広島大学教育学部　学部附属共同研究体制研究紀要
〈第 20 号　1992．3〉

「誤り」を生かす数学科授業の開発(II)

－授業と具体的教材の実践的検討－

石田　忠男　小山　正孝　山口　武志
入川　義克　後藤　俊秀　佐々木俊幸
村上　和男

1．はじめに

(1) 研究のねらい

教師が，普段の授業やテストを通して出会う生徒の誤答や誤りには，いろいろなものがある。単なる思い違いや計算まちがいもあれば，数学的に意味のある誤りもある。従来の数学教育では，それらの誤りをいかにして直すか，また誤らないようにいかに教えるかを問題にしてきた。つまりいかにして「正しく」推論・計算させるかを問題とし，誤りを積極的に取り上げることはほとんどなされていない。もちろんいわゆる「誤答分析」等の研究は，特に数や式の計算の分野では盛んになされてきたし，例えば生徒の答案の間違いを指摘し，推論や計算の過程で誤りやすいところに注意させるといった指導はよく行われている。しかしそれらは誤りを否定的なものとしてとらえ，それらを排除しようとしているにすぎない。

しかし，誤りは，訂正・排除して克服されるものであるのみならず，むしろそれから学びうるものである。人間は，反証され見つけ出されたその誤りから学びうるからこそ，知識は成長し，科学は進歩するのである。また，誤りは理解を深めるための重要な材料でもある。

本研究は，このような立場から，前年度にひき続き，誤りを訂正・排除するよりも，それを積極的に利用する授業や教材について研究を行った。

(2) 誤りを生かす授業とは

前年度の研究紀要で示したように，次の４つのタイプの授業を構想した。

A：計算間違いや誤った手順を指摘し，その問題状況におけるその条件や手順の意味や重要性を明らかにする授業

B：結論などを生徒に予想させ，明らかに間違ったものを指摘させ，なぜ間違いなのかや結果の見積もりなどを考えさせることから，問題状況の成立の制約・条件・範囲などを認識させる授業

C：条件もれや取り違いなどの誤った推論の答案を展示し，それを検討するなかで単にその誤りを指摘するだけでなく，それを成り立たせるための新しい条件・範囲の設定などを考えさせる授業

D：問題作りをさせ，生徒の間違った問題を取り上げて，それを検討することを通して新しい問題および元の問題に関わる成立の条件や一般性の検討を行わせる授業

さて，以上４つのタイプの授業を実践した（それぞれの具体的な学習指導案は，前年度の紀要にある）結果，次のようなことが明らかになった。すなわち，とりわけ類型Cのように，教師があらかじめ誤りを用意したり，強引に誤りにおちいらせるよう導いたりすると，生徒はあまり興味・関心を示さない。それが，たとえ数学的に興味深い要素をもった誤りであっても，教師が提示した場合は，生徒は「それがどうした。」というような反応を示すのである。一方，単純な計算ミスや数学的にはあまり発展性のない誤りであっても，生徒自身が陥ったり発見したりしたときや，同じクラスの生徒が行ったときは，生徒は大変興味を示す。

こうした現象は，誤りに対する興味・関心を起こすための主体的能動性や共同体的社会性の要因を示唆しているように思われる。この点についての理論的分析は今後すすめて行きたいと考えている。いずれにせよ，

Tadao Ishida, Masataka Koyama, Takashi Yamaguchi, Yoshikatu Irikawa, Toshihide Goto, Toshiyuki Sasaki & Kazuo Murakami; A Study on Mathematization based on Student's Errors ［II］

実践的には,「生徒に自由な活動をさせるなかで出てきたいろいろな誤りを，無視せず取り上げ，みんなで考えさせる。」という学習指導方針が,「誤りを生かす」ためには肝要である。

本稿では，このような方針で実践した授業と，そのような学習指導を行なうための具体的教材について，実践的検討を行う。

2．授業の実践と考察

(1)「課題学習」の時間を使って

広島大学附属福山中学校では，中3で数学の「課題学習の時間を1単位設けている。

3クラスの同時展開で，担当教師3人が，各クラス4時間毎にA→B→C→A→と持ち回りで授業をしている。「課題学習」の時間とは別に，数量2単位，図形2単位の授業を実施している。

