

# 数学的概念の認識過程についての基礎研究 (XIV)

——構成主義に立つ数学教育の基本原則と実験的研究の分析——

(協力者)	小山 正孝	中原 忠男	山口 武志
	武内 恒夫	下野 浩二	森 保之
	高澤 茂樹	藤本 義明	砂原 徹
	岩崎 浩	赤木 充	佐々 祐之
	清水 紀宏	横山 昌也	岡崎 正和
	尾崎 洋一	吉村 直道	

## 1. はじめに ——本稿のねらい——

近年、数学教育に関する研究は、国際的・学際的規模で展開されつつある。このような状況において、最近、Piaget, J. の発生的認識論にその起源をもつといわれる数学教育における構成主義 (constructivism) が注目されるようになった。

1987年にカナダで開催された第11回PME国際会議では、Kilpatrick, J.<sup>1)</sup>とWheeler, D.<sup>2)</sup>の2人の数学教育学者と、Sinclair, H.<sup>3)</sup>とVergnaud, G.<sup>4)</sup>の2人の心理学者が、それぞれの立場からこの構成主義について議論している。また、平林一栄<sup>5)</sup>は、わが国の現行の指導法の根底にある教授思想を反省しようという目的のもとで、数学教育における構成主義とその問題点について論じている。さらに、Lerman, S.<sup>6)</sup>は、数学及び科学哲学の観点から考察し、数学教育における構成主義は認知心理学とは異なった別の一つのパラダイムであると主張している。

このような議論は、数学教育の指導方法に直接関わるものではないが、それを支える数学教育に関する哲学的・認識論的理念を反省するという点で重要な意義をもつと考える。なぜならば、数学及び数学教育に対して教師がもっている見方や信念等の考えは、たとえ意識的ではなくても、数学についてのある哲学的及び認識論的な見解に基づいており、教師がある内容を児童生徒に指導する方法に影響を与えているからである。<sup>7), 8), 9)</sup>

こうした認識のもとに、小山正孝<sup>10)</sup>は、数学教育における構成主義の哲学的及び認識論的な側面とその特徴の解明を試みた。しかし、その後、Cobb, P.らアメリカの構成主義者は、様々な視点から構成主義を理論的に拡充・修正するとともに、単なる哲学的議論に留まらず、そうした構成主義に立つ数学教育の具体的な実験的研究を、長期的展望のもとで計画的・精力的に行ってきた。

そこで、本稿では、こうした最近の構成主義に立つ数学教育研究の動向を踏まえて、数学教育における構成主義の基本原則及びその哲学的及び認識論的側面について考察するとともに、社会的構成主義に立つ数学教育の実験的研究を整理し分析することを、その目的とする。そしてこの目的を達成するために、まず、数学教育における構成主義の基本原則は何かについて考察する。次に、発生的認識論、数学の哲学並びに科学哲学のそれぞれの観点から、数学教育における構成主義の哲学的及び認識論的な側面とその特徴を探っていく。そして、社会的構成主義に立つ数学教育の実験的研究を、数学教師の役割、教室における子ども同士の相互作用、子どもの認知的及び情意的側面に及ぼす影響の評価、という観点から分析していくことにする。

## 2. 数学教育における構成主義の基本原則

数学教育における構成主義とは何か。それは、認識主体が知識をいかにして獲得するか、ということに関

---

Masataka Koyama, Tadao Nakahara, Takeshi Yamaguchi, Tsuneo Takeuchi, Kouji Shimono, Yasuyuki Mori, Shigeki Takazawa, Yoshiaki Fujimoto & Tohru Sunahara (Cooperators Hiroshi Iwasaki, Mitsuru Akagi, Hiroyuki Sasa, Norihiro Shimizu, Masanari Yokoyama, Masakazu Okazaki, Youichi Ozaki, Naomichi Yoshimura) : A Basic Study on Cognitive Processes of Mathematical Concepts (XIV) — An Analysis of the Fundamental Principles and Experimental Research of Mathematics Education Based on Constructivism —

する一つの認識論的な見解であると言えるであろうが、その基本原理は何であろうか。

Kilpatrick<sup>1)</sup>は、アメリカの von Glasersfeld, E. や Cobb, P. などの代表的な構成主義者の見解の特徴を整理し、構成主義の二つの基本原理を指摘している。ここでは、便宜上、それらを三つに細分して次の(1)~(3)に示す。

《(1)知識は認識主体によって能動的に構成されるものであって、環境から受動的に受け取られるものではない。

(2)知ようになるということは、認識主体が自らの経験世界を組織化する適応過程である。

(3)知ようになるということは、認識主体の心の外に独立して先在する世界を発見することではない。》

一口に構成主義と言っても、上述の基本原理のうちの(1)と(2)だけを受け入れるものと、(3)まで含めてすべての基本原理を受け入れるものとに分けられる。そして、前者は「穏健な構成主義」、後者は「過激な構成主義」と呼ばれるようである。

自らを過激な構成主義者と称する von Glasersfeld や Cobb らは、当然のことながら、前者の立場は穏健というよりも、むしろありきたりのつまらぬ構成主義であり、後者の過激な立場こそ真の構成主義であると主張する。それとは対照的に、上述の第11回 P M E 国際会議で構成主義について論じた4人の見解は、総じて、前者には肯定的であり後者に対しては否定的なものである。

実際、構成主義者でなくとも、例えば、数学の学習における児童生徒の外的な表面に現れる諸行動よりも彼らの頭の内部で起きている諸過程の方に注目する者には、基本原理(1)と(2)は比較的容易に受け入れられるであろう。その意味で、前者はまさに穏健である。それに対して、後者は、例えば Kilpatrick の解釈によれば、それは《われわれは客観的真理を探求することを放棄する必要がある》と主張するがゆえに過激である<sup>1)</sup>。それはまた、Vergnaud の解釈によれば、基本原理(3)は《われわれとは独立して先在する世界の存在を否定する》単なる唯我論 (solipsism) であり、それを受け入れるという意味で一層過激である<sup>4)</sup>。この点については、Wheeler も、《われわれは頭の外で起きることは何一つ知り得ないということは唯我論であり、そのような立場は、例えば医学や政治学、あるいは教育との関連からみれば、耐えられないほど無責任なものである》と批判している<sup>2)</sup>。

