

## 中学校・高等学校における新しい数学科教育課程の研究開発(2)

—小学校算数科教育課程との接続についての具体的検討—

中原 忠男 小山 正孝  
井ノ迫泰弘 宇佐川信行 平岡 賢治  
長尾 篤志 砂原 徹 河野 芳文  
酒井 秀二 富永 和宏 仲渡 雅史

### 1. はじめに

本研究の第1年次においては、算数・数学科教育課程の基本理念を提示し、現行教育課程の諸問題を検討の上、小・中・高12年一貫の教育課程の基本的枠組みを作成した。われわれが掲げた算数・数学科教育課程の基本理念とは、次の3つであった。

- ① 人間形成とりわけ自律性の育成
- ② 数学的な見方や考え方の育成
- ③ 数学的なコミュニケーション能力の育成

学校週5日制が2002年から実施されることになり、それに対応した小学校・中学校の学習指導要領も本年度告示された。高等学校についても近々告示されようとしている。これらの学習指導要領においては、学校週5日制や総合的な学習の時間の導入に対応して授業時間数を削減するだけでなく、児童・生徒がゆとりをもって主体的に学習することをめざして、大幅な内容削減が実施されることになっている。実際、われわれの提示した基本理念が実現されるような、じっくりと考える力を養う授業がその効果をあげるためにはゆとりは不可欠である。この点から考えれば、次期学習指導要領で思い切って実現される大幅な内容削減は改善であるといえる。

反面、最も危惧されるのは学力低下であり、考える時間は十分あっても知識・技能は不十分なままとなってしまうのではないかと、多少難しい内容であっても苦勞して学ぼうとする態度が児童・生徒からなくなってしまっているのではないかとといったことも憂慮される。また、科学技術社会を支えていくために学んでいくべき数学がレベルダウンするはずもなく、内容の厳選・先送りのしわ寄せがどこかに出てくることは避けられないであろう。

これらの問題に対してわれわれが昨年来提案してきたのは、教育内容の重点化の考え方である。従来の算数・数学科教育課程では、一般にスパイラル方式が多く採用され、そのよさも十分認められてきた。しかし、授業時間数大幅削減の問題を克服し、なおかつ教育内容の水準を保持するためには、重点化方式を取り入れた教育課程への移行が必要となろう。そのためには、このたび告示されたものさらに次の学習指導要領などでの実現を念頭において、小学校・中学校・高等学校の全体を見通して、教育内容の関連について検討し、重点化の実施に向けた具体的な検討が必要となる。

本年度の研究では、特に小学校算数科と中学校数学科の学習内容との接続について、中でも「文字と式」「関数」「整数」に焦点をあて、スパイラル方式から重点化方式に移行した指導計画を作成し、授業実践を通して、その妥当性や問題点についての具体的な検討を行うこととした。

### 2. 本年度の研究内容について

本年度は、教育内容の厳選・削減に向けて小学校・中学校・高等学校の学校間での学習内容を整理し、特にその取り扱いに関して検討を要する項目として「文字と式」「比例と反比例」「整数の性質」の3つをとりあげた。これらはいずれも小学校・中学校で重なっている内容であるが、ここで単に重複を避けようとしているだけでないことはいうまでもない。スパイラル方式の価値は認められるが、時間数削減という時代の要請のなかにあっても算数・数学の学習の充実を実現する教育課程編成の基本理念として提示した「学習内容の重点化」を進めるために、小学校・中学校の接続で具体的な見直しの必要性を強く感じる内容を選び、本

Tadao Nakahara, Masataka Koyama, Yasuhiro Inosako, Nobuyuki Usagawa, Kenji Hiraoka, Atsushi Nagao, Toru Sunahara, Yoshifumi Kohno, Shuji Sakai, Kazuhiro Tominaga, and Masafumi Nakato :  
A Study on Curriculum Development of Mathematics in Junior and Senior High Schools (2)  
—An Investigation on the Connection with Elementary School Mathematics—

年度研究の中心として設定したのである。3つの項目を取りあげた理由は、個別には次の通りである。

### [1]「文字と式」について

現行の教育課程においては、小学校でも文字を使った式を学習する。しかしながら、また中学校において、改めて文字を使った式について、初めて学習するかのごとく扱っているのが現実である。もちろん扱う観点の違いがあり、それぞれでの学習の必要性があつてのことであるが、「学習内容の重点化」の観点から、このあたりの諸問題を整理する必要性を感じたのである。

