広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要
〈第24号　1996．3〉

数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業の研究

－中学校・高等学校における授業の実践－

中原　忠男　小山　正孝
井ノ迫泰弘　宇佐川信行　河野　芳文
酒井　秀二　砂原　　徹　富永　和宏
長尾　篤志　仲渡　雅史　平岡　賢治

I．はじめに

本共同研究体制における，数学的な見方・考え方のよさについての研究は7年目を迎えている。よさの捉え方の研究から授業開発へと進み，昨年から「数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業の研究」をテーマとしてきている。本稿は，その第II報であり，中学校・高等学校において，よさを認識させることを主眼として次の教材の授業を実践した結果を報告するものである。

中学校　1年：三角形の面積を二等分する直線
中学校　2年：相似な図形　－図形の重心－
中学校　3年：三平方の定理－花びらのマーク－
高等学校1年：二次関数のグラフの移動
高等学校2年：三角関数の応用－サイクロイド－

以下においては，それぞれの授業について，指導のねらい，指導の実際，指導の反省と課題を述べ，最後にそれらを総括することにする。

II．中学校における授業実践

(1)　中学校第1学年

「三角形の面積を二等分する直線の作図」

1．指導のねらい

昨年，一昨年の本紀要で述べたように，つくられた数学を伝達する授業だけでなく，指導者が工夫して，数学をつくっていく場面を少しでも多く取り入れた授業をすることによって，数学的な見方・考え方のよさを理解させることができ，数学教育の目標をより確実に達成できるだろう。ここでいう『数学をつくる』(1)とは，理想的には定理や性質を学習者自らが発見することであり，コンピュータによるシミュレーション等によって，これまでより容易になってきた。また，コンピュータの利用によって，授業のための教師の教材研究も，このような観点からの指導方法を工夫することがより容易になってきている。このように，教師による教材の提示の工夫の仕方と学習者の学習の仕方の両面から，数学をつくる体験をしていくことが容易になってきているから，数学をつくっていく授業がより可能になっていきている。

ここでも，授業の中でコンピュータを利用することによって，今までよりもより自然な考え方で学習者に発見的な場面を与えることができ，したがって生徒の思考過程をより自然にして，数学を発見することをねらった指導例を提示する。具体的には，三角形の面積の二等分のために，中線を考えることをより自然に発見できるように意図した。

三角形の面積を二等分する直線の作図は，等積移動の考えを利用することであり，厳密には中学校2年の内容であるが，ここでは，作図を考える応用として投げ入れ教材的に三角形の等積移動を扱い，作図を考える有用性を訴える例として指導を実施してみた。

この教材がもっている数学的な見方・考え方のよさとして，大きな意味からは，思いつきやひらめきが必要ではなく自然に考えられることを強調したいが，具体的な意味からは，何よりもまず教材がもっているおもしろさをあげることができよう。与えられた点を通る直線によって，その三角形の面積を二等分することは，問題が簡潔明瞭で，実生活にも考えられる問題であり，理解できるとその見事さに感動する。また，与えられた点が三角形の内部にあるとどうなるかとか，三角形が四角形の場合はどうなるかというように，考え方や問題を発展的に考えることが出来るから，数学的な考え方の発展性の意味からもよさを強調できる。

Tadao Nakahara, Masataka Koyama, Yasuhiro Inosako, Nobuyuki Usagawa, Yoshifumi Kono, Syuji Sakai, Toru Sunahara, Kazuhiro Tominaga, Atsushi Nagao, Masashi Nakato, Kenji Hiraoka
A Study on Teaching for Appreciation of Mathematical Thinking and Ideas; Teaching Practices on Geomerical Figures of Junior High School and Functions of Senior High School.

2．指導の実際

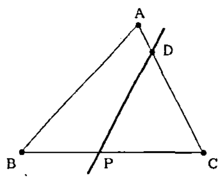
「平面図形」の章で，平面図形の中で最も基本的である直線・半直線，線分や角，円に関する用語を，小学校とは異なり数学的に厳密な意味を述べ，今後数学の学習の対象として正確に理解していこうとする態度を学習する。次に「基本作図」では，小学校での学習と異なり，作図を行うための方法を用語を用いて正確に文章で表記しようとするが，これは，２年での論証の基礎を培うことにもつながってくる。中学校１年で扱う作図は，三角形，角の二等分線，垂線，垂直二等分線などである。

・本時の題目　三角形の面積を二等分する直線の作図
・本時の目標　三角形とその辺上の１点が与えられたとき，その点を通り三角形の面積を二等分する直線を作図によって求めることができることを知らせ，作図の有用性を理解させる。
・本時の具体的な指導

