2　本教材の研究

このような問題解決的教授学習を効果的に行うためには，適切な教材を選択・開発し，多様な発展を教師自身が探究しておくことが重要である。そこで，以下では，この「ある一定の正方形に内接する正方形について考えよう。」という問題状況から，どのような問題をつくることができるか，いかなる多様な解決方法が考えられるかを中心に，その教材研究の一端を少し詳しく述べることとする。

【もとの問題状況】 ある一定の正方形に内接する正方形について考えよう。

これから，次のような問題をつくることができる。

【問題0】 内接する正方形で面積が最小になるものを求めよ。

［解1］

もとの一定の正方形の一辺の長さを c とする。

そして，図3のように x，y をとる。このとき，

$x+y=c$ ………… ①

内接する正方形の面積Sは，

$S=c^2-2xy$ ……… ②

①より，$y=c-x$　$(0 \leqq x \leqq c)$

これを②に代入すると，

$S=c^2-2x(c-x)$

$=2\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{c^2}{2}$

これより，$x=\frac{c}{2}$のときSは最小となり，最小値は$\frac{c^2}{2}$である。

すなわち，もとの正方形の各辺の中点を結んでできる正方形の面積が最小で，それはもとの正方形の面積の半分である。■

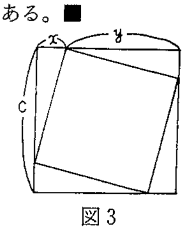


図3

[解 2]

解 1 と同様に，もとの一定の正方形の一辺の長さを c とし，x，y をとる。このとき，

$x+y=c$ ……… ①

内接する正方形の面積Sは，一辺の長さが $\sqrt{x^2+y^2}$ だから，

$S=(\sqrt{x^2+y^2})^2$

$=x^2+y^2$ ……… ②

①，②より，

$S=x^2+(c-x)^2$

$=2(x-\frac{c}{2})^2+\frac{c^2}{2}$

これより，$x=\frac{c}{2}$ のときSは最小となり，最小値は $\frac{c^2}{2}$ である。■

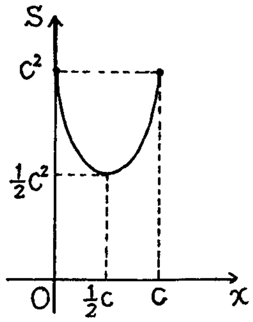


図 4

[解 3]

解 2 と同様に考えて，

$x+y=c$ …… ①

$S=x^2+y^2$ …… ②

②より，$x+y^2=k^2$ …… ③ とおき，

①，③のグラフをかくと，図 5 のようになる。

グラフより k が最小となるのは，直線 $x+y=c$ に円 $x^2+y^2=k^2$ が接するときだから，

$x=y=\frac{c}{2}$

よって，このとき面積Sは最小となり，最小値は $\frac{c^2}{2}$ ある。■

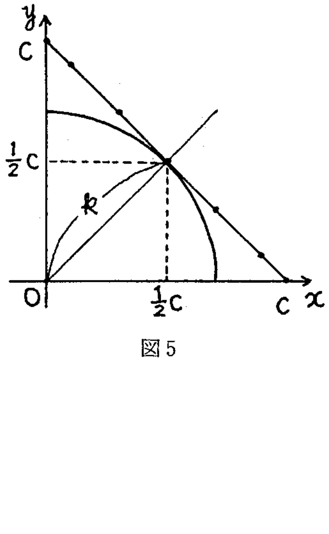


図 5

[解 4]

内接する正方形は，その対角線が一つに決まれば一つに決まる。そして，その面積は対角線の長さの 2 乗に比例する。

このことから，図 6 のように，辺上の任意の点をPとし，正方形の中心をO，Oから辺におろした垂線の足をMとすると，

OP≧OM

となる。

よって，内接する正方形の面積が最小になるのは，その対角線の長さがもとの正方形の一辺の長さに等しいときである。

ゆえに，もとの正方形の各辺の中点を結んでできる正方形の面積が最小で，それはもとの正方形の面積の半分である。■

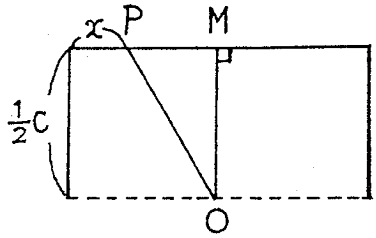


図 6

以上のように，問題 0 はいろいろな解決方法によって解決できる。次に，この問題をもとに What if not？方略を用いて，新たな問題をつくってみよう。ここでは，次の 2 通りの場合について考えることにする。

