広島大学教育学部　学部附属共同研究体制研究紀要
〈第22号　1994．3〉

「誤り」を生かす数学科授業の開発（Ⅲ）

――授業と具体的教材の実践的検討――

中原　忠男　小山　正孝　山口　武志
入川　義克　後藤　俊秀　中野　俊幸
村上　和男　釜木　一行

1．はじめに

従来の数学教育では、数学学習に現れる生徒の誤りは、修正・排除する対象として捉らえられ、そのための効果的な学習指導方法が研究・実践されて来た。しかし、本プロジェクトは、むしろ誤謬を数学的知識の本質的な契機と捉らえ、生徒の誤謬をもとに数学的活動ないし数学的理解を発展・深化させるような授業を開発するものである。

このため、以下の課題を中心に研究を進めている。

①数学的知識の形成過程における誤謬の積極的意義についての認識論的考察
②生徒の数学理解における誤謬についての心理学的考察
③生徒の「誤り」の調査・分析
④「誤り」を生かす具体的教材開発と授業構成及びその実践的検討
⑤　①～④をふまえた誤謬についての総合的考察

昨年度までの研究、とくに具体的教材開発や授業実践及びその学習指導案の作成などを通して以下のような問題点が課題として得られている。

①「誤り」の例や数学の可謬性を示すことが、生徒の興味・関心・態度にどのような影響を与えるか。
②誤謬を誤謬として認識することは、数学の理解とどのような関連性があるのか。
③生徒の誤謬からみると、現行の数学教材にどのような心理学的問題点があるのか。
本稿ではこのうち①，②について考察する。

ところで、我々は、生徒の数学に対する興味・関心・態度を調べるためのアンケート用紙を作成し、1993年9月～11月に附属福山中学校・高等学校の生徒に対して調査を実施している。しかし、アンケート用紙およびその項目の作成過程、また調査結果（現在、集計・検討中である）については、別の形で発表したいと考えている。この度それを本稿で取り上げなかったのは、次のような理由からである。それは、このようなアンケート形式の調査によって得られる生徒の興味・関心・態度の実態が、数時間の実験的な「『誤り』を生かす授業」によるものかどうか判定できないと考えたからである。おそらく、アンケート調査によって現れる興味・関心・態度は、日々の数学の学習経験のみならず、生徒を取り巻くさまざまな教育状況が影響していると考えられる。少なくとも、アンケート形式の調査によって計るには、長期的計画的な実践研究が必要であろう。

そこで本稿では、１時間の授業の中で、「誤りを生かす」ことによって生徒がどのように数学的理解を深めるか、どのような興味・関心・態度を示すのか、を、２つの授業実践例をとおして考察する。

2．実践例1

（1）授業のねらい

数学は、従来、真理の体系と見なされて来た。ところが、近年、数学も一つの社会的な『制度』に過ぎないという見方が広く受け入れられるようになって来た。このような見方は、数学教育、とくに中等教育の数学教育を考えるうえで、大変有効な視点を与えてくれる。例えば、証明は社会的に承認されたつまり公認の『手続き』と考えることができる。我々が社会生活で、公的な『手続き』を取ることによって初めて自分の権利

Tadao Nakahara, Masataka Koyama, Takeshi Yamaguchi, Yoshikatsu Irikawa, Kazuyuki Kamagi, Toshihide Goto, Toshiyuki Nakano & Kazuo Murakami ; A study on Mathematization based on Student's Errors ［Ⅲ］

や正当性などが承認されるように、数学的推論の正当性を得るには、証明の公的な手続きを必要とするわけである。

証明をこのようにとらえてみると、証明を学習する際のいろいろな困難点は、我々が慣れない手続きに対する時のものと類比して理解することができるであろう。また、我々がいかにしてそのような手続きを理解し、慣れ、自在に運用するようになるかを省察すれば、証明指導に対する有効な方法を得ることができるであろう。

筆者は、等式・不等式の証明指導については、理屈を云々するよりもむしろ、まずは、典型的事例で、証明の形式・パターンに慣れさせることが大切であると考えている。しかし、ある程度慣れたときには、そのような手続きが必要となった状況を理解させることもまた重要であると考ええる。そして、そのためには、「誤った推論」を提示して、矛盾や混乱などを引き起こすことが有効であろう。本実践はそれを試みたものである。