このことから、数学教育における構成主義についての議論の争点となっているのは、上述の三つの基本原

理すべてを受け入れる過激な構成主義であるということがわかる。しかも、この過激な構成主義を認めるか否かについては議論の分かれるところであり、容易に判断を下すわけにはいかないようである。というのは、Wheeler が指摘しているように、過激な構成主義は一つの哲学であって、その是非についての議論は、何等かの明確な証拠に基づいてなされるというよりも、むしろ個人的な好み大きく左右される傾向にあるからである。

したがって、本稿では過激な構成主義の是非について言及することはなるべく避けて、次の節では、上述の構成主義の基本原理を基に、その哲学的及び認識論的な側面とその特徴をもう少し詳しくみてみよう。

### 3. 構成主義の哲学的及び認識論的側面

#### 3-1. 構成主義と発生的認識論との関連

そもそも、構成主義の起源はどこにあるのであろうか。これについては、例えば、Kilpatrick<sup>1)</sup>や平林一栄<sup>5)</sup>が言及している。それによると、いろいろな領域の中に構成主義の起源を求めることができ、どの領域を探索するかによって、若干の相違がありそうである。しかしながら、その現代的な起源が Piaget の発生的認識論 (genetic epistemology) にあるという点では一致している。

Piaget はその当時の最も体系的な構成主義の理論家であったと言われている<sup>4)</sup>。《主体の内部構造は、実際のたえざる構成によって生じる》<sup>11)</sup> という Piaget の「構成主義」は、《認識が主体の内部構造の中であらかじめ決定されているもの》とみなす「合理主義」とも、《認識が客体のあらかじめ存在する性格の中で前もって決定されているもの》とみなす「経験主義」とも、構造はあらかじめつくられているものではなく構成されるものだという点で、相容れないものである。このような Piaget の考えは、数学教育における構成主義に、基本原理(1)《知識は認識主体によって能動的に構成されるものであって、環境から受動的に受け取られるものではない》として明らかに取り込まれていると言えよう。

また、Sinclair<sup>3)</sup>が整理して述べているように、Piaget にとって、認識主体が知識を獲得する本質的な方法は活動であり、新しい知識は、認識主体が既知っている関係 (knower-known relationship) に持ち込んだ変化あるいは変換から構成される。この Piaget の考えは、認識主体は活動を通して、新しい状況あるいは経験を同化するために、彼らのシエマを調節し、それによって新しい状況に適応していくものである、というように換言できるであろう。したがって、この

考えもまた、数学教育における構成主義に、基本原理(2)《知るようになるということは、認識主体が自らの経験世界を組織化する適応過程である》として暗黙的に取り込まれているように思われる。

### 3-2. 構成主義と数学の哲学との関連

数学教育における構成主義は、数学の哲学、特に数学の基礎についての一つの教義としての直観主義（構成主義）とどのように関係しているのでしょうか。

数学教育における構成主義の顕著な特徴の一つは、「発見する（discover）」という言葉を用いず、「構成する（construct）」という言葉を好んで用いるということである。「発見」という言葉は、われわれとは無関係に、あるものが既に存在していて、それを覆い隠しているペールを取り去ってそのものを見つけるということを意味しているように思われる。一方、「構成」という言葉は、あるものが既に存在しているのではなく、われわれが何等かの材料や手段によってもつくるということの意味しているように思われる。したがって、「発見」と「構成」という言葉のどちらを用いるかということは、ものの「存在」に対する考え方に依存していると言えよう。

数学では、この「存在」に対する考え方として多様なものが許され、そのことが数学の特徴の一つである。数学の基礎に関する一つの哲学としての直観主義（構成主義）では、《数学的対象は効果的に構成しうるとき、すなわち算出もしくは決定しうるとき、しかもそのときに限り、存在すると考えられる。》<sup>12)</sup> 実際、例えば、直観主義者である Heyting, A.<sup>13)</sup> は、《精神的な数学的構成物の研究においては、「存在する (to exist)」は「構成し得る (to be constructed)」と同じことを意味すべきである》と述べている。

また、Weyl, H.<sup>14)</sup> は、「一つの偶数が存在する」は「2は偶数である」という現実的命題から誘導された一つの命題の抽象にほかならず、そのような命題の抽象は、《単に宝物の現存を知らせるがそのあり場をもらさない一記録にすぎない》という比喻を用いて、あまり価値がないことを指摘している。そして、さらに続けて、彼は《構成の可能性しか主張されていないときはいつでも、意味ある命題は存在しない；成就された構成、遂行された証明、によってのみ存在陳述は意味を獲得するのである。数学上の数多いどの存在定理においても、価値あるものは定理そのものではなく、その証明において実施された構成である；それなくしては、その定理は空しい影である》と言いきっている。

このように、数学における直観主義（構成主義）の特徴の一つは、まさに、「存在する」と「構成し得

る」とを同義とみなすことにある。以上のことから、数学教育における構成主義の基本原理(1)は、単に「構成」という同じ言葉を用いているといった表面的な部分でだけではなく、本質的な部分において、数学における直観主義（構成主義）の「構成の考え」と関係していると言えよう。さらに、基本原理(3)には、直観主義（構成主義）の「存在する」と「構成し得る」とを同義とみなすという主張と、若干の相違はあるものの、相通ずるところがある。というのは、Lerman<sup>6)</sup> が指摘しているように、両者とも《数学的実体が先験的に存在するという考えをあてにしない》ようにみえるからである。

### 3-3. 構成主義と科学哲学との関連

Lerman は、構成主義の基本原理(3)は「認識主体の心の外に独立して先在する世界」が存在しないということの意味するのであれば「唯我論」になるが、それは間違いだと述べている。そして彼は、この解釈から導かれることとして、次の三つのことを指摘している。

