広島大学教育学部　学部附属共同研究体制研究紀要
〈第23号　1995．3〉

数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業の研究

――― 中学校・高等学校における授業の実践 ―――

中原　忠男　小山　正孝　山口　武志
平岡　賢治　河野　芳文　井ノ迫泰弘
宇佐川信行　砂原　徹　酒井　秀二
長尾　篤志　仲渡　雅史　富永　和宏

Ⅰ．はじめに

本稿は，本研究テーマに関わる共同研究の第６報に当たるものであり，中学校及び高等学校の数学科の主として幾何領域の内容に関わる数学的な見方や考え方に焦点を当てて，生徒にそれらのよさを認識させる授業を実践したものである。以下においては，中学校第１，２，３学年と高等学校の数学Ⅰ，数学Ａ，数学Ⅱの授業実践のそれぞれについて，指導のねらい，指導の実際及び指導の反省と課題を述べることにする。

Ⅱ．中学校における授業実践

（１）中学校第１学年「図形の移動」

１．指導のねらい

中学校で扱う平面図形の内容は，中学１年で基本的な作図と移動，中学２年で三角形や四角形の基本的な性質，中学３年で円の性質や三平方の定理などである。特に中学１年で扱う図形の移動は扱いにくい教材の１つとして，また他の学年で扱われないものの１つとして定着していた。しかし，高等学校の学習指導要領が平成６（1994）年度から大幅に改訂され，平面幾何を数学Ａの選択内容として扱うことになった。学習内容は平面図形の性質と平面上の変換とであり，特に，平面上の変換では図形の性質を変換の観点から見直すことを目標としている。本稿では，中・高一貫教育の立場から中学１年の図形指導を位置づけたい。

中学１年では，小学校で操作活動を取り入れた図形指導から中学２・３年での論証幾何へ橋渡しの基礎を養い，また図形の移動の具体的な教材を通して指導し，変換の考え方の基礎を養うことにある。そこで，次の３点

①折り紙を通して紙を折るという操作を図形の性質と関連づけることができるようにすること。
②定規とコンパスのはたらきを理解させること。
③２つの合同な図形を平行移動・回転移動・対称移動によって重ね合わせることができるようにすること。

を指導目標として指導計画をたてた。

①の操作活動としての折り紙は，線分（直線）は両端の２点を決めることによりただ１つ決まること，線分上の１点を中心に線分を折り重ねることによりその点を通る垂線を折ることができること，さらにこの応用として折鶴は角の二等分線を繰り返し利用して折っていることなどに実際に紙を折る操作を通して気づかせることを授業のねらいとした。

②の定規とコンパスのはたらきは，定規が直線を引き，コンパスが等距離をはかることに気づかせ，また折り紙の操作で点や線分が折り重ねて一致することはそれぞれ等距離の位置にあることに気づかせ，定規やコンパスでいろいろな作図ができることを授業のねらいとした。

③の移動による合同な図形の重ね合わせは，２つの点，直線や合同な三角形などを移動によって重ね合わせる方法を考えさせることを通して平行移動の向きや長さ，回転移動の中心と角の大きさ，対称移動の軸などに視点を当てることができるようになることを授業のねらいとした。

特に，図形の移動の指導では変換の考え方を積極的に取り入れることを念頭におき，移動によって重なり

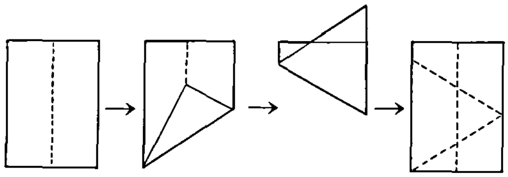
Tadao Nakahara, Masataka Koyama, Takeshi Yamaguchi, Kenji Hiraoka, Yoshifumi Kono, Yasuhiro Inosako, Nobuyuki Usagawa, Toru Sunahara, Syuji Sakai, Atsushi Nagao, Masafumi Nakato & Kazuhiro Tominaga: A Study on Teaching for Appreciation of Mathematical Thinking and Ideas; Teaching Practice for Appreciation of Mathematical Thinking and Ideas on the Contents of Junior and Senior High School Mathematics.

合う点（特に図形の頂点など）に着目できるようにすることを目標においた。この中で，回転移動の中心や対称移動の軸を対応する点から等距離にあることを利用して求めることができるようにし，対称移動で移る図形は図形の向きが逆であることなどに気づかせ，その判断ができるようにM.C. エッシャーの絵を教材に扱いながら授業を展開した。

2．指導の実際

1）操作活動と作図

Ｂ４の用紙を使って正三角形を折ることを通して，正三角形の性質について復習したり，紙を折る操作の図形的性質との関連を考えさせることにより，コンパスと定規による作図への展開を意識させる。



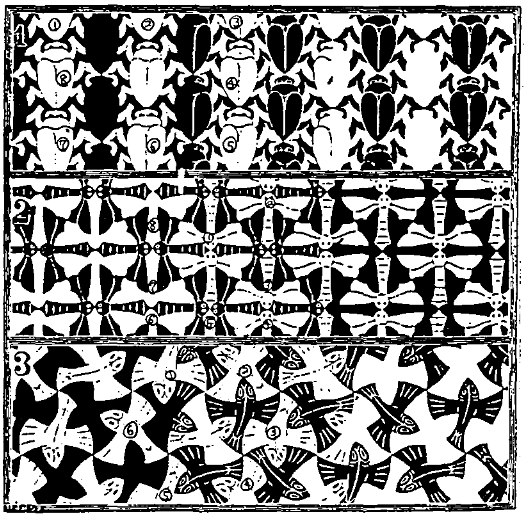
応用として折鶴の折り方は三角形の角二等分線を利用していることに気づかせ，上記の方法で切り取った正三角形から折鶴を折ることができることに気づかせ，これを折ることができるようにさせる。定期テストでＢ４の用紙から正三角形を切り取り，それを使って折鶴を折る問題を出題し全員の生徒ができていたことは生徒の興味・関心が非常に高かったことを示したと思われる。

