広島大学教育学部　学部附属共同研究体制研究紀要
〈第22号　1994. 3〉

数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業の開発

――新高等学校学習指導要領をふまえた事例研究――

中原　忠男　小山　正孝　山口　武志
片山　一法　新上　　勇　宇佐川信行
酒井　秀二　井ノ迫泰弘　平岡　賢治
河野　芳文　藤本　義明　砂原　　徹

1．はじめに

本稿は、本テーマに関わる共同研究の第５報に当たる。来年度から高等学校の新学習指導要領が実施されるのであるが、新学習指導要領の１つの柱である数学的な見方や考え方のよさを認識させるために、各科目でどのような教材が考えられるかを、その科目の目的・性格に配慮しつつ、事例を挙げながら検討した。

2．各科目における事例研究

（1）数学Ⅰ

①数学Ⅰにおける数学的見方・考え方

数学Ⅰは次の４つの内容で構成されている。[1]

(1)　変化するものの代表として、「二次関数」

(2)　量ることの理論化として、「図形と計量」

(3)　規則にしたがっての数え上げとして、「個数の処理」

(4)　不確定なものを比率で表現するという方法として、「確率」

さて、これらの指導を通して数学的な見方・考え方のよさを知らせる授業の展開ポイントについて述べると次のようになる。

「二次関数」の指導では、変化をとらえさせるために、コンピュータの積極的利用が望まれる。変化を動的にとらえさせることは従来の板書中心の授業ではなかなか難しい。しかし、コンピュータのＣＧ（コンピュータグラフィック）を利用して視覚的に、しかも限りなく本物に近い二次関数のグラフをＯＨＰなどを活用しながら授業を展開することは非常に効果的である。[2]

「図形と計量」では、特有の計算の煩わしさを避けながら統合的な考え方を理解させるために、身近にある関数電卓の積極的な利用を勧めたい。従来の指導では、30°・45°・60°・90°・120°・135°・150°・180°の角度のみを扱っていたが、現実にはこれ以外の角度が日常的である。そのため、教科書等の巻末にある一覧表を利用することもできるが、計算の煩雑さなどのために敬遠されてきた。しかし、関数電卓を授業の中で利用することにより、身の回りにある図形を授業の中に取り入れることが可能になってくる。

「個数の処理」の指導では、帰納的な考え方の定着をはかりたい。ある条件を満たすすべての場合を重複なく数え上げることは日常生活の中でよく出会うものである。ここでは、工夫しながら求める方法、帰納的に求めることを通して変化の様子を調べ求める方法などを理解させ、場合の数を求めることができるようにしたい。また、その過程で数列としてとらえ、漸化式をつくり場合の数を求めることも有効である。数列としての扱いではなく、帰納的に求める過程から自然にできる数列を対象に考えさせることも重要である。

「確率」の指導では、情報化社会の今日を過ごすための基礎知識を身につけさせたい。日常生活の中でいろいろな確率に出会い、的確に判断し、行動することが要求されてきている。そのため、確率の基本的な考え方を理解し、積極的な応用力をつけることは非常に大切になってくる。また、確率を考えていく上で、意外な現象や事実と出会すことがある。そのようなカラクリについても理解し、考察する力をつけさせたい。

Tadao Nakahara, Masataka Koyama, Takeshi Yamaguchi, Kazunori Katayama, Isamu Shinkami, Nobuyuki Usagawa, Syuji Sakai, Yasuhiro Inosako, Kenji Hiraoka, Yoshifumi Kono, Yoshiaki Fujimoto & Toru Sunahara : A Study on Teaching for Appreciation of Mathematical Thinking and Ideas ; Teaching Practice for Appreciation of Mathematical Ideas on the Contents of Senior High School Mathematics.

