広島大学教育学部　学部附属共同研究体制研究紀要
〈第21号　1993．3〉

数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業の開発

——高校数学の内容に関する数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業——

中原　忠男　小山　正孝　山口　武志
片山　一法　新上　勇　宇佐川信行
酒井　秀二　井ノ迫泰弘　平岡　賢治
河野　芳文　藤本　義明　砂原　徹

1．はじめに

本稿は，本テーマに関わる共同研究の第４報に当たるものであり，高校数学の内容に関わる数学的な見方や考え方に焦点を当て，それらのよさを認識させる授業を試みたものである。以下においては，第１学年から第３学年まで，各学年の授業を取り上げ，テーマから見た授業の工夫やその結果について述べていく。

2．第１学年における授業実践

（1）三角形の性質

①授業の概要

平成６年度から学年移行で実施される新しい学習指導要領では，新科目「数学Ａ」が取り入れられ，その内容の１つとして平面幾何を扱うことになった。これは，国際数学教育調査などで，平均の得点としては高水準で評価される反面，知識・技能に偏っていて，思考力・創造力に欠けるとの批判を受けている日本の数学教育の改善にとっては望ましいことであろう。

またこの平面幾何は，今回数学教育の目的に上げられている「・・・数学的な見方や考え方のよさを認識・・・」させる授業の教材として，最も適切なものの１つと思われる。

そこで，重要であり，かつ，わりあい基本的な定理でありながら，中学校で十分には扱われていない定理「三角形の１つの頂角の二等分線はその対辺を他の２辺の比に内分する」について次ページのような指導を試みた。その骨子は次の通りである。

上記の定理の証明を，

1．底辺と高さを見る観点を変えて面積の比を用いて証明する。
2．平行線の性質を用いて証明する。
3．1．と類似するが，図形の移動を利用して面積の比を用いて証明する。

の３通りの方法で行い比較させる。次に，外角の二等分線について同様のことを試みさせる。

以上の証明を比較あるいは試行させることにより，数学的な見方や考え方のよさを認識させることができると考えた。

②授業を終えて

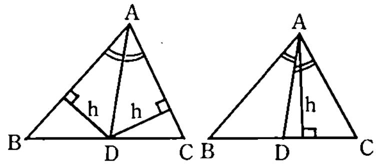
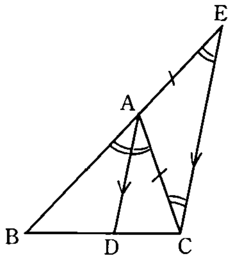
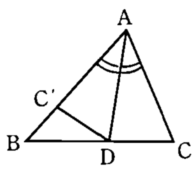
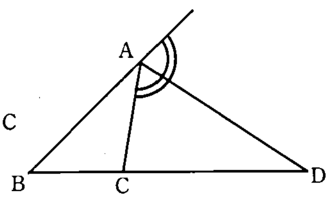
まず反省点として，3．の証明が1．の証明と類似しているため，その意義が十分に示せない。また，理解されない面があると感じられたこと，証明することがらが６つとかなり多過ぎたこと，展開の仕方としてやや教師主導的になったことなどが挙げられる。

一方，1．の方法と2．の方法との比較は，考え方の転換が，全く異なった証明方法をもたらすことを理解させるのに十分有益であったと思われる。また，内角の二等分線についての証明と外角の二等分線についての証明のアナロジーは，ユークリッド幾何の証明のすばらしさを感じさせることができたであろう。さらに，これら異なる方法と類似の方法を並べ比較することはそれらの性質をきわだたせるために役立ったと考えられる。

新しく取り入れられた「平面幾何」では，このような扱いのできる教材がまだまだあると思われる。

Tadao Nakahara, Masataka Koyama, Takeshi Yamaguchi, Kazunori Katayama, Isamu Shinkami, Nobuyuki Usagawa, Syuji Sakai, Yasuhiro Inosako, Kenji Hiraoka, Yoshifumi Kono, Yoshiaki Fujimoto & Toru Sunahara : A Study on Teaching for Appreciation of Mathematical Thinking and Ideas ; Teaching Practice for Appreciation of Mathematical Ideas on the Contents of Senior High School Mathematics.

