

数学的概念の認識過程についての基礎研究 (XV)

—構成主義に立つ算数・数学教育の実践的研究—

	中原 忠男	小山 正孝	山口 武志	武内 恒夫	森 保之
	高澤 茂樹	脇坂 郁文	藤本 義明	砂原 徹	
(協力者)	吉村 直道	清水 紀宏	岡崎 正和	尾崎 洋一	加藤 久恵
	久保 眞理	田中 和俊	山口潤一郎		

1. はじめに —本稿のねらい—

我々は本研究の (XIV)¹⁾において、構成主義に立つ数学教育の近年の研究動向を踏まえて、数学教育における構成主義の基本原則及びその哲学的・認識論的面的について考察するとともに、Cobb らによる、社会的構成主義に立つ算数・数学教育の実験的研究を整理、検討分析した。

本稿はそれに続くものである。ここではまず、構成主義に立って算数・数学教育の授業構成を検討し、併せてそれに基づいて実践的研究を進めている、Cobb, Kamii, 中原の3つの研究に着目し、その授業観や授業構成の原理、基本的な方法論を整理、検討する。ついで、それらの研究が一致して重要視している社会的相互作用、とりわけ討議に着目して、それを活用する仮設授業を構成、実践、分析し、構成主義に立つ算数・数学の授業における討議の様相やその役割の一端を説明することとする。

2. 構成主義に立つ授業構成の検討

2-1. Cobb らの授業構成

Cobb らは、Purdue 大学を中心にして「問題中心の数学プロジェクト」を組織して、社会的構成主義に基づく授業の実践的研究を精力的に進めている。そこで、まず、その授業観や授業展開を考察する。

(1) 授業観

Cobb らが基盤としている構成主義的立場は、今日、次のように要約することができる。²⁾

C 1. 数学的知識はある共同体内で構成され、メン

バー間の相互交渉などの協応的活動を経て、合意的領域を構築する。

C 2. 合意的領域内の数学的定理は、公共化された新生の真理とみなされる。

C 3. ある共同体内の合意的領域は、その共同体あるいは他の共同体のメンバーとの協応的活動を経て、再創造されたり、修正されたりする。

こうした数学認識論に基づいて、Cobb らは、数学の学習について、次のように述べている。

「数学の学習は、構成的でかつ相互作用的な問題解決過程である。」³⁾

これは、氏らの算数・数学の授業観を端的に述べたものと言える。そこに使われている、「構成」「相互作用」「問題解決」の3つの言葉は、氏らとその授業構成においてもっとも重視しているものであり、文字通り、氏らの授業観のキーワードをなしているものである。「構成」が基本となるのは当然であり、また、「相互作用」がそれを可能とする基本的な方法論に位置付けられていることについては、前稿でも述べたとおりである。そして、氏らは授業を基本的には問題解決過程として構成、展開するのである。これに関連して氏が「問題は、ありふれた教科書の問題ではなく、生徒が教室で目標を達成しようとするときに、生徒にとって生じる問題である。」⁴⁾と述べ、問題の性格を重視していることにも注目しておきたい。

(2) 授業過程の基本的パターン

これについては、次のように述べている。

「(数学の学習は) 典型的には、まず、小グループ

Tadao Nakahara, Masataka Koyama, Takeshi Yamaguchi, Tsuneo Takeuchi, Yasuyuki Mori, Shigeki Takazawa, Iku-fumi Wakisaka, Yoshiaki Fujimoto & Tohru Sunahara (Cooperators, Naomichi Yoshimura, Norihiro Shimizu, Masakazu Okazaki, Youichi Ozaki, Hisae Katou, Mari Kubo, Kazutoshi Tanaka & Junichirou Yamaguchi) : A Basic Study on Cognitive Processes of Mathematical Concepts (XV) — Practical Study of Mathematics Classroom Based on Constructivism —

による問題解決を行い、その後で、教師の指揮のもとに子どもたちの解法についての学級全体の討議を行う。」⁵⁾

これは、先のC1～C3の認識論的立場や上記の授業観に基づいて、大きくは

小グループの活動 ⇒ クラス全体の活動

の流れで、授業を構成・展開しようとするものである。氏らの授業過程をより明らかにするために、この点をもう少し検討してみよう。

まず、Cobbらは上記の展開について、詳しくは次のような流れにしている。⁶⁾

- ①クラス全体での問題の導入 (約5分)
- ②小グループでの解決活動とその発展 (約25分)
- ③クラス全体での討議 (15分～20分)
- ④クラス全体でのまとめ、練習 (10分)

また、小グループの活動とクラス全体の活動のそれぞれにおける社会的規範—義務あるいは期待される活動—として、次のようなことを挙げている。⁷⁾

小グループの活動の社会的規範

- (a) 教授的活動を完成するために、協力する。
- (b) 個人的に、挑戦的問題の解決に取り組む。
- (c) 小グループの仲間に自分の解決を説明する。
- (d) 仲間の説明を聞き、理解するように努める。
- (e) 解釈あるいは解決間で対立が明らかになった状況において、答えそして理想的には解決過程について、合意に達するように努める。

クラス全体の活動の社会的規範

- (A) 小グループにおいて、教授的活動がいかに解釈され、解決されたかを説明する。
- (B) 他者の説明を聞き、理解するように努める。
- (C) 他者の解釈や解決に同意、不同意、理解できないの反応を示すこと。
- (D) 解釈あるいは解決間で対立が明らかになった状況において、1つの解決を正当化し、他のものに疑問を提起しようとする。