②指導例

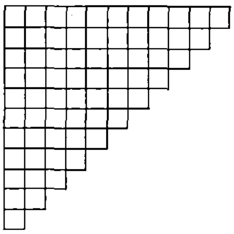
ア．二次関数

●二次関数の最大・最小

・導入例

24cmの針金で長方形をつくるとき、面積を最大にするには、たて、横それぞれいくらの長さにすればよいか。

・展開



左の図から面積最大の長方形のたてと横の長さを予想させる。

確認

たての長さを x とすると、横の長さは $12-x$

このとき、x の範囲は　$0<x<12$

長方形の面積を y とすると、

$$y=x(12-x)$$
$$=-x^2+12x$$
$$=-(x-6)^2+36$$

グラフをコンピュータに書かせ、教室でＯＨＰを利用してグラフを確認させながら $x=6$ のとき、y の最大値36となることを求めさせる。

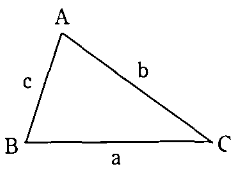
イ．図形と計量

●正弦定理

中学校で学習した三角形の決定条件

1）３辺の長さ　2）２辺とそのはさむ角

3）１辺とその両端の角



を確認の上、左図の△ＡＢＣの各辺の長さａ、ｂ、ｃと角の大きさＡ、Ｂ、Ｃの関係について考えさせ、正弦定理を求めさせる。

課題

ノートに三角形を自由に書かせ、１つの辺の長さとその両端の角の大きさをはかり、正弦定理を使って残りの２辺の長さを求めよ。

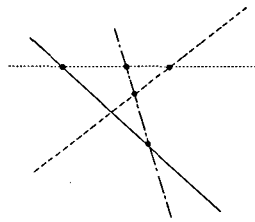
留意点

２辺の長さをはかり、計算で求めた値に一致しているかどうかを確かめさせる。

授業の中で、計算は教科書巻末の表を利用しないで、関数電卓を利用しながら進める。

ウ．個数の処理

●自然数の列



課題

左の図のように、平面を直線で分割するときに、５本の直線で平面がいくつに分割されるであろうか。10本の場合はどうであろうか。

展開

５本の場合は具体的に図を書いて求めることができるが、10本の場合はかなり困難であることに気づかせる。帰納的に、１本の場合、２本の場合、３本の場合、……と求めて、規則性があるかどうかについて考えさせる。

その規則性から漸化式をつくり、１本の場合が求められると、順次求めることができることに気づかせる。

留意点

漸化式をつくること、それを利用して各項の値を求めることなどは数列ではあまり扱われない場合が多い。教科書等では自然数の列で数列的な扱いはほとんどなされていないが、授業展開の中では積極的に扱う方が生徒の理解を助けることになろう。

エ．確率

●期待値

課題

３枚のコインをなげ、表が１枚出るごとに100円もらえるゲームがある。１回のゲームの賞金はいくらぐらいだと予想できるか。

展開

いろいろ発表させて、確率と賞金額の関係について考えさせる。

期待値の定義を行い、表の枚数の確率を樹形図などを利用して求めさせる。

はじめの予想と一致するかどうかを確認させ、その理由について考え、指名して発表させる。(平岡)

参考文献

1）　高等学校学習指導要領解説　数学編

平成元年12月　文部省

2）「パソコンを利用した授業の考察Ⅰ」

—数学Ⅰにおける２次関数のグラフ指導—

広島大学附属高等学校「研究紀要」第34号Ｐ.9～23

（2）数学Ⅱ

①数学Ⅱにおける数学的見方・考え方

「数学Ⅱ」は、必修科目「数学Ⅰ」（4単位）に続く基礎的かつ基本的な内容を含む科目であり、より広い数学的資質の育成を目指したものである。

その内容は、図形と方程式、いろいろな関数、関数の値の変化であり、標準単位数3単位があてられている。これらは、高等学校数学についてのより広い教養の習得を目指したものであり、程度の高い知識や技巧に深入りすることを目的とするものではない。それぞれの内容の基礎的知識や技能を身につけ、それによって事象を数学的に考察し、処理する能力の育成をねらったものである。

図形と方程式では、図形の処理に数式を利用する方法について学習し、その有用性を理解させることが大切である。場合によっては、図形的性質が座標軸のとり方によらず保たれることを理解させる必要があろう。このような場面で扱う例として、軌跡を求める問題が考えられる。

いろいろな関数では、指数関数や対数関数が基本的な関数であるにも関らず、その導入部において数学的見方・考え方の良さを認識させることは難しい。したがって、ある程度学習した段階において、自然現象や社会現象の中に見られる数理的事象の解明などに有用であることなどを示すような形となるであろう。三角関数でも、すでに三角比を学習しているにも関らず、同様のことが考えられる。そこで、波の合成などと関連させて、加法定理などの有用性を示すことが考えられる。

関数の値の変化では、現行の「数学Ⅱ」や「基礎解析」における微分・積分の内容をやや軽減したものが扱われるが、その扱い方においては、関数の値の変化をとらえる一つの有効な方法・考えを知らせることに重点があり、必ずしも、微分・積分入門を意味するものではない。微分の導入部分では、運動する物体の平均の速さ、瞬間の速さといった流れ、平均変化率の図形的説明、接線の傾きといった流れが妥当であろう。また、関数 $f(x)$ に対し、$F'(x)=f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ に対する関心は自然であるが、それも関数 $F(x)$ の意味づけができなければ、積分の有用性を示すことは難しいと思われる。したがって、関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq 0$ のとき、曲線 $f(x)$、2直線 $x=a$、$x=t$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ が $S'(t)=f(t)$ をみたすことを、直観的にでも押さえたい。なお、微分や積分の考えの有用性を示すには、速度と位置、距離などの関係に言及することは大切なことであり、その削減が惜しまれる。