2）作図指導

角の二等分線・線分の垂直二等分線・直線への垂線・平行線などの作図を折り紙の操作活動と関連させながら指導する。その応用として，三角形の内心（３つの角二等分線の交点が１点で交わる）・外心（３辺の垂直二等分線の交点が１点で交わる）・垂心（頂点から対辺に引いた垂線が１点で交わる）・重心（頂点と対辺の中点を結ぶ線分が1点で交わる）・傍心（三角形の外角の二等分線の交点は三角形の辺またはその延長線と接する円の中心になる）などを実際に作図させ，三角形の特徴を作図を利用して理解させる。これらの理由については，中学２年で指導する内容なので深入りしないようにし，経験的に気づかせる範囲にとどめることが大切である。特に，九点円の作図を授業で扱った。これは，作図の正確さはもちろんであるが，中点や垂線の間にある意外な相互関係に気づいて欲しいという願いをこめて指導した。

3）図形の移動

合同な２つの図形は平行移動・回転移動・対称移動で重ね合わせることができることに気づかせ，これらの３つの移動の基本的性質を格子点や座標軸を使って理解させる。特に，対称移動によって移りあう図形の特徴は向きが逆であることを具体的な例を通して理解させる。このような平行移動・回転移動・対称移動の基本的性質を指導した後，次に示したエッシャーの絵*を教材として扱い，番号をつけた図形に重ね合わせる具体的な移動の方法を考えさせた。



ここで，平行移動は移動の向きと長さ，回転移動は回転の中心と回転角の大きさ，対称移動は対称軸の位置を具体的に求めることを通して説明させる授業を展開した。移動によって重なり合う対応する点に着目し，それらを結ぶ線分が平行か平行でないか，またそれらの線分の垂直二等分線が１点で交わるかどうかに視点をおきながら，移動の方法を求めることができるようにすることをエッシャーの図を利用して移動の方法を作図を使って具体的に求めさせた。

3．指導の反省と課題

折り紙という操作活動を通して作図指導や日本古来の折鶴を数学的な観点から考察し，角二等分線の交点である内心を利用した折り紙であることを認識させ，その応用として三角形で鶴を折ることを経験させた。

作図指導では折り紙を通じて基本的な作図方法とその理由を説明できるようにし，さらに平行線についても同様のことを授業で展開した。平行線の指導では折り紙から平行四辺形や台形などの図形の特徴を利用することによっていろいろな作図方法を考えることができ，生徒に数学的な考え方の多様さを知らせる一つの

例になった。

図形の移動ではエッシャーの図を授業で取り上げたが，平面における繰り返し紋様で図形の移動を具体的に使って美しい絵ができあがっていることに目を輝かせる生徒が多く，生徒に与えるインパクトもかなり強かったようである。

中学１年という何事にも興味を示す段階で疑問をもたせること，求める方法とその理由を説明させることは，数学的な見方や考え方をしっかりさせ，論証幾何への基盤作りになると思われる。今回はコンピュータを活用しなかったが，今後コンピュータの利用を積極的に行うことも大切である。

参考文献

*M.C. エッシャー／坂根厳夫訳，『無限を求めて』
朝日選書502，1994.

〔平岡　賢治〕

（2）中学校第２学年「四角形の重心」

１．指導のねらい

中学校における図形教材の扱いでの目標は，大体次のようになっている。

中学１年では，平面図形や空間図形についての操作や実験を通して，図形に対する直観的な見方や考え方を育てるとともに，論理的に考察する基礎を培うことを目標とする。

このような学習をふまえて，中学２年では，図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法を理解させ，推論の過程を的確に表現する能力を養うことを目標とした扱いがなされる。

教科書では，平行線と線分の比の性質の応用として，三角形の重心を扱う。ここでは，重心の物理的解釈に沿って，四角形の重心の位置を特定する方法について考えさせることを試みる。

生徒たちは，証明の意義・意味について学んだあと数学的な推論に基づいて三角形や四角形の性質，および図形の相似，平行線と線分の比等について学習し，その応用として，三角形の重心について学ぶ。

中学校２年における重心の扱いでは，物理的な意味を捨象して，三角形の３本の中線が１点で交わることを示し，その交点をこの三角形の重心と定義する。そして，その点をコンパスの針の先端で支えるとつり合うことを示し，この点に三角形の重さが集中していると考えられるから，重さの中心，すなわち重心とよぶのだと説明する。

しかし，重心については，次のような解釈が可能である。１つは，重さのない三角形の各頂点に等しい質量のおもりをおいたときの質量の中心であり，もう１つは，三角形が均一な材質でできているときの質量の中心である。困ったことに，三角形においては，両者は一致するが，四角形では双方の重さの中心が異なってしまう。

いずれの考えを選ぶかについては異論もあり得るであろうが，三角形から四角形への一般化，あるいは多角形への一般化が自然であること，および物理現象などとの関連を考えて，後者の考えにしたがうことにした。