①本時の課題を提示し，その内容を理解させる。

問題

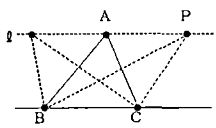
右図のような三角形の形をした土地（以下△ＡＢＣとかく）と，点Ｄの位置に木がある。点Ｄを通る直線ＤＰによってこの三角形の土地の面積を二等分したい。



点Ｐの位置を正確に決めるにはどうすればよいか。

②課題を解決するために以下のように考えさせる。

◇1　右図においてｌは頂点Ａを通り辺ＢＣに平行な直線とする。このとき次のことを理解させる。

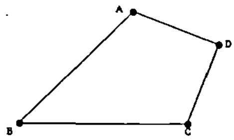


△ＡＢＣ＝△ＰＢＣ 点Ｐは直線ｌ上にある

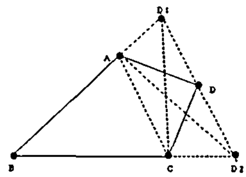
（シミュレーション画面は，△ＡＢＣの面積が表示出来るようになっている。２点Ｂ，Ｃを固定し，点Ａを上下左右に連続的に動かし，点Ａが辺ＢＣに平行な直線上にあるとき，面積が一定値になることが理解できる。以下の指導でも，このシミュレーションでは三角形や四角形の面積が常に表示されていることが，指導上大変有効になっている。本稿ではシミュレーションを克明に表示できないので，この点を十分に推察して頂きたい）

問２　◇2　◇1を利用して，次の問題を考えさせる。

【問】右の図において，四角形ＡＢＣＤと面積が等しい三角形を作図せよ。

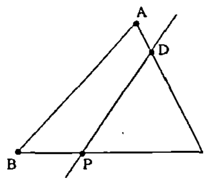


・なるべく簡単に作図する方法がよいとする。そして，三角形ＡＢＣの２辺ＡＢ，ＢＣと重なる辺をもつ三角形を求めるものとし，その作図方法を考えさせる。



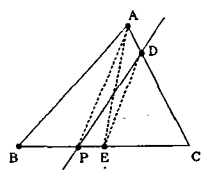
③以上を参考に導入課題を以下のように考えさせる。

◇1　シミュレーションで点Ｐの正確な位置を求め，逆にこの点Ｐがどんな点であるかを考えさせる。



（シミュレーション画面では三角形や四角形の面積が表示されていて，点Ｐの位置が求められる。点Ｐの位置が求められ，逆に点Ｐがどんな点であるかを考えることができ，◇1の発見につながる。ここは本稿の一番強調したい指導上の工夫点である）

◇2　上の②では与えられた四角形と面積が等しい三角形を考えたので，◇1で求めた四角形の面積と等しい三角形を作図してみる。



◇3　作図した２つの三角形のうち，△ＡＢＥの点Ｅは辺ＢＣの中点であることを見つける。

◇4　点Ｐは点Ａを通り直線ＤＥ（Ｅは辺ＢＣの中点）の平行線と辺ＢＣとの交点であることを見つける。

◇5　以上から直線ＤＰの作図の方法を確認する。

④本時は与えられた三角形の面積を二等分する直線を作図によって求めたとし，作図の有用性を確認するようにして本時の学習内容をまとめる。

3．指導の反省と課題

シミュレーションの長所を生かして，点Ｐの位置を先に求め，正しい図をヒントにして逆に「求める点Ｐはどんな点として決まるか」を考えようとさせた。この方法は自然であり課題を解決するときよく用いられる。しかし，この考え方は逆を考える思考であり，本時の指導は中学校１年であったこともあって，意図したこの指導方法の長所が十分に伝わらなかった。逆の思考になっている部分を整理・明確にし，再度挑戦したい。また，このような考え方による教材はたくさんあるので，シミュレーションの長所を生かしていろいろな教材について考えたい。

〔井ノ迫　泰弘〕

〈参考文献〉

(1)　高橋　正,「数学教育におけるコンピュータ利用の理念」, 数学教育学研究紀要, 1992, Vol.18, pp. 111〜116.