1. われわれは、われわれを取り巻く人々や世界と何等かの方法で相互に作用し合っている、という考えを保持できる。
2. われわれは、認識主体の心の外に独立して先在する世界を発見しているのだ、という信念を拒否しなければならない。
3. われわれは、われわれが持っている知識は何等かの方法で確実にしかも最終的に真なるものとして述べられ得る、ということ捨て去らねばならない。<sup>6)</sup>

これによって、われわれは「確実性」や「絶対性」を失うことになるが、この《確実性の喪失ということは、人が「より良い」のいくつかの受け入れられ得る基準をつくるまでは、いろいろな異なった理論や推論は比較可能で、検証可能であり、等しく妥当なものであるということの意味する》。そして、われわれは《理論、概念、構成物は、文化的にも時間的にも相対的 (relative) なものである》とみなすことになるという。これらのことを踏まえて、彼は、過激な構成主義は「相対主義的認識論 (relativist epistemology)」であると主張している。

この主張の背景には、科学的諸概念の特徴や科学理論の構造、理論の発展の仕方などに関して哲学的な反省を行う科学哲学における、Popper, K. R.<sup>15)</sup> の「反証主義」や、Lakatos, I.<sup>16)</sup> の「精密化した反証主義」、Kuhn, T.<sup>17)</sup> の「パラダイム論」などがある。そして、数学教育における過激な構成主義には、この「確実な」あるいは「絶対的な」知識を否定するという点で、最近の科学哲学と共通な認識論的な特徴があるようで

ある。

もし過激な構成主義が相対主義的認識論であるとしたら、ある理論が他の理論よりも優れていると判断する基準や、知識の客観性は、何に求められるのであろうか。Lerman は、Kuhn や Bloor, D.<sup>18)</sup> のいう「数学的知識の社会性」などをその根拠にして、ある理論が他の理論よりも優れていると判断する基準は《科学的かつ文化的な集団内で取り決められた基準》であり、知識の客観性は《知識の公共性 (public nature) に帰する》という。以上のことから、数学教育における構成主義の基本原則(3)を Lerman の解釈に従ってみてみると、過激な構成主義では、知識の確実性が否定され、知識の客観性はその公共性に帰着するといえよう。

ところで、このことを教室の中で行われる算数・数学の授業場面に適用してみると、どのようになるであろうか。教室は教師と子どもたちからなる一つの社会とみなされる。その教室という社会の中で、個々の子どもは、教師や他の子どもたちとの話し合いや討論などを通して、自分自身で数学的知識を構成していく。そして、そのようにして個々の子どもが構成した数学的知識の客観性は、その知識を用いて他者（子どもや教師）と話をすることができたり、その知識が他者に共有されたりする限りにおいて保証される、ということになるであろう。

#### 4. Cobb, P. らの社会的構成主義

##### 4-1. 過激な構成主義から社会的構成主義へ

構成主義に立つ数学教育研究の最近の動向の一つに、子どもが知識を構成する上での社会的相互作用の果たす役割への着目を挙げることができる。初期の構成主義の立場での研究が、子どもの学習（子どもがいかに知識を構成するか）を、専ら認知的視座から分析していたのに対して、最近の構成主義の立場での研究は、子どもが置かれている社会の影響、つまり、教室での子ども同士の話し合いや討論が子どもの知識構成に与える影響をも含めて分析しようとしている。これは、数学の学習は構成的活動であると同時に相互作用的活動でもある、という考えに依拠している。

このような意識は従来の構成主義の研究方法に対して根本的な変革を要求する。というのも、従来の研究方法は子どもの認知的側面を、社会的相互作用を犠牲にして強調する傾向があったからである。ところが、このように認知的分析と社会的分析を統合しようとするれば、必然的に、実験室でなされる傾向にあったマンツーマンでの従来の指導実験的分析は、教室という社会を対象とした分析にまで拡張されなければならない。つまり、研究の場を実験室から教室へと移行しな

ければならないということである。

このように、数学の学習を構成的活動であると同時に相互作用的活動であるとする最近の構成主義者の見解は、特に「社会的構成主義」として台頭してきた。Cobb らはこの立場に立ち、独創的な研究を展開している。彼らは、過激な構成主義の立場を記号相互作用主義 (symbolic interactionism) や民族感覚的方法論 (ethnomethodology) から引き出された概念で補足しようという試みであると言っている。

##### 4-2. 数学学習における社会的相互作用の重要性

Cobb らの社会的構成主義に立つ研究をみると、その理論構成上、鍵となる概念が「社会的相互作用」である。したがって、その背景にある理論及びその捉え方を明確にすることは、彼らの研究を理解する上で重要である。

Cobb ら<sup>19)</sup> は、《われわれの研究は、社会的相互作用が学習において演じているきわめて重要な役割についての Vygotsky の分析にある程度影響を受けてきた》と言い、子どもの数学的知識の構成における社会的相互作用の重要性の理論的根拠として、発達の社会的・文化的側面を強調する Vygotsky の理論を挙げている。その理論は、次のように要約される。

《子どもの文化的発達におけるどんな機能も、2度もしくは二つの水準で現れる。まず、社会的水準で現れ、それから心理的水準で現れる。最初、相互心理的カテゴリー (interpsychological category) として子ども同士の間で現れ、次に内心理的カテゴリー (intrapychological category) として子どもの内部に現れる……社会的関係もしくは対人間関係は、発生的にはより高度な認知的機能やそれらの関係全体の根底にある。》<sup>19)</sup>

しかし、Cobb らは、この理論が、認知的現象と社会的現象を関連づける上で、示唆的であるけれども、肝心の社会的現象を心理学的現象の中へ変換する過程である「内面化」という重要な説明過程が、無定義の基本的構成概念としての役割しか果たしていないと指摘する。そして、内面化という概念の代わりに、人々が互いの行動を解釈し、共有できる意味を獲得する過程に焦点をあてている Brumer, Mead, Schuts の研究を支持する。それによって、Cobb らは、社会的相互作用を、内面化されるべき過程の源としてではなく、《差し迫った目標に対して他人の解釈と合致するような場面の解釈を個人が創造する過程》としてとらえる。