授業では，生徒の自由な発想を大切にし，それを授業でとり上げ，多様な考えを出しあっていく中で出てくる誤りを大切にしていった。

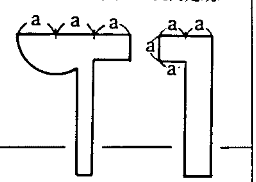
「課題学習」の時間に扱う教材については，その内容を十分に検討し「数学的な考え方」を育成する上で効果的な教材を精選し授業をしていった。

「課題学習」の時間に展開する内容は，担当者によって異なるが，持ち回りで授業をするので，生徒はそのすべてを学習することができる。

例えば，① Patterns in the hudred chart ②連続する整数の平方の和の等式から連想される問題づくり　③ピタゴラスの数，フィボナッチの数，完全数・不足数・過剰数　④任意の角を三等分する問題等の授業を展開してきたが，ここでは，④の任意の角を

数　学　科　学　習　指　導　案 3年C組	指導者	入　川　義　克

題目(主題) 角の三等分	目標 1．初等幾何学における作図の意味を理解させる。 2．任意の角を三等分する作図問題を通して，基本の作図と図形の基本性質についての理解を深める。
指導計画(1)基本の作図と角の二等分…1時間 (2)任意の角を三等分する作図とその考察…2時間 (3)発表とまとめ…2時間(本時はその第1限目)	

学習内容	学　習　活　動	指導上の留意点
導入(5分)	・初等幾何学における作図の意味について説明する。	・「ユークリッド原論」の中の公準(要請)1・2・3を簡潔に解説する。
展開(40分)	・角の三等分について班で考察したことを発表させる。 ・班の説明をうけて,正しい事柄と間違っている事柄を確認しながら,基本の作図と図形の基本的性質についての理解を深める。 ・「どんなときに角の三等分の作図が可能か？」「作図可能な最小の正の整数の角は何度か？」等の発問に対する考えを発表させる。 ・作図の公準にこだわらなければ,任意に与えられた角の三等分は作図可能であることを操作活動を通して確かめさせる。 ・O.H.P.を使って操作方法を確認し,証明は課題とする。	・O.H.P.を使って,班でまとめたものを全員に示す。 ・生徒の自由な発想を大切にしながら整理していく。 ・誤答を生かしながら検討していく。 ・前時に作っておいた器具「トマホーク」または「直角定規」等で任意の角を三等分する方法を発見させる。 〈トマホーク〉　〈直角定規〉 
まとめ(5分)	・学習内容をまとめ次時の課題を確認する。	

三等分する問題の実践内容と生徒の活動について報告する。

さらに，その指導を通して「数学的考え方」をどのように育てようとしたかをまとめる。

(2) 類型Dの指導をめざす授業から類型Bの指導をめざす授業へ

当初は，∠AOBを2等分する問題を発展させて作った作図問題を解く過程で現われる誤答から学習を深めていこう(研究紀要第19号，P51，数学科学習指導案⑥) と考えたが，初等幾何における作図の意味を理解した上で，任意の角を三等分する作図ができるかどうか考察することで，作図法を推測し，洞察力，判断力，創造力を育み，数学的な見方・考え方を養うことをねらった。

前時に，角を三等分する作図問題を個人レポートにしたものを持ち寄って，班内でお互いの考え方を出し合い，討議して班のレポートとしてまとめていった。

一方，指導者の側は，40名の生徒の個人レポートを類別し，生徒達の考え方をまとめた。

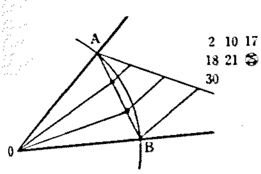
(3) 数学的な考え方の育成とその指導

生徒の個人レポートをまとめたプリントを使って，この問題を解決していくために，どのように考えているかを示し，その中に現われる「数学的な考え方・態度」を全員のものにしようと考えた。