これらから、小グループとクラス全体の活動において社会的相互作用が活用されることがわかる。なお、こうした社会的規範も、もちろん押しつけられるものではなく、これらもまた教師と子どもとの社会的相互作用を通して、つくりあげられるものである。

(3) 教師の役割

Cobbらの授業の1つの大きな特徴は、教師の役割に関わるものである。これについて、次のような立場をとることを明確にしている。

「教師は、(子どもの) すべての答、すべての解法を、

まったく評価しないで、受け入れる。」⁸⁾

したがって、たとえ子どもの答が間違っている、教師が直接それを指摘することはしないし、正しい答を正しいとして評価することもしない。こうした立場をとる理由は、「授業において重要なことは、数学について考えることであり、正しい答を得ることだけではない。」⁹⁾などの発言に現れている。それらを整理すると、次の諸点が挙げられる。

- ① 教師の評価は権威的になされるので、子どもが自分で考えることを妨げる。
- ② したがって、また権威に盲目的に従う子どもを育ててしまう。
- ③ 教師の直接的な評価は子どもには十分な納得や理解が得られない。
- ④ 子ども同士の相互作用を通して、誤りに気づき、正しい答が合意、共有されていく。

こうしたCobbらの考えに対しては、教師の役割を放棄するものである、という批判がなされるかもしれない。しかし、これらに対して氏は、「構成主義の指導は、何でも進めたり、教師の権威を放棄したり、社会的義務をやめたりするものではない。」¹⁰⁾と答えている。「教師は、その意図を教室の義務と期待の相互の構成を導くことによって成し遂げる。」¹¹⁾のである。その詳細については前稿を参照されたい。

2-2. Kamiiの授業構成

KamiiはPiagetの構成主義の正統的な後継者の1人であり、「構成主義的初等数学プログラム」という研究グループを組織して、構成主義に立った算数教育の実践的研究を進めている。ここでは、その授業観や教授原理を考察する。

(1) 基本的立場

Kamiiは、Piagetに従い、教育の最も重要な目的を「自律性 (autonomy) の育成」においている。ここで、自律性というのは、自分で自分を支配する—自分で考えそれに基づいて自分で判断し、行動する—という意味である。これについて、Kamiiは次のように述べている。

「足し算を記憶することやテストで高得点をとる能力などよりも、もっと大きな文脈の中で学習することの本来の意味について考えなければならない。言い換えるならば、自律性を私たちは教育の最終目標とみなす必要がある。」¹²⁾

また、Kamiiは、「ピアジェ理論の基本的要素を知ることとはたやすい。その要点とは、論理—数学的知識の本質と、この知識がそれぞれの子どもの内省的抽象作用によって構成されるという事実、および子どもの

思考活動と論理—数学的知識の構成にとって社会的相互作用が重要であるという事実からなっている。」¹³⁾として、数学的知識の構成において、反省的思考と社会的相互作用を重視することを明確にしている。

こうした考えに基づいて、Kamii は初期の算数の指導に対する構成主義からの最も重要な含意として次の2つのことを挙げている。¹⁴⁾

1. 正しい答を書くことよりも、子どもたちが考えることに、我々の目的や目標を焦点化する。
 2. 正しい答を強化したり、間違った答を正したりすることよりも、子どもたちが彼らの間で、同意すること、あるいは同意しないことを奨励する。
- そして、これらを実践するためにも、大人の権力にものをいわせることをできる限り小さくして、子どもと観点のやりとりをすることや、子どもたち相互の観点のやりとりと調整をうながすことなどを奨励している。

(2) 学習場面の構成

これについて、Kamii は「日常生活場面」と「ゲーム」を用いて、学習場面を構成することを提唱し、実践している。この点は、Kamii らの実践の大きな特徴と言える。

日常生活場面を活用するのは、算数は子どもたちが現実を論理—数学化するときの思考から生じるものであり、したがって、日常生活場面の活用により、幅広い文脈で算数を有意義に学習することができるからである。

また、ゲームを活用するのは、それが構造化された遊びという要素をもつので内発的に動機づけることができるし、子ども主体の展開ができ、さらにはゲームのルールに基づいて社会的相互作用を活発に行うことができるからである。このゲームの実施に際しては、適切なゲームを選択することを重視するとともに、次のような実践の原理を挙げている。¹⁵⁾

- ・子どもの着想や考え方が風変わりに見えても、それにつき合うこと。
- ・考える時間を子どもに十分に与えること。
- ・答の誤りやレベルの低い遊び方を直そうとせず間接的に口出しすること。
- ・友達との相互作用を奨励すること。

2-3. 中原の授業構成

中原は Glasersfeld らの急進的構成主義を検討し、それに協定という原理を組み込んで、協定的構成主義を提起し、それに基づく授業構成論を研究している。次にそれを考察する。

(1) 基本的立場

中原は、次の5つの原理に基づく授業構成論を構築し、それを「構成的アプローチ」と呼んでいる。¹⁶⁾

- CA 1. 子どもは数学的知識を、根源的には、子ども自身による心的構成によって獲得する。
- CA 2. 子どもは数学的知識を、基本的には意識化、操作化、媒介化、反省化、協定化の過程を通して構成し、獲得する。
- CA 3. 子どもによる数学的知識の構成過程においては、対象への働きかけ、すなわち操作的活動とその反省的思考が中心的な働きをする。
- CA 4. 子どもは数学的知識を、教師とのあるいは子どもどうしとの相互作用を通して、構成し、批判し、修正し、そして生存可能な (viable) 知識として、それを協定する。
- CA 5. 子どもによる数学的知識の構成過程においては、5つの表現様式すなわち、現実的表現、操作的表現、図的表現、言語的表現、記号的表現が重要な働きをする。