《社会的相互作用をする中で、個々人は意味を協定して内面化し、葛藤を解釈し、相互に他の見方を受け入れ、さらに一般的に調整のとれた行動に向けて合意のある領域を構成する。これらの共有できる意味は、

「個々人が他人と相互作用している間に状況の意味をわかろうとする積極的な解釈の過程を通して絶えず修正される。それゆえ、数学的知識を構成する過程が認知的葛藤、反省、活動的な認知的改造を含むという点で、社会的相互作用は数学を学習する機会の重大な源を構成している。」<sup>19)</sup>

つまり、社会的相互作用それ自体が内面化され、それによって学習が成立するととらえるのではなく、差し迫った目標に対して、個人が意味を協定したり、葛藤を解釈したりすることによって、他人の解釈と合致するような場面の解釈を積極的に創造する過程としてとらえるのである。そして、構成主義と両立しうる数学学習において社会的相互作用の果たす役割の重要性が示唆されている。

これまでみてきたように、構成主義は、数学に関する知識観や教師の指導観に根源的な変革を迫るなど、多くの優れた研究成果をあげてきている。その一方で、例えば、これまで哲学的・認識論的視座から数学教育に改革を迫ろうとしてきた構成主義が、実際の教室での授業実践に対して、どのような示唆を与え得るかを具体的な形で明示すべきだとの批判もある。Cobbら自身も、次のような Brophy の指摘<sup>20)</sup>を引用し、このような批判を強く意識していると考えられる。<sup>21)</sup>

《学校数学を改善することへ向けて、この（構成主義者の）視点の関連性と実践的価値を実証するために、彼ら（構成主義者たち）は、計画的な開発と研究—典型的な教室場面で、明確な教育的目標を達成するための明確な教育的ガイドライン（そして必要なら教材）の開発—に着手する必要がある。》

このような批判に応えようとして、近年、Cobb、Wood、Yackel らの研究グループは、社会的構成主義に立った数学教育の具体的な実験的研究を、長期的展望のもとで計画的・精力的に行ってきている。そこで、以下の節では、こうした実験的研究の概要をみていくことにしよう。

## 5. 教師の役割及び社会的相互作用に関する研究

本節では、社会的構成主義に立つ Cobb らの研究のうち、「社会的構成主義者の立場からみた場合、教師の役割、子ども同士の相互作用はどのようにとらえられるのか、またどうあるべきなのか」についての研究<sup>19)・22)</sup>を取り上げ、彼らの見解を整理するとともに、考察を加えていくことにする。

### 5-1. Cobb, P. らの研究方法の特徴

Cobb らの研究は、構成主義の立場と両立しうる教室という環境で、個々の子どもたちが、教師や仲間と相互作用し合いながら、いかに数学的知識を構成して

いくかの詳細な分析を中心とした記述的・実証的研究であり、上述のごとく「数学の学習は構成的かつ相互作用的活動である」という彼らのテーゼの実証的検証として特徴づけられる。そして、①フィールドワーク的研究である、②長期的研究である、③記述的研究である、④教師を研究者と同じ立場においているという点を、その研究の特徴として挙げることができる。

①については、研究の場を実験室から教室へ移したことからくる必然的結果である。②については、後で詳しく述べるが、彼らが子どもの知識構成過程のみならず、それらに強く影響を及ぼしていると考えられる数学学習に対する態度や信念をも考察の対象としており、これらの変化は長期的になされるものであると考えられるからである。③については、彼らの研究結果は全てビデオテープ等に記録された実証的データから引き出されたものである。このことは、彼らが、単に思弁的・哲学的学説を提唱するのではなく、子どもの数学教育の質を改善するような教育的実践の形式を教師が開発するのを助けようとする彼らの研究態度を反映している。④については以下で詳しく述べるが、教室という社会において、教師が果たす役割はきわめて大きい。したがって、教師は構成主義の理念を十分に理解していなければならない。少なくとも、現状の指導に問題があることを認識している必要がある。実際、社会的構成主義者による教室での指導実験は、彼らが教師に教育実践上の教師自身の直接経験に関連した問題を提起し、彼らと教師とが同じ問題意識を共有することから始まっている。

このような研究方法で、例えば、生徒に学習が起こったならば、その過程が記述され、解明される。あるいは、教師が自分の役割についての信念を変化させるに至ったならば、その経験が記述され、解明されるのである。このようにそれぞれの事例に基づいて、教師の役割、あるいは、学習における認知的葛藤、反省的抽象、概念的再組織化などの役割を明らかにしている。

### 5-2. 教師の役割について

教師の最も重要な役割は、構成主義と両立しうる学習環境を整えることである。《教室の社会的規範を協定する過程と数学的意味を協定する過程とは二つの異なった水準》<sup>19)</sup>であるので、それぞれの過程に対応する教師の役割がある。ここで、社会的規範とは《数学的活動に従事したり、数学についてコミュニケーションしたりする中で当然とされている枠組みを形作るもの》である。

まず、教室の社会的規範を協定する過程における教師の役割は、子どもたちが小グループで生産的に学習でき、子どもたちが自分たちの考えを教室全体の討議

の中で述べるような教室での社会的規範を手ほどきし導くことである。より具体的には、①お互いの考え方を尊重すること、②物事を独力で考え出すこと、③教育的活動を完成するのに協力して作業すること、を手ほどきし導くことである。

子どもたちが、自分達の考え方を述べることよりも、むしろ教師が期待する答えを述べようと思っていたのでは、構成主義と両立しうる討議は展開されないであろう。また、①の規範の協定がなければ、自分が考えたことをみんなの前で言うことは、決まりの悪さや無能さの危険を冒してまで、自分の考えを公の吟味と評価にさらすことになる。