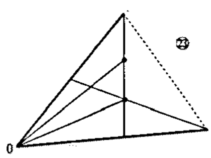
生徒の考えは，次のように整理できる。

① こうすれば，任意に与えられた角を三等分できる。

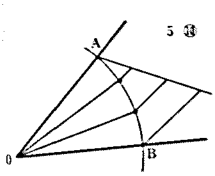
(イ)－線分ABを三等分－



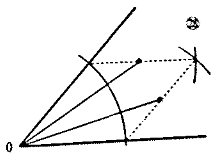
(ヘ)－中線を三等分－



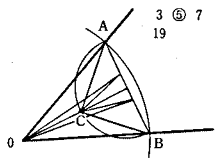
(ロ)－弧ABを三等分(?)－



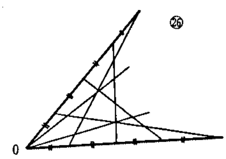
(ト)－ひし形の辺の中点－



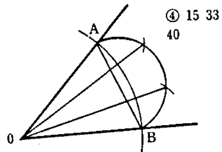
(ハ)－∠ACB＝90°を三等分－



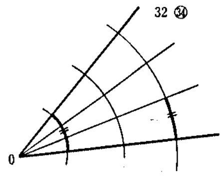
(チ)－等分点をとる－



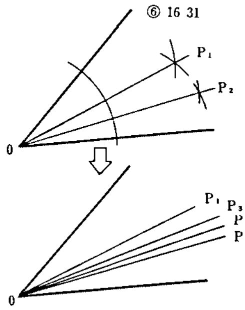
(ニ)－半円を三等分－



(リ)－扇形の半径と弧の長さは比例－



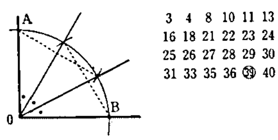
(ホ)－極限を考える－



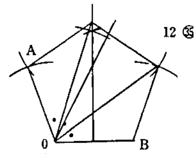
《番号は，考えた生徒の出席番号で丸で囲んだ生徒の例を挙げている》

② 特定の角ならば三等分できる。

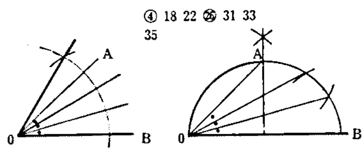
(イ) 90°の場合



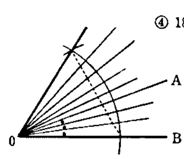
(ホ) 108°の場合



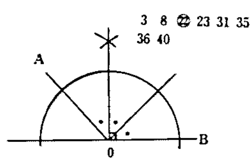
(ロ) 45°の場合



(ヘ) 22.5°の場合



(ハ) 135°の場合



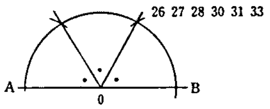
(ト) 270°の場合

10 13 22 25 27 28
31

(ニ) 180°の場合　　(チ) 360°の場合

4 8 10 13 22 ㉟
26 27 28 30 31 33

10 25 26 27 28 31



③　こんなことに気付いた。

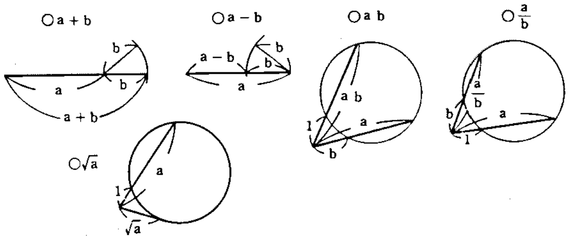
(イ)(作図できる角)−(作図できる角)は(作図できる角)

①

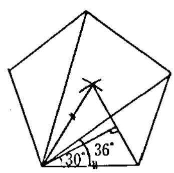
(ロ)正多角形を利用すれば特定の角を三等分することができる。例えば，正五角形，正八角形…，一般に正(３ｎ＋２)角形の１つの頂点からひくことができる対角線の数は(３ｎ＋２)−３＝(３ｎ−１)本で，この対角線により１つの内角が３ｎ等分される。

㉓ 40

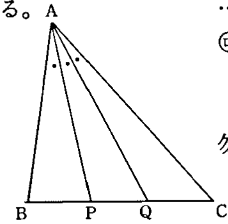
(ハ)定規とコンパスを使って作図できるのは，２つの線分の長さの和，差，積，商と平方根である。　㉟