ここでの扱いは，一様な材質でできた四角形を２つの三角形に分ければ，それぞれの三角形の重心が求められること，およびその重心には面積に比例した重さがかかると解釈できることから，つり合いの考えにより，四角形の重心を決定できるとの考えに基づくものである。

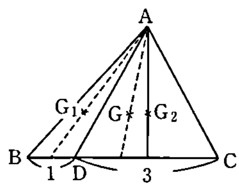
このような流れをふまえた展開により，生徒自身に四角形の重心，さらにはより一般な多角形の重心を決定する方法を発見させることができればと考える。

２．指導の実際

前時までに，相似な図形，三角形の相似条件，平行線と線分の比，中点連結定理の学習を終え，その応用としての三角形の重心，およびその物理的意味について学んでいる。

すなわち，三角形の重心とは，均一な材質でできた三角形の重さが集中していると考えられる点であり，三角形の３中線の交点がそのような点となっていることを確認している。

本時の導入においてもこれらの事柄をまず復習し，本時では四角形の重心について考える旨を伝えた。



しかし，いきなり四角形について考察するのは困難であるため，右の図のような△ＡＢＣをチェバ線ＡＤにより，面積比１：３の△ＡＢＤ，△ＡＤＣに分け，△ＡＢＤ，△ＡＤＣ，△ＡＢＣの重心間の関係に着目させることにした。

その中で，生徒は３点G_1，G_2，Ｇが一直線上に並ぶことに気付き，さらにまた何人かが，その理由をG_1，G_2，Ｇがいずれも頂点Ａを通る中線を２：１の比に分けること，および平行線と線分の比の定理に基づくものとして押さえていた。

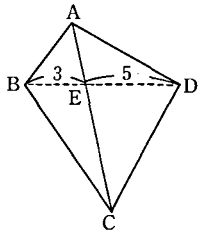
$G_1G：GG_2＝３：１$についてもその結果に気付く者はいたが，その理由をＢＤ：ＤＣ＝１：３であるからとして，面積と質量の比例関係や，小学校で学んだ“つり合い”の考え方に気付いた者は少なかった。

しかし一度“つり合い”の考えに気付くと，点G_2に

かかる重さは点G_1にかかる重さの３倍であり，したがって，つり合いのモーメントの計算から，G_1G：GG_2＝３：１となることを納得する声が多く聞かれた。

このような準備的考察を終えて，いよいよ四角形の重心について考えることになる。

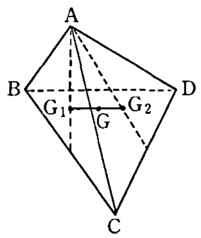
いきなり四角形をみせて，四角形の重心をどのようにして求めればよいか考えさせるのも面白いと思われるが，仮りに四角形を２つの三角形に分けて考えるにしても２通りの分け方があり，双方の重心の決め方が一致するかどうかの疑問が残る。いずれの方法で重心を決めても結果は一致するが，それを本時で触れるには時間が足りない。



このような判断から，今回は，四角形ＡＢＣＤを２つの三角形ＡＢＣ，ＡＣＤに分け，しかも　△ＡＢＣ：△ＡＣＤ＝３：５となる場合について，四角形ＡＢＣＤの重心をどのように決めればよいか，考えさせることにした。

半数に近い生徒は，△ＡＢＣの重心G_1，△ＡＣＤの重心G_2を求めたのち，

△ＡＢＣ：△ＡＣＤ＝３：５



に基づいて，線分G_1G_2を５：３の比に内分する点Ｇを求め，これを重心としたが，ＢＣ：ＣＤの比（三角形の場合のＢＤ：ＤＣ）にこだわり，Ｇを決定できない者も見られた。

この後，実際にアイスピックで点Ｇを支えてみせたところ，四角形ＡＢＣＤは水平につり合い，納得する声や感心する声が聞かれた。

授業後，五角形の重心はどのようになるかを質問する者が出たり，互いに議論し合う姿も見られたため，次の授業でそれらについて扱い，凸ｎ多角形の重心の求め方という形でまとめを行った。

３．指導の反省と課題

今回の授業では，一般化することによってその本質が明確に把握できることのよさ，既知の結果が利用できる特殊なケースを扱うことによって一般化の可能性を見いだし得るよさを考慮した。

授業としては，予定した方向に流れたのであるが，生徒全員が納得しながら進んだ授業と言えるものではなかったと思われる。

その意味では，助言者である大学の先生が指摘されたとおり，中２の教材としてはやや難しかったのではないかと思われる。

また，四角形の重心の決定に関する扱いでも，はじめから２つの三角形に分けておくのではなく，生徒自身に考えさせ，いろいろな意見・方法を引き出した方が良かったかもしれない。

この点も助言者の先生から指摘された点であり，自分自身にもその思いがあったことから，機会があればそのような扱いも試みたいと思っている。

〔河野　芳文〕

（３）中学校第３学年「円周率πの計算」

１．指導のねらい

昨年の本紀要で，新しい数学教育では，コンピュータの利用などによって『学習者に数学を探求させ，数学を発見させる』ことが期待されてきており，つくられた数学を伝達する授業から，数学をつくっていく授業を求めていくことが期待されていること，そして，このような方法は，「数学教育の目標」に沿って，「数学的な見方・考え方」を認識させるという今日の課題に答えようとするとき，これまでの授業の手法よりは明らかに効果的な方法であると述べた。