指導案１―１　　(平成４年12月10日(木)実施　授業者　酒井　秀二)

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点
(導入) ○課題の提示	◎定理「三角形ＡＢＣにおいて，∠Ａの二等分線と辺ＢＣとの交点をＤとすると　ＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＤＣ　である」 の事実を確認する。	・何人かは中学で学んでいる
(展開) ○証明法１	◎上の定理を，右の図のように，△ＡＢＤと△ＡＣＤを，ＢＤ，ＤＣを底辺と見る場合とＡＢ，ＡＣを底辺と見る場合の面積比から証明する。  	・板書では，三角形は２つかかないで，高さをかき入れたり消したりして示す
○証明法２	◎上の定理を，右の図のように，ＡＤに平行な線分ＣＥを引くことによって，平行線と線分の比を用いて証明する。  	・中学ではこの方法で学習している
○証明法３	◎上の定理を，右の図のように，三角形ＡＣＤを直線ＡＤに関して対称移動して証明する。  	・証明法１との違いに留意する
○証明法の検討	◎以上の３つの証明法について，比較検討する。	・補助線に注意させる
○外角の場合	◎定理「三角形ＡＢＣにおいて，∠Ａの外角の二等分線と辺ＢＣの延長との交点をＤとすると　ＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＤＣ　である」 の事実を確認する。  ◎内角のときと同様に３通りの方法で証明を試みさせる。この場合補助線については必要に応じてヒントを与える。	・結果は生徒に予想させる ・机間巡視を行う ・十分に時間をとる
○証明法の検討	◎内角の場合とも比較させながら証明法について，類似の点・異なる点を研究させる。	
(まとめ)	◎以上の６つの証明法について考え方を整理し，数学的な見方や考え方の特質を認識させる。	
備考　　教材はプリントで用意する。		

指導案２―１（平成４年11月13日(金)実施　授業者　藤本　義明）

<table>
<tr><th>学習内容</th><th>指　導　過　程　・　学　習　活　動</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td colspan="3">＜前時の学習＞（30分）
（課題）１からｎの数字が書かれたｎ枚のカードを１列に並べる方法 a_n は何通りあるか。
・a_3 を試行錯誤で求めさせる：(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)
・a_3 に基づいて，a_4 を求めさせる。
例：(2, 1, 3)に対して，４番目に４をおき；(2, 1, 3, 4)
４を他の３数と入れ換える；(4, 1, 3, 2), (2, 4, 3, 1), (2, 1, 4, 3)　}　４通り
よって，$a_4 = 4a_3$
一般に，$a_n = na_{n-1} = n(n-1)a_{n-2} = \cdots = n!$　　$\therefore a_n = n!$</td></tr>
<tr><td>１．導入</td><td>◎前時の復習をし，１からｎの数字が書かれたｎ枚のカードを１列に並べる方法の数を求める漸化式が $a_{n+1} = a_n \times (n+1)$ であることを確認する。</td><td></td></tr>
<tr><td>２．課題１

３．課題２</td><td>**（課題１）６色のコップと同じ色の６色の玉がある。６個の玉をコップに１個ずつ入れるとき，何通りの入れ方があるか。**
◎前時のカードを並べる課題と同じ考えであることに気づかせ，前時と対比させて，次の２点を確認する。コップや玉の数がｎのときの，入れ方の総数を a_n とする。
・a_n に対して，$n+1$ 番目の玉を $n+1$ 番目に置いた後，その玉を $1 \sim n+1$ 番目までの玉の内の１個と置き換えれば，a_{n+1} が得られること。
・$a_{n+1} = a_n \times (n+1) = (n+1)!$
（課題２）コップの中の玉を入れ替えて，コップと玉の色が違うようにしたい。何通りの入れ方があるか。
◎コップや玉の数がｎのときの入れ方の総数を b_n とする。
・$b_1 = 0$，$b_2 = 1$，$b_3 = 2$，$b_4 = 9$ であることを試行錯誤で求めさせる。
・$n = 4$ の場合をとらえ直して，$b_4 = 3b_3 + 3$ であることを理解させる。
・$n = 5$ のとき，$n = 4$ と同じ考え方により，$b_5 = 4b_4 + 4b_3$（=44）であることを理解させる。
・$b_6 = 5b_5 + 5b_4$（=265）であること確認して，一般に，$b_{n+1} = nb_n + nb_{n-1}$ であることを導く。</td><td>・各色に１～６の数字を割り当てることにより前時の課題と同じであることに気づかせる。