だからといって、教師はこれらの社会的規範を子どもたちに強要するのではない。教室での出来事を範例的事例として利用して、社会的規範を子どもたちに協定させるのである。例えば、何人かの子どもが、自分達の答えが正しくなかったことに気づき、困ったとき、教師は、その間違っただけについて討議を始め、その討議の間に、そのような解決法を共有することが教室では価値のあることだということを強調するのである。そうすることが、教師の本来の関心が子どもたちの答えの正しさよりも、子どもたちの解決法を理解し、対話を促進することであったということを、子どもたちが理解するのを助け、上述の社会的規範の協定を導くことにつながるのである。

次に、数学的意味を協定する過程における教師の役割は、意味のある数学的活動に子どもが取り組むことを促進することである。より具体的には、①生徒の考えをよく聞くこと、②示唆を提供すること、③子どもたちの意図を明確化することである。

つまり、問題を解くための型にはまったやり方を与えたり支持したりすることは、もはや教師の責任ではない。そのような責任は子どもたちに委ねられる。そうすることで、自分が必要とされているという感じや、教室において自分が重要な存在であるという感じを、子どもたちに与えることになる。教師は権威を行使するけれども、それは答の正しさに対してではなく、個々の子どもの説明を調整したり、一度に一人の子どもだけが話すことを保証したりするためにのみ用いるのである。

### 5-3. 社会的相互作用の学習への影響について

それでは、このような教師の役割のもとで、子どもたちはどのような活動をし、どのような学習をするのか。Cobbらは、相互心理的葛藤、内心理的葛藤、正常な議論、異常な議論といった、子どもたちの相互作用を特徴づけるいくつかのキーワードを提示し、考察しているが、ここでは、特に、相互心理的葛藤と内心

理的葛藤の関係をとり上げ、社会的相互作用の数学学習への影響についてみていくことにする。

彼らは、子どもたちの相互作用と学習との関係を、Karen, Jan, Marie という2学年生たちの10分間のエピソードを対象とし、分析している。結論から言えば、《数学的学習は、個人的構成の一過程ともみられるし、数学的意味やより広い社会の実践への文化的適応の一過程ともみられる》<sup>23)</sup> ということである。特に、後者への着眼は、前に述べた知識の客観性の保証の問題と関連するとともに、彼らが、過激な構成主義を社会的構成主義へと拡充・修正した理由でもある。

さて、エピソードの概略を説明しよう。これは、小学校2年のKaren, Jan, Marieの3人が、下図の活動シートを完成させることをめぐってのものである。

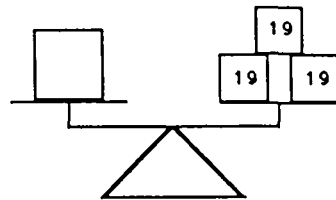


図1 活動シートの一例

KarenとJanは、数週間一緒に学習していた。ここでは、教師は標準的な計算アルゴリズムではなく、位取り記数法の理解を促す非標準的なアルゴリズムの構成を指導した。Marieはこの活動シートを用いた学習で、初めて一緒に学習することになった。Skemp, R.の言葉を借りれば、KarenとJanは関係的理解をしていたのに対して、Marieは用具的理解しかしていなかったといえる。

彼女らは $19+19+19$ という課題に取り組んだ。まず初めにMarieが $9+9+9$ を計算し、27という答を言い、他の2人もこれに同意した。この時点では、一の位と十の位を分けて計算するという意図を3人とも理解しており、3人とも同値な解釈（個々の子どもたちの間に区別を認めうるような証拠が何も無いとき、子どもたちは同値な解釈をしているという）をしているかに思われた。ところが、次に、Marieは3つの19の1を数えることによって、「……28, 29, 30」として彼女自身の答30を完成させた。この時点で、Marieが19を算術の対象としての数19としてよりも、2桁の数字「19」それ自体と解釈していたこと、もっと正確に言うと19を、10と9としてではなく、1と9と解釈していたことが明らかとなった。つまり、MarieとKarenの解釈は同値というよりも平行的であったと推論された。

Karen は答30が間違っていると考え、それを Marie に説明しようとした。このとき Marie は Karen が自分とは異なる考えをしていることに気づき、その説明を拒絶し、自分の答えの正当性を説明することを考え始めていた。この時点で、2人は相互心理的葛藤の状態に陥ったのである。

次に、Marie は19を形式的に1と9とに分けて、 $19 + 19 + 19$ を自分なりの筆算形式で Karen に対して正当化するが、その説明をしたことによって、Marie は自分の答30の正当化が根拠をなさないことに気づき内心理的葛藤に陥った。

このことは、社会的相互作用の数学学習への影響の一つの重要な側面を示唆している。なぜなら、Marie の相互心理的葛藤が Karen との間になかったら、彼女は自分の答の正当性を示そうとはしなかったであろうという点で、彼女の内心理的葛藤は一つの社会的発生源をもっているといえるからである。このように、「内心理的葛藤は、子どもたち自身が以前の数学的文化変容の過程で構成した数学的理解の背景に反する形で、子どもたちに起こる」<sup>22)</sup> という点で、数学学習の社会的側面を例証し、その重要性を示唆している。

## 6. 認知的及び情動的側面に及ぼす影響に関する研究

本節では、社会的構成主義に立つ数学教育が、子どもの認知的及び情動的側面にどのような影響を及ぼすかについての Cobb らの調査研究<sup>21), 23)</sup> を取り上げてみよう。

Cobb らの研究グループは、構成主義的な指導を行うプロジェクトクラス（実験群）と、伝統的な教科書中心の指導を行うノンプロジェクトクラス（統制群）を設定して、社会的構成主義に立つ指導を行った後に、子どもの数学的な達成度や学習の目標、さらには信念にどのような有意差が現れるかについて調査を行っている。調査対象は、いずれも第2学年の子どもたちであった。

以下では、①子どもの数学的達成度について、②「子どもの動機づけの志向性」と「数学における成功の理由に関する信念」について、の2点に関する調査結果に着目して、それらの分析から得られる示唆をまとめていくことにしよう。