(1) $\boxed{\text{内接する}}$ でなければ，どうなるか。

(2) $\boxed{\text{正方形}}$ でなければ，どうなるか。

まず，(1)の場合について考えると，例えば次のような問題をつくることができる。

【問題 1 】ある一定の正方形に外接する正方形で，面積が最大になるものを求めよ。

[解 1]

もとの一定の正方形の一辺の長さを c とし，図 7 のように x，y をとる。このとき，

$x^2+y^2=c^2$ ………… ①

外接する正方形の面積Sは，

$S=(x+y)^2$

$=x^2+2xy+y^2$ ……… ②

①，②より，

$S=c^2+2xy$ ………… ③

①の条件のもとで，xy の最大値を求める。

$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ より,

$$(xy)^2 = x^2y^2$$
$$= x^2(c^2 - x^2)$$
$$= -(x^2 - \frac{c^2}{2}) + \frac{c^4}{4}$$

これより, $x = \frac{\sqrt{2}c}{2}$ のとき xy は最大となり, 最大値は$\frac{c^2}{2}$である。このとき, ③より面積Sの最大値は$2c^2$となる。

すなわち, 外接する正方形の一辺の長さが$\sqrt{2}c$ のとき面積は最大となり, 最大値はもとの正方形の面積の2倍である。■

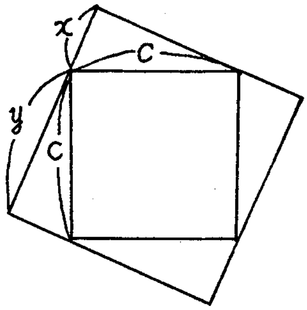


図7

［解2］

図8において, 外接する正方形の一つの頂点Pは, 長さ c の辺ABを直径とする半円周上を動く。よって, 外接する正方形の面積が最大になるのは, 三角形APBの面積が最大になるときである。

底辺ABの長さは c で一定であるから, 高さPH(ただし, HはPから辺ABにおろした垂線の足である)が最大のとき, 三角形APBの面積が最大になる。つまり, 点Pが半円周上の中点Mに一致するときである。

このとき, 三角形AMBの面積は$\frac{c^2}{4}$となる。

よって, 外接する正方形で面積が最大になるのは, 一辺の長さが$\sqrt{2}c$ のときで, その最大値はもとの正方形の面積の2倍である。■

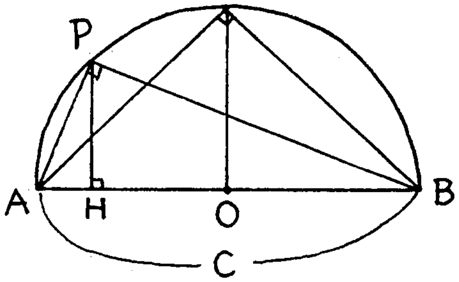


図8

次に, (2)の場合について考えると, 次のような問題をつくることができる。

【問題2】ある一定の正三角形に内接する正三角形で, 面積が最小になるものを求めよ。

［解1］

もとの正三角形の一辺の長さを c とし, 図9のように x, y をとる。このとき,

$$x + y = c \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

図9の斜線部の三角形の面積Tは,

$$T = x \times y \sin 60^\circ \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}xy \quad \cdots\cdots ②$$

①より,

$$T = \frac{\sqrt{3}}{4}x(c - x)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{4}\right\}$$

よって, $x = \frac{c}{2}$のときTは最大となり, 最大値は$\frac{\sqrt{3}\,c^2}{16}$である。

すなわち, もとの正三角形の各辺の中点を結んでできる正三角形が面積最小のものである。■

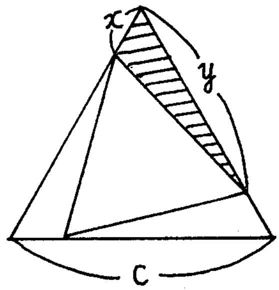


図9

［解2］

解1と同様に, c, x, y をとる。このとき,

$$x + y = c \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

内接する正三角形の一辺の長さを z とすると, 余弦定理より,

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ$$
$$= x^2 + y^2 - xy \quad \cdots\cdots ②$$

内接する正三角形の面積をSとすると,

$$S = z \times z \sin 60^\circ \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\,z^2}{4} \quad \cdots\cdots ③$$