・$a_6 = 6! = 720$ を確認する。

・b_4 を求めるとき，a_3 を同色の組が０，１，２の場合に分けた上で４番目をつけ加えて b_4 をつくると考える。可能なのは同色が０と１の場合だけである。</td></tr>
<tr><td>４．コンピュータの利用</td><td>◎コンピュータを利用して，数列 $\{b_n\}$ について調べる。
・問　10桁以上の数になるのは第何項以降か。
・・・・・・・，$b_{12} = 176214821$，$b_{13} = 2290792932$
答　第13項以降
・隣り合う項の比 $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ を求める。
<table><tr><td>n</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td rowspan="3">$\frac{b_n}{b_{n-1}}$</td><td>2.000000</td><td>4.500000</td><td>4.888889</td><td>6.022727</td><td>6.996226</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>8.000539</td><td>8.999933</td><td>10.000007</td><td>10.999999</td><td>12.000000</td></tr></table>よって，$\frac{b_n}{b_{n-1}} \fallingdotseq n$ と近似できる。</td><td>・この漸化式から一般項を導くことは難しいことをおさえておく。</td></tr>
</table>

３．第２学年における授業実践

（１）漸化式とコンピュータ

①授業の概要

前頁の指導案２―１の授業は，次の２点を目標として数列の漸化式を指導したものである。

１．与えられた課題に対して，漸化式がつくれるようにする。

２．コンピュータの利用により，漸化式を用いて考えることのよさを認識させる。

従前の漸化式の指導では，漸化式を解いて一般項を求めることに重点がおかれてきた。確かに，一般項を求めることができれば，これに越したことはないのであるが，漸化式から一般項を求めることはなかなか難しい内容である。しかし，コンピュータが利用できることになれば，一般項を求めるまでもなく，漸化式からその数列の性質や変化のようすなどを簡単に知ることができる。したがって，コンピュータ時代の数列の漸化式の指導では，いろいろな場面のなかで漸化式を立てることがより重要であると考えられ，コンピュータを利用して漸化式のよさが認識される。本授業はこのような主旨により実施した。

②授業を終えて

本時の漸化式の指導に際し，本時の基礎となるものを前時で指導しておいた。前時と本時のバリエーションをつけるために，前時ではカードの並べ方，本時ではコップに玉を入れる入れ方をあつかった。これら２つの内容は同じ考え方であるが，生徒には別のもののように思われたらしく，両者が同じ考えであることを理解させるのに手間どった。前時と本時の内容を同じものにすべきであった。

コンピュータで前後の項の比$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$を計算させ，その値がｎで近似できることを知ると，生徒はかなり興味を示した。一般項をもとめないで数列の興味ある性質がわかったことで，漸化式のよさを実感できたと思われる。本時では扱わなかったが，近似式

$$b_n \fallingdotseq n \times b_{n-1}$$

により，コンピュータを用いてこの数列を調べてみることも良いであろう。例えば

$$\begin{aligned} b_n &\fallingdotseq n \times b_{n-1} \\ &\fallingdotseq n \times (n-1) \times b_{n-2} \\ &\quad \cdots\cdots \\ &\fallingdotseq n\,! \end{aligned}$$

という近似について調べることも考えられる。

なお，本時の内容は「撹乱順列」であり，一般項は

$$b_n = n\,! \left\{ \frac{(-1)^2}{2\,!} + \frac{(-1)^3}{3\,!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n\,!} \right\}$$