上記の CA 1 は認識論的原理、CA 2 は授業過程原理、CA 3 は、教授=学習の方法的原理であり、いずれも構成主義に基礎をおくものである。CA 4 は構成主義者や教授学者らによる、他者との相互作用の研究に基礎をおく方法的原理である。また、CA 5 は表現様式の研究に基礎をおく方法的原理である。このように、中原の「構成的アプローチ」は、構成主義的数学的認識論の研究、構成主義的立場に立つ認知や理解の研究、さらに数学教育における表現様式の研究をはじめとする構成主義的立場に立つ教授=学習の方法的原理の研究に基礎をおき、それを総合しかつ新たな知見を加えているところに特徴がある。

(2) 授業過程

構成的アプローチにおいては、CA 2 に基づいて次のような授業過程が考えられている。¹⁷⁾

P 1 : 意識化……第1段階は、子どもが、構成しようとする数学的知識の発生源と出会い、そこから問題を意識化し、その解決へ向けて見通しを立てる段階である。ここで教師がなすべきことは、子どもたちの興味・関心を高め、問題へと意識や注意を焦点化することである。

P 2 : 操作化……続く第2段階は、問題に対する見通しに基づいて、その解決をめざして操作的活動を行い、構成しようとする知識の原型をつくりだす段階である。教師は、そうした操作的活動のために有効な教具、学習具を用意することが求められる。

P 2.5 : 媒介化……次の媒介化は、操作化と反省化の懸隔を埋め、両者を媒介することを主要なねらいと

して、教材や子どもに応じて、必要な場合に設ける段階である。はじめの問題と関連のある新たな内容をもつ問題に取り組む、操作化の段階の活動と類似した活動を行う、などの学習活動を行う。

P 3：反省化……次は、操作化や媒介化の段階における活動を振り返って数学的抽象を行い、数学的知識を構成する段階である。したがって、教師は子どもたちが前段階の活動についてそうした思考ができるような発問を用意したり、相互作用の場を設けたりすることが求められる。

P 4：協定化……最終段階は協定化であり、ここでは反省化において構成された数学的知識を整理し、生存可能性などを検討・協議し、その結果を協定する。

この授業過程は、大きくみれば、前半は子ども一人ひとりによる個人的な構成、後半はそれに基づくクラスによる集団的な構成からなっている。

(3) 教師の役割

構成的アプローチにおける教師の役割は、基本的には次の3点である。¹⁸⁾

- ・子どもの学習の場の設定
- ・子どもの思考、とりわけ反省的思考の促進
- ・構成した知識の検討、協定の推進

したがって、ここにおいても教師が子どもの反応を直接に評価することはなされない。こうした立場は、CobbやKamiiと共通するものである。

2-4. 3つの授業構成の比較検討

上記で考察した、3者の授業構成、授業実践に共通する特徴として、次の2点を指摘することができる。

- ①社会的相互作用を重視している。
- ②教師は、子どもの反応を直接的には評価しない。他方、相違点としては、次の諸点が挙げられる。

〈Cobbらの授業構成、授業実践の特徴〉

- C①. 小グループの活動からクラス全体への活動を基本的な授業過程としている。
- C②. 数学的知識のクラスにおける合意、共有を目指している。

〈Kamiiらの授業構成、授業実践の特徴〉

- K①. 授業過程において個人の活動、小グループの活動、クラス全体の活動をとくに考慮していない。
- K②. 数学的知識の構成の方法論として、反省的思考、社会的相互作用の2つを重視している。
- K③. 学習場面として、日常生活場面とゲームの活用を重視している。
- K④. 数学的知識は客観性があり、個人の構成した数学的知識は、社会的相互作用によって、そうしたものに到達するとしている。

〈中原の授業構成、授業実践の特徴〉

- N①. 個人の活動からクラス全体の活動へを基本的な授業過程としている。
- N②. 数学的知識の構成の方法論として、反省的思考、社会的相互作用、表現様式の3つを重視している。
- N③. 個人の構成した数学的知識のクラスにおける協定を目指している。

3. 仮設授業の計画

3-1. 実施の意図とその方法

前節における考察において、構成主義に立つ授業においては、教師は子どもの答や解法に対して直接的に評価しないこと、数学的知識の構成において社会的相互作用一話し合い、討議一を重視していることが、共通していることを明らかにした。そこで、そうした立場に立つ授業を構成、実践し、それを通して、以下のことを実証的に検討することとする。

【検討課題1】討議を活用し、教師が評価者ではなく、司会者、調整者の立場をとる授業において、子どもたちが多様な考えを構成し、共有していくことが可能であるか。

【検討課題2】そうした授業において、自分たちの考えをどのように、練り上げ、共有していくか。

なお、この仮設授業の計画と実施については以下の通りである。

【授業の計画者】吉村 直道

【授業者】森 保之

【授業学年】広島大学附属小学校6年生

(全36名/女子19名・男子17名)

【実施日】平成5年12月16日

具体的な学習課題としては、次のものを設定した。

たかし君は、A町にある家からB町にある学校まで毎日通っています。

昨日は、家と学校との中間地点にあたるC地点まで時速5kmで進み、残った半分の距離を時速10kmの速さにスピードアップして学校に行きました。

そして今日も、いつもと同じように昨日と同じ時刻に家を出発して、同じ時刻に学校につきたいと考えています。ただし、今日はスピードアップすることなく、家から学校まで平均して一定の速さで歩いて行こうと計画しています。