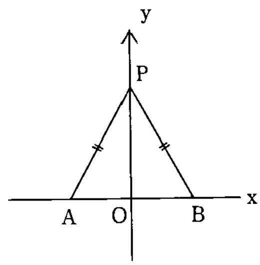
②指導例

ア．軌跡

中学の幾何でも、2定点A、Bからの距離が等しい点の全体が線分ABの垂直二等分線となることが示されるが、そこでは結論が前もって分かっている。結論が分かっていない場合にはどうすればよいか。そのような場合、座標をうまくとり、距離の公式を利用すれば、結論と証明が同時に得られるという意味で、解析幾何の考えのよさが理解できると考えられる。

問　2定点A、Bからの距離が等しい点Pの軌跡を求めよ。

解　2定点A、Bの座標が
$(-a, 0)$、$(a, 0)$
となるように座標軸をとると、$PA=PB$ より
$PA^2=PB^2$
よって、
$$(x+a)^2+y^2=(x-a)^2+y^2$$



整理すると、$4ax=0$
$a \neq 0$ であるから、$x=0$
逆に、y軸上の点Pは、$PA=PB$ をみたす。
以上により、点Pの軌跡はy軸、すなわち、線分ABの垂直二等分線である。

次のような例もよいであろう。

問　円Oの周上の定点Aを通る弦の中点Pの軌跡を求めよ。

イ．指数関数の活用

指数関数の導入部において、累乗根、正の数aの有理数乗（$a \neq 1$）等を考える場面は興味深いものではあるが、その時点において、何故そのようなことを考えるのか、そのようなことを考えるとどう好都合なのかを示すのはやや困難なことと思われる。

したがって、指数関数や対数関数のよさを示すのはこれらの関数についてある程度の知識、技能を身につけた後ということになるのではないだろうか。その例としては、次のようなものが考えられる。

問　ある細菌は、一定条件のもとでは、30分に1回の割合で分裂して2倍の数になる。この条件のもとで、1万回の細菌は1時間45分後には約何個に増えるか。

解　x時間後の細菌の個数をy個とすると、
$$y=10000\times 2^{2x}=10000\times 4^{x}$$
が成り立つと考えられる。
したがって、1時間45分後の細菌の個数は
$10000\times 4^{1.75}=10000\times 11.3137=113137$

（答）約11.3万個

あるいは、次のようなものでもよいであろう。

> 問　ある湖では、水面での光源の強さは、3ｍ深くなるごとにその1割を失う。このとき、水深13.5ｍの地点での光線の強さは、水面での光線の強さの何倍になるか。

そのほか、水の中に入れた1ｇの砂糖のｔ秒後に溶けずに残っているグラム数などが考えられる。

ウ．対数関数の応用

この関数も自然現象などでよく見られるものであるが、対数計算は扱わないことになっているため、7^{20}の桁数の計算などで満足することになろう。

エ．速度と位置

微分の導入部において、物体の運動に関して、平均の速さ、瞬間の速さについて考えさせることは、微分係数を考えることの必然性を示すためには重要なことである。とすれば、関数$f(x)$の不定積分$F(x)$、すなわち、$F'(x)=f(x)$をみたす関数$F(x)$を考える場面において、速度$v(t)$に対して時刻tにおける物体の位置$f(t)$、あるいは道のりを考えることは自然であり、そのような問題に触れることは、微分や積分のよさを理解させるための好材料と思われる。生徒たちの興味・関心もこのようなものに向かいやすいと思われる。その意味では、物体の運動も直線上の運動で十分であろう。

まず、時刻tにおける物体のx座標が$x=f(t)$であるとして、t秒後における物体の速度$v(t)$が、$v(t)=f'(t)$で与えられることを示し、

$$\int_a^t v(t)\,dt=f(t)-f(a)$$

が成り立つことを示さなければならない。その後、次のような問題を考えさせればよいと思われる。

> 問　直線軌道上を50ｍ／秒の速度で走っている電車がある。ブレーキをかけてからｔ秒後の速度を$v(t)$ｍ／秒とすると、停車するまでの間の速度は$v(t)=50-t$で表されるという。この電車はブレーキをかけてから、何秒後にどれだけ進んで停車するか。

（河野）

（3）数学Ⅲ

①　数学Ⅲにおける数学的な見方・考え方

数学Ⅲは、従来の「微分・積分」を踏襲しており、多少の入れ替わりはあるものの、大きな内容の変化はないといえよう。数学Ⅲは、大きくは次の3つの内容から構成されている。

1．関数と極限
2．微分法
3．積分法

この中で、大きな改訂点を2つあげるとすれば、1．の中で「関数の概念」として、分数関数、無理関数、合成関数、逆関数が数学Ⅰから移ってきたことと、3．の中で微分方程式が削除されたことであろう。このうち、前者については、学習に必要なことがらをあらかじめ前の学年などで学習しておくのではなく、その都度準備して進めるという「現地調達方式」の反映に他ならない。

分数関数　$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$のグラフを考えるとき、漸近線がどうなるかが大きなポイントになる。それには式変形をして、xの値が限りなく大きく（小さく）なったとき、あるいは、$-\dfrac{d}{c}$に限りなく近づいたときのyの値の変化を考えることになる。従来は式変形やグラフは数学Ⅰ、極限については微分・積分と別々に指導されてきたが、一括して扱われることになった。一括したことによって、極限を考えることの意味がより意義あることとして感じられるであろうし、分数関数のついての理解も深めることができよう。