である。

（２）漸化式の応用

①授業の概要

次頁の指導案２―２の授業は，「漸化式の応用」の題目で，次の点を目標にして，実施したものである。

１．日常的な場面において，数学的モデルを利用して事象を解析することにより，数学的な見方・考え方のよさを知らせる。

これは，漸化式の意味，基本的な漸化式から一般項を求めることなどについて指導した後に行った授業である。ただし，２つの数列に関係して連立の形になった漸化式は，全く扱っていない。漸化式をできるだけ具体的な場面に結びつけ，漸化式の有用性，さらには数学の有用性を生徒に感じさせ，数学的な見方・考え方のよさを認識させようと意図して内容を構成した。

テーマは，噂が広まっていく過程を考えようというものであるが，漠然とした問題では考えようがないし，複雑すぎても考えることが困難になる。そこでまず，数学的にモデル化された課題を設定する必要がある。そして，設定した課題を図式化し，漸化式をつくり，数列の値の変化を考えさせた。この際，多量の計算をする場面ではコンピュータを補助手段として利用し，生徒に提示した。その結果を見ながら，日常の場面にかえって，噂の広まり方について考えてみた。

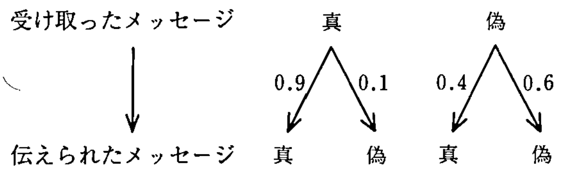
本質的にはマルコフ連鎖を扱っているが，行列が未学習であったため，指導しにくい点もある。しかし，数列やベクトルなどが社会科学などの分野でも利用されていることを知らせることができる授業内容である。

②授業を終えて

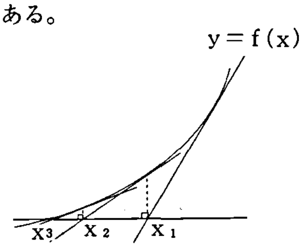
教科書にはあまりでてこないような課題の提示であったため，生徒は最初はかなり戸惑いを感じたようであった。しかし，課題のモデル化，図式化を経て，式を立て，計算し，結果を考察するという過程を踏んでいく中で，ここで扱われている数学的な見方・考え方の意味を知り，さらには結果の意外性に驚いていたようであった。

だが，最初の課題の設定において，何を求めたいのかもう一つわかりにくい点があることや，計算したり推測したりする場面が多かった割にはそれが十分生かしきれていなかったことは，改善の余地がある。数列の一般項を求めることも可能であるから，この点をもっと丁寧に扱うことも考えられる。また，コンピュータは，１台だけ使って生徒全員に提示する形態をとったが，どの場面でどういう使い方をするのが最も効果的であるか，プログラムは簡単なものであるから，その内容も生徒に示すのがよいのではないかということなどは，今後さらに研究しなければならない課題である。

指導案２－２（平成４年12月４日(金)実施　授業者　砂原　　徹）

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点
（導　入） 課題の設定	・噂が広まっていく過程について，次のようにモデル化して考えてみよう。	
数学的にモデル化された問題	ある噂が真であると伝え聞いた人は，0.1の割合で噂が偽であると別の人に伝え，噂が偽であると伝え聞いた人は，0.4の割合で噂は真であると別の人に伝えるものとする。このとき，噂が広まっていくにつれて，伝えられた真偽はどのような割合になっていくであろうか。	・日常的な問題ではあるが，数学的にモデル化されていることにふれる。
（展　開） 問題の図式化	・次のように図式化する。  	
初期条件を与える	・１人目が噂を真だと思っている割合を0.9とするとき２人目，３人目が真だと思う割合を求めさせる。	・割合…正確には確率
漸化式をつくる	・ｎ人目の人が噂を真であると思っている割合をa_n，偽だと思っている割合をb_nとして，a_{n+1}，b_{n+1}を式で表させる。 ・ｎが大きくなっていくとどうなるか推測させる。	・$a_{n+1}=0.9a_n+0.4b_n$ $b_{n+1}=0.1a_n+0.6b_n$ ・ごく直観的に予想させる。
初期条件の変更	・$a_1=0.5$，$b_1=0.5$とするとき，a_2，b_2，a_3，b_3を順次求めさせる。 ・ｎが大きくなっていくとどうなるか推測させる。 ・$a_1=0$，$b_1=1$とするとき，a_2，b_2，a_3，b_3を順次求めさせる。 ・ｎが大きくなっていくとどうなるか推測させる。	
コンピュータの利用	・コンピュータを用いて，いろいろな初期条件を与えて計算してみる。 ・初期条件をどのように設定しても，$a_n=0.8$，$b_n=0.2$に収束することに気づかせる。	・漸化式の係数（推移行列）にのみ依存する。
a_n，b_nの一般項	・a_n，b_nの一般項を求め，それからも収束がわかることを知らせる。	
（まとめ）	・本時で扱ったような問題は，社会科学などの分野で，ベクトルや行列を利用して研究されていることを述べる。	