### [2]「比例と反比例」について

文字と式と同じく、小学校で学習し、また改めて中学校でも学習するというのが現行の教育課程である。中学校では負の数も扱ったり、関数という用語が出てきたり、内容の差がないとはいえないが、極端な表現をすれば、実質的にはほぼ同じ内容である。学習者が学びがいを感じることができるようにするためにも、「学習内容の重点化」の必要性を感じ、関数の学習の流れを小中高12年の中で見直すことが必要であると考えたのである。

### [3]「整数の性質」について

現行の教育課程においては、小学校で約数・倍数などを学習した後、中学校・高等学校においては、まとまった内容として学習する場面がない。そのために、素数などの内容が、学習の文脈から考えると不自然な形で登場せざるをえないのが現状である。われわれは教育課程編成の基本的な考え方として「学習内容の重点化」をあげており、この観点から検討することによって現状を打開したいと考えたのである。それに伴って、現行では高等学校で扱っている「個数の処理」において整数の性質などが頻出であることから、その内容や位置づけもあわせて検討することも必要であると考えた。

なお、素数は小学校での倍数・約数の学習の中へ重点化しようと考え、実際の授業も試みながら研究を行ったが、それについての報告は別の機会に譲ることにする。本稿では中学校へ重点化したことを中心として、「個数の処理」について述べることにする。

## 3. 各教材についての研究

### [1] 文字と式

#### 1. 小・中の接続についての問題

小学校における本単元の指導内容としては、いろいろな値の数や量を□やxなどの記号や文字を用いて表したり、□やxなどを用いて表された関係式から実際の数を求めたりすることが位置づけられている。この学習を通して、□やxなどの記号や文字を用いて簡潔に表現される式としてのよさや、それによる数量の関

係の見通しが持ちやすくなることなどの価値を学習する。しかし、小学校段階の問題点として、

① 式を数量の関係を表すものと理解しにくい

② □やxなどの記号や文字を変数としてとらえにくいなどが考えられる。このときの□やxなどの記号や文字のもつ意味は、数の「入れもの」や「未知数」としての理解が中心であり、「変数」「変量」としては理解されにくい。

中学校では、現行では□などの代わりに文字を用いるよさをとらえさせ、さらに数量関係の表現を簡潔にするよさを感じさせている。文字にはいろいろな数量や概念をひとまとめにして表すという「要素の代表」としての意味と、文字の中身は必要に応じて置き換えられるという「入れもの(place holder)」としての記号の意味があることを理解させることが、中学校では特に重要である。

## 2. 新構想教育課程に基づく「文字と式」(中学1年)

### の授業

小学校の内容を中学校に重点化する構想に基づいて検討したため、実際の授業としては実現していない。以下に示す実践案では、小学校段階の「文字と式」の指導を削除する代わりに、関連づけや根拠づけ及び変数的見方・考え方が著しく伸びてくる中学校段階に小学校の内容を取り入れて「文字と式」を設定し、「変数」「変量」としての素地内容を含めて理解させるという立場を主張している。こうすることで、理解が困難であった「数量関係としての文字と式」の「変数」「変量」としての理解が確実になり、より代数的な見方・考え方ができると考えている。

#### (1) 指導計画

1. 文字を使った式……………2時間
2. 文字式の表し方……………2時間
3. 文字を使った数量の表し方……………2時間
4. 式の値……………1時間

#### (2) 授業の実際

##### 〈課題設定〉

- 下図のようなマッチ棒を1つずつ順序提示し、研究課題を考えさせる。



(例)・正方形が20個の時、マッチ棒は何本になるか調べよう。

・正方形がn個の時、マッチ棒は何本になるか調べよう。

- 学級全体で、追究していく課題について話し合い、まとめさせる。

- ・正方形が50個の時、マッチ棒は何本になるか調べてみよう。

#### 〈課題追究〉

- 1人1人に自由に考えさせ、代表となる考えを黒板に書かせる。
- それぞれの考えのよさについてまとめさせる。  
(例) ・10個、20個・・・と順に調べ、50個の時の答えを式に表している考え。  
・1つの図をかき、いきなり式に表している考え。  
・文字を使ってn個の時の答えを求めている考え。 など
- どの考えを支持するか、正方形の数をもっと増やして調べさせる。

#### 〈課題発展〉

- 正方形の数をもっと増やしてみても調べてきたことについて意見を出し合い、一番よさそうな考えについて整理させる。  
・文字や記号を使って式にすると、どんな数でも簡単に調べることができる。 など
- 次の時間の発展課題を考えさせまとめる。  
・n個の時の求め方を調べてみよう。  
・問題づくりをしてみよう。 など