ところで，『学習者に数学を探求させ，数学を発見させる』ためには，理論だけでなく，生徒が実際に作業などで理論を確かめる場面をなるべく多く取り入れることが必要で，この意味で電卓利用も一方法である。理由は，筆算よりも手軽に計算でき，結果が詳しい値まで求められるので，数学的な考え方のよさを強調できるからである。

ここでは，このような意味での電卓を利用した授業の展開例を提示する。具体的には，無理数の概念や三平方の定理を学習した段階で，課題学習として電卓を使って円周率πの値を求めさせ，この考え方のよさを理解させるものである。

また可能であれば，電卓による手作業で計算を十分にさせた後，簡単な内容で繰り返しのプログラムを理解させ，コンピュータでの処理も実施すると，さらにそこで利用されている数学的な考え方や処理方法のよさを強調することができる。強調したいことは，コンピュータで実行する前に，処理の１つ１つを理解させ確認させる意味でも，電卓による計算が効果的であることである。具体的な指導目標は，次のことである。

(1)　正ｎ角形の周の長さを考えると，円周率πの値を求めることができることを理解させる。

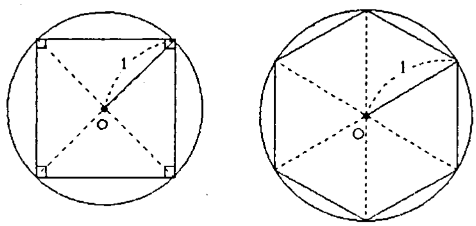
(2)　電卓で実際に(1)の計算をして，この計算方法への理解を深めさせ，このアルゴリズムの考えのよさを理解させる。

2．指導の実際

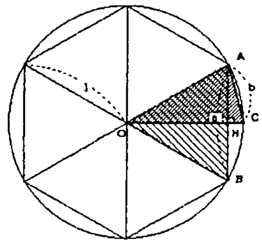
・正多角形の周長の半分を計算してπの近似値にできることを確認し，その計算方法を次のように考える。

(1) 半径が1の円に内接する正n角形のうち，周の長さを求めることができるものとして，正方形と正6角形があることを確認し，それぞれ周の長さの半分(以下ℓとかく)を求めてみる。(以下正6角形)

・正方形のとき，$\ell = 2\sqrt{2}$　・正6角形のとき，$\ell = 3$



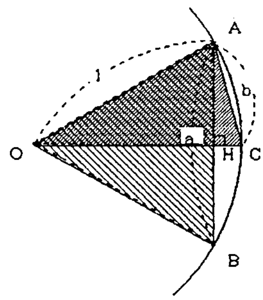
(2) 右の図のように，正6角形から正12角形をつくり，正12角形の1辺の長さを，次のようにして求める。



①AH，CHの長さを求める。

②①からACの長さを求める。

③正12角形の半周長を計算する。



(3) さらに，正12角形から正24角形をつくり，正24角形の1辺の長さを求めることができることを，次のようにして考える。

①正12角形から正24角形をつくって正24角形の1辺の長さを求める図は，正6角形から正12角形をつくってその1辺の長さを求める図と同じである。

②したがって，AB＝a，AC＝bとしてbをaを用いて表すようにする。それには，AH，OH，CHの長さを求め，△ACHに三平方の定理をあてはめて，$b = \sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$ となる。

③正24角形の周の長さの半分を計算する。

(4) 正48角形,正96角形，・・・についても同様に考える。

・上記(3)，(4)の電卓による計算と並行しながら，以下のように計算の手順を確認し，まとめる。

1) 半径が1の円に内接する正多角形について，

①周の長さが計算できる正多角形を考え，その1辺の長さをaとする。

②その周の長さの半分を計算し，πの近似値とする。

③1辺がaである正n角形から正2n角形をつくり，その1辺の長さbを求めると，
$b = \sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$ となる。

④辺の数を2倍し，以下，bの値をaとして②にもどって計算する。

2) 電卓によって正6角形から始め，右の表を完成してπの値を求める。

k	正n角形	正n角形の周の長さの半分
1	6	
2	12	
9	1536	
10	3072	

3) 手順を右のようにまとめる。

$\boxed{a = 1}$

$\boxed{n = 6}$

$\boxed{\ell = a * (n/2)}$ (近似値) ❶

$\boxed{b = \sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}}$

辺の数nを2倍する

bの値をaの値とする

❶にかえて計算をする

・この計算のように，繰り返し同じ計算をする場合は計算の手順をまとめ手際よく計算することなど，本時の学習内容についてまとめ，確認する。

3．指導の反省と課題

ここでの計算は，

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$，$\ell_n = 6 \times 2^{n-1}$

で，円周率πの計算をさせ，アルゴリズムの考えのよさを理解させようとするものである。アルゴリズムの考えを指導する場合は，簡単な計算だけできる電卓の方が適している。それに，ちょっとメモリーを利用できればよい。このことは，後でコンピュータでのプログラムによる処理を意図している場合も好都合である。

最近は電卓も性能が向上して，簡単にグラフ表示ができるものがある。この機能を利用した授業の展開例も提示したいと考えている。

(資料) πの近似値を電卓で求めた結果

【電卓の使い方】

[最　初] 4 − aの値 x^y 2 ＝ √ ± ＋ 2 ＝ √ MIN × 6 ＝

[次から] 4 − MR x^y 2 ＝ √ ± ＋ 2 ＝ √ MIN × 何角形か ÷ 2 ＝

・正6角形から始める

正多角形	正多角形の周の長さの半分
6	3
12	3.105828541
24	3.132628613
48	3.139350204
96	3.141031954
192	3.141452476
384	3.141557661
768	3.141584005
1536	3.141595128
3072	3.141595035