### 6-1. 子どもの数学的達成度について

子どもの数学的達成度におけるプロジェクトクラスとノンプロジェクトクラスの違いを検討する枠組みとして、Cobb らは、表1のような2種類の算術テストを用いながら、子どもたちの数学的達成度（加法・減法問題を中心に）を測定している。このうち、(A)の多肢選択式標準化達成度テスト（以下、ISTEP）は、「カリフォルニア達成度テスト」に基づくものであり、(B)のプロジェクト算術テストは、Cobb らの研究グループが開発したオリジナルなテストである。

それでは、これらの算術テストに関する分析結果について検討してみよう。

まず、算術テスト全体に関する結果は、表2のようになった。表2からもわかるように、ISTEP の「概

【表1】 多肢選択式標準化達成度テスト (ISTEP) とプロジェクト算術テスト

テスト名	サブテスト	テスト内容の概略	テスト内容の具体例
(A) 多肢選択式標準化達成度テスト (ISTEP)	A1 「計算」に関するテスト (24項目)	典型的な教科書に出ているような加法・減法技能を調べる問題	<ul style="list-style-type: none"> <li>・一桁の数の計算</li> <li>・繰り上がりのある、あるいは繰り上がりのない二桁の数の計算（筆算形式）</li> <li>・繰り上がりのない三桁の数の計算（筆算形式）</li> </ul>
	A2 「概念と応用」に関するテスト (49項目)	教科書で強調されている特別な表現に関する能力を調べる問題  数の文章（number sentences）と数字とを互いに結びつけたり、教科書の表現の取り決めと結びつけたりすることを要求するような問題	<ul style="list-style-type: none"> <li>・7本の10のロングと2つの個別キューブとで72と同定することを要求するような問題</li> <li>・1/3に陰をつけた台形によって表された分数を同定することを要求するような問題</li> <li>・57を5つの十と7つの一と表されることを同定するような問題</li> <li>・2つの百と五十四とで254と表されることを同定するような問題</li> </ul>
(B) プロジェクト算術テスト (The Project Arithmetical Test)	B1 用具的尺度をもつテスト (12項目)	概念的な理解なしにアルゴリズムを用いることによって解決可能な問題	<ul style="list-style-type: none"> <li>・二桁の数の加法（筆算形式、4項目）</li> <li>・二桁の数の減法（筆算形式、3項目）</li> <li>・二桁の数の加法（横書き形式、3項目）</li> <li>・二桁の数の減法（横書き形式、2項目）</li> </ul>
	B2 関係的尺度をもつテスト (16項目)	教科書形式でない形式で位取り記数法や計算についての概念的な理解を評価できるような問題	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「49より21大きい数は__である」という文章形式による二桁の数の加法（2項目）と減法（2項目）の問題（計4項目）</li> <li>・二桁の加数の穴埋め問題（2項目）</li> <li>・二桁の数の穴埋め文章題（横書き形式、1項目）</li> <li>・「12個の一と、3つの十は一体どんな数になるか?」といったタイプの問題（2項目）</li> <li>・「28の中には十がいくつあるか?」といったタイプの問題（2項目）</li> <li>・Steffeらの研究から採用された問題（3項目）</li> <li>・Kamiiの研究から採用された問題（2項目）</li> </ul>

念と応用」の項目と「プロジェクト算術テスト」の「関係的尺度」の項目において有意差がみられ、この2項目において、プロジェクトクラスの方がノンプロジェクトクラスよりも優れていたことがわかる。

【表2】 ISTEPとプロジェクト算術テストに対する平均（標準偏差）

	グループ		F (1,332)
	プロジェクト	ノンプロジェクト	
ISTEP*			
計算	3.50(1.20)	3.51(1.11)	0.22
概念と応用	4.54(3.01)	3.73(2.27)	7.32*
プロジェクト算術テスト <sup>b</sup>			
用具的	1.28(0.52)	1.31(0.52)	0.60
関係的	1.00(0.39)	0.62(0.33)	67.42**

注意 n=187のプロジェクト生徒と151のノンプロジェクト生徒

\*p<0.01

\*\*p<0.001

a：学年平均

b：0から2の測定尺度に変換された素点

一方、表1の(A)、(B)の二つのテストの中で与えられている加法・減法に関する課題を、①「関係的尺度」に関する計算技能を測定するための問題、②横書き形式で提示された「用具的尺度」に関する問題、③筆算形式で提示された「用具的尺度」に関する問題、の三つに類型化して、「加法と減法における標準的なアルゴリズムの使用の割合」の観点からプロジェクトクラスとノンプロジェクトクラスの違いを分析した場合には、表3のような結果を得ている。

【表3】 加法と減法における標準的なアルゴリズムの使用の割合

	プロジェクト	ノンプロジェクト	$\chi^2$
計算課題／			
関係的測定尺度	17	19	3.36
横書き形式	28	44	13.85*
筆算形式	31	82	88.43**

注意 n=187のプロジェクト生徒と151のノンプロジェクト生徒

\*p<0.05

\*\*p<0.001

この分析結果からは、上述の類型化の②と③の課題において、プロジェクトクラスとノンプロジェクトクラスとの間に有意差がみられ、この②と③の課題においては、プロジェクトクラスの方がノンプロジェクトクラスよりも標準的なアルゴリズムを使用する割合が少なかったことがわかる。

これら二つの分析結果から、プロジェクトクラスとノンプロジェクトクラスの違いについては、次の2点が指摘できよう。

第一点として、表2からもわかるように、ISTEPの「概念と応用」の項目や、「プロジェクト算術テスト」の「関係的尺度」の項目において、プロジェクトクラスの方がノンプロジェクトクラスよりも優位であったことから、教科書に基づいた伝統的な指導を行う