指導案２－３（平成４年12月９日(水)実施　授業者　井ノ迫泰弘）

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点
(導　入) ●課題の確認 ・$\sqrt{3}$の近似値を求めること	●本時は，微分法を利用して$\sqrt{3}$の近似値を求める方法を学習することにする。 このために，次のことを確認しておく。 ・$\sqrt{3}$は無理数，すなわち循環しない無限小数であるから，分数で表せない。	・最初に「本時は$\sqrt{3}$を分数で表してみよう」と説明し生徒の注意を喚起する。 ・$\sqrt{3}$の小数1444位までの近似値をプリントしている。
(展　開) ●課題の解決のために ・ニュートン法の学習	●ニュートン法による$\sqrt{3}$の近似値の求め方を理解させる。 (1) $\sqrt{3}$の近似値を求めるのであるから，関数$f(x)=x^2-3$のグラフを考える。 (2) 右下図のように，$\sqrt{3}$より大きい値をx_1とするとグラフ上の点$(x_1,\ f(x_1))$における接線とx軸との交点のx座標x_2がきまる。 以下同様な手順で，接線とx軸との交点のx座標x_3，x_4，・・・・がきまり，これらのx座標が$\sqrt{3}$に限りなく近づいていくことを理解させる。	・後で利用するプログラムは，$\sqrt{3}$より大きい値を１つ指定すれば，これによってきまる接線や，接線とx軸との交点などを表示し，ニュートン法のしくみが理解できるようにしたものである。 
・計算により$\sqrt{3}$の近似値を求めること	●ニュートン法によって$\sqrt{3}$の近似値がえられることを計算によって確かめさせる。 (1) $x_1=2$として，対応する接線や接線とx軸との交点のx座標などを求め，x_2，x_3，x_4の値を計算して求めさせる。 たとえば，$x^2-3=f(x)$とおくと $f'(x_1)=\dfrac{f(x_1)}{x_1-x_2}$となり，$x_2=1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ 以下，同様に計算させる。 (2) 最初のプリントの値とx_2，x_3，x_4の値を比較し，$\sqrt{3}$の近似値がえられることを理解させる。 (3) 電卓で計算させた後，パソコンで計算させ，よりよい$\sqrt{3}$の近似値がえられることを理解させる。	・$x_1=2$とすると， $x_2=\dfrac{7}{4}$，$x_3=\dfrac{97}{56}$，$x_4=\dfrac{18817}{10864}$ $=1.7320508$ ・x_2からx_3を求めるには，$x_1\rightarrow x_2$，$x_2\rightarrow x_3$とすればよいことに気づかせる。 ・電卓，コンピュータを利用。
(まとめ) ●学習内容のまとめ	●ニュートン法は，他の高次方程式の解の近似値を求める場合にも利用できることを理解させ，関数の微分を考えることの有用性を確認させる。	・この方法がニュートン法と呼ばれることを知らせる。
(備考）準備：PC-9801T 21台　使用ソフト：UBASIC86他（スペースの都合上プログラム等は省略した。）		