(2)　中学校第2学年「相似な図形」

1．指導のねらい

相似の概念は，合同の概念と共に図形の考察において中心的な位置を占めるものであり，また，図形の計量的な性質とも関係する重要なものである。

生徒は既に小学校第6学年で，直観的に図形の「拡大図，縮図」について学んでいる。また，中学校においてもこれまでに，三角形や四角形など小学校以来よく知っている図形の性質について，演繹的に論証することを学んでいる。

しかしながら相似に関する各性質は，生徒がはじめて知るものも多い。したがってそれらの性質については単に論証するだけでなく，図形を描いたり測ったりという操作も取り入れながら学ばせたい。また身近な様々な場面や現象に対して相似の性質を利用することにより，その有用性を体験させたい。

ここでは，そのような意味での操作的活動を取り入れた授業の展開例を提示する。具体的には相似について基本的内容が終了した段階で，三角形の釣り合いの中心が中線上にあることを，相似の考え方を用いることにより確認する。ついで中線の交点が力学的に重要な意味を持つ「重心」であることを確かめさせ，これらを通じて，日常の力学的現象に対する数学的見方，考え方のよさを感じとらせたい。

具体的な指導目標は，次のとおりである。

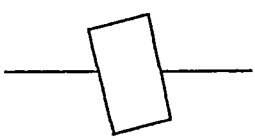
(1)　相似の性質を用いて，三角形の力学的釣り合いの中心が中線上にあることを確認し，日常の力学的現象に対する数学的見方,考え方のよさを体験させる。

(2)　三角形の3中線の交点が重心であることを確認させる。

2．指導の実際

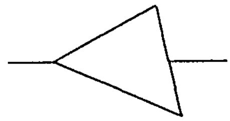
1）四角形の重心と釣り合い

長方形の板を生徒に提示し，棒の上にのせて釣り合いをとるにはどのようにすればよいか問いかけ，その過程を通じて，四角形の対称性や重心について意識させ，中心点を通る直線という解決を引き出すとともに，模型を用いて操作的にも確認した。

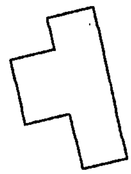


2）三角形の中線

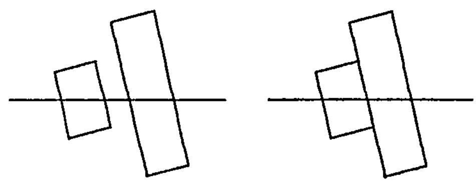
(a)　三角形の板を生徒に提示し，棒の上で釣り合いをとるにはどうすればよいか考えさせた。中線で釣り合うことを予測させ，その理由づけに興味を持たせた。



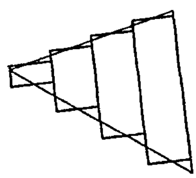
(b)　次に長方形を組み合わせた下図のような図形を提示し，同様に棒の上で釣り合いをとることを考えさせた。



具体的には二つの長方形に分割して考えることができることに気づかせ，それぞれの長方形は中心を通る直線上で釣り合いがとれることを思い出させた。次に二つの長方形の模型を棒の上に次図のようにならべて提示し，距離を次第に近づけて隣り合わせにしても，釣り合いの変わらないことを確認した。



また，その長方形を釣り合いの取れたままセロハンテープで貼り合わせ最初の図形を作ってみせ，最初の図形が二つの長方形の中心を通る直線上で釣り合うことを操作的に確認した。



(c)　再び三角形の板を提示し，(b)で用いた方法が(a)の三角形についても利用できないかを問いかけた上で，右図を提示した。

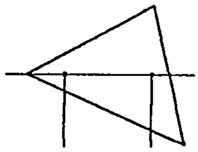
ついでそれぞれの長方形の中心が一直線上にあれば，(b)同様にその直線上で長方形を組み合わせた図形の釣り合いがとれることを発見させ，相似の性質を利用して，それぞれの長方形の中心が一直線上にあることを証明させ，実際の図形を用いて操作的にも確認した。

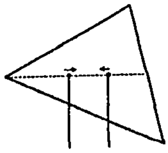
最後に長方形の数を増やしてゆけば三角形の形に近づくことを確認し，三角形についても中線上で釣り合うことを，模型を用いて再び操作的にも確認した。

3）三角形の重心

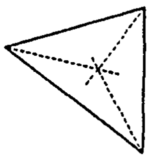
三角形の板を提示し，1点上で釣り合いがとれる点がどこにあるかを予想させた。

前回提示した棒の上の三角形の模型を再び提示し，その棒を2点で支えてみせた上で棒のみを取り去って中線上の2点で支え，その2点をバランスを崩さないまま互いに近づけることにより，重心が中線上にあることを操作的に確認した。





次に重心が中線上にあり中線が3本存在することから，重心があるとすればそれは中線の交点であることに気付かせ，生徒それぞれに形の異なる三角形の厚紙を配付して操作的にも確認させた。



3．指導の反省と課題

重心という身近な現象について，合理性，対称性といった数学的見方を取り入れて考察させることにより，そのおもしろさを気づかせようとした。また生徒それぞれに模型を用いて操作的にも確かめさせることにより，数学的見方を現実に応用できるという有用性も体験させた。