背理法は、命題「p→q」が偽であると仮定して矛盾 (不合理) が生じることをしめし、それによって「p→q」が真であることを示す証明法である。すなわち、pが真でqが偽とすると、前提pや公理や定理などに矛盾することを示す方法である。ここでの根本的な論理的思考方法は、矛盾が起これば仮定は否定される、ということである。ところが、これに対して、生徒は誤って、「矛盾が起こらなければ、仮定は肯定される」と考えていることがよくある。結論が前提条件に矛盾していないことを示して、証明と考えてしまうのである。しかし、矛盾が起こらないことから、仮定したことが成立するかどうかは決定できない。

本実践は、背理法から、生徒にあえてそのような誤った推論を誘発し、背理法と比較して、生徒にその誤りを理解させようとするものである。

(2) 学習・指導過程

『背理法』は、これは高等学校の数学Ⅰの「式と証明」の単元の中に位置付けられているものである。これを次のような単元計画で、附属福山高校1学年に実施した。

・単元計画

(1) 恒等式……………………2時間
(2) 等式の証明……………2時間
(3) 不等式の証明…………3時間
(4) 整数の性質の証明……2時間
(5) 命題と集合……………3時間
(6) 逆と対偶………………3時間 (本時は、その第3限目)

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点
(導入) ●「背理法」適用方法の理解	●「背理法」の適用方法を例示し理解させる。 命題「三角形では、2つ以上の内角が鈍角になることはない」の証明を考えさせる。	・アリバイによる無罪の立証など日常的な思考法であることを補足説明する。
(展開) ●「背理法」の応用問題	●本時の課題を提示し、解かせる。 3つの2次方程式 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ がある。 ただし、a, b, c は0ではない。 (1) a, b, c が異なる実数のとき、3つの方程式の解が、すべて虚数解ということはない。このことを証明せよ。 (2) a, b, c が同符号で異なるとき、3つの方程式の解が、すべて実数解ということはあるか。 ・(2)で矛盾のおこらない推論を提示し、仮定は肯定されるのか考えさせる。	(1)判別式から $b^2-ca<0$, $c^2-ab<0$, $a^2-bc<0$ $\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca<0$ 不合理 (2)判別式から $b^2ca\geqq 0$, $c^2-ab\geqq 0$, $a^2-bc\geqq 0$ $\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqq 0$ となり、不合理が生じない。
(まとめ) ●本時のまとめ	●「矛盾が起これば、仮定は否定される」は正しいが「矛盾が起こらなければ、仮定は肯定される。」と考えるのは誤りであることを確認させる。	

(3) 授業の考察

問題(2)で、「すべて実数解ということはない」ことを背理法で証明するために、うまく矛盾を起こすことはなかなか困難である。それは、背理法を使うときひいては理解するときの困難点といえるだろう。すなわち、何と矛盾するのかをあらかじめ方向づけられないところである。そして、矛盾にうまくたどり着かないでいる（矛盾が起こっていない）ことが、問題(2)の論理的誤り「矛盾が起こらなければ、仮定は肯定される」を誘発するのである。

問題(2)の矛盾は次のようにして導いて、提示した。

すべて実数解とすると、判別式から、

$b^2 - ca \geqq 0$, $c^2 - ab \geqq 0$, $a^2 - bc \geqq 0$

から、同符号だから,

$b^2 \geqq c > 0$ ………①

$c^2 \geqq a > 0$ ………②

$a^2 \geqq c > 0$ ………③

①, ②より

$b^2c^2 \geqq a^2bc$

$bc > 0$ より

$bc \geqq a^2$ ………④

③, ④より

$a^2 = bc$ ………⑤

同様にして、

$b^2 = ca$ ………⑥

$c^2 = ab$ ………⑦

⑤, ⑥, ⑦より、

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$\therefore \ \dfrac{1}{2} \{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$

これは、a, b, c が互いに異なることに矛盾する。

この証明を示す前に、生徒に、「矛盾しないから、すべて実数解ということはあるか」と、質問してみると生徒は全く答えに窮していた。生徒は混乱しているというより、何がいいたいのか分からない、という様であった。「矛盾が起これば、仮定は否定される」は正しいが、「矛盾が起こらなければ、仮定は肯定される。」と考えるのは誤りであるということを一般的原理として理解することは難しいようである。