(ニ)正の整数で作図できる最小の角は３°である。もし，２°が作図可能なら，角の二等分はできるから１°も作図可能となり，３の倍数の角は三等分できることになる。しかし，作図可能な正の整数の角は，９の倍数の角であるから，正の整数で作図できる最小の角は３°だと考えた。右図は正五角形と正三角形を重ねて６°の角を作図したものである。この角を二等分すれば，３°の角が作図できる。



(ホ)∠ＢＡＰ＝∠ＰＡＱ＝∠ＱＡＣのとき



△ＡＢＱにおいて

ＡＢ：ＡＱ＝ＢＰ：ＰＱ…(i)

△ＡＰＣにおいて

ＡＰ：ＡＣ＝ＰＱ：ＱＣ…(ii)

(ii)より　$PQ=\dfrac{AP\cdot QC}{AC}$

(i)に代入すると　$AB:AQ=BP:\dfrac{AP\cdot QC}{AC}$

$\therefore AC\cdot AQ\cdot BP=AB\cdot AP\cdot QC$

$\therefore \dfrac{AC\cdot AQ}{QC}=\dfrac{AB\cdot AP}{BP}$…(iii)

∠Ａを三等分した場合(iii)（両側にできる２つの三角形の底辺で他の２辺の積をわった値は等しい）が成り立つ。

もっとも，これは角を三等分するときに使うのは無理だと思う。だが，角が三等分されているかどうか確かめる時には役に立つのではないだろうか。㉟

④　器具を使えば，任意に与えられた角を三等分できる。

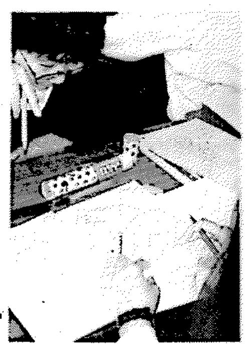
㋑トマホークと直角定規

指導案の中にあるトマホークと直角定規についてレポートした生徒が３名いたので，早速作ってみることにした。特大トマホークを作った生徒，逆に小さすぎて操作しにくいなど様々である。　⑨ 14 25

これらの器具をどのように使えば，任意の角が三等分できるか，全員で挑戦していった。

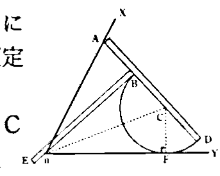
楽しい操作活動のあとは，その証明である。生徒達は，見事にその証明を完成させていく。

〈証明〉



∠ＸＯＹに対して，トマホークを図のように位置し，半円とＯＹの接点をＦとする。

△ＡＯＢと△ＣＯＢにおいて仮定より



ＡＢ＝ＢＣ

ＯＢ共通

∠ＡＢＯ＝∠ＣＢＯ

∴二辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので

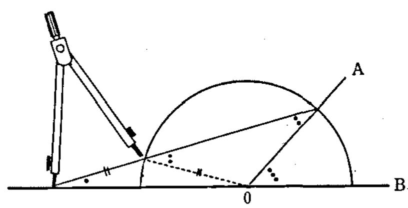
△ＡＯＢ≡△ＣＯＢ　∴∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＢ

…（以下省略）

㋺　長さが測れればこんな方法もある。

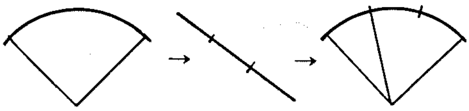
22 29 ㉟ 36 39

アルキメデスの三等分法をレポートした生徒もいる。勿論，そのことの証明にもふれている。

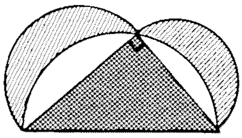


㋩　弧の長さが直線に移れば…と考えた方法　㉕

弧の長さをひもに移し，そのひもを三等分して弧にあわせれば，任意の角を三等分することができる。

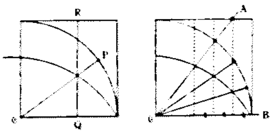


これは，任意の角を三等分するときの基本となる考え方であり，曲線で囲まれた図形を直線で囲まれた図形に等積変形する考えもこのあたりからでてくることが分る。半径ｒの円の面積と等しい面積をもつ正方形を作図すること。ヒッポクラテスの月の話，円周率πの話などにつなげていくと大変興味を示し，次の課題への意欲をもたせることができる。