したがってこれらの授業評価については，数学的なものの見方のおもしろさや有用性をどれほど生徒に印象づけることができたか，また，日常の現象について数学的なものの見方を取り入れる力を，どれほど生徒の中に育てることができたかどうかを確認することが必要である。

しかし今回の試みでは，生徒の反応は活発であったものの，具体的にそれを数値化するなどの方法でそれを確認できなかった。

今後の課題としては，数学的ものの見方のおもしろさや有用性を体験させる授業を，さらに工夫すると共に，その評価方法についても客観的評価ができるよう研究を深めたい。〔仲渡　雅史〕

⑶　中学校第3学年「三平方の定理の応用」

1．指導のねらい

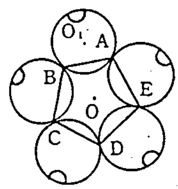
中学校における図形の学習では，第1学年で平面図形や空間図形を直観的あるいは操作的に扱い，論理的に考察する基礎を培うことを目標としている。これに続いて，第2学年では三角形や平行四辺形を主な対象として，図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法を理解させ，推論の過程を的確に表現する能力を養うことを目標とした扱いを行う。すなわち，ここでは基本的な図形を素材として，論証能力を育成することが重要な課題となる。

そして，第3学年では，円の性質や三平方の定理についての理解を深め，図形の性質や計量の考察に生かすとともに，図形を見通しを持って論理的に考察する能力を伸ばすことを目指す。

中学3年は，中学における図形学習のいわば仕上げの学年であり，これまでの学習内容の定着を図るとともに，3年間の学習内容を融合させて総合的な学力を育成するよう取り組む必要があると思われる。

このように考えるとき，指導上有効な方法として「課題学習」をあげることができる。それは，学習した内容が生きて働くためには，受け身の形で注入された知識では不十分であり，何らかの発展的課題や工夫を要する応用問題に取り組む体験を通してはじめて既習の知識や方法が生きて働くものになると考えられるからである。また，こうした体験をすることにより，個々の知識や方法に対する理解が深まるとともに，その有用性や限界に気付くことにもなるであろう。これは知識や方法の効率のよい同化であり，メタ認知的知識に連なるものと思われる。

以上のような考えの下に，三平方の定理までの図形の学習をふまえて，右の図のような花びらに似たマークを作図させることにした。



このマークについては，5つの円の接点を結んでできる正五角形の1辺の長さが与えられれば，円周角の定理，三角形の相似，2次方程式の解法，平方根の作図法などを利用して正五角形が作図できること，さらに，円の中心と弦，円と接線の関係についての簡単な性質を用いれば，5つの円も作図できることがわかる。

このような考えに基づいて，花びらのマークの作図を目的とする2時間の授業を計画し，実施することにした。なお，この授業では正五角形の作図に2次方程式を用いており，幾何学的問題の解決における代数的考察のよさを示すことをも心掛けた。

2．指導の実際

まず，はじめの1時間目では，花びらのマークを提

示し，このマークを作図するには何が分かればよいか考えさせた。

生徒達は，しばらく考えた後，５つの接点を結んでできる正五角形がかければよいと予想したが，その理由を納得するために１時間を要した。

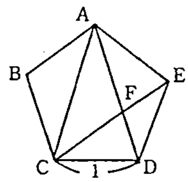
これをふまえて，２時間目は次のように展開した。

まず，前時の復習として，正五角形ＡＢＣＤＥが作図できれば，５つの円の中心が作図できることを簡潔に説明した。

すなわち，まず，２辺ＡＢ，ＢＣの垂直二等分線の交点としてＯを求め，半直線ＯＢ上の点Ｂを通ってＯＢに垂直な線と，辺ＡＢの垂直二等分線の交点を求めれば，これが求める５つの円の中心の１つである。

その上で，本時の中心課題である正五角形の作図法について考えさせることにした。

（課題）右の図において，ＣＤ＝１であるとき，正五角形ＡＢＣＤＥの残りの頂点Ａ，Ｂ，Ｅを定規とコンパスで作図したい。



このとき，

１）どの長さが分かればよいか。

２）適当に対角線を加えて相似な三角形をつくり，

ＡＣ＝ｘ

としてｘについての方程式をつくれ。

１)については，すぐに答ＡＣがかえってきたので，続いて２）を投げかけたところ，10人くらいの生徒が上記のような補助線を加え，$\triangle$ＦＡＣと$\triangle$ＦＤＥが相似であることを主張した。その理由を聞くと，正五角形ＡＢＣＤＥは円に内接するから，円周角の定理により，$\angle$ＣＡＤ＝$\angle$ＣＥＤ，$\angle$ＡＣＥ＝$\angle$ＡＤＥが成り立ち，２角が等しいからだという。