ところが、上記の証明を示すと多くの生徒は、「今は矛盾が起こっていなくても、工夫すれば矛盾が生じることもあり、仮定が成り立つとはいえないいえない」ということを納得しうなずいてくれた。

「矛盾が起これば、仮定は否定される」は正しいが、「矛盾が起こらなければ、仮定は肯定される。」と考えるのは誤りであるということを、論理的に（形式的に）理解するのは大変難しい。それは数学的推論の具体的事例によって初めて理解されることであるようである。これは、実は、数学的思考の本質的な構造に起因しているように思われる。

数学の授業では、図形の性質や計算規則や証明の原理などいろいろな「一般法則」を生徒に教えている。その際、まず、典型的具体的推論を示して、その一般法則を理解させることが多い。

しかし、具体的推論を示すのは、教育的配慮からであって、一般には、そのような個々の推論は、一般法則をある特定な場合について適用した一つの事例であると考えられている。具体例は、一般法則をある特定の場合について適用した一つの事例であって、数学の一般法則は、数学の法則や論理の法則によって導き出されるのが本来の数学の姿であると考えられいる。すなわち、数学の本性は演繹的推論と考えられている。

ところが、黒崎宏氏によれば、ウィズダムは、すべての推論は相似物にもとづいた推論であると主張している。ウィズダムによれば、一般法則を理解するということは、結局はそれに内容を与えている個々の推論を理解すること、それが表現しようとする形式を示している個々の推論を理解することに他ならない。「形式」というものは、それ自体では存在できないものであって、それは、具体的な何かにおいて存在し、そして、その具体的な何かにおいて「示される」より他には、仕様のないものなのである。

このように一般法則は具体例なしでは明示し得ないということは、具体例の決定的な重要性を意味している。それは単に理解しやすいという教育的な配慮からではなく、教えるということは具体例を示すしかないのである。

そして、一般法則を明示し得ないということが、『誤り』の積極的意義を与えてくれる。一般法則を明示し得ないということは、ただ、典型例を示すほかないのであり、一般法則に従っているかどうかは、従っていないとき、『誤り』と指摘するしかないのである。

典型的な具体例を用意することとともに、いかに典型的な「誤り」を提示することができるかが、教育的に重要な実践課題となるであろう。

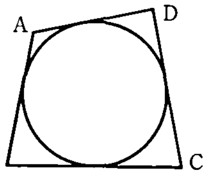
3. 実践例2

(1) 授業のねらいと実践方法について

広大教育学部学部附属研究紀要第19号および第15回広大「高校教育講座」で述べたように、さまざまな実践をして来た。その中で明らかになったことの一つは、

「誤り」を誘導する授業ではどうしても生徒の活動が制限され、生徒の興味が持続しないということであった。生徒に興味を持たせ、自由な発想を大切にする一つの方法は、「生徒に問題を作らせるなかで出されるいろいろな誤りを無視せず取り上げクラスで検討する」ことであると考え、次の授業を行った。

まず次のような元になる問題を示し、生徒は what-if-not の方法により、自由に問題を作る。

> 元になる問題
>
> 4角形が円に外接する場合、
> ＡＢ＋ＣＤ＝ＢＣ＋ＤＡ
> を証明せよ。
>
> 
>

教師は生徒の作った問題を選んで紹介し、それをまた検討するわけである。中学校３年生を対象に４時間で行った。

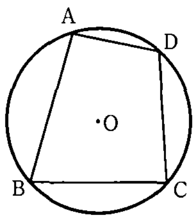
- what-if-not の方法による問題作り……………1時間
- 生徒が作った「正しい問題……正解が出る問題」の検討…………………………………………………1時間
- 生徒が作った「誤りを含む問題」……………2時間

（２）生徒の作った問題と考察

生徒はいろいろな問題を作った。教師はその中から「間違っているあるいは間違いを含んではいるが興味深い問題」を幾つか選んでプリントし、それを生徒に配った。

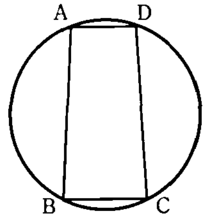
生徒にまずその問題を解かせた。その後、全員でそれらを検討した。以下に問題の一部を示す。