分数関数として扱うのは、（1次式）／（1次式）の形の関数に限られている。これは、計算の煩雑さや、グラフの複雑さを避けるためであるが、コンピュータ・グラフィックを利用していろいろな関数のグラフを描かせてみることを手段として利用すれば、もう少し複雑な形の分数関数でも扱うことが容易になり、その極限についても視覚的な理解が得られる。これは、数学Ｃで扱うことも考えられるが、極限を意識して、数学Ⅲでもコンピュータ・グラフィックを積極的に利用したい。形式的には$\dfrac{0}{0}$や$\dfrac{\infty}{\infty}$となるものについての極限を考える際にも有効である。

コンピュータを利用することによって、未知の形式の関数についても、とにかくグラフをかいて様子を見ることが可能になり、このことが計算して理論的に考えることと互いに補いあうことができる。

数学Ⅲは、論証を重視した厳密な微分積分学としてではなく、直観を重視し、実際的な計算により重きをおく科目である。もちろん、それはいい加減に扱ったり、計算の技巧を重視したりすることを意味するのではないが、これまでは煩雑さ故に避けてきたことでも、コンピュータを利用して積極的に取り入れてみたい。

② 指導例

①ではコンピュータを利用した指導について述べたが、コンピュータを利用しなくても、数学的な見方・考え方のよさを認識させる授業として、次のような例もある。

ア．微分法の応用

微分法の応用問題として、いろいろな関数の最大値を求めるというものがよく見られる。単に与えられた関数について考えることに留まらず、数学がどんなことに活用されるか、あるいは、数学を活用するためにはどんな考え方をすればよいのかといった視点をもたせるような指導を心がけたいところである。

鉄板を使って茶筒をつくるとき、材料を最も効果的に利用する方法を考えるという具体的な場面設定をし、この問題を微分法を利用して解決するという課題設定をすることができる。

数学で考えるときは、具体的な場面から最も単純に数学的な要素だけを取り出し、数学の問題に書き直すことが必要である。これによって、体積が一定の値 k である直円柱の表面積を最小にするには、高さと底面の半径の比をどのようにすればよいかという問題が設定される。

このように問題が設定されれば、あとは底面の半径を x、高さを y とし、$y=\frac{k}{\pi x^2}$の条件のもとで、直円柱の表面積 $S(x)$ が次のように求められる。

$$S(x)=2\pi x^2+2\pi xy$$
$$=2\pi\left(x^2+\frac{k}{\pi x}\right)$$

$S(x)$ が最小値をとるときの x、y の値を微分法を利用して求めると、

$$S'(x)=2\pi\left(2x-\frac{k}{\pi x^2}\right)$$
$$=2\pi\cdot\frac{2\pi x^3-k}{\pi x^2}$$

であることから、$x=\sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$のとき、$S(x)$ が最小になり、このとき、x：y＝1：2の関係が成り立つことがわかる。したがって、底面の直径と半径が等しくなるようにすればよい。

数学的にこのように解決でき、なおかつ結果が単純であることに生徒は数学の美しさや見方・考え方のよさを感じるであろう。

(砂原)

(4) 数学Ａ

①数学Ａにおける数学的見方・考え方

数学Ａには、「数と式」、「数列」、「幾何」、「コンピュータ」の項目があり、このうち、２項目が選択履修される。数学Ａは数学Ⅰとほとんど同じ時期に履修される科目であるので、選択科目とはいえ高校数学の基礎科目としての性格が強いといえる。とくに、「数と式」と「数列」は他の科目に対する基礎的な性格が強いので、数学的な見方・考え方の良さを知らせるための教材例は見つけにくい。しかしそれでも、「数と式」で相加平均と相乗平均の大小関係を指導する場面や、「数列」で数列の和に関する指導場面では、数学の知識を日常的な課題の解決に利用することが考えられ、数学的見方・考え方の良さを知らせることができる。

一方、「幾何」では、三角形や円の性質を証明してゆく『初等幾何』、図形の簡単な性質を利用した『作図』、図形を動かして様々な性質を調べる『変換幾何』の３つが扱われる。したがって、幾何はかなり総花的な性格が強いといえるだろう。この総花性を生かそうとするとき、他の科目の基礎として扱うことは困難であり、むしろ、数学的見方・考え方の良さを知らせるという態度で扱うことが望ましい。

ところで、最近のコンピュータ・グラフィクの世界では、３次元映像がもてはやされている。つまり、３次元の立体を２次元で表現するのである。このようなコンピュータ時代の数学教育では、図形についての空間的表現と平面的表現の間を自由に行き来できる能力の育成が望まれる。その意味では、高校数学の幾何教育として、新学習指導要領では取り上げられていないが、立体図形の投影図を指導することは意味がある。投影図を描き、その中から立体の実長を見つけ出したりする活動は、数学の有用さを実感させることができ、また、コンピュータ・グラフィクを行うときに改めてその良さが認識されるであろう。