㋥　こんなグラフが書ければよいのに　⑭

動径ＯＰと線分ＱＲが等しい速さで動くときその交点の軌跡は，円積曲線（ヒピアスの曲線）と呼ばれる。この曲線を使って，任意の角を三等分していった。



㋭　作図できないことの証明はむつかしい。13 20 21 24

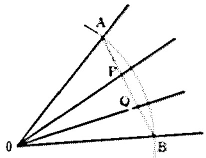
作図できないことを証明しようと考えた。　33 37 ㊳

しかし，中学生の力では，この証明の理解はむつかしく，高校に進んでまた考えていくことにした。

⑤　推測と証明

任意に与えられた角を三等分することを考えたが，個人レポートを持ち寄って班で討議していくとさらに理解を深めることができる。

たとえば，弦ＡＢを三等分したとき，ＯＰ，ＯＱが∠ＡＯＢを三等分していないことを次のように証明している。



〈証明〉

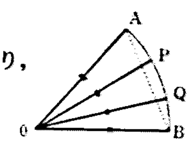
仮に，∠ＡＯＰ＝∠ＰＯＱ＝∠ＱＯＢが成り立っているとする。

△ＡＯＱにおいて，

仮定（∠ＡＯＰ＝∠ＰＯＱ）より，

ＯＡ：ＯＱ＝ＡＰ：ＰＱ

ここでＡＰ＝ＰＱだから



ＯＡ＝ＯＱ

同様に△ＰＯＢにおいて

ＯＰ＝ＯＢ

△ＯＡＢは，二等辺三角形だからＯＡ＝ＯＢ

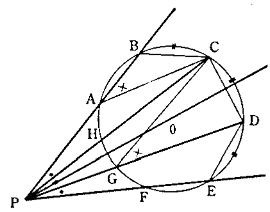
したがって，ＯＡ＝ＯＰ＝ＯＱ＝ＯＢ

<u>このような場合，ＯＡＢは三角形になりえない。</u>

△ＯＡＢが二等辺三角形であるという仮定に反するため，ＡＰ＝ＰＱ＝ＱＢのとき∠ＡＯＢは三等分されない。　（以上，３班のレポートより）

＿＿＿の部分は直観的で数学的厳密さに欠けるが，背理法の発想を使っている。

正しくないことの証明をする為には，背理法の発想になるようで次の証明には驚かされた。



二等辺三角形ＰＢＥの底辺ＢＥを直径とする円Ｏ上に$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$となる点Ｃ，Ｄをとる。このとき，ＣＰ，ＤＰが∠ＢＰＥを三等分していなことを次のように証明している。

〈証明〉

図において，ＣＰ，ＤＰが∠ＢＰＥを三等分しているならば，△ＡＰＣと△ＧＰＣにおいて

∠ＡＰＣ＝∠ＧＰＣ，ＰＣ共通，また$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$だから

∠ＡＣＰ＝∠ＢＡＣ－∠ＡＰＣ＝∠ＣＧＤ－∠ＧＰＣ＝∠ＧＣＰ

一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△ＡＰＣ≡△ＧＰＣ　　∴ＡＣ＝ＧＣ

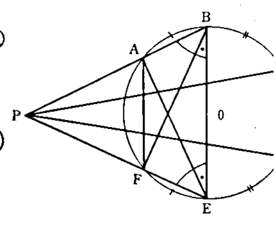
次に，△ＡＨＣと△ＧＨＣにおいて

ＡＣ＝ＧＣ，∠ＡＣＨ＝∠ＧＣＨ，ＨＣ共通だから

二辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△ＡＨＣ≡△ＧＨＣ

∴∠ＡＨＣ＝∠ＧＨＣ…Ⓐ



このとき　ＰＢ＝ＰＥより

∠ＰＢＥ＝∠ＰＥＢ

（△PBE が二等辺三角形）

∠ＡＢＦ＝∠ＡＥＦ

（$\overset{\frown}{AF}$ に対する円周角）

∴∠ＦＢＥ＝∠ＡＢＥ－∠ＡＢＦ

＝∠ＦＥＢ－∠ＦＥＡ＝∠ＡＥＢ

したがって$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{EF}$

ここでⒶより$\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{CDG}$だから$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FG}$，$\overset{\frown}{AB}=T$，$\overset{\frown}{BC}=S$