場合よりも、社会的構成主義に立って指導を行った場合の方が、子どもたち自身が概念的な操作を構成する上で効果があったということが指摘できる。

さらに、第二点として、表3の「標準的なアルゴリズムの使用の割合」に関する調査結果からわかるように、ノンプロジェクトクラスの子どもたちの方が、標準的なアルゴリズムを多く使用していること、さらに、②や③のような用具的尺度以外のノンルーチンな問題になると、標準的なアルゴリズムの使用頻度が極端に低くなったことなどを総合すれば、プロジェクトクラスの子どもたちに比べて、ノンプロジェクトクラスの子どもたちの方が、「形式依存性」が強いことが指摘できる。この傾向は、特に「用具的尺度」において顕著に現れており、〈(ノンプロジェクトクラスの子どもたちの)アルゴリズムが、プロジェクトクラスの子どもたちのアルゴリズムのように、概念的に基礎づけられたものではなかった〉<sup>21)</sup>ことを反映するものであると考えられる。このように、社会的構成主義に立った指導は、単なる機械的なアルゴリズムの習得ではなく、そのアルゴリズムの「意味」を理解させるのに有効であり、関係的理解を促進する上で効果的であることが示唆されている。

この第二点めの指摘について、Cobbらは、伝統的な教科書中心の指導を行ったノンプロジェクトクラスの「形式依存性」の原因について触れ、教科書に基づいた指導には、〈(知識や概念の)獲得が、応用と切り放すことができ、応用に先立つべきであるということ、そして、教えられた形式的手続きを、多様な別個の状況に、すぐに適用することができるであろう〉(括弧内筆者記入)という理論的根拠が含まれており、〈標準的なアルゴリズムに関するノンプロジェクトの子どもたちの形式依存性は、この理論的根拠が疑わしいものであることを示唆している〉と指摘している<sup>21)</sup>。

## 6-2. 子どもの「動機づけの志向性」と

「数学での成功の理由に関する信念」について次に、社会的構成主義に立った指導が、子どもの「動機づけの志向性」と「数学での成功に関する信念」に及ぼす影響について考察することにしよう。

Cobbらの研究グループは、アンケート形式による調査で、数学における個人の「動機づけの志向性」(表4)と、「数学における成功の理由に関する信念」(表5)の尺度を開発している。

ここでの「動機づけの尺度」のうち、「課題志向」というのは、数学学習の目標を「理解すること」におくような、子どもの動機づけの志向性を指している。それに対して、「自我志向」は、「他人よりも優れること」に数学学習の目標をおくような、子どもの動機



【表4】 動機づけの志向性

課題志向Ⅰ	<ul style="list-style-type: none"> <li>・私が一生懸命取り組むことで問題を解決するとき</li> <li>・問題が私を一生懸命考えさせるとき</li> <li>・先生の言っていることが、私を考えさせるとき</li> <li>・私が活発にしているとき</li> <li>・私がずっと一生懸命に取り組んでいるとき</li> </ul>
課題志向Ⅱ	<ul style="list-style-type: none"> <li>・学んでいる何かが、私に正体をもっと突き止めたいと思わせるとき</li> <li>・問題を解決するための新しいやり方を私が見つけたとき</li> <li>・私が考え出した何かが、実際に意味をなすとき</li> <li>・私が考え出した何かが、私にさらにそれ以上のことをしたいと思わせるとき</li> </ul>
自我志向Ⅰ	<ul style="list-style-type: none"> <li>・私が他の人よりも多くのことを知っているとき</li> <li>・私が質問に答えられる唯一の人であるとき</li> </ul>
自我志向Ⅱ	<ul style="list-style-type: none"> <li>・私が友達よりも先に終わるとき</li> <li>・私が友達より多くの正しい解答を得るとき</li> </ul>
学習の回避	<ul style="list-style-type: none"> <li>・一生懸命取り組む必要がないとき</li> <li>・作業全体が簡単であるとき</li> <li>・教師が難しい質問をしないとき</li> </ul>

(注) すべての項目の形式は、「……のとき、私は本当に数学に喜びを感じる」であった。

【表5】 数学における成功の理由に関する信念

興味と努力	<ul style="list-style-type: none"> <li>・彼らが本当に一生懸命に取り組むならば</li> <li>・彼らがいつも全力を尽くすならば</li> <li>・彼らが学習に興味があるならば</li> </ul>
理解	<ul style="list-style-type: none"> <li>・彼らが数学について考えることを好むならば</li> <li>・彼らが問題の答えを単に得ようとする代わりに、理解しようとするならば</li> <li>・彼らが物事を理解しようとするならば</li> </ul>
競争	<ul style="list-style-type: none"> <li>・彼らが他の人よりも正しい答えをもっと多く得ようとするならば</li> <li>・彼らが友達よりもっと多くの学習をしようとするならば</li> <li>・彼らが他の人よりも頭がきれるならば</li> </ul>
非本質的	<ul style="list-style-type: none"> <li>・彼らがきちんと振る舞うならば</li> <li>・彼らのノートが整然としているならば</li> <li>・彼らが学級の中で落ちついているならば</li> </ul>

(注) すべての項目の形式は、「もし……ならば、生徒たちは数学をうまくするであろう」であった。

づけの志向性を指している。そして、この「動機づけの志向性」と「数学における成功の理由に関する信念」という二つの枠組みを軸にしながら、プロジェクトクラスとノンプロジェクトクラスとの違いをCobbらは検討している。

分析の結果、「動機づけの志向性」と「数学における成功の理由に関する信念」において、プロジェクトクラスとノンプロジェクトクラスの子どもの間にいくつかの点で有意差がみられた。

まず第一点として、表6に示すように、「動機づけの志向性」と「数学における成功の理由に関する信念」との相関において、次のような傾向が見い出された。

- ①「動機づけの志向性」の一つである「課題志向」は、「数学における成功の理由に関する信念」の項目である「興味、努力、理解」との相関が高い。
- ②「課題志向」は、「協同」に関する信念と相関が高い。
- ③さらに、「興味、努力、理解」に関する信念は、「協同」に関する信念とも相関が高い。
- ④一方、「自我志向」は、「競争」に関する信念との相関が高い。

【表6】 動機づけの志向性と数学での成功に関する信念との間の相関

	動機づけの志向性		成功の理由に関する信念			
	2	3	4	5	6	7
動機づけの志向性						
1. 課題志向	-0.28**	-0.43***	0.47***	-0.29**	0.10	0.37***
2. 自我志向		0.34***	-0.14	0.63***	-0.11	-0.17*
3. 学習の回避			-0.14	0.24**	0.15	-0.09
成功の理由						
4. 興味、努力、理解				-0.4	0.23**	0.41***
5. 競争					0.22	-0.13
6. 非本質的						0.09
7. 協同						