・正4角形から始める

正多角形	正多角形の周の長さの半分
4	
8	3.061467459
16	3.121445152
32	3.136548481
64	3.140331212
128	3.141277518
256	3.141514823
512	3.141580014
1024	3.141611305
2048	3.141694747

（電卓は CASIO fx 991N を利用した）

〔井ノ迫　泰弘〕

Ⅲ．高等学校における授業実践

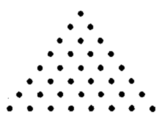
（1）高等学校第1学年「自然数の列」[数学Ⅰ]

1．指導のねらい

数学Ⅰにおける「自然数の列」は「個数の処理」の学習の一分野として扱われる。したがって，数学Aにおける「数列」の扱いとは自ずから観点が異なる。

すなわち，「自然数の列」は，ものの個数や場合の数を数え上げる場合，1つ1つ数えていくのではなく，その個数を求める際に現れる「数の列」を利用して，その個数を求めようとするものである。

たとえば，右の図の・の個数を求める場合，次の2つの観点が考えられる。



[1] 上から1，2，3，4，・・・・・と並んでいるという規則を発見し，
数の列1，2，3，4，・・・・・に着目し，初めから7番目までの和を求める。

[2] 1段　2段　3段　4段

1個　3個　6個　10個　・・・・・

という数列1，3，6，10，・・・・・に着目してその規則を発見し，7番目の数を求める。

このように，1つのものの個数を数え上げる際にも，観点によって，

1，2，3，4，・・・・・

1，3，6，10，・・・・・

という2つの数の列が現れることになる。このような「数の列」を利用してものの個数を求めようとするのが数学Ⅰにおける「自然数の列」の学習の態度である。

「規則を見つけ，それに従って数え上げる」際に，規則に則った「数の列」を利用することは「数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる」に沿った指導になろう。(「学習指導要領の展開」より抜粋)

以上のねらいのもとに，「自然数の列」の学習の導入部分について授業を実践した。

2．指導の実際

題目　自然数の列

目標　1．ものの個数を求めるに当たって，その中に潜む「数の列」を発見させる。

2．発見された「数の列」を利用することによって，課題の個数を求めさせる。

学習の流れ　「自然数の列」の学習の第1時限・第2時限において，三角数の学習をした。その際，三角数に潜む「数の列」として，

1，2，3，4，・・・・・

を扱い，

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

であることを学習している。

なお，その際に現れる

数の列1，3，6，10，・・・・・

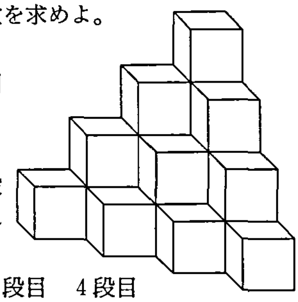
については，保留している。

本時は，その第3時限目である。

学習の過程

[課題設定]

右のように，立方体を4段に積んだ立体がある。このときの，立方体の個数を求めよ。また，10段に積んだときの立方体の個数を求めよ。



[展開]

1．4段に積んだときの個数はいくらか。

・自由に考えさせる。

・1段目，2段目，3段目，4段目のそれぞれの個数に着目させる。

1段目　2段目　3段目　4段目

$1 \quad + \quad 3 \quad + \quad 6 \quad + \quad 10 \quad = \quad 20$

2．10段に積んだときの個数はいくらか。

・4段目の個数10について考えよう。

10はどのような規則で求められる数か。

$1+2+3+4=10$

1段目　1

2段目　$1+2=3$

3段目　$1+2+3=6$

4段目　$1+2+3+4=10$

・・・・・・・・・・

10段目　$1+2+3+\cdots\cdots+10$

$= \dfrac{10\times 11}{2} = 55$

・数の列　1，2，3，4，……，10

がでさていることに着目させる。

・10段に積んだときの個数は

$1+3+6+10+\cdots\cdots+55$

$= \dfrac{1\cdot 2}{2}+\dfrac{2\cdot 3}{2}+\dfrac{3\cdot 4}{2}+\dfrac{4\cdot 5}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{10\cdot 11}{2}$

$=1+3+6+10+15+21+28+36+45+55=220$

として求められる。

［まとめ］

・本時は，数の列1，2，3，4，……を利用して10段のときの個数を求めた。

・数の列1，3，6，10，……に着目して，10段に積んだときの個数は

1段目　2段目　3段目　4段目　　10段目

1　＋　3　＋　6　＋　10　＋…＋　T

を計算すればよいこと，さらに，

1段，2段，3段，4段，……

1，　4，　10，　20，　……

という数の列に着目して，その10番目の数を求めてもよいことを確認する。

これらの数の列については，数学A「数列」で学習することを告げる。

3．指導の反省と課題

本実践では，ねらいを「ものの個数を数える際，その中に潜む数の列を利用して，効率よく数える」ことに絞った。このような扱いを通して，「数学的な見方・考え方のよさ」を感じとらせ，また，数学Aの「数列」の学習への動機・興味付けをはかり，その学習への素地を養おうとした。このことは，数学Iの「自然数の列」の趣旨でもある。本実践において，