さて、たかし君は今日、時速何kmで学校に向かえばいいでしょうか？

少々込み入った問題場面であり、この問題設定は小学6年生にとって難しいものである。しかし、子ども

たちがどれだけこの問題と真正面からぶつかってくれるかを楽しみ、あえてこの課題とした。ただし、「平均して」ということばを加えるかどうかについては、授業の直前まで迷った。

互いの考えを認めあい生かしあっていくという主旨からすると、オープンエンド的な課題設定の方がよいのであろうが、あえて正解と不正解に分かれるであろう対立意見の出る可能性のあるものを選んだ。というのも、課題に対する解答の正否が問題ではなく、なぜそのような対立が出てくるのかといった追求を通して、実際に子どもたちが何を共有してくれるのかに焦点をあてたからである。

さて、この課題を用いて仮設授業に臨んだわけであるが、その授業構成の概略としては、まず《問題理解》の場を与え、《自力解決》に取り組み自分なりの考えを構成させた。そして《身近な人とのコミュニケーション活動》を経て《クラス全体討議》へと展開した¹⁹⁾。さらに、個々の子どもたちがこの授業を通して、実際には、どのような考えを共有したのかをさぐる手がかりとして、学習課題に関連する問題（2題）と感想文とを家庭学習として課した。また、子どもたち一人ひとりに問題文を書いた学習シートを配り、授業中での筆記はそのシート上に行ってもらった。それは授業後に回収し考察の参考とした。

考察の方法としては、授業の様子をビデオカメラとテープレコーダーで記録し、子どもたちの活動の様子を活字になおし考察した。

3-2. 教材研究とその背景

まず、この学習課題の教材研究をしておきたい。この課題の特徴は、一見すると、普通に相加平均をとって時速7.5kmとするとよいように思えるが、正しくは時速20/3kmであるところにある。例えば、A C、C B間の距離を1kmに仮定すると、

$$\frac{2}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}}$$

となり、実は、この課題は、時速5kmと時速10kmの調和平均を求めるものであり、相加平均と相乗平均しか学習していない、今の高校生や大学生にとっても困難なものである。少人数でしかも口答ではあったが、高校生や大学生に「ある距離を、行き時速50km、帰り100kmで進みました。往復では大体どれぐらいの速さで進んだことになるか？」と質問したところ、ほとんどの者が時速75kmと答えた。確かめを要求すると、その解答を修正し正解にいたるが、なぜそうなるかについては明確には答えてくれなかった。

では、この課題のどこに困難さがあるのか？ それは、「速さ」という概念と「平均」という概念の曖昧な認識にあると考える。

まず、前者の「速さ」についてであるが、「速さ」というのは、「単位時間あたりに進む道のり」を表すものであり、「平均の速さ」も、この速さということばで表される。

そして、この問題の場合、時速5kmと時速10kmというのは「平均の速さ」としての速さが与えてあるにすぎない。つまり、この2数のままで相加平均をとってしまうと、「平均の平均」としてしまい、求めるべき「速さの平均」とは整合しないものとなる。

また、速さの定義から、単位時間あたりに進む「道のり」それ自体が速さと同一視される。それによって、本来、2種の割合であった質的量と言える内包量としての速さが、外延量的なイメージで認識されているのではないと思われる。これは速さの概念のよさである反面、外延量としての数との区別がつきにくく、5教科のテストの平均を求める如く、安易に相加平均をとってしまうのだと考えられる。

このことは、第2の困難さの原因としての「平均」の概念の認識にも関連する。

一般に、平均と聞いたら相加平均をイメージする。この相加平均は、簡単には、データとなる資料の総和をその資料の個数で割ったものである。これは資料の総和をとるので、外延量としての数を扱う場合の平均である。この学習課題のように、内包量を対象とする場合では、この相加平均の考えでは現実の場面とは整合しない答となる。

しかし、相加平均の考えでこの問題を解決する方法もある。そのためには、外延量的な個々の速さ、例えばA Bの距離を20kmにして、一時間ずつに区切った速さ、時速5kmがA C間に2回、時速10kmがC B間に1回現れると考えればよい。そうすれば、

$$\frac{5 + 5 + 10}{3} \dots\dots\dots (*)$$

と、相加平均を用いて解決することができる。

それとは別に、この内包量としての数、言い換えれば「平均の速さ」それ自体を使って考えるときには、

$$(\text{平均の速さ}) = \frac{\text{全体の距離}}{\text{全体の時間}} \dots (**)$$

という考え方に立ち、時速5kmで2時間進んだとして、

$$x = \frac{5 \times 2 + 10 \times 1}{2 + 1} \dots\dots\dots (***)$$

を計算することになる。これは、内包量を構成したもとの2種の外延量（距離と時間）に立ち戻る考えである。この考えにしたがえば、平均の速さとして与えて

ある2数を用いて、平均を求めることが可能となる。

ここで、数式(***)に注目してみると、これは加重平均を求めていることに気がつく。与えられた平均の速さにそれぞれの時間を重みとしてとって、その加重平均をとっているとも解釈できるものである。

ところで、この加重平均というのはそれほど難しいものではない。例えば、加重平均を求めている問題でも、次のような問題²⁰⁾の場合、それほど困難なく解決できる。

夏休みに図書館を利用した人の数は下の表のようでした。一人平均何回利用したことになるのでしょうか

回数(回)	5	6	7	8	9	10	計
人数(人)	4	6	11	9	3	2	35

先の学習課題とどこにその違いがあるかといえ、この課題の対象となっている2種の数はともに外延量であり、しかも重みとしての人数が問題設定の時点で顕在になっている点である。先の学習課題の方は、速さとその重みとなる時間は反比例の関係にあり、比例定数の値に応じて時間を特定することができるために、重みとしての時間が問題のなかに隠れてしまっている。それ故に、自分でその重みに気づかなければならないのである。つまり、たとえ加重平均を知っていたとしても、その重みが見えにくいために加重平均を用いる問題ということが意識されにくいのである。