なるほどと納得した後，他の生徒にこの事から分かることを聞くと，角の大きさなどを計算してから何とか

$$AF = CF = CD = 1$$

に気付き，続く生徒がＦＤ＝ｘ－１であることを利用して

$$x : 1 = 1 : (x-1)$$

を導いた。これから，大半の生徒が方程式

$$x^2 - x - 1 = 0$$

に到達し，ｘの値

$$x = (\sqrt{5}+1)/2$$

をもとめた。

そして，最後に次のような課題を与えたところ，大半の生徒が時間内にこれを終えることができた。

（課題）ＣＤ＝１が与えられたとき，

１）ＡＣ＝$(\sqrt{5}+1)/2$の長さを作図せよ。

２）正五角形ＡＢＣＤＥを作図せよ。

３）花びらのマークを完成せよ。

３．指導の反省と課題

今回の授業までの流れは，円の性質，三平方の定理等についてのオーソドックスな扱いであり，それだけに花びらのマークの作図は生徒達には幾分奇異なものであったかもしれない。

しかしながら，この花びらのマークの作図は生徒たちの興味と結び付いたのか，予想以上に意欲的に取り組んでくれたように思われる。

授業の予告として花びらのマークの作図を伝えた時点で，すでに数人の生徒が真剣に取り組んだが，第１時間目が終わった時点では正五角形の作図法を追求する生徒の数も少し増え，図書館にまで行って調べたものもいたという。しかし，作図法が分からず，何人かの生徒は考えることを諦めたようであった。このような流れの中で２時間目を迎えたことは，幸いであったと思われる。

この点について，助言者の先生は，対象が正五角形よりも身近な花びらであったこと，花びらという美しい対称図形であったことなどの点を指摘してうまく分析していただいたが，授業者としてはそこまで気付いてはいなかったことを素直に認めざるをえない。

授業者の思いとしては，

①できるだけ多くの要素を絡ませて総合的な問題にすること。

②幾何学的な問題のすべてが幾何学的に解決できるとはいえず，代数的な考察が役立つこともあることを知らせる。

③少し複雑な問題を考えることにより，知識が生きたものになるのではないか。

といったものがあった。

しかし，参加された先生方の意見の中には，「このような授業は私の学校ではできないが，いろいろと参考になりました。」との声もあり，授業の中味についてももう少し検討が必要であることを痛感した。

最後に，授業を見て下さった先生方，意見を下さった先生，そして，お忙しい中助言と励ましを頂いた助言者の先生にお礼を申し上げたい。〔河野　芳文〕

III．高等学校における授業実践

(1)　高等学校第１学年「二次関数」［数学Ｉ］

１．指導のねらい

平成元年に出された学習指導要領の中で数学Ｉは，

全ての生徒が履修する科目として内容を精選したものとなり，基本的な内容を具体的な事象で操作的・体験的な方法を通じて考察させ,「数学的な見方や考え方のよさについて認識を深める」(学習指導要領)ことを目標にしている。

その中の二次関数では，二次関数のグラフと二次関数の値の変化を学習させる。具体的には，グラフの特徴を調べさせたり，グラフを通じて関数の値の増減，最大値，最小値を考察させたり，ｘ軸との交点や位置関係から方程式や不等式の解を求めることを内容としている。この内容からもわかるように，二次関数の指導の中心にはグラフがあり，その特徴をよく理解させることが，重要な指導目標になるのである。特に$y=ax^2+bx+c$のグラフについて，その概形をつかむということは大切である。このことについての指導としては，$y=ax^2$のグラフを平行移動させたものの方程式を考えさせてから，一般形にもっていく方法と，実際に関数の値を求めて座標平面上に点をプロットしてグラフをつくり，いろいろなグラフを対比しながら調べていく中で特徴をつかませる方法が考えられる。今回の指導は，グラフをより身近に体験できて，具体例から帰納的にその特徴を考察できる後者の方法をとったところに特徴がある。これにより，学習者は具体的な事象の考察を通じて一般性を見いだし，それを活用していく数学的見方や考え方のよさを実感できることであろう。

このようなグラフ指導の観点から，今回の授業ではグラフの移動について,「バスケットボールのシュート」という具体的に設定された場面の中で，一般形の二次関数（$y=ax^2+bx+c$）のグラフが，係数ｂをパラメータとして動かしたときどのような動きをするかを考えさせようとした。このグラフの移動は学習者の最も苦手とする内容の一つである。それはグラフの移動という動的なことを身近に経験できていないためであり，これを具体的に視覚的に体験させることが理解を深めるためには必要である。そのための有効な教具として，コンピュータとトレーシング紙という新旧２つのものを組み合わせて授業をおこなった。これにより学習者はグラフの変化を具体的な例を操作的に体験でき，その中で観察したことがらからグラフの変化に関する特徴を見いだすことであろう。またそのような学習が，数学的な見方や考え方のよさを認識して，いろいろな事象に活用しようとする態度につながるものと考えられる。