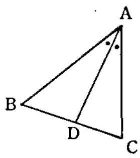
とおくと，$T+S=S+S+T+\overset{\frown}{FG}$

これは矛盾　∴ＣＰ，ＤＰは∠ＢＰＥを三等分しない。

この証明も背理法と円の性質を使いこなした例である。生徒達が推測した方法が，正しいか正しくないかを考えていく中で班の討議の中から導かれた証明法であり，私達の期待をはるかに越えるレポートになってくる。

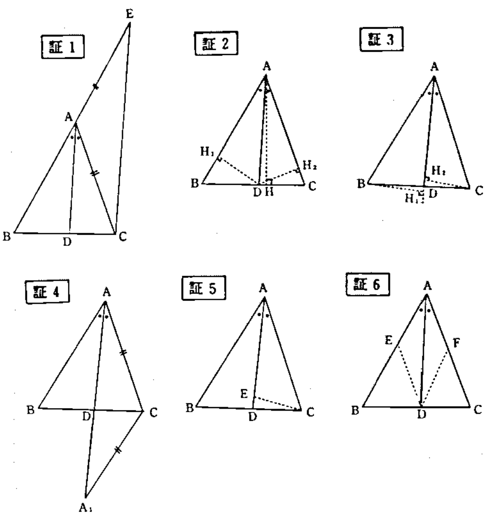
⑥　多様な考え方を育てる

今までの考察の中で頻繁にでてくる次の証明も生徒の興味をひく。ここでは，いくつかの証明法を考えさせたいと思い，２つ以上という形で与えた。

> △ＡＢＣにおいて，∠ＢＡＣの２等分線と辺ＢＣの交点をＤとするとき，
>
> ＢＤ：ＤＣ＝ＡＢ：ＡＣが成り立つ。
>
> このことを，２つ以上の方法で証明せよ。
>
> 
>

この問題を高校生に考えさせると三角比やベクトルの考えを使って，さらに多様な証明法を工夫してくる。

次に挙げるのは，中学生の考えたものを類別したものである。補助線をどこにひくかという発想も様々で大変楽しい授業になる。



以上，任意の角を三等分する問題の実践内容と生徒の活動についてまとめてきたが，これらのレポートを生徒に発表させ，全員で考えてきたことを見直すと，「数学的な考え方・態度」とは，どのようなものであるかが見えてくる。

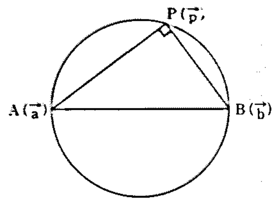
３．誤りを生かす教材

つぎに示すものは，授業中出てきた生徒の誤りを取り上げることにより理解を深めようとした教材である。授業として，きちんと展開できるようにまとまったものではないが，このようにちょっとした誤りを数多く扱うことも大切であると思う。

(1)　円のベクトル方式について

問題

Ａ（$\vec{a}$），Ｂ（$\vec{b}$）を直径とする円のベクトル方程式を求めよ。



誤答

円周上の点をＰ（$\vec{p}$）とする。

$\angle P=90^\circ$だから

$AP^2+BP^2=AB^2$

が成立する。

これをベクトルで表そうとして失敗

考察

教科書では$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$より $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ …①としているが，この条件は生徒からはなかなか出てこない。むしろ三平方の定理に注目する者が多い。中学校数学の流れから見ても自然であり，ぜひ取り上げたい。この考えを無視すると，生徒は「これは誤りである」とか「このような考え方はしないものだ」と思ってしまう。

$$|\vec{p}-\vec{a}|^2+|\vec{p}-\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$$

展開して整理

$$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}=-\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2-\frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}|^2=-\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|^2 \cdots ②$$