1，2，3，4，……　①

1，3，6，10，……　②

1，4，10，20，……　③

の3つの数の列が現れるが，利用した数の列は①のみであり，②の第n項までの和を求めることや③の一般項を求めることなどの扱いは保留した。(②の第10項までの和は直接加えていく扱いをした。)

このような扱いも，上記のねらいによるものである。

一方，各学校の現場では，数学Iの「自然数の列」と数学Aの「数列」は時期的にも近い展開が予想される。両者はそれぞれ独自のねらいをもって展開されるわけであるが，「自然数の列」もより深く追求しようとすればすぐ「数列」の扱いになる。現場では「自然数の列」の扱いの切り上げ方が微妙となってくる。

数学の配当時間が減少していく現況において，「自然数の列」と「数列」の関連は，より効率的な展開の面から大きな課題となろう。

このような課題を含めて，「自然数の列」の趣旨を生かした教材の開発，授業実践を追求してみたい。

〔宇佐川　信行〕

（2）高等学校第1学年「数列」［数学A］

1．指導のねらい

この授業では，「ハノイの塔」という具体的に設定した場面にみられる数列を構成する規則を見つけて，その漸化式を作らせ，さらに一般項を考えさせようとした。

平成6年度第1学年から学年進行によって実施されている高等学校学習指導要領では，必修科目の数学Iで新しく個数の処理が指導されることになり，その中では数えあげの原則，自然数の列などをとりあげることになっている。これらの項目は，数学Aでは数列を学習するが，それに先行して扱われるのが望ましいものと思われる。逆に数学Aで数列を指導する立場からいえば，数列の用語や公式などこそ学習していないのであるが，実質的には，数列を構成する規則をどう見つけだすかなどはかなりの部分を既習であると考えてもよいことになる。だが，数学Iと数学Aの間に境界を設けるよりも，有機的な結びつきをもたせることができればさらに望ましいであろう。

そもそもなぜ，個数の処理が必修科目である数学Iの内容とされたかを考えておかねばならない。コンピュータが発達した現代においては離散数学が重要となってきたこと，またそれは社会生活においても多くの具体的な事例をもち活用されることなどが主な理由として考えられる。そして，規則性を見つけて数えあげをすることなどによって，数学的な見方や考え方を養い，数理的な処理や問題解決の能力を伸ばすことができるとともに，数学的な見方や考え方のよさが認識できるという教材としてのよさもある。

数学Iの指導ではもちろんのこと，数学Aにおいても，これらのことには配慮した学習指導がされなければならない。特に，数学Aという立場でいえば，数学Iで学習したことをより数学的な表現を用いて，数学としての発展性をもたせるようにすることが求められる。

本稿でとりあげたこの授業にいたるまでに，数学Iとして，三角数と四角数，平面や空間の分割，階段を上がる方法の総数など，いろいろな自然数の列を学習

してきた。それらの学習の中で一貫して強調してきたことは，数学的な考え方の中でも，場面を単純にしてより簡単な場合から順次考え，単純な場合から複雑な場合へと変化していくとき何がどのように変化するのかを調べて結論を得ようとする帰納的な考え方である。具体的にいえば，１，２，３，……の場合を順に調べ，$n-1$，n，$n+1$などの場合の前後の関係を調べ，その規則性を調べようとする方法である。そのとき，帰納的な考え方を表現するのに便利であるのが，数列の漸化式である。したがって，以下でその概要を述べているように，この授業においても，まず円盤の枚数が少ない場合の回数について考え，円盤を１枚増やすとどういう規則で回数が増えるかを考えて漸化式を作り，一般項についての考察もするという展開とした。ただし，授業進度の関係上，漸化式から一般項を数学的に正式な方法で求めることは無理があり，扱うことはできなかった。

２．指導の実際

［導入］

・「ハノイの塔」場面設定

３本の柱があり，そのうちの１本に64枚の大きさの異なる穴のあいた円盤が，上にいくにしたがって小さくなるようにさされている。この円盤を次のルールにし違って動かし，64枚すべてが別の柱に移されるまでには何回の移動が必要であるか。

1)１回の移動で円盤は１枚だけ動かす。

2)小さい円盤の上に大きい円盤はおけない。

3)柱以外の場所に円盤をおいてはいけない。

・64枚すべてが移動されたとき，世界の終わりがくると言われたことなども紹介し，どれくらいの時間がかかるかも予想させる。

［展開］

・円盤が３枚であるとして，黒板の上でモデルを利用して実際に移動してみて回数が７回であることを確認するとともに，移動のルールも確認する。
・１枚加えて，４枚の場合の移動の回数を同様にして調べる。
・コンピュータを利用して，12枚の場合での移動のようすを提示し，移動の回数も調べさせる。
・４枚の場合について，上の３枚をひとまとめにして，３枚＋１枚の移動として考えられることに気づかせる。
・３枚のとき，４枚のときとの関係を考えながら，５枚の場合の移動の回数を調べさせる。
・n枚の場合の移動の回数をa_nとして，a_nとa_{n-1}との関係を考えさせ，数列$\{a_n\}$を定義する漸化式をつくらせる。
・数列$\{a_n\}$の初項，第２項，第３項，……を求めさせ，$\{a_n\}$はどんな数列になるか考えさせる。
・階差数列を利用して$\{a_n\}$の一般項を求めさせる。
・漸化式の両辺に１を加えることによって$\{a_n\}$の一般項を求めさせる。
・$n=64$のとき，a_nの値を求めさせる。
・$n=64$のとき，$2^{64}-1=18446744073709551615$であることをコンピュータで計算し，１回の移動に１秒かかるとしても，約6000億年かかることを知らせる。