２．指導の実際

題目　二次関数のグラフの移動

目標　１．与えられた条件を満たす二次関数を決定できるようにする。

２．与えられた二次関数の方程式の係数を変化させるとき，それに対応して変化するグラフの特徴を理解させる。

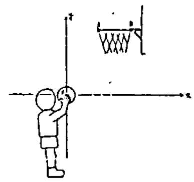
学習の流れ

関数および関数のグラフの定義を学習後，いろいろな二次関数について対応表をつくり，実際に座標平面上に点をプロットしてグラフをかかせた。さらに基本形の$y=ax^2$のグラフをトレーシング紙に写し取り，他のグラフに重ね合わせることで，係数ａが等しいグラフは同じ形の放物線になることを確認させている。この授業の中で用いるグラフとｘ軸の交点の座標を求めることは，順序としては後で学習する内容であるが，中学校の学習内容の延長としてそのまま扱った。

学習の過程

［導入］

・課題設定　バスケットボールをシュートするとき，ボールの位置を原点にして点Ａ（４，８）Ｂ（８，８）の間を通したい。ボールは$y=-x^2$と同じ放物線をえがくようシュートされるとして，どのような方程式の放物線を考えればよいか。



［展開］

・具体例での考察　放物線を$y=ax^2+bx+c$とおいて，放物線が点Ａ，Ｂを通るときの方程式を求めさせる。
点Ａを通るとき　$y=-x^2+6x$
点Ｂを通るとき　$y=-x^2+9x$
この結果から，$6\leqq b\leqq 9$が予想される。

・理由の考察　この予想を確かめる方法を考えさせる。
① 実際にｂの値を変化させたときのグラフを考え，それを観察する。
② ｂの値がグラフ上のどの部分に端的にあらわれるか考え，その部分を用いて確かめる。
などの方法が考えられる。

・グラフの観察　ｂの値が放物線とｘ軸との交点にあらわれることから，トレーシング紙に写し取っている$y=-x^2$の放物線を常に原点を通るようにして，ｘ軸との交点が６から９までを動かしてみて，本当にＡＢ間を通るか確かめる。

・新しい課題の設定　このグラフの変化をコンピュー

タで再度観察し，放物線がｂの変化に伴ってどのような動きをしているか考えさせる。(残像が残せるコンピュータのよさを利用する)

・観察の気付きの発表　放物線のように動いていることに気付かせる。特に頂点の軌跡が新しい放物線になりそうなことに注目させる。

・観察の結果の考察

放物線の対称性から頂点のｘ座標が $\frac{b}{2}$ であること，よってｙ座標は $\frac{b^2}{4}$ であることを導き，放物線の頂点が $y = x^2$ 上を動くことを確認する。

［まとめ］

ａ，ｃが固定されている二次関数でｂを動かすと，それに対応してグラフは放物線のように動くことを，頂点の座標をｂであらわして確かめたことを再確認する。

３．指導の反省と課題

今回の授業では，身近な課題の中に数学の世界を設定し，具体例から得た結果を帰納的に一般化したものを，操作的な活動を通じて解決をはかることができることのよさを感じられるように努めた。

実際の授業では，まず課題の発問「どのような方程式の放物線を考えればよいか。」に，どう答えてよいのかとまどった学習者もおり，改めて自らが進んで取り組もうとする課題設定の難しさを痛感した。展開の中の操作的な活動については，多くの学習者が積極的に取り組み，観察の気付きもスムースに発表されたのは，教具の利用とあわせて評価できるだろう。特に，取り扱いが簡便なトレーシング紙と，準備にいささかの労力はかかるが動的な問題には大きな効果を発揮するコンピュータの組み合わせを，場面によって使い分けることにより相乗効果が得られることと確信した。ただ，時間配分のまずさから後半を学習者主体ですすめることが十分にできなかったのは，大いに反省すべき点である。また学習者から「これで確かめたことになるのか」という質問も出され，操作的な活動だけではなく代数的に論理的に押さえる必要を感じたとともに，またその点が数学的見方・考え方のよさを感じさせられる指導のよい機会になることを確認した。

今後の課題として，学習者のつまずきになる教材を通じて，数学的見方・考え方のよさを認識させるための効果的な教具の使用法のさらなる研究と，ともすれば単純に具体例だけで終わりそうな内容をいかにふかめるか，その際にどう数学的見方・考え方のよさを感じさせるかという指導法の研究に取り組みたい。