②は確かにＡＢの中点を中心とし，直径がＡＢの円を表している。また①を展開，整理して②を得ることもでき，①と②は同値であることがわかる。

しかし三平方の定理から，はっきり円とわかる②を得るにはかなりめんどうな計算が必要である。逆に，これを理解することによって，内積のすばらしさやその威力もわかる。

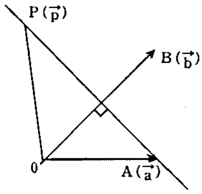
(2)　ベクトルの割り算

問題

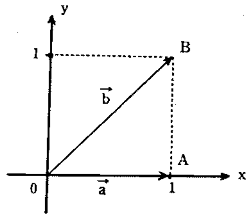
平面上の異なる２点をＡ（$\vec{a}$），Ｂ（$\vec{b}$）とする。$\vec{b}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{b}$を満たす$\vec{p}$を位置ベクトルとする点Ｐの描く図形を求めよ。

解

$\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{p}=0$
$\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{p})=0$　すなわち
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{PA}=0$
つまりＰはＡから
ＯＢにおろした垂線を描く。

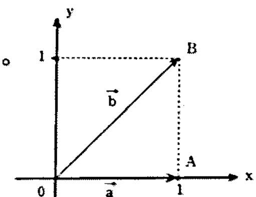


誤答
$\vec{b}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{b}$…①
両辺を$\vec{b}$で割って
$\vec{p}=\vec{a}$
したがってＰは
一点Ａを表す。



考察
正解と比較することにより，この様な割り算ができないことはわかる。しかし誤答がまったくの誤りかと言えばそうでもない。すなわち誤答は正解のうちの，特別な１点を表しているのである。そこでベクトルの割り算で正解を得ることができないか考える。

まず実数の割り算について
$\vec{b}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{b}$に対応する式は
$bp=ab$　両辺をｂで割ると
$p=a$
実数ｂで割るとは，ｂの逆数をかけることであり，逆数とは，かけて１になる数である。そこで，$\vec{b}$の逆ベクトルとは，内積をとって１になるベクトルと定義し，それを$\vec{b}^{-1}$で表すこととする。さて，
$\vec{b}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{p}$において，右辺は１つの実数であるからこれをｋとおくと
$\vec{p}=k\vec{b}^{-1}$…①　となるはずである。
①が正解を表しているかどうか次のようにして，具体的に確かめる。
$\vec{a}=(1,0),\ \vec{b}=(1,1)$とする。
$\vec{b}^{-1}$を求めるために
$\vec{b}^{-1}=(u,w)$とおくと
$\vec{b}\cdot\vec{b}^{-1}=u+w=1$
$\therefore \vec{b}^{-1}=(u,1-u)$



この例では　$\vec{a}\cdot\vec{b}=k=1$だから
①は$\vec{p}=k\vec{b}^{-1}$
$=\vec{b}^{-1}$
$=(u,\ 1-u)$
また$\vec{p}=(x,\ y)$とおけば

$$\begin{cases} x=u \\ y=1-u \end{cases}$$

したがって　$y=1-x$となり，これは確かにＡからＯＢに引いた垂線を表し，正解となっている。

この例に限らず，ベクトルの割り算については，実数の割り算とまったく同様に行う誤りはよく見られる。言わば生徒が必ず陥る誤りであり，何らかの形で取り上げる必要がある。

(3) 空間における２直線の交点

問題
２直線　$g:x=y=z$
$m:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-5}{4}$
が交わることを示せ。

誤答
直線ｍの式の値をｔとおくと
$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t+3\cdots① \\ z=4t+5 \end{cases}$$
これらをｇの式に代入すると
$2t+1=3t+3=4t+5$…②
$2t+1=3t+3$　より$t=-2$
この値を①に代入して
$x=-3,\ y=-3,\ z=-3$の交点をもつ

考察
求めた$t=-2$は②のすべてを満たすことを確かめていない誤りである。この方法が許されるならば，ねじれの位置にある直線が交点をもってしまう。

(4) 直線を含む平面の方程式

問題
直線　$g:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$を含み，点(1,1,1)を通る平面の方程式を求めよ。

誤答
$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$　すなわち
$6x+4y-4=3z-6$　したがって
$\dfrac{6x+4y-4}{2}=3z-6$　これを整理して
$3x+2y-3z+4=0$…①
①は平面の式だからこれが求める平面である。