このようにこの学習課題は、いろいろな困難さを含みもった問題である。これを小学6年生に課すわけであるから、ある意味でかなりの冒険でもあった。しかし、これまで相加平均しか学習していない小学6年生にとっては、この問題は外延量としての数の平均から、内包量としての数の平均、ともに扱える加重平均への拡張の一翼を担えるものであろうと考える。

以上が、この学習課題に対する我々の事前のとらえ方であった。

ここで、仮設授業実施の前に、教材研究に取り組んだ背景について断っておきたい。というのも、社会的構成主義者であるCobbらの研究のなかにおいて、次のものに似た指摘があろうと述べているからである²¹⁾。それは、教師側で事前に、こうしたある特定の解釈もしくは解法の構成に臨むのは、子どもたちにその教師の抱く考えを押しつけてしまうのではないか、また、教師側から討議活動等を設定すること自体も押しつけてのものではないか、という心配である。

これまでの教師の正当化の役割をできる限り子どもたちに譲るといふ、このような取り組みにおいては、我々は教材研究はこれまで以上に重要なものとなってくると考える。それは、子どもたちの多様なアイデアに対応していくためには、事前の教材研究は必要不可

欠なものであると考えるからである。そして、この取り組みにおいては、教師の役割の一つに数学的意味の協定の調整というものがある。それは子どもたちに反例を投げかけたり、特定のことがらについて焦点づけさせたりするものであるが、事前の教材研究なくして流動的な授業のなかで、そのような役割は適切には果たせないと考える。

しかし、この教材に対するこうした解釈がこれで絶対であるとか、これ以上にはないとか、そんな固定的な解釈を構成するのでは決してないことも最後に断っておきたい。

4. 仮設授業の分析・検討

4-1. 授業展開の概略

この仮設授業の分析・検討として、特に、クラス全体の討議のなかでどのように多様なアイデアを子どもたち自身が共有していったかについて考察していきたい。なお、より具体的な考察は4-2節で行うこととし、ここではまず授業展開を概観するとともに、教師の果たした役割を述べる。

クラス全体の討議のはじめに、この課題の解答として、予想していたように次の2つが発表された。

$$(ア) \quad 40 \div 6 = 6 \frac{2}{3} \dots\dots\dots ①$$

$$(イ) \quad (5 + 10) \div 2 = 7.5 \dots\dots\dots ②$$

なお、①はA Bの距離を10kmに仮定した答であった。

授業後に回収した学習シートの記録からでは、最初にイの解答をしていたのは20名であった。しかし授業中に確認した結果では、イの考えの人は11人となっていた。これは、討議活動に移る前にコミュニケーション活動に取り組んだこともあって減少したと思われる。

そして次の活動として、教師はこの2つの考えのそれぞれの立場の説明の場を設けた。この教師の働きかけは討議活動の司会者的な役割を果たすものであった。

それぞれの説明の後で、子どもたち同士によるその課題の検討へと移っていった。このときの子どもたちの発言は、ほとんどが自分の立場に立脚したものであった。また、子どもたちの発言は曖昧であったり省略的であったりした。

そうしたとき、教師は他の子どもたちにも分かるよう、その発表者に対してその不備を指摘し、発言を修正するよう求めた。と同時に、「誰か発表したらそれに対して反応を返してあげよう」とか、「今の意見に対して他の人たちどうだ?」といった具合に、討議活動が活発になるよう鼓舞していた。

そうして、検討が深まっていった際、教師がその2

つの考え方のなかで共通なところ、そして違うところ等を比較するよう焦点づけていった。それまでイの考えではいけないと思っていた子どももアの考えでも平均をしていることに気づいていった。

授業の終わりでは、距離が一定ではなく時間が一定であったらアの考えでもイの考えでも解決できる、とまとめていった。そして学習課題を、たとえば、途中までのA C間の距離を5 km、C B間の距離を10 kmに改め、A C間を時速5 km、C B間を時速10 kmで進むといった場面であれば、どちらの考えでも解決できることを確かめた。これが授業展開の簡単な概略である。

4-2. 個々のコミュニケーションに注目した考察

次に、仮設授業で実際にみられた個々のコミュニケーションに注目して、この討議活動における練り上げのプロセスを考察する。

(1) 2つの考えの対立、反例、修正

このクラス全体の討議は、2つの考えの説明から始まった。まず、イの立場の説明を聞いてから、アの立場の説明へと移っていった。なお、***は途中のことを省略したことを表す。

S 1：(イ) 速さを平均したらでると思って、かっこ5 たす10 割る2 でやってみました。

S 2：(ア) この長さをまず仮定して、で、*** A Bの長さが40キロだから、... A Cは半分だから20キロで、時速5 kmで行くんだから4時間かかって、で、この20キロをまた時速10 kmで行くんだから2時間かかるから、計40 kmを6時間で行くことになるから、***えっと、この答が正しい。

この説明の後、互いの考えの検討に進むわけであるが、実際には、アの立場の意見の主張が多かった。しかも即座にイに対して反例があげられた。

S 3：S 2君ので考えて、***こここの距離を40 kmと考えると、こっち(イ) でやってみたら、40割る7.5がここにある合計の6時間にならないから、こっち(イ) はちょっとおかしい。

S 4：打ち消せれんよ。じゃあ、7.5が正しい場合だって...