①, ②より,

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + y^2 - xy)$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}\left\{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{12}\right\}$$

よって, $x = \frac{c}{2}$のときSは最小となり, 最大値は$\frac{\sqrt{3}\,c^2}{16}$である。

ところで, もとの正三角形の面積は③で $z = c$ とすると, $\frac{\sqrt{3}\,c^2}{4}$であるから, 最小値はその$\frac{1}{4}$である。

すなわち，内接する正三角形で面積が最小のものは，もとの正三角形の各辺の中点を結んでできる正三角形で，その面積はもとの正三角形の面積の$\frac{1}{4}$である。(図10) ■

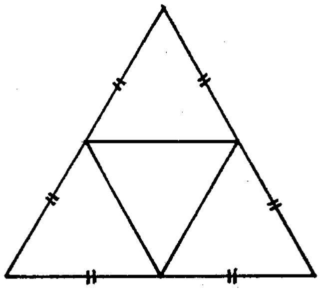


図10

以上のように，もとの問題状況の属性を変更することによって，新たな問題をつくることができる。

さて，次に，問題0と問題2のそれぞれについて，問題とその結果を整理してみよう。

【問題0】ある一定の正方形に内接する正方形で，面積が最小のものを求めよ。

⟶［結果］もとの正方形の各辺の中点を結んでできる正方形で，その面積はもとの正方形の面積の$\frac{1}{2}$である。

【問題2】ある一定の正三角形に内接する正三角形で，面積が最小のものを求めよ。

⟶［結果］もとの正三角形の各辺の中点を結んでできる正三角形で，その面積はもとの正三角形の面積の$\frac{1}{4}$である。

これらのことから，問題0と問題2を一般化した次の問題3をつくることができる。

【問題3】ある一定の正n角形に内接する正n角形で，面積が最小のものを求めよ。

そして，その最小の正n角形の面積ともとの正n角形の面積の比を求めよ。

［解］正n角形の一辺の長さをcとし，一つの内角の大きさをθとする。このとき，

$$\theta=\frac{180^\circ\times n-360^\circ}{n}$$

$$=180^\circ-\frac{360^\circ}{n} \quad \cdots\cdots ①$$

図11のようにx, yをおくと，斜線部の三角形の面積Tは，

$$T=\frac{\sin\theta}{2}xy \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

ところで，$x+y=c$で$\sin\theta$は定数より，

$$T=\frac{\sin\theta}{2}x\ (c-x)$$

$$=\frac{\sin\theta}{2}\{-(x-\frac{c}{2})^2+\frac{c^2}{4}\}$$

これより，$x=\frac{c}{2}$のときTは最大となり，最大値は$\frac{c^2\sin\theta}{8}$である。

よって，内接する正n角形で面積が最小ものは，もとの正n角形の各辺の中点を結んでできるものである。

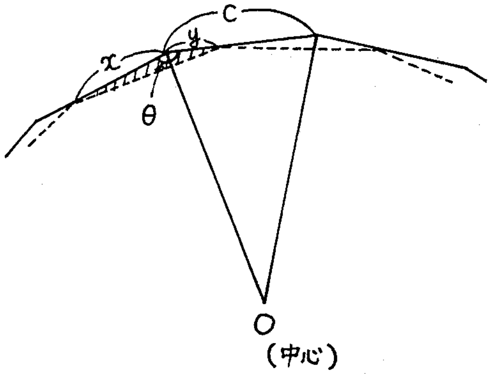


図11

さて，もとの正n角形の面積T'は，図11より

$$T'=c\times\frac{1}{2}\times c\tan(\theta/2)\times\frac{1}{2}\times n$$

$$=\frac{nc^2}{4\cos(\theta/2)}\cdot\sin(\theta/2) \quad \cdots\cdots ③$$

であるから，内接する最小の正n角形の面積Sは，

$$S=T'-\frac{c^2\sin\theta}{8}\times n$$

$$=\frac{nc^2}{4\cos(\theta/2)}\cdot\sin(\theta/2)-\frac{nc^2}{8}\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{nc^2\sin(\theta/2)}{4}\{\frac{1}{\cos(\theta/2)}-\cos(\theta/2)\}$$

$$=\frac{nc^2\sin(\theta/2)}{4}\cdot\frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$$

$$=\frac{nc^2\sin^3(\theta/2)}{4\cos(\theta/2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