②指導例

ア．いろいろな平均

平均にもその見方によっていろいろな平均があることを認識させる。また、相加平均と相乗平均の大小関係を利用して日常的な課題が解決されることを認識させる。

問　次の a と b の平均を求めよ。
①数学のテストの点が a 点、国語のテストの点が b 点であるとき、２教科のテストの平均点はいくらか。
②プロ野球選手の年棒がはじめの１年間で a 倍、次の１年間で b 倍になったとき、年棒は平均１年間に何倍になったか。
③ある道のりを行きは時速 a km、帰りは時速 b km で往復するとき、往復の平均時速はいくらか。

解　①　$\dfrac{a+b}{2}$　　②　$\sqrt{ab}$　　③　$\dfrac{2ab}{a+b}$

問　長さ100mのロープで長方形の形に土地を囲むとき、面積を最大にするにはどのように囲めばよいだろうか。

解　長方形のたてをxm、横をymとすると、

$x+y=50$

（相加平均）≧（相乗平均）であるから

$\dfrac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$、$25 \geqq \sqrt{xy}$

等号は $x=y$ のとき成り立つから

$x+x=50$、$x=25$

よって、1辺が25mの正方形に囲むとき最大である。

問　面積が400m²で、周の長さが最小な長方形の宅地を造成したい。どのような土地になるか。

イ．複利計算

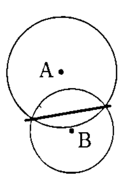
等比数列の和の利用としての複利計算が、日常的課題の解決手段としての数学を印象づけるのに有効である。

ウ．初等幾何

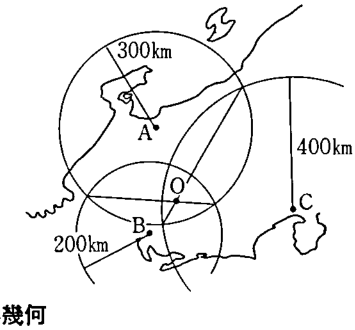
理科の分野で円の性質が利用されている例を示す。

問　A、B、Cの3地点で地震が観測され、震源から各地点までの距離が300km、200km、400kmであることがわかった。震源の地表での位置を地図上に記せ。

解　震源は半径300kmの球Aと半径200km球Bが交わってできる円の周上にある。これを地図に記すと、右図のように、震源の地表での位置は2円A、Bの交点を結ぶ線分上にある。



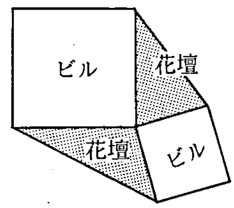
ところで、3つの円が交わるとき、2つずつの円の交点を結ぶ3本の直線は1点で交わるという性質から、震源の位置は下図の点Oである。



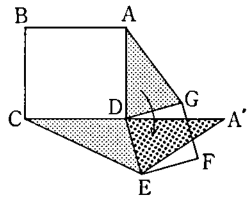
エ．変換幾何

図形の移動が日常的な課題に利用できることを示す。

問　2つの正方形のビルの間にある三角形の2つの花壇は面積が等しいことを示せ。



解

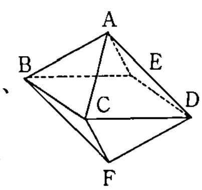


矢印のような、点Dの回りの90°の回転移動で△DEA'をつくると、これと△DECは底辺の長さと高さが同じ三角形である。

よって、2つの花壇の面積は等しい。

オ．投影図

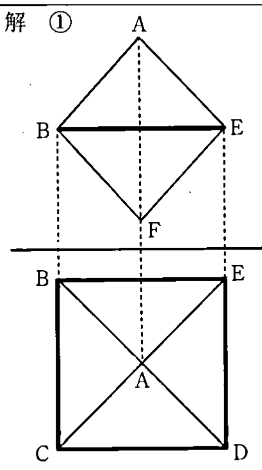
問　右の正八面体ABCDEFを次のように配置するとき、その平面図・立面図をかけ。また、その投影図の辺のうち実際の立体の辺と同じ長さのものを太線で示せ。

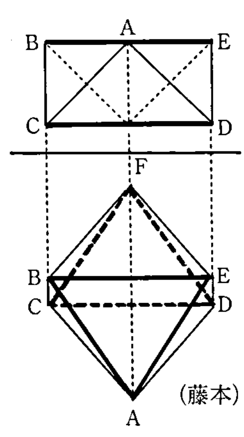


①AFが平画面に垂直で、BEが立画面に平行

②△ABEが平画面に平行で、BEが立画面に平行

解　①　　　　②





（藤本）

（5）数学B

① 数学Bにおける数学的な見方・考え方

数学においては、ある場面での考察およびそれから導かれる結果が、他の場面に適用または拡張して適用できることが多くあり、そのような2者の類似性を利用することは課題解決の方法として重要である。