ここで、S 4の発言に注目したい。S 4は、S 3によって与えられた打ち消しを拒否している。なぜなら、イの考えはなんら距離については仮定することなく解を求めているからである。つまり、距離を40 kmに仮定したとき、イが否定されたからといって、それが間違いであるとは言えない、「7.5が正しい場合だってあるはずだ」という主張であろう。がしかし、時速7.5 kmで整合する場合が見つからないので、あまり強い主張とはなっていないと思われる。このS 4の発言によ

て、どんな距離においてもアの考えの方が正しいということ、どのように説明し得るかが興味深いところとなった。

実際には、S 4の発言に応えるために、再度同じような反例の説明がなされるが余り納得されないままであった。しかしその後、このS 4の発言に応えられる意見が提示された。

S 5：同じ距離で速さの比が5対10っていうことは1対2で、速さが1対2だったら時間の比は反比例で逆になって2対1になるから、***ということ、②時間と①時間で考えていきます。そしたら、時速5 kmかける②時間たす10 km毎時かける①っていうのが、x km毎時かける③にならないとおかしいから、これを計算すると、***6と3分の2になります。

$$5 \times \textcircled{2} + 10 \times \textcircled{1} = x \times \textcircled{3} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

S 6：変わった意見

S 5までのイに対する反例では、S 4の悩みは解消されないままであったが、S 5の主張は、それまでのものとは違っていた。それは特に、距離を仮定したわけでもなく、その上、かかった時間さえも比という考えを使って一般化して考えているものであった。この意見によって、それまで距離を仮定していたアの考えが特定の場面に制限することなく正当化され、実際、S 7にみられるように、その意見はイの立場であった者の考えを修正する力をもっていた。

この後もさらに、なぜイが間違いであるのかを説明しようとしていた。

S 7：えっと、こっち(ア) は距離が一定で、こっち(イ) は時間が一定として考えたから、距離が一定の場合、時速が違うんだから、時間が変わって、イの場合、時間が一緒だったら距離が変わるから、だから***イが違う。

S 8：直せる

S 9：(S 8) 僕はアなんだけど、僕はここを20 kmにして、ここを10 kmにしてやったんだけど、***これは時速5 kmが2時間だから5 たす5 で、ここは時速10 kmだから1回で行けるから、かっこ5 たす5 たす10 かつことじる割る3 でできる。

$$(5 + 5 + 10) \div 3 \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

S 10：ほー

S 11：はあー、はあー

S 8の発言は、S 7のアンダーラインの指摘を受けて、イの考えが時間をそろえたときのものならば、数式④とすればいいと言うものである。これは「アの考えが正しくて、イの考えが間違っている」という一方的な主張ではない。アの立場の人が、イの立場に踏み

込んでその考えを生かす方法を訴えているものである。「速さの平均」をとるならば距離が一定ということ踏まえた上で、その状況のなかに隠れている「個々の(外延量的な)速さ」、よく言えば本当の速さを見つけなければならなかったことに気づかせているのである。S10やS11から推察されるように、これはイの立場の人にも十分納得され得るものであったと思われる。

(2) 2つの考えの比較検討

次に、教師はこれまでの考えを数式①と③(以後、本稿では「距離に着目した考え」と表す)、そして数式②と④(「相加平均の考え」と表す)とをまとめて、これら間で比較検討するように促した。

T12: これ(距離に着目した考え)とこれ(平均に着目した考え)は違う? * * * * * 違うの? 一緒なの? どう?

(中略): * * * * * *

S13: えっと、この問題と全く違って、* * * 行きは4kmで行って帰りは6kmで行った場合、ここが12kmとして、ここも12kmとして、ここが2時間になってここが3時間になって[行きと帰り、そして全体を表す3つの面積図(図1)をかく]、* * * 平均の速さは24kmを5時間で割ったら4.8になって、この方法(イ)でいくと、6と4を足して割る2をするんだからこれは5kmになるはずなんだけど、これは、答は4.8だから、* * * これ(イ)は違うと思う。

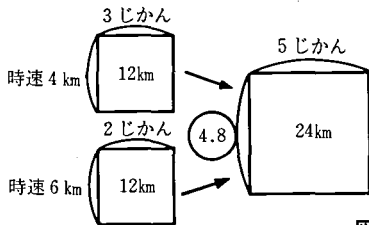


図1

S13の意見は、(本質的には同じであるが)問題の場面設定が違って、そして時速が違っていても、アの考えであれば有効であることを指摘している。つまり、アの考えであれば、この場合に限らずさまざまな場面にも適用可能であることを主張する点で、興味深いものであった。

しかし、S13はT12の意図するものとは違うものである。T12の教師の投げかけに対応する次の発言はその後であった。

S14: さっきS9君の考えとS5君の違いなんだけど、S9君は1時間でしょ[数式④の左辺の5、5、10の上にそれぞれ1時間と3つかく]、これ(数式①)は2時間、1時間だから[数式①の5と10の上に2

時間、1時間とかく]、これは[数式④を指さしながら]1時間、1時間、1時間に一定にそろえた、とさっき説明で言ったから、S9君のは時間を一定にそろえたんで、S5君のここを見たら分かるように10kmと10kmに合わせている[数式③の左辺を赤色で囲む]から、距離が一定にしているから、そこがS5君とS9君との違いです。

S14の表現はあまり適切なものと言えない。けれども、時間をそろえた場合であれば、これまでの平均の考えが利用できることを主張しているのであり、それは共有できているようである。

(3) 面積図の考え

さらに、子どもたちのコミュニケーションは、先のS14の面積図の考えを利用したものへと進んでいった。S15: 面積図で考えるんだけど、横を時速とします。ここは10kmだから10として、ここを5kmにします。こことこの面積は同じだから、ここを4にしたら20kmで、ここも2時間にしたら、* * * この状態なんだけど(図2) * * * これを同じようにこの凸凹になっているのをきれいにするんだから、S16: あっ、平均とするんだ!