よって，

$$面積比\frac{S}{T'}=\frac{\frac{nc^2\sin^3(\theta/2)}{4\cos(\theta/2)}}{\frac{nc^2\sin(\theta/2)}{4\cos(\theta/2)}}$$

$$=\sin^2(\theta/2) \quad (0^\circ<\theta<180^\circ)$$

ゆえに，内接する正n角形で面積が最小のものは，もとの正n角形の各辺の中点を結んでできるもので，その面積はもとの正n角形の面積の$\sin^2(\theta/2)$倍である。ただし，θは正n角形の内角の大きさを表し，$\theta=180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$である。■

この問題3の結果の n に，具体的な整数値を代入すると，次のようなことがわかる。

正 n 角形	内角の大きさ θ	面積比
3	60°	0.25
4	90°	0.50
5	108°	0.65
6	120°	0.75
7	900/7°	0.81
8	135°	0.85
9	140°	0.88
10	144°	0.90
•	•	•
•	•	•
18	160°	0.97
•	•	•
•	•	•
36	170°	0.99
•	•	•
•	•	•

これより，$n\to\infty$のとき面積比は1に限りなく近づくことが推測できる。実際，面積比は $\sin^2(\theta/2)$ 倍で，

$\theta=180°-\dfrac{360°}{n}$だから，

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(90°-\frac{180°}{n}\right)=\sin^2 90°=1$$

これまではもとの問題状況の属性を変更して新たな問題をつくってきた。以下では，$\boxed{\text{もとの問題状況}}$ そのものを変更したら，どうなるか考えてみよう。

例えば，次のような問題をつくることができる。

【問題4】 面積が一定の長方形で，周長が最小のものを求めよ。

［解］　面積を c（c は正の定数）とし，図12のように，長方形の二辺の長さを x，y とすると，

$xy=c$　……………　①

周長を ℓ とすると，

$\ell=2\ (x+y)$　……　②

①，②より，

$\ell=2\ (x+\dfrac{c}{x})$　…　③

ところで，$c>0$ で，$x>0$，$y>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より，

$x+\dfrac{c}{x}\geqq 2\sqrt{c}$

③より，

$\ell=2\,(x+\dfrac{c}{x})\geqq 4\sqrt{c}$

これより，$x=y=\sqrt{c}$ のとき ℓ は最小となり，最小値は $4\sqrt{c}$ である。すなわち，周長が最小のものは正方形である。(図13) ■

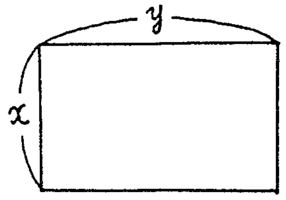


図12

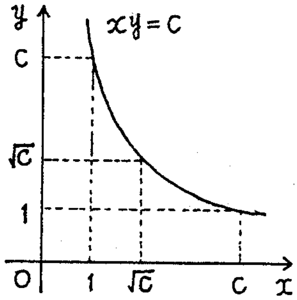


図13

問題4では面積を一定にして周長が最小になるものを求めたが，周長を一定にして面積について考えると，次のような問題をつくることができる。

【問題5】 周長が一定の長方形で，面積が最大のものを求めよ。

［解］　周長を c（c は正の定数）とし，長方形の二辺の長さを x，y とすると，

$x+y=\dfrac{c}{2}$　……　①

長方形の面積Sは，

$S=xy$

$=x(\dfrac{c}{2}-x)$　　($\because$ ①)

$=-(x-\dfrac{c}{4})^2+\dfrac{c^2}{16}$

これより，$x=\dfrac{c}{4}$のとき最大となり，最大値は $\dfrac{c^2}{16}$である。すなわち，面積が最大のものは正方形である。(図14) ■