［まとめ］

・本時の学習内容をまとめる。
・漸化式から一般項を求めた方法を確認する。

３．指導の反省と課題

帰納的な考え方を強調し理解させるとともに，それを自分のものとして使っていくことができるようにしたいという思いをもって指導にあたってきた。実際に指導をしてみて生徒の反応をみる限り，授業でとりあげているそれぞれ個々の問題については，じっくり扱っていることもあって，考え方がよく理解され，また考え方のおもしろさや美しさなどが感じとられていたように思う。期末テストにおいても，授業でとりあげたものと同じ問題あるいは似ている問題では，帰納的な考え方も比較的よく活用されていた。

ただ，扱ったことのない問題については，帰納的に考えれば他の問題と同様に解決できるものであるにもかかわらず，帰納的な考え方は活用されていなかった。帰納的な考え方のよさが認識できていないというわけではないと思うが，いろいろな場面に考え方を転移させていくことは易しくないようである。考え方が活用できないというのは，これまで活用したことがあまりなかったということであろうし，ある意味ではもっと活用させる訓練が必要であったということなのであろう。帰納的な考え方はうまく活用できないということになれば，考え方のよさの認識もあとに残るものにはならないであろうし，むしろむずかしいものだというマイナスのイメージを作ってしまうかもしれない。数学的な見方や考え方のよさを認識させるためには，もっとそれが活用できるように適切な活用場面を数多く開発し，触れさせていくように指導上の配慮が必要であるといえる。

〔砂原　徹〕

（3）高等学校第2学年「単振動の合成」［数学II］

1．指導のねらい

高等学校2年生の「基礎解析」は本年度が最後の指導となる。その教材の一つに三角関数があるが，その内容は単振動の合成をもって終わりとしている教科書が多い。この単振動の合成は高等学校の範囲では今後必ずしも必要としないものである。すなわち，演習問題を解くときに必要なことはあっても，教科書の本文を理解するために必要とすることはない。したがって，教科書通りの指導では，単に「合成してみた」という領域を出ないままになる。

そこで，まず「合成」することの意味を考えさせることにした。そのためにまず音叉を用いて，その澄んだ音が正弦曲線であることを説明し，バイオリンの音は基本的な正弦曲線で表される音の2倍音，3倍音，…，12倍音，がそれぞれ違った振幅を持って合成されていることを説明し興味付けを図ることにした。引き続き，このような合成の最も簡単な場合を実際に行って体感させることにした。これは，地道な作業を進めることによって美しい曲線を描くことができるという数学的よさのうちの「審美性」を味わわせることをねらったものである。

次に，単振動の合成は加法定理の応用の一つであるが，加法定理

$$\sin(x+\alpha) \rightarrow \sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha$$

が1つの三角関数を2つに分解するものであると考えるならば，単振動の合成

$$a\sin x+b\cos x \rightarrow r\sin(x+\alpha)$$

はまさに2つの三角関数を1つに合成するという点で加法定理の逆であるということができる。

この点を十分理解させておけば合成の公式はまる暗記しなくてすむばかりでなく，

$$a\sin x+b\cos x \rightarrow r\sin(x+\alpha)$$
$$a\sin x+b\cos x \rightarrow r\sin(x-\alpha)$$
$$a\sin x+b\cos x \rightarrow r\cos(x+\alpha)$$
$$a\sin x+b\cos x \rightarrow r\cos(x-\alpha)$$

のいずれへの変形もスムースに行うことができるのである。たとえば，$r\cos(x+\alpha)$ の形に変形したいと思うならば，

$$\cos(x+\alpha) \rightarrow \cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha$$

を思い起こして，

$$\cos\alpha=b/\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \sin\alpha=-a/\sqrt{a^2+b^2}$$

となるような α を選べばよいことが分かる。

このことは，数学のある内容を理解するときに，よりその基本的考えに立ち返ることによって，数学のよさの「一般性」や「発展性」を得ることができることを体験させることをねらいとしたものである。

2．指導の実際

まず導入として，単振動の合成の例示を行った。これは，1．指導のねらいでも述べたが，まず「合成」することが現実に存在することを示して，合成に対する興味付けを図ろうとしたのである。そのためにまず音叉を用いて，その澄んだ音が正弦曲線であることを説明し，バイオリンの音は基本的な正弦曲線で表される音の2倍音，3倍音，····12倍音，がそれぞれ違った振幅を持って合成されていることを説明した。

次に，合成の最も簡単な場合を1つ行ってみることにした。すなわち，

$$y=\sqrt{3}\sin\theta$$
$$y=\cos\theta$$

の2つの関数のグラフを，1㎜方眼のB5の用紙にプリントしておいたものを配布し，y座標の値を加えた点をとる作業をさせた。めんどうな作業であるので，十分に時間をとるようにしたが，最終的には小黒板に準備したものを利用した。