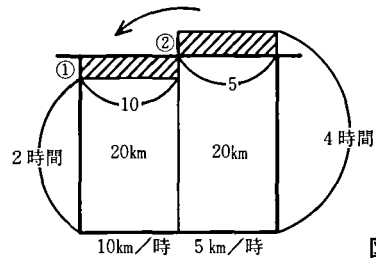


図2

S16の驚きから分かるように、距離に着目した考えが、これまで違うと考えていた相加平均の考え方と実は類似な側面をもつことが、この面積図の提示によって明らかにされた。しかし残念なことに、図のように速さを横軸にそって並べておいてしまったために、面積を一樣にするための直線のとり方に混乱を起こしてしまった。

この発言以後、縦軸や横軸のとり方、そして平均するための直線のとり方を変えたりしながら、この面積

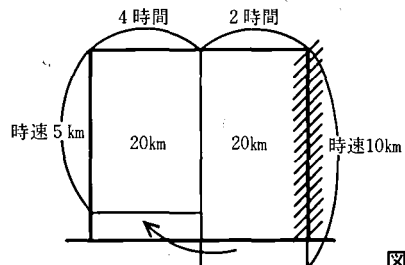


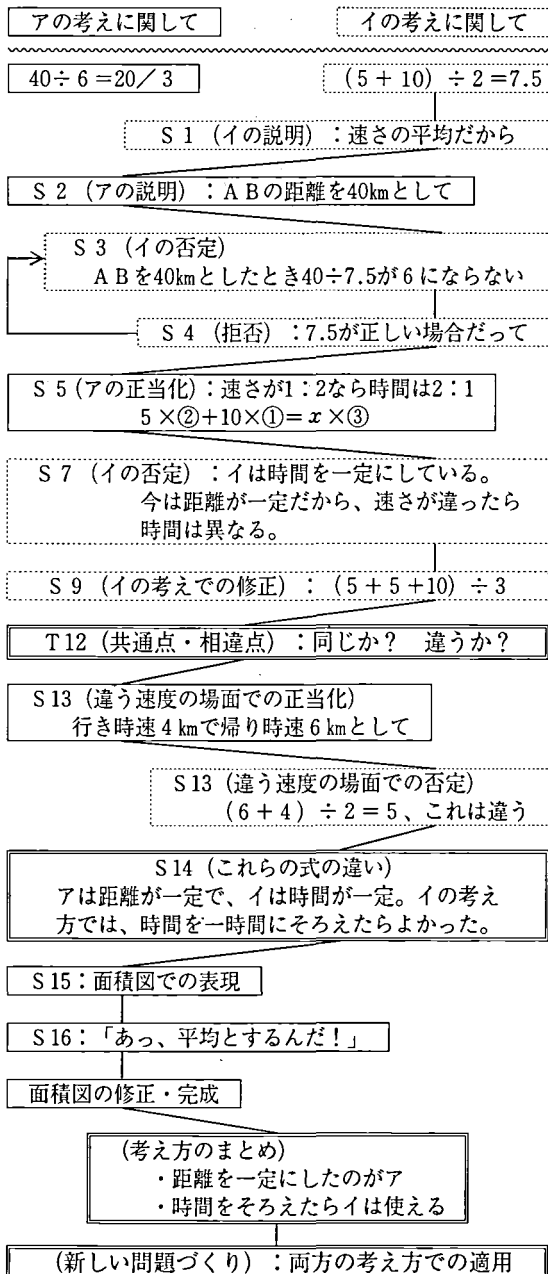
図3

図の完成にしばらく四苦八苦することになる。しかし、最後には図3を完成させた。

最後に、授業のまとめとして、

- 両方とも何かを一定にして考えている。
- イを修正して、数式④みたいに時間を1時間にそろえたらよかった。

という2つを整理した。そして、「どんな場合だったらイの考え方が使えるか？」という教師の投げかけから新しい問題をつくっていった。



〈討議プロセスのフローチャート〉

(4) 討議プロセスのフローチャート

ここで、全体を通して子どもたちの発言の関係をみると、本頁左のようなフローチャートにまとめることができる。なお、アの考えに関するものを実線で、イの考えに関するものを点線で、そして両方の考えに関するものを二重線で表している。

このフローチャートで確認できるように、討議活動全体の流れのなかでは、アの考えとイの考えが紆余曲折しながら展開していることが特徴であり、実態である。

(5) 検討課題の考察

教師が司会者、調整者の立場をとるこの仮設授業において、子どもたちが構成した多様な考えは、次のように整理することができる。

- I : 距離を仮定する考え (式①)
- II : 単純な相加平均の考え (式②)
- III : 時間の比の考え (式③)
- IV : 修正された相加平均の考え (式④)
- V : 面積図の考え

この討議活動を通して、I、III、IV、Vの考えがでるとともに、(**)の考えを媒介にしてIからIIIへ一般化されたことと、IIが修正されてIVがでてきたこと、そしてIとIIIのわかりやすい表現としてでてきたVがそれら2つの考えとIVを結びつける役割を果たしていたことを考慮すれば、子どもたちが多様な考えを構成し共有できるかという検討課題1は可能であったと言える。