たとえば、平面図形と空間図形においてそのような類似性をもつ図形は多くあり、これらの学習にあたってその類似性を意識させることは、数学的な見方・考え方を感じとらせる1つの有効な場面であろう。

ここでは、以上の観点から数学Bにおける「ベクトルの図形への応用」についての指導例を取り上げてみる。ベクトルは、平面、空間に依存しない概念であるから、平面図形・空間図形の類似性を考える場合の有効な手段となろう。

② 指導例

（1）平面、空間に無関係な図形の例

ア．直線のベクトル方程式

・1点を通りあるベクトルに平行な図形は、平面、空間のいずれにおいても、直線であることを確認させる。

（課題）点A $(\vec{a})$ を通り、方向ベクトルが $\vec{u}$ である直線 ℓ のベクトル方程式を求めよ。

ℓ 上に任意の点P $(\vec{p})$ をとると、

$\overrightarrow{AP} /\!/ \vec{u}$ であるから

$\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$ と表される。

これより、$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{u}$

よって、求めるベクトル方程式は

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$$

である。

・1点と1直線によって、平面は決定されるから、この場合の空間における直線と平面における直線とは、本質的には同じであることを確認させる。

イ．三角形の垂心と四面体への拡張

（課題1）三角ABCの各頂点から対辺にひいた3つの垂線は1点で交わることを証明せよ。

直角三角形のときは明らかに成り立つ。

直角三角形でないとき、

頂点B、Cから対辺にひいた垂線の交点をPとし、$\overrightarrow{PA} = \vec{a}$、$\overrightarrow{PB} = \vec{b}$、$\overrightarrow{PC} = \vec{c}$ とする。

$\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{AC}$ より、$\vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$$

$\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}$ より、$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

これより、$\vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$

$$(\vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$$

したがって、$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$

ゆえに、PA⊥BC

よって、三角ABCの各頂点から対辺にひいた3つの垂線は1点で交わる。

（課題2）四面体PABCにおいて、PB⊥AC、PC⊥ABならばPA⊥BCであることを証明せよ。

$\overrightarrow{PA} = \vec{a}$、$\overrightarrow{PB} = \vec{b}$、$\overrightarrow{PC} = \vec{c}$ とすると、課題1とまったく同じ推論で証明される。

・課題1の証明では、点Pが平面ABC上にあることは使われていないことに気づかせる。

・課題1は、課題2においてPが平面ABC上にある場合であることを確認させる。

（2）平面図形の拡張になっている空間図形の例

ア．円と球のベクトル方程式

・1点から等距離にある点の軌跡は、平面においては円、空間においては球であることを確認させる。

（課題1）点C $(\vec{c})$ を中心とし、半径がrである円のベクトル方程式を求めよ。

円C上に任意の点P $(\vec{p})$ をとると、

$|\overrightarrow{CP}| = r$ であるから、求めるベクトル方程式は $|\vec{p} - \vec{c}| = r$ である。

（課題2）点C $(\vec{c})$ を中心とし、半径がrである球のベクトル方程式を求めよ。

球面上に任意の点P $(\vec{p})$ をとれば、課題1とまったく同じ手順で導かれる。

・課題1の方程式を導く過程において、点Pが平面上にあることは使われていないことに気づかせる。

・ベクトル方程式が同じ形であることから、円で成り立つ性質は球でも対応する（拡張された）性質として成り立つことを感じとらせる。

イ．三角形の重心と四面体への拡張

（課題1）三角形の各頂点と対辺の中点を結ぶ3つの線分は1点で交わり、交点はそれぞれの線分を2：1に内分する。

△ABCにおいて、A $(\vec{a})$、B $(\vec{b})$、C $(\vec{c})$、BCの中点をL、ALを2：1に内分する点をG $(\vec{g})$ とすると、

$$\vec{g} = \frac{2 \times \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + 1 \times \vec{a}}{1 + 2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

ＣＡ、ＡＢの中点をそれぞれＭ、Ｎとすると、ＢＭ、ＣＮをそれぞれ２：１に内分する点の位置ベクトルは、同様にして、$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

となるから、結論が得られる。

（課題２）四面体の各頂点と対面の三角形の重心を結ぶ３つの線分は１点で交わり、交点はそれぞれの線分を３：１に内分する。

四面体ＡＢＣＤにおいて、$A(\vec{a})$、$B(\vec{b})$、$C(\vec{c})$、$D(\vec{d})$、△ＢＣＤの重心をＬ、ＡＬを３：１に内分する点を$G(\vec{g})$とすると、

$$\vec{g}=\frac{3\times\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}+1\times\vec{a}}{1+3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

△ＡＣＤ、△ＡＢＤ、△ＡＢＣの重心をそれぞれＭ、Ｎ、Ｏとすると、ＢＭ、ＣＮ、ＤＯをそれぞれ３：１に内分する点の位置ベクトルは、同様にして、$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