\* $P < 0.05$ , \*\* $P < 0.01$ , \*\*\* $P < 0.001$

第二点として、社会的構成主義に立って指導を行ったプロジェクトクラスの子どもたちは、ノンプロジェクトクラスの子どもたちに比べて、一般的に「課題志向」的であるということが指摘されている。

以上の二つの点を総合すると、社会的構成主義の数学教育観に立って指導を行ったプロジェクトクラスの子どもたちには、「理解すること」に数学学習の目標をおくような、「課題志向」的な動機づけの志向性がみられ、数学において成功的であるためには、興味、努力、理解、さらには、事象に対する意味づけや、クラスの仲間との協力関係を重要視しなければならないとする信念が育つ傾向にあることが示唆される。

## 7. おわりに

本稿では、数学教育における構成主義の基本原理及びその哲学的・認識論的側面や社会的構成主義における「社会的相互作用」の重要性について考察した。さらに、社会的構成主義に立つ数学教育研究を整理し、それを、教師の役割、子ども同士の相互作用、子どもの認知的及び情意的側面に及ぼす影響の評価の観点から分析した。

その結果、主に次のようなことが明らかになった。

(1)構成主義においては、知識は子ども自身によって能動的に構成され、認識するということは経験世界を組織化する適応過程である、ということが基本原理となっている。

(2)確実なあるいは絶対的な知識を否定する社会的構

成主義は、知識の客観性のある社会におけるその公共性に求め、その意味での客観的な知識を構成するための活動として、社会的相互作用を重視している。

(3)社会的構成主義に立つ数学教育では、教師は、子どもたち自身が教室の社会的規範と数学の意味とを協定するのを援助するという役割を果たすべきである。

(4)社会的構成主義に立つ数学教育は、子どもの数学的達成度、動機づけの志向性、そして数学における成功に関する信念のいずれにおいても、好ましい結果をもたらすようである。

これら社会的構成主義の考えや研究結果を踏まえて、わが国の実状に即して、子どもの認識過程を明らかにし、授業を構成・実施することが、今後の課題である。

### 〈引用文献及び参考文献〉

- 1) Kilpatrick, J., What Constructivism Might Be in Mathematics Education, in *Proceedings of The Eleventh International Conference on Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Montreal, 1987, pp. 3-27.
- 2) Wheeler, D., The World of Mathematics: Dream, Myth or Reality?, in *Proceedings of The Eleventh International Conference on Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Montreal, 1987, pp. 55-66.
- 3) Sinclair, H., Constructivism and the Psychology of Mathematics, in *Proceedings of The Eleventh International Conference on Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Montreal, 1987, pp. 28-41.
- 4) Vergnaud, G., About Constructivism: A Reaction to Hermine Sinclair's and Jeremy Kilpatrick's Papers, in *Proceedings of The Eleventh International Conference on Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Montreal, 1987, pp. 42-54.
- 5) 平林一栄, 「数学教育における構成主義について」, 『第20回数学教育論文発表会発表要項』, 日本数学教育学会, 1987, pp. 51-56.
- 6) Lerman, S., Constructivism, Mathematics and Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 20, 1989, pp. 211-223.
- 7) Thompson, A. G., The Relationships of Teachers' Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 15, 1984, pp. 105-127.
- 8) Thom, R., Modern Mathematics: Does It Exist?, in Howson, A. G. (ed.), *Developments in Mathematics Education*, in *Proceedings of The Second ICME*, Cambridge University Press, 1973, pp. 194-209.
- 9) Steiner, H. -G., Philosophical and Epistemological Aspects of Mathematics and their Interaction with Theory and Practice in Mathematics Education, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 7, No. 1, 1987, pp. 7-13.
- 10) 小山正孝, 「数学教育における構成主義の哲学的及び認識論的側面について」, 『兵庫教育大学研究紀要』, 第10巻, 1989, pp. 39-51.
- 11) J. ピアジェ著/滝沢武久訳, 『発生的認識論』, 白水社, 1972.
- 12) G. I. ルザーピン著/山崎三郎, 柴岡泰光訳, 『数学論: 数学的認識の本性』, 岩波書店, 1977.
- 13) Heyting, A., *Intuitionism: An Introduction*, North-Holland P. C., 1971.
- 14) ヘルマン・ワイル著/菅原正夫, 下村寅太郎, 森繁雄訳, 『数学と自然科学の哲学』, 岩波書店, 1959.
- 15) K. R. ポパー著/大内, 森共訳, 『科学的発見の論理(上)』, 恒星社厚生閣, 1971.
- 16) I. ラカトシュ著/佐々木力訳, 『数学的発見の論理: 証明と論駁』, 共立出版, 1980.
- 17) T. S. クーン著/中山茂訳, 『科学革命の構造』, みすず書房, 1971.
- 18) D. ブルア著/佐々木力, 古川安共訳, 『数学の社会学; 知識と社会表象』, 培風館, 1985.
- 19) Cobb, P., Yackel, E., Wood, T., Classrooms as Learning Environments for Teachers and Researchers, in Davis, R.B., Maher, C.A., Noddings, N. (eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics*, JRME MONOGRAPH, No. 4, 1990, pp. 125-146.
- 20) Brophy, J., Teaching and Learning Mathematics: Where Research should be Going, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 17, 1986, pp. 323-346.
- 21) Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., Perlwitz, M., Assessment of a Problem-Centered Second-Grade Mathematics Project, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 22, 1991, pp. 25-26.
- 22) Cobb, P., Yackel, E., Wood, T., Interaction and Learning in Mathematics Classroom Situations, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 23, 1992, pp. 99-122.
- 23) Nicholls, J., Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Patashnick, M., Assessing Students' Theories of Success in Mathematics: Individual and Classroom Differences, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 21, 1990, pp. 109-122.