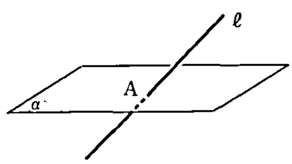
（３）関数の微分の応用：ニュートン法

具体的な場面であって，数学的に考えることが自然であり，また数学的に考えることが必要であるような例を学習者に提示し，数学的な見方・考え方のよさを知らせることができる。このような例を示す。

①平面と直線のなす角

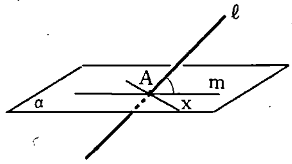
平面αに直線がどんな方向からつき刺さっているかを正確に表現することは，日常生活でも必要である。（例えば，平面に光線があたるときの正確な表現，ペンと紙面との適度な角度の表現など）

平面αと直線ℓのなす角を定義するとき，角度の概念を振り返ってみよう。



角は端点を共有する２つの半直線からなる図形であるから，直線ℓと平面α上のいろいろな直線とのなす角を考えるのが自然である。平面上αの直線で，直線ℓと特別な位置関係となるものを考える必要がある。

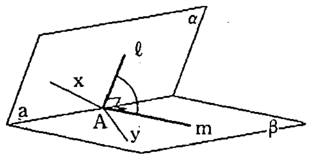
平面α上の直線xで，直線ℓと特別な位置関係にあるものといえば，直線ℓとのなす角度が最小のもの，最大なものなどがあるが，最小のもののほうが考え易い。



そこで，直線ℓと直線ℓの平面αへの正射影のなす角を，直線と平面αのなす角と定義する。（このときℓとxのなす角が最小になることは，三角形の辺と角の大小の関係を利用すれば，証明できる。）

②２平面のなす角

２平面α，β交わり方も正確に表現することが日常生活で必要である。これを角の大きさで表すことにすると，角は端点を共有する２つの半直線からなる図形であるから，平面α上の任意の直線xと，平面β上の任意の直線yとのなす角を考える。このような２直線がつくる角で，特別な位置関係になるものを考える。この場合，０から180°まであり，最大・最小なものが存在するが，図形的に意味がない。そこで，平面α上の特別な直線ℓ（交線aに垂直な直線）と平面β上の直線yのなす角を考える。最大なものは図形的に意味がないので最小なもの考えることにすると直線mとなる。このようにして，２平面α，βのなす角を２直線ℓ，mのなす角として定義できる。



これらの例は量の最大値・最小値に着目し，直線と平面のなす角，２平面のなす角を定義するもので，数学的な見方・考え方のよさを知らせるよい例である。

このような考え方を例にして，数学的な見方・考え方のよさを知らせることは，これまでも考えられてきたし，その具体例が示されてきた。

③コンピュータの利用による例とその意図

これに対して，コンピュータを利用すると，莫大な計算を正確に迅速に処理することができ，処理に利用した数学的な考え方や処理の手順のすばらしさを強調することができる。このような例として，ニュートン法により$\sqrt{3}$の近似値を求める指導案を示す。強調したいことは，コンピュータで実行する前に，処理の１つ１つを理解させ確認させる意味で，電卓による手作業で計算を十分にさせた後，コンピュータで一気に処理することである。このことにより，さらにそこで利用されている数学的な考え方や，処理方法のよさを強調することができる。これはコンピュータを利用して初めて可能となる。（電卓メモリーを利用するとよい）

４．第３学年における授業実践

（１）相加平均と相乗平均の不等式

①授業の概要

次頁の指導案３―１の授業は，「相加平均と相乗平均の不等式」の題目で，次の２点を目標にして実施したものである。

1．相加平均と相乗平均の不等式の誤用例を示し，その問題点について考えさせる。
2．相加平均と相乗平均の不等式の幾何学的説明を与えることにより，この不等式の有用性と限界を理解させる。

相加平均と相乗平均の不等式は，「数学Ⅰ」において既に学習ずみであるが，ここでは，「微分積分」についてのある程度の理解が期待できる生徒を対象にした授業展開を心掛けた。