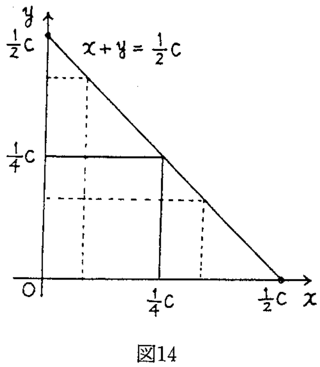


図14

さて，問題５の $\boxed{\text{長方形}}$ を変更すると，どうなるであろうか。例えば，次のような状況について考えてみよう。

【問題状況】 長さ ℓ の紐の両端をつないで多角形をつくる。

この状況から，次のような問題をつくることができる。

【問題６】 長さ ℓ の紐の両端をつないで正 n 角形をつくるとき，その面積 S_n を求めよ。

［解］

(1)　$n=3$ のとき，

$$S_3=\frac{\sqrt{3}}{36}\ell^2$$
$$\fallingdotseq 0.048\ell^2$$

(2)　$n=4$ のとき，

$$S_4=\frac{1}{16}\ell^2$$
$$\fallingdotseq 0.063\ell^2$$

(3)　$n=5$ のとき，

$$S_5=\frac{\tan 54^\circ}{20}\ell^2$$
$$\fallingdotseq 0.069\ell^2$$

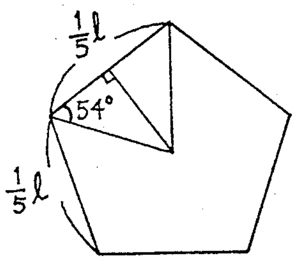


図15

(4)　正 n 角形の場合は，問題３の解より，

$$S_n=\frac{\ell}{n}\times\frac{1}{2}\times\frac{\ell}{n}\tan(\theta/2)\times\frac{1}{2}\times n$$
$$=\frac{\ell^2}{4n}\tan(\theta/2)$$

ただし，$\theta=180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$ （正 n 角形の内角）

である。ゆえに，

$$S_n=\frac{\ell^2}{4n}\tan\left(90^\circ-\frac{180^\circ}{n}\right)\ ■$$

［探究］　ここで $n\to\infty$ の場合について考えてみる。

$$S_n=\frac{\ell^2\sin(90^\circ-180^\circ/n)}{4n\cos(90^\circ-180^\circ/n)}$$
$$=\frac{\ell^2}{4n}\cdot\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ell^2}{4n}\cdot\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$$
$$=\lim_{\pi/n\to 0}\frac{\ell^2}{4\pi}\cdot\cos(\pi/n)\ \frac{1}{\dfrac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}}$$
$$=\frac{\ell^2}{4\pi}\ ■$$

これは周長が ℓ の円の面積に等しい。つまり，周長が一定の場合，面積が最大となるのは円である。

このことと問題４の結果から，面積が一定のとき周長が最小となるのは円である，ということが推測できる。もちろんこれを数学的に確認することもできるが，次のような現実的な経験と照らしてみれば，このことは容易に実感をもって納得できるであろう。

自転車のスポークのような直径の小さい金棒を，何百本かまとめて束にする。紐できつく縛って束にするとき，その束の断面は円になる。つまり，断面積（この場合，金棒の数）が一定であるとき，その周長（紐の長さ）が最小になるのは円（断面が円）のときである。

これまでの教材研究を踏まえて，問題の関連及びその展開を整理すると，図16のようになる。

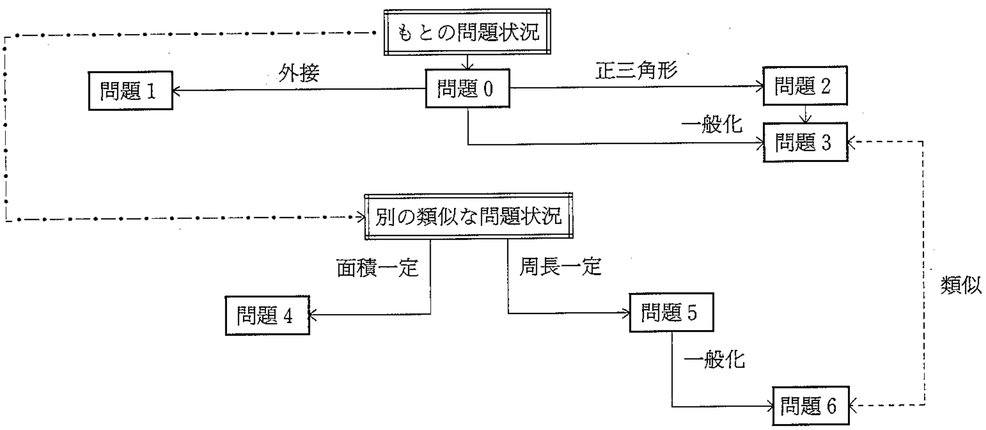


図16　問題の関連

3．3　教授学習の展開過程の一例

こうした教材研究並びに問題の関連をもとに，高校数学教育における問題解決的教授学習の展開の一例を，学習指導案の形で示しておく。ここでは1時間の展開のように圧縮しているが，実際は2～4時間を要する。