〔富永　和宏〕

参考文献

文部省　『高等学校学習指導要領解説』
ぎょうせい　1988

(2) 高等学校第２学年「三角関数の応用」数学II

１．指導のねらい

今回の指導要領の改訂により「三角関数」は数学IIの指導内容となっているが，内容自体は従前の基礎解析における内容と大きく変わってはいない。他科目との関係を見てみると，数学Ｂ「複素数と複素数平面」数学Ｃ「いろいろな曲線」など，三角関数の応用場面が増え，その有用性を理解させやすくなっているが，逆に，三角関数の理解が不十分であれば，これらの内容の理解も不十分になる可能性は大きくなったと言えよう。

従来,「三角関数」の指導においては，ともすれば次々に出てくる公式の習得に多くの時間をさき，円運動と密接に関係した関数という側面を指導しきれていなかった。その反省から，今回は，単元の初めから円運動との関係を注意させながら指導をした。そして，三角関数の基本的な性質を指導した後，「三角関数の応用」としてサイクロイドを題材として取り上げることにした。これは次の理由からである。

・サイクロイドは円運動の結果できる曲線である。したがって，三角関数の基本的な性質を使えば比較的容易にその式を求められ，三角関数の有用性を理解させることができる。

・サイクロイドには，等時曲線あるいは最速降下線の別名もあり，これらの性質をコンピュータを活用してシミュレーションすれば曲線自体にも興味をいだかせることができる。

ただし，サイクロイドを取り上げるために，数学IIでは扱わない「弧度法」を事前に指導する必要があった。弧度法については，角についての理解を深めるという立場で１時間指導をした。

２．指導の実際

前述のように，前時までに，三角関数の基本的性質および弧度法については学習している。ただし，弧度法については，まだ理解が十分とは言えなかったのでまず，弧度法について簡単に復習することから授業を始めた。特に，弧度法の定義から，ｒ を円の半径，ｌ を弧の長さ，θ を角の大きさとするとき，

$$l = r\theta$$

なる関係が成り立つことには注意を向けさせた。

次に，中心が原点で半径がｒの円上の任意の点の座

標が

$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

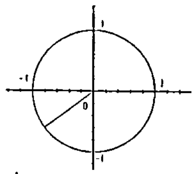
と表されることを確認し，$r=1$ の場合についてコンピュータ（使用ソフト：ＩＢＭ　関数ラボ）に式入力をし，θ を変えることによって実際にコンピュータ画面上に円を描かせた。生徒は θ が次々と変化することによって表われる点の位置を確認することによって，弧度法についての理解をも深めることできた。

中心が点（ａ，ｂ）で半径がｒの円上の任意の点の座標は

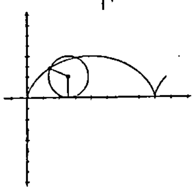
$(a+r\cos\theta,\ b+r\sin\theta)$

と表されることを押さえた後，サイクロイドの定義を述べ，曲線の概形を生徒に予想させた。ほとんどの生徒が，サイクロイドに近い形を答えた。そこで，実際に曲線をコンピュータに描かせるために，半径が1 の場合のサイクロイドの式を求めさせた。生徒はどこから式を求めたらよいか，考えあぐねている様子であったので次の２つの視点を与えた。

・中心が原点で半径が１の円上で，$-\pi/2$の位置から負の向きに θ 動いた点の座標はどのように表されるか。
・中心が（０，１）で半径１の円が θ 回転したとき，円の中心の座標はどのように表されるか。



点Ｐの座標は
$(\cos(-\pi/2-\theta),$
$\sin(-\pi/2-\theta))$



中心の座標は
$(\theta,\ 1)$

このようにして，生徒は比較的容易に，中心が（０，１）で半径が１の円が θ 回転したときできるサイクロイド上の点の座標を

$(\theta-\sin\theta,\ 1-\cos\theta)$

と表すことができた。

コンピュータに式入力をし，コンピュータ画面上にサイクロイドを描かせた。生徒は，自分たちが予想したものに近い曲線が現れたことに少し満足したようであった。

描かれたサイクロイドともとの円を重ねて，ｘ軸とサイクロイドが囲む部分の面積と円の面積を比較させると，生徒はもとの円をいろいろ移動させて，「３倍であろう」と結論を出した。昔，ガリレオがサイクロイドと円を紙に描き，切り取って重さを比較し「サイクロイドが囲む部分の面積は円の面積の３倍だろう」と判断したことを話すと，生徒から感心する声が上がった。