となるから、結論が得られる。

・辺の中点が三角形の重心に、$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$の相加平均が$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$の相加平均に拡張されて対応していることを確認させる。

ウ．直線と平面のベクトル方程式

本例の平面のベクトル方程式は、数学Ｂでは程度を越えるものとして扱わないことになっているが、平面図形から空間図形への拡張として非常にわかりやすい例であるから、扱っておきたい教材である。

・１点を通りあるベクトルに垂直な図形は、平面においては直線、空間においては平面であることを確認させる。

（課題１）点$A(\vec{a})$を通り、法線ベクトルが$\vec{n}$である直線ℓのベクトル方程式を求めよ。

直線ℓ上に任意の点$P(\vec{p})$をとると、

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AP}$であるから、$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

これより、求めるベクトル方程式は

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

である。

（課題２）点$A(\vec{a})$を通り、法線ベクトルが$\vec{n}$である平面αのベクトル方程式を求めよ。

平面α上に任意の点$P(\vec{p})$をとれば、課題１とまったく同じ手順で導かれる。

・ベクトル方程式が同じ形であることから、平面における直線で成り立つ性質は空間における平面でも対応する（拡張された）性質として成り立つことを感じとらせる。（宇佐川）

（６）数学Ｃ

①　数学Ｃにおける数学的な見方・考え方

つくられた数学を伝達する授業中心から、数学をつくっていく授業を中心にすることができれば、数学的な見方・考え方のよさを理解させることができるだけでなく、数学教育の目標の大半を達成できるであろう。

ここでいう『数学をつくる』とは、理想的には定理や性質を学習者自らが発見することであるが、これがなかなか困難な場合が多い。そのときは、これまでは証明が難しくて結論を注入されるだけであった定理や性質を、シミュレーションや実際に計算してみる等の実験や実測などによって、可能な限り研究する態度のことを意味していて、この態度は、数学を探求したり、発見する態度であるともいえる。

そして、学習者に数学を探求させたり発見させたりしようとするとき、強力な道具として、コンピュータがある。後は適当な教材を用意するだけである。

数学Ｃにおけるコンピュータの利用は、まさにこのようになっている。そして、コンピュータを利用した授業の理念であるところの『コンピュータを思考の道具として利用し、学習者に数学を探求させ、数学を発見させる』場面がたくさんある。

このような観点から、２つの例を示す。１つはコンピュータを利用することによって、数学的な見方（概念）の素晴らしさを認識させることをねらった『いろいろな曲線』の例であり、もう１つは数学的な考え方（アルゴリズム）の素晴らしさを認識させることをねらった『行列の掃き出し法』である。

問題点として、コンピュータを利用するのであるから、データの個数とか次元とかを制限する必要はないが、実際の教科書をみると、本文では仕方がないとしても、コンピュータを利用した実習の場面でもこのような制限がみられることは、誠に残念である。実際の授業では是非このような制限は排除して、コンピュータの威力を学習者に示すことで、数学的な見方・考え方のよさを十分に認識させたいものである。

（いずれも紙面の都合でプログラム部分は省略した）

②　指導例

ア．概念の素晴らしさを理解させる例

数学Ｃでは、コンピュータにより関数のグラフの表示や関数値の計算ができる。ここでは、双曲線

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

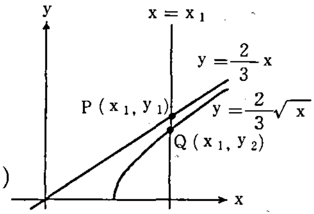
を例にして、双曲線は原点から遠ざかると、どのようになるかということを考えさせ、グラフと関数値を表示してこのことを確認させてみよう。

いま、$3 \leqq x$　の範囲で、直線 $x = x_1$ が直線

$$y = \frac{2}{3}x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と、双曲線

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9} \cdots ①$$



と交わる点を、それぞれ $P(x_1、y_1)$、$Q(x_1、y_2)$ とする。

$$PQ = y_2 - y_1 = \frac{2}{3}\left(x_1 - \sqrt{x_1{}^2 - 9}\right)$$

$$= \frac{6}{x_1 + \sqrt{x_1{}^2 - 9}}$$

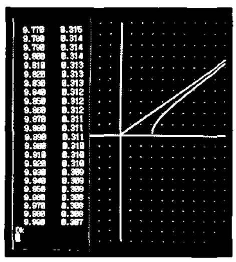
ここで、x_1 の値を限りなく大きくすると、この式の分子の値は一定であるが、分母の値は限りなく大きくなるので、$PQ = y_2 - y_1$ の値は限りなく0に近づく。

$$\text{ゆえに}\quad \lim_{x_1 \to \infty} \frac{6}{x_1 + \sqrt{x_1{}^2 - 9}} = 0 \cdots\cdots ③$$