まず，相加平均と相乗平均の不等式の誤用例を示し，どの箇所の何が問題であるのか，しばらく考えさせた。

そのあと，相加平均と相乗平均の不等式の意味や，誤用例の問題点を，グラフにより視覚化させ，この不等式のもつ意味や，有用性と限界について読みとらせ，答えさせた。特に，条件$f(x)\geqq 0$，$g(x)\geqq 0$の下で，

1)　$f(x)g(x)=k$（一定）のとき，$f(x)=g(x)$をみたすxがあれば，なぜ$f(x)+g(x)$が最小値をもつのか。
2)　$f(x)g(x)\neq$一定のとき，一般に$f(x)=g(x)$をみたすxの値に対し，$f(x)+g(x)$が最小値をとらないのはなぜか。

といった疑問に対する解答に，生徒自らが気付くよう指導を試みた。

②授業を終えて

生徒は，$y=x+1/x$のグラフと直線$y=2$の位置関係，$y=x^3+1/x$のグラフと直線$y=2x$の位置関係などを調べる中から，何とか1)2)の解答にたどりつき，相加平均と相乗平均の不等式の意味，その有用性と限界に対する理解を深めてくれたようである。

これにより，不等式の代数的証明では理解が徹底しないことが確認されると同時に，微分法を武器としたグラフによる視覚的・幾何学的説明のよさが確認されたものと思われる。

しかし，自分にとって理解が不十分な事柄に対して納得するまで考えようとしない生徒の姿も浮き彫りにされ，数学的な見方，考え方のよさについての研究とともに，興味，関心，意欲を育てる方法についての研究も急がれることを痛感している。

指導案3－1　（平成4年11月13日㈮実施　授業者　河野　芳文）

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点
（導　入） 問題点の提示・意識化	（例）$x>0$ のとき，$x^2+\frac{1}{x}$ の最小値を求めよ。 （解）$x>0$ だから，相加平均・相乗平均の不等式より， $x^2+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x^2\frac{1}{x}}=2\sqrt{x}$ ここで，等号が成り立つのは，$x^2=\frac{1}{x}$，すなわち， $x=1$ のときであるから，与式の最小値は2である。 を示し，その正誤について答えさせる。	○$x=\frac{9}{10}$ のとき， $x^2+\frac{1}{x}<2$ であることを示し，誤答であることを確認する。
（展　開） 課題の視覚化	○ある区間で，$f(x)\geqq 0$，$g(x)\geqq 0$ のとき， $\frac{f(x)+g(x)}{2}\geqq\sqrt{f(x)g(x)}$ が成り立つことを確認し，次の例題を解かせる。 （例題）次の各場合について，$y=\frac{f(x)+g(x)}{2}$…①， $y=\sqrt{f(x)g(x)}$…②　のグラフをかけ。 (1)　$x>0$ とし，$f(x)=x$，$g(x)=\frac{1}{x}$ (2)　$0<x<2$ とし，$f(x)=x$，$g(x)=2-x$ (3)　$x>0$ とし，$f(x)=x^2$，$g(x)=\frac{1}{x}$	
規則性の発見	○グラフから，①の最小値と②の関係，②の最大値と①の関係について，分かることを答えさせる。	
（まとめ）	○ある区間で，$f(x)\geqq 0$，$g(x)\geqq 0$ のとき， $\frac{f(x)+g(x)}{2}\geqq\sqrt{f(x)g(x)}$……(※) が成り立つ。 とくに， (1)　$f(x)g(x)=k$（一定）のとき，$f(x)=g(x)$ をみたす x があれば，この x の値に対し，$f(x)+g(x)$ は最小値 $2\sqrt{k}$ をとる。 (2)　$f(x)+g(x)=k$（一定）のとき，$f(x)=g(x)$ をみたす x があれば，この x の値に対し，$f(x)g(x)$ は最大値 $\frac{k^2}{4}$ をとる。 これら以外の場合に，最大値・最小値を求める問題では，不等式（※）は余り有効とはいえない。	グラフによる視覚化のよさを確認する。