この小黒板のグラフが，$y=\sin\theta$ のグラフを左に30°平行移動し，振幅を2倍にしたものらしいことに気付かせ，もしそうだとするとその式は，

$$y=2\sin(\theta+30°)$$

であることを，生徒の発言から引き出した。

この合成したグラフが，関数

$$y=2\sin(\theta+30°)$$

のグラフであることを確認するためには，

$$y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と，

$$y=2\sin(\theta+30°) \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が一致すればよいことをおさえて，その確認を②の右辺に加法定理を用いることで示した。すなわち，

$$\begin{aligned}&2\sin(\theta+30°)\\&=2(\sin\theta\cos30°+\cos\theta\sin30°)\\&=2(\sin\theta(\sqrt{3}/2)+\cos\theta(1/2))\\&=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\end{aligned}$$

とした。

以上で，

$$y=\sqrt{3}\sin\theta \quad と \quad y=\cos\theta$$

の合成が

$$y=2\sin(\theta+30°)$$

になることは確認できたことになるが，

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　から　$2\sin(\theta+30°)$ を

導き出す方法についてはこの段階では見出せていない。

そこで，$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ から上記の

$$2(\sin\theta(\sqrt{3}/2)+\cos\theta(1/2))$$

が出てくれば，よいことをおさえた。

この式で，$\sqrt{3}$ や1はすぐ理解できるが，2はワン

ステップ必要である。すなわち，$\sqrt{3}/2=\cos\alpha$, $1/2=\sin\alpha$ であるためには，

$$(\sqrt{3}/2)^2+(1/2)^2=1$$

でなければならないこと，したがって，

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=2$$

で割る必要があることを理解させた。

次に，

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

の場合に一般化した。このとき指導のねらいでも述べたように，

$$a/\sqrt{a^2+b^2}=\cos\alpha,$$
$$b/\sqrt{a^2+b^2}=\sin\alpha$$

となるような α をみつけると，加法定理が逆に使えて $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形できることを強調した。

続いて，教科書の問，

(1) $\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

(3) $\sin\theta-\cos\theta$　　(4) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$

を解かせた。

最後に，

$$a/\sqrt{a^2+b^2}=\cos\alpha,$$
$$b/\sqrt{a^2+b^2}=\sin\alpha$$

となるような α をみつけると，加法定理が逆に使えることを再確認してまとめとした。

3．指導の反省と課題

まず，導入に用いた音叉については，音を聞かせることはできたが，その音が正弦曲線となることについては口頭での説明しかできなかった。もしそれをするとなると，オシロスコープのようなものを準備しなければならないだろう。バイオリンの音についても実際に分析・合成してみるわけではないから，やはり説明して単なる興味付けの範囲を出なかった。その意味で，導入としてはやや弱いものであった。

次に，$y=\sqrt{3}\sin\theta$, $y=\cos\theta$ の2つの関数のグラフを，1㎜方眼のＢ５の用紙にプリントしておいたものを配布し，y座標の値を加えた点をとる作業をさせた点については，美しい曲線が実際に，目の前で，自分の手で出来上っていくということがらにおいて，ねらいとした「審美性」の体感は充分行えたと考える。

もう一つの，大きなねらいであった $a\sin x+b\cos x$ を $r\sin(x+\alpha)$, $r\sin(x-\alpha)$, $r\cos(x+\alpha)$, $r\cos(x-\alpha)$ のいずれの形にでも自由に変形できることについては，時間の関係もあってこの時間内では十分とはいえなかった。教科書の問の4問について，4通りの変形をさせてみる必要があったであろう。

〔酒井　秀二〕

Ⅳ．おわりに

これまで，中学校及び高等学校の生徒に数学的な見方や考え方のよさを認識させることをねらって実践した6つの授業について，その指導のねらいや実際，及び反省と課題を述べてきた。これらの授業のねらいを，そこで生徒に認識させようとした数学的な見方や考え方を中心にまとめると，以下のようになる。

まず，中学校においては，1年の「図形指導」では，紙を折るという操作活動と図形的性質や作図との関連，さらには図形の移動とエッシャーの図との関連，つまり，我々の身の回りの世界と数学の世界との関連づけを図ることによって数学的な見方や考え方のよさや美しさを認識させようとした。また，2年の「四角形の重心」では，重心の物理的解釈に基づいて，三角形の重心を求める方法を一般化して四角形の重心を求める方法を生徒自身が発見できるようにすることによって，一般化することのよさを認識させようとした。そして，3年の「円周率 π の計算」では，電卓を利用して円周率 π の値を求めさせることによって，アルゴリズムの考えのよさを認識させようとした。

さらに，高等学校においては，1年の「自然数の列」［数学Ⅰ］では，ものの個数を数え上げる場合に，そこに潜む数の規則性を発見させ，その規則性を利用して個数を求めることによって，個数の処理における数の列（規則性）のよさを認識させようとした。また，1年の「数列」［数学A］では，「ハノイの塔」という操作を通して，より簡単な場合から複雑な場合へと考えることによって，帰納的な考えのよさを認識させようとした。そして，2年の「単振動の合成」［数学Ⅱ］では，三角関数の加法定理の応用の一つとして単振動の合成を扱い，生徒にグラフを描かせることによって，数学の審美性を味わわせ，統合的な考え方のよさを認識させようとした。

これらの授業実践を通して，各々の授業において具体的な数学的な見方や考え方に焦点を当てて，教材とその展開を工夫することによって，生徒にその意図した見方や考え方のよさを認識させることができる，ということが明らかになった。このことは，授業中の生徒の意欲的な態度や「目の輝き」に顕著に現れている。今後は，こうした授業実践を踏まえて，他の領域の内容に関わる授業を実践するとともに，数学的な見方や考え方のよさの認識に関わる評価のあり方についても研究していきたい。

〔小山　正孝〕