すなわち、曲線①上の点が原点から遠ざかるにつれて、その点は直線②に限りなく近づく。この意味で、直線②を曲線①の**漸近線**という。

さらに、このことをコンピュータを利用し、x_1 の値に対する $y_2 - y_1$、の値を表示させてみる。

実行した画面は右のようになっている。



この例で学習者に理解させたいことは、コンピュータが画面に表示する膨大な計算は、③が意味していることの一部であり、③の表記やその考え方の素晴らしさである。

このように、考えることだけでなく具体的な計算を示し、概念の具体的なイメージを示すことは、数学をつくっていく態度といえよう。これからは、いろいろな場面で、このような指導が可能である。

イ．アルゴリズムの素晴らしさを理解させる例

たとえば、$\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$

について、連立1次方程式の係数と定数項からできる係数行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 18 \\ 2 & 5 & 16 \end{pmatrix}$ を考える。この行列から、

> Ⅰ．ある行のすべての成分に、0でない一定の数をかける。
> Ⅱ．ある行のすべての成分に一定の数をかけ、別の行の同じ列の成分にそれぞれ加えたり引いたりする。

の2つの操作Ⅰ、Ⅱを実行し、対角成分がすべて1で、係数の部分のうち対角成分以外の成分はすべて0である行列を導き出して、その連立1次方程式を解くことができる。この方法を掃き出し法といい、その手順は行列に着目して次のようにまとめられる。

消去法のための行列の変形

行列の行数を n とするとき、1から n までの各整数 i について、次の(1)、(2)をくり返す。

(1)　$(i、i)$ 成分で第 i 行の各成分をわり、$(i、i)$ 成分を1にする。

(2)　第 i 行の各成分に $(j、i)$ 成分をかけ、第 j 行からそれぞれ引き、第 i 行とは異なる第 j 行の第 i 列成分を0にする。

(3)　操作の途中で $(i、i)$ 成分が0になったときは、第 i 行より下の行で、i 列の成分が0でない行を探し、その行と第 i 行の成分をすべて入れかえ、(1)、(2)の操作を続ける。

この手順によるプログラムを実行すれば、次のようなややこしい連立方程式も一瞬に解くことができる。

$$\begin{cases} 123x - 456y + 789z = 43566 \\ 104x + 110y - 119z = 9438 \\ -987x + 654y + 321z = -2472 \end{cases}$$

$(x = 98、y = 97、z = 96)$

プログラムは n 元の1次方程式に対応できるようにしておくことが大切である。

ところで、コンピュータで計算するときは、3元に制限する必要はない。n がいくらであっても、上の手順で解くことができることが素晴らしいのであるから、学習者にこのことを強く印象づけたい。

数学Cにおいては、上記以外にも、コンピュータの利用により、数学をつくっていく授業が可能であり、したがって、数学的な見方・考え方のよさを理解させることができる教材はたくさんある。最初に述べたようなコンピュータ利用の授業の理念を高くかかげ、当面、このような授業が可能である教材や授業の場面についてのデータを蓄積していくことが必要である。

（井ノ迫）

3．おわりに

以上、新学習指導要領による高等学校数学科の６科目にわたって、数学的見方や考え方のよさを認識させる教材の事例をいくつか取り上げ、その意義や指導のポイントなどを簡単に考察してきた。新学習指導要領では数学的見方や考え方のよさを生徒に認識させることが目標の柱の１つになっており、第５報までつづけてきた本研究も、このような学習指導要領の改訂を意識してのものであった。

新学習指導要領において新しく加えられた内容は、個数の処理、コンピュータ、初等幾何、数学Ⅰでの確率、複素数平面などがある。逆に、新学習指導要領で削除された内容はというと、これといって大きなものはない。したがって、新学習指導要領では以前の内容を精選して新しい内容を加えているといえる。数学的見方や考え方のよさを認識させる観点からすると、幅広い内容から数学的見方や考え方のよさを認識させることになる。たしかに、教材内容の幅が広いということは、「多くの分野で数学的見方や考え方のよい面がある」ことを認識させられるので有利ではある。しかしながら、数学的見方や考え方のよさを認識させるためには、ある程度の数学的知識の量や深さが必要になることが多い。その意味では、新学習指導要領のような内容の精選だけでは指導しにくいところがある。内容の多様さは新学習指導要領の範囲内で十分であろうが、内容の深さでは物足りない部分がある。本稿ではこのような観点から、新学習指導要領の範囲を越えて、数学Ⅰで漸化式を中心に数列的な扱いをすること、数学Ⅱで積分の実用性を発揮させるために道のり計算を取り入れること、数学Ａで投影図を扱うこと、数学Ｂで平面図形の立体図形の類似性を認識させるために平面のベクトル方程式を扱うこと、数学Ｃで行列の次元を４次以上も積極的に扱うことなどを例示した。すべての内容について学習指導要領を越えたより深い知識を指導する必要はないが、ある部分では深い内容の指導に基づいて数学的見方や考え方を認識させることは実践されるべきであろう。　（藤本）