次に、検討課題2について考える。はじめ、対立した2つの考えから出発して、反例や、一方の考えの一般化、そしてもう一方の考えの修正などを受けて、クラス全体の合意へと達していく。これまでのS6やS10やS11といった発言にもあるように、どの時点で、自分の考えの誤りに気づいたり、相手の考えに合意するかは個人で異なっている。

例えば、ある特定の反例⑥だけでは納得できなかった者も、アの考えの一般化⑤やイの考えの修正⑦を受けて合意へと達したり、それまで異なるものと思っていたアの考えとイの考えが図表現⑧によって共有されたりしている。その展開はさまざまである。

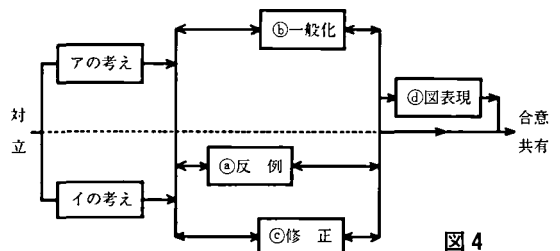


図4

つまり、練り上げ、共有する過程は、個々人によって異なるものの、㉑、㉒、㉓、㉔のいずれかあるいはそれらの相乗効果によって合意・共有へと達していると考えられる(図4)。

5. おわりに 一まとめと今後の課題一

本稿では、まず Cobb、Kamii、中原の3つの研究に着目し、構成主義に立つ授業構成を検討した。その考察より、3者の授業実践に共通する特徴として、次の2つを明らかにした。

①社会的相互作用を重視している。

②教師は、子どもたちの反応を直接的に評価しない。

そこで、これらの視点から構成主義に立つ授業を実験的に設定し、その討議の様相の解明に取り組んだ。

その結果として、教師が司会者、調整者の立場をとる討議活動において、子どもたちが多様な考えを構成し共有していくことができることと、この取り組みにおいては、反例、修正、一般化、図表現の相乗効果によって合意へと達したことを明らかにした。

また、この授業全体を通して、子どもたち自身は意欲的かつ積極的に、討議というコミュニケーション活動に取り組むこともできた。

そして、授業後の感想のなかには、

a：平均する場合にも2つあって「単に2つをたして÷2とする」と「男子と女子それぞれ平均が出ていて、クラスの平均は？」という場合のように、かけてわるタイプがあって使い分けなくてはならない

b：(速さ+速さ)÷2で答が出るというのは、
(速さ×時間【仮に1】+速さ×時間【仮に1】)
÷2【時間】を簡単にしたもの

といったものもあった。その一方で、

○意味がよく分からなかった。

○難しかった。苦労した。

等の意見もあった。

この仮設授業に限っては、それ以前の授業とはまったく無関係に導入したものであり、また扱った学習課題も小学校6年生には複雑なものであった。しかし、感想にあったaやbの意見を次の授業に取り入れながら、こうした平均の課題研究を続けていけば、今回の仮設授業で構成した考えそれ自体も再構成され、子どもたちにとってもより納得のいくものとなるのではと考える。

より精緻な調査検討は必要であるが、表面には現れにくいものの教師の隠れた配慮による、こうした授業実践への取り組みは子どもの可能性を伸ばす授業への地平を切り開くと考えられる。

<引用文献および参考文献>

- 1) 小山正孝, 中原忠男他, 「数学的概念の認識過程についての基礎研究(XIV)ー構成主義に立つ数学教育の基本原理と実験的研究の分析ー」, 広島大学学部附属共同研究体制紀要, 第21号, 1993, pp.31-40.
- 2) 中原忠男, 「数学教育における構成主義の研究(1)ー急進的構成主義から社会的構成主義へー」, 西日本数学教育学会発表資料, 1992, p.9.
- 3) Cobb, P. et al, "Interaction and Learning in Mathematics Classroom Situations", *ESM*, February, 1992, pp.99.
- 4) Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E., "A Constructivist Approach to Second Grade Mathematics", In von Glasersfeld, E. (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 1991, p.158.
- 5) Cobb, P., "Multiple Perspective", In Steffe, L.P. & Wood, T. (eds.), *Transforming Children's Mathematics Education: International Perspective*, LEA, 1990, p.208.
- 6) op. cit. 4), pp.159-160.
- 7) Cobb, P., "Reconstructing Elementary School Mathematics - 1990 John Wilson Memorial Address", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 1991, Vol. 13, No.2, p.17.
- 8) op. cit. 4), p.17.
- 9) op. cit. 4), p.160.
- 10) op. cit. 4), p.165.
- 11) op. cit. 4), pp.165-166.
- 12) カミイ, C. K. 他著, 平林一栄監訳, 『子どもと新しい算数』, 北大路書房, 1987, p.46.
- 13) 上掲書, p. x iii
- 14) Kamii, C. K., "Constructivism and Beginning Arithmetic (K-2)", In Cooney, T. J. & Hirsch, C. R. (eds.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*, NCTM, 1990, pp. 26-27.
- 15) 前掲書, 12), pp.219-224.
- 16) 石田忠男, 『数学教育における「構成的アプローチ」による授業過程の研究』, 広島大学学位論文, 1992, p.28.
- 17) 上掲書, pp.201-210.
- 18) 上掲書, p.194.
- 19) 吉村直道, 『数学の授業におけるコミュニケーションに関する研究』, 広島大学修士論文, 1994.
- 20) 川口廷一・松信ほか, 『小学校算数 6年下』, 学校図書, 1992, p.91.
- 21) op. cit. 3), p.101.