考察
この解答は，まったく見当ちがいの解答であるが直線ｇの式から導いた平面だから，何かｇと関係があるはずである。その関係を求めよという課題を出したら多くの生徒が興味を持った。
実や①は直線ｇを含む平面の１つであるが，この事を発見したり確かめたりするのに，今までに学んできた様々な内容（法線ベクトル，方向ベクトル）を使った生徒も多く，良い勉強になったようだ。
①を生かした正解は次の様になる。
ｇのｔの$\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$　から
$4y-3z+2=0$…②を得る。

①，②の交線が g だから，求める平面を

$3x+2y-3z+4+k(4y-3z+2)=0$

とおき，点 (1,1,1) を通る条件から k の値を求め，平面の式を定めることができる。

(5) **行列の零因子について**

問題

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。$A^2+A-2E=0$ となるとき，$a+b$，$ad-bc$ の値を求めよ。

誤答

$A^2+A-2E=0$ より

$(A+2E)(A-E)=0$ したがって

$A=-2E$，$A=E$ つまり

$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

故に $a+d=-4,2$ また，$ad-bc=4,1$

考察

「$AB=0$ ならば $A=0$ または $B=0$」は，一般には成立しない。行列の零因子についての理解を深めることができる。

(6) **シュワルツの不等式**

問題

$(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)\geqq(ac+bd)^2$ が成立する。

この不等式を元にして，新しい不等式を作れ。

解答例

① $(a^2+b^2+c^2)\cdot(d^2+e^2+f^2)\geqq(ad+be+cf)^2$

② $(a^2-b^2)\cdot(c^2-d^2)\leqq(ac-bd)^2$

③ $(a^3+b^3)\cdot(c^3+d^3)\geqq(ac+bd)^3$

④ $(a^n+b^n)(c^n+d^n)\geqq(ac+bd)^n$

⑤ $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ace+bdf)^2$

など

考察

これは生徒に問題作りをさせたときの例である。正誤にかかわらず問題を作るように指示すると，生徒の活動は活発になる。教師はすぐ①を思いつくが多くの生徒から出た不等式はむしろ③④⑤であった。①②⑤は成立するが，③④は成立しない。成立しない場合でも「どんな条件をつければ成立するか」など，1つ1つ生徒といっしょに確かめると良い。

4．今後の課題

以上のような実践的検討から，次のような課題を得た。

(1) **誤りを生かした授業は，生徒の数学的考え方や態度にどのような変化をもたらすか。**

本研究のねらいとして，生徒に数学の可謬性を理解させることを考えていたが，そればかりでなく，誤りを生かした授業は，生徒の数学的考え方や興味・関心・態度等に大変よい効果を与えているように思われる。数学的考え方との関連については，2節で考察しているが，とくに，興味・関心・態度に対する影響について，統計的手法で分析する必要があろう。これについては，国際数学教育調査(IEA)等を参考にして調査・分析したいと考えている。

(2) **誤りを誤りとして認識することは，理解とどのような関係があるか。**

どこが誤りなのか，なぜ誤りなのか—ということを生徒が理解し，さらに他の生徒に説明することは，その生徒の理解がさらに深化することに関連しているように思われる。これは，構成主義的立場から言えば，誤りというコンフリクトによって知識の再構成が行われると説明されるであろう。しかし，実践的検討から問題となるのは，誤りを誤りとして認識すること，それ自体が大変なことであるということである。誤りを誤りとして認識すること，コンフリクトをコンフリクトとして認識すること，それには心理的要因の他に，社会的要因なども関連していると考えられる。このような点について，理論的にさらに精緻に論ずる必要がある。

(3) **誤りからみた，中・高等学校の数学教材の問題点を整理すること。**

(2)で述べたように，誤りが理解と密接な関連性をもっているならば，生徒の誤りを調査分析することにより生徒の思考構造がつかめるはずである。そのことは，中・高等学校の数学教材の心理学的問題点を明らかにすることにもなるであろう。それは，理論的系統性の問題点とは必ずしも一致しないであろう。

このような生徒から見た中・高等学校の数学教材の心理学的問題点を知ることは，実践的にはきわめて興味深いことである。

(参考文献)

・中村幸四郎他訳・解説；「ユークリッド原論」共立出版，1981

・片桐重男著；「数学的な考え方の具体化」明治図書，1988

・矢野健太郎著；一松伸解説；「角の三等分」日本評論社，1984