## [2] 比例と反比例

### 1. 小・中の接続の観点から

われわれ数学科は小・中・高12年一貫構想に基づく教育課程の開発・研究を、附属小学校の算数科と合同で行ってきている。数量関係の中で関数指導一特に、反比例のグラフ指導のあり方について検討を行ってきた。本校の中等教育研究大会の公開授業で、中学校1年生に対して反比例のグラフ指導について研究授業を行った。

平成14年度から施行される小学校・中学校の新学習指導要領が昨年12月に告示された。それによると、数量関係、特に反比例の指導は中学校に移行されることになっている。これは、われわれが協議してきた教育課程の内容とほぼ同じものである。小学校の算数では、できるだけ具体的なものを用いて数学的活動の楽しさや数理的な処理のよさを知ることを目標としている。中学校の数学では、具体物からできるだけ離れ一般的なものを用いて、数学的活動の楽しさや数学的な見方や考え方のよさを知ることができることを目標とした。そして、中学校1年は小・中の接続を考える場合最も重要な学年でもあり、児童・生徒の発達段階から考えても慎重に対応しなければならない学年である。算数では、正の数の範囲で加減乗除の四則演算をは

じめ、○や□の記号を数を入れるものとして指導している。中学校1年の数学では、扱う数の範囲が算数で扱った正の数から負の数にも拡張される。その後、数の代表としての文字を導入し、算数で学習した○や□の代わりに文字 $a$ 、 $b$ や $x$ 、 $y$ を導入する。さらに、いろいろな関係(算数で学習した公式など)を文字を用いて表したり、1次式の計算ができるように指導してきている。また、さまざまな比例関係にある2つの数量 $x$ 、 $y$ が、 $y=ax$ ( $a$ は比例定数)の式で表されることや $x$ の値が定まると $y$ の値が定まること、またその逆も成り立つことを具体例を通して指導してきた。さらに、そのグラフが原点を通る直線で表されることを、比例式をみだす点 $(x, y)$ が格子点からその中点そしてさらには有理数点までどんどんつながっていくことを経験的に理解させてきた。

### 2. 反比例のグラフについて

小学校では、比例関係や反比例関係にあるものを○や□で表し、それらの関係を具体的な数値を代入することを通して考察させてきた。例えば、一定な速度で動くときの時間(○)と距離(□)の関係や面積が一定な長方形のたての長さ(○)と横の長さ(□)の関係など、個々の例について発見した規則性を進んで活用する態度を育てるように指導してきた。

中学校では、伴ってかわる2つの量として関数的な考え方を導入し、 $y$ を $x$ の式で表すことができるようにする。このとき、身近にある関数教材をできるだけ取り入れるようにすることが大切である。この中で、基本となる比例と反比例の2つの関係を中学校1年で取り扱うことになる。比例のグラフは、原点を通る直線で表され、生徒にも直観的に理解しやすいと考えられる。

一方、反比例のグラフは双曲線になるが、このようなグラフは直観的には理解させにくい。実際、現行の学習指導要領でも分数関数(一次分数関数)は高等学校の数学Ⅲで学習することになっている。また、双曲線については数学Cで扱われる教材になっている。一般的な現行の中学校・高等学校の教育課程では、反比例のグラフは中学校1年で学習した後、高等学校3年まで学習する機会がほとんどない。

そのため、反比例のグラフが曲線になることをていねいに指導することが必要である。われわれは、この反比例のグラフの指導に焦点を当てて、中学校1年で実際にできる授業を検討し、構成した。

### 3. 授業について

以上のような経緯をへて、中学校1年に重点化した反比例のグラフについての授業を、本年度の本校の研究大会公開授業で実施した。

実際の授業では、1辺が長さ1の正方形6つを準備して、次の観点に焦点を絞って授業を展開した。

- ① 組み合わせて長方形をつくること。
- ② 同じ面積でできるだけ多くの長方形の形を作ること考えること。
- ③ そのためにはどのような方法が考えられるかを試行錯誤させること。
- ④ 長方形のたてと横の長さの積が一定であるということに気づかせること。
- ⑤ たてと横の長さをそれぞれ  $x$  と  $y$  で表し、この2つの量の関係は  $xy = 6$  で表されることを確認すること。
- ⑥  $x$  と  $y$  の値を数として捉え、負の数まで拡張してグラフを描かせること。

授業の特色としては、第一に具体的な操作活動を扱ったことである。これは算数でよく行われる方法である。生徒も慣れていていると考えられる。すなわち、長方形をつくるという操作活動と2数の積が6になる数の組を求めることを取り上げた。整数の範囲ではこれらが素因数分解に対