《問題１》

> 四角形ＡＢＣＤの外接円の場合
> 　ＡＢ＋ＣＤ＝ＡＤ＋ＢＣは
> 成り立つか。(証明)
>
> 
>

これは、円に外接する４角形を内接する４角形に変えた問題である。

ある生徒は下図のような図をかき、明らかに成立しない例（反例）を上げていた。

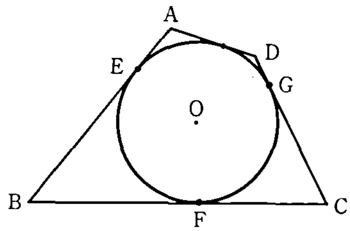


これについては、

∠Ａ＋∠Ｃ＝∠Ｂ＋∠Ｄ

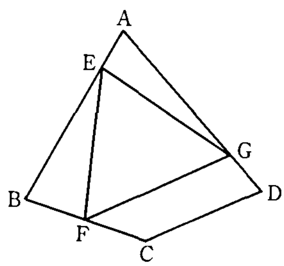
が成立する。この定理は、すぐ後で学ぶことになるが、これについての理解を深めることができた。

《問題２》

> 図で四角形ＡＢＣＤの面積は120㎠であり、ＡＢを14cm，ＤＣを６cmとすると円の半径はいくらか。
>
> 
>

ＢＣ＋ＤＡ＝14＋３＝20cm　となるから、円の半径を求めることができた。

《問題３》

> 四角形に正三角形が内接する場合、４辺の関係を示せ。
>
> 
>

円を３角形に変えた問題である。生徒からは、

「『４角形に、正三角形が内接する』と問題にはあるが、円に直線が接するのは分かる。直線図形に、直線図形が接するのはよく分からない。」

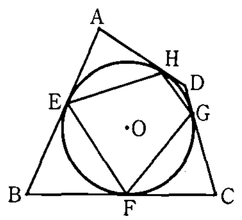
「そもそも接するとはどういうことなのか。」

「円と直線が接するのは、交点が１つのときである。

それなら、この場合も接すると言って良いのではないか。」
などの意見が出た。
解決はできなかったが、基本的な概念について考えることができた。

《問題4》

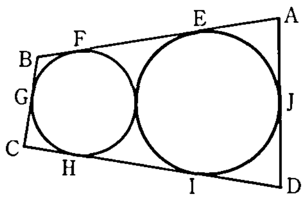
下の図のように円Oが四角形ＡＢＣＤの各辺に点Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈで接している。このときＨＧ//ＥＦであることを証明せよ。



ＨＧ//ＥＦは成立しないが、驚いたことに、さまざまな方法でこれが証明できた生徒が何人かいた。いかにも成立しそうな図がかいてあったことが原因である。問題文だけから、自分で図をかかせることにより、成立しないことを納得させた。自分で図をかくことの大切さを学んだ。

《問題5》

この問題は円を２つ扱っている。



ある生徒は、元の問題で同じ関係式

ＡＢ＋ＣＤ＝ＢＣ＋ＤＡ

を主張したが、図から見て明らかに間違っている。それなら、この図で何か成立する関係式はないかと問い、

ＥＦ＝ＨＩ

や

$$EF=\frac{1}{2}(AB+CD-BC-AD)$$

に気付く生徒がいた。
間違った問題を元にして発展させることのできた例である。

（３）授業の考察

友人が作った問題であるだけに、生徒は興味をもって取り組んだ。しかし、やはり２時間が限度であると思う。実は、ここに取り上げた問題よりも多くの例を生徒に紹介したが、これ以上ふれることはできなかった。興味深い問題に絞ることが必要である。
この授業を通して、問題１や５では、別の定理について発見することができた。また、「図を自分でかくことの大切さ」「印刷されたものや証明されていないことをあまり信用してはならない」ことをいくらかでも納得できたと思う。この態度は自分で何かを作り上げて行くとききわめて大切である。このようなことは「誤りを生かす授業」でこそ学び得るものといえよう。

［参考文献］

中澤貞治；「数学教育の窓から」，現代数学社，1990