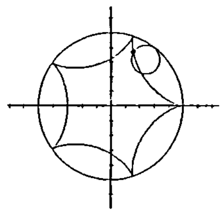
さらに，「サイクロイドを下向きに置いたとき，曲線上の点がサイクロイドにそってすべり落ちるとすると最下点まで到達する時間は点の位置に関係しない。このことから，サイクロイドは等時曲線とも呼ばれている。」ことを説明し，コンピュータでシミュレーションをした。２つの点が曲線上のどこからすべり落ちても必ず最下点で出会うのを確認すると，生徒は大きな感嘆の声を上げた。

３．指導の反省と課題

サイクロイドの式を求めるのに，前述のようにすると θ の大きさによって場合分けする必要がなくなり求めやすくなる。また，同様の方法で次のような内サイクロイドの式も比較的容易に求めることができる。

内サイクロイド

Ｒ＞ｒで，半径Ｒの円に半径ｒの円が内接してすべらずに回転するとき，内円の円周上に固定された点の描く図形



内円の中心と原点を結ぶ線分がｘ軸の正の向きとのなす角を θ とすると，内サイクロイド上の点の座標は

$$((R-r)\cos\theta+r\cos((R-r)/r)\theta,$$
$$(R-r)\sin\theta-r\sin((R-r)/r)\theta)$$

コンピュータに式入力をし，Ｒとｒを適当に選んでコンピュータ画面上に曲線を描かせるとかなり複雑な曲線まで描くことができる。そのような複雑な曲線の式まで三角関数を用いて簡単に表すことができることは，生徒に三角関数の有用性を理解させるとともに，数学に興味を持たせることにもつながるであろう。今回は時間の制約によりここまではできなかったが，生徒の反応などから，今回の授業においても「指導のねらい」をある程度達成できたものと考えている。

反省としては次の２点を挙げておきたい。

第１点は取り上げた内容が数学IIの内容を大きく踏み出してしまったことである。サイクロイドは，内容としては数学IIIまたは数学Ｃで扱われるべきものである。今回の実践は発展学習的なものと考え，数学IIの

内容としてより適当なものを考えて行きたい。

第2点はコンピュータの活用方法である。コンピュータの活用により生徒に興味を持たせることはできたが，結果を表示するに止まってしまった。より有効な活用方法を考えて行きたい。〔長尾　篤志〕

IV. おわりに

筆者は，数学のよさを捉える枠組みとして「よさの対象＝何によさがあるか」と「よさの視点＝どんな点によさがあるか」という2つの大きな視座を設け，さらに各々について，次の諸点を提起している。

よさの対象
- ○数学の内容
- ○数学の表現
- ○数学の思考

↓　↑

よさの視点
- ①有用性・実用性――役に立つ
- ②簡潔性・明瞭性――わかりやすい
- ③一般性・効率性――らくである
- ④発展性・創造性――ひろがる，ふかまる
- ⑤論理性・正確性――たしかである
- ⑥優美性・審美性――美しい

この枠組みにおける「よさの視点」に着目して，本稿の授業において，生徒たちに認識させたい主要な数学のよさを整理すると，次のようになっている。

〈中学校1年：三角形の面積を二等分する直線〉

課題を具体化したことから①有用性・実用性，シミュレーションからの一般化で③一般性・効率性。

〈中学校2年：相似な図形　－図形の重心－〉

課題を具体化したことから①有用性・実用性，相似を使った論証により⑤論理性・正確性。

〈中学校3年：三平方の定理－花びらのマーク－〉

課題の具体化や図形問題に代数を活用することによる①有用性・実用性，きちんとした論証により⑤論理性・正確性，作る形の美しさから⑥優美性・審美性。

〈高等学校1年：二次関数のグラフの移動〉

課題を具体化したことから①有用性・実用性，具体例からの一般化による③一般性・効率性。

〈高等学校2年：三角関数の応用－サイクロイド－〉

課題を具体化したことから①有用性・実用性，シミュレーションからの一般化で③一般性・効率性，できる形の美しさから⑥優美性・審美性。

上記のようなよさを認識させるために，授業において工夫した点は，次の諸点である。

a．課題を具体化すること。

b．「予想⇨確かめ」の授業過程とすること。

c．コンピュータによるシミュレーションを活用すること。

d．具体的操作活動を活用すること。

aによって，課題への興味・関心が高められるとともに有用性・実用性というよさが認識できるようになる。また，bによって一般性・効率性や論理性・正確性などのよさが認識できるようになる。また，cやdはbを可能とするための手だてである。本稿の授業実践を通して，よさを認識させる授業においてはこうした工夫が有効であることが示された。〔中原　忠男〕