5．おわりに

本稿においては，高等学校の生徒に数学的な見方や考え方のよさを認識させることをねらいとする，5つの授業の実践について述べてきた。これらの授業の内容，目標及び工夫の要点を整理すると，下の表のようになる。

われわれ共同研究グループでは，平成元年度から平成4年度にかけて，「数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業」を統一テーマとして，研究と実践とに取り組んできた。こうした共同研究は，これからの数学教育においては，単に数学の知識を効率的かつ確実に生徒に授けるだけではなく，生徒の数学的な見方や考え方を育成し，生徒にそのよさを認識させることが重要であるという共通認識に基づいている。

そして，平成元年度は，「三平方の定理」の指導を一例にして，授業開発の具体的な手法を示すとともに，数学教育全般における数学的な見方や考え方を捉える視点を指摘した[1)]。平成2年度は，そうした一般的な数学的な見方や考え方の内容をより具体的なものにするとともに，中学校・高等学校での授業実践の観点から目標を絞り込み，授業開発の方向を定めた[2)]。

こうした2年間の基礎的な研究を踏まえて，平成3年度には，中学校数学の内容に関わる数学的な見方や考え方に焦点を当てて，中学校の生徒にそのよさを認識させる6つの授業を開発し実践した[3)]。本年（平成4年）度の研究は，昨年度の研究にひきつづくものとして，高校数学の内容に関わる数学的な見方や考え方に焦点を当て，高等学校の生徒にそのよさを認識させる5つの授業を開発し実践したものである。

今後は，こうした4年間の研究及び実践の成果を生かしつつ，残された課題や新たに明らかになった問題点等に積極的に取り組み，より一層，数学的な見方や考え方を育成し，そのよさを認識させることができるように研究と実践を深めていきたいと考えている。

授　業	数学的な見方や考え方のよさの認識に関する目標	工夫の要点
三角形の性質 高校第1学年 指導案1—1	三角形に関する定理のいくつかの証明方法を考えたり，それらを比較したりすることによって，数学的な見方や考え方の特質を認識させる。	ある定理の証明方法として3通りのものを考えさせ，それらを比較させることによって，考え方を整理させる。
漸化式 高校第2学年 指導案2—1	与えられた課題に対して，漸化式がつくれるようにするとともに，コンピュータの利用により，漸化式を用いて考えることのよさを認識させる。	コンピュータを利用することで，一般項を求めないでも，漸化式から数列の性質や変化などが分かるようにする。
漸化式の応用 高校第2学年 指導案2—2	日常的な場面において，数学的なモデルを利用して事象を解析することにより，数学的な見方や考え方のよさを認識させる。	具体的な場面からの課題をモデル化・図式化し，それを漸化式を用いて解決するという過程を踏ませる。
関数の微分の応用 高校第2学年 指導案2—3	ニュートン法により$\sqrt{3}$の近似値を求めるうえで，コンピュータを利用することによって，処理に利用する数学的な考え方や手順のよさを認識させる。	近似値を求める処理をコンピュータで実行する前に，処理の1つ1つを理解させ確認させるために，電卓による手作業で計算を十分にさせる。
相加平均と相乗平均の不等式 高校第3学年 指導案3—1	相加平均と相乗平均の不等式の誤用例から，その問題点について考えるとともに，その不等式の幾何学的説明から，この不等式の有用性と限界とを理解させる。	相加平均と相乗平均の不等式の誤用例を示し，その問題点を考えさせ，グラフによる視覚化をさせることで，有用性と限界とをよみとらせる。

〈参考文献〉

1）岩合一男他，「数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業の研究——「三平方の定理」の指導を一例にして——」，『研究紀要』第18号，広島大学教育学部・附属共同研究体制，1989.

2）岩合一男他，「数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業の研究——授業実践を中心とした数学的な見方や考え方の捉え方について——」，『研究紀要』第19号，広島大学教育学部・附属共同研究体制，1990.

3）石田忠男他，「数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業の開発——中学校数学の内容に関する数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業——」，『研究紀要』第20号，広島大学教育学部・附属共同研究体制，1991.