学習内容	指導活動（●）及び学習活動（○）	留意点
［導入］ ・課題の把握	● OHPを用いて，「ある一定の正方形に内接する正方形について考える。」という問題状況を提示する。 ○どのような問題状況かをはっきりとつかむ。	OHPを用いて視覚的に提示し，興味・関心がもてるようにする。
［展開］ ・問題づくり	●この問題状況からどのような問題がつくれるか生徒各自に問題をつくらせる。 ○既習の知識やこれまでの経験などをもとに，各自で問題をつくる。 ●どのような問題をつくったかを発表させる。 ○いろいろな問題を比較し，それらの類似点や相違点を考える。	各自でできるだけ多くの問題をつくらせる。 数人の生徒に指名して発表させ，それを板書する。
・問題解決	●いくつかの問題の中から，共通に取り組む問題を決める。そして，それを解決させる。 ○各自で共通問題を，見通しを立てて，いろいろな方法で解く。 ●代表的な方法による解決を板書させる。 ○いくつかの異なった方法による解決を比較し，それぞれのよさなどを知る。 ○幾何的な図，代数的な式，グラフの相互の関連に着目し，それらの対応を理解する。	生徒の意欲をそがないようにする。 2，3人の生徒に板書させる。 OHPを用いてわかりやすくとらえさせる。
・新たな問題づくりと解決	●「～でなければ，どうなるか。」という考え方で，新たな問題をつくらせる。 ○どのようにしたら新たな問題をつくることができるかを知り，問題をつくる。 ●新たな問題を解決させる。 ○共通問題の解決方法を振り返りながら，新たな問題を解決する。	すでにいくつかの問題をつくっていれば，それらをこの考え方で整理する。 時間がある限り問題を解決させる。
［まとめ］	●与えられた問題を解くだけではなく，自分で問題をつくって解くことの重要性を強調する。	今後の発展について触れる。

4．おわりに　－自己学習力の育成の可能性－

本稿では，高等学校数学科の現職教員並びに教員志望学生を対象にした調査を通して明らかになった「受動的な学習」を，「能動的な学習」に転換するための一つの方策を提案した。それは問題解決的教授学習である。この教授学習では，生徒に問題を与えてそれを解決させるという狭い意味ではなく，生徒自身に問題をつくらせること，つまり問題設定をも組み込んだ広い意味で問題解決をとらえることが前提となる。というのは，この前提に立って初めて，生徒個々の問題意識や知的興味・意欲を引き出すことができると考えるからである。

こうした問題解決的教授学習の展開の一例として，本稿では，「ある一定の正方形に内接する正方形について考えよう。」という問題状況からいかなる問題を発展的につくることができるかを中心に，その教材研究の内容を詳しく述べた。もちろん本稿とは別の角度からの教材研究も可能である。いずれにしても大切なことは，まず教師自身が教材の発展を探究し，その数学的価値を感得することである。

さらに，上述の問題状況から始まる問題解決的教授学習の展開例を，１時間の学習指導案に圧縮した形で示した。実際には，これを２～４時間かけて行う必要がある。もちろん毎時間こうした展開の指導をすることはできないし，その必要もない。学期や年間の指導計画に数回こうした展開の指導を，予め組み込んで意図的に行うことが重要である。

高校数学教育において，教師の指導を受けながら，生徒自らが問題を設定し，解決し，さらに新たな問題を見いだす経験を重ねることは，いわゆる「自己学習力」の育成につながると考える。本稿で提案した問題解決的教授学習が高校数学教育の改善の一助となれば幸いである。

引用・参考文献

1）文部省『高等学校学習指導要領』，大蔵省印刷局，1989，p.1.
2）上掲書　1），p.52.
3）正田　實・茂木　勇編『改訂　高等学校学習指導要領の展開－数学科編－』，明治図書，1990，pp.85-86.
4）小山正孝「数学科教師養成に関する日米比較研究－中等教育段階の数学科教師の実態調査－」，『第25回数学教育論文発表会論文集』，日本数学教育学会，1992，pp.511-516.
5）小山正孝「数学的モデル」，岩合一男編『算数・数学教育学』，福村出版，1990，p.211.
6）小山正孝「新たな問題を見つけ出す力を求めて」，算数指導アイデア研究会編『問題解決の指導を考える』，啓林館，1992，p.61.
7）S.I.ブラウン・M.I.ワルター著／平林一榮監訳『いかにして問題をつくるか－問題設定の技術－』，東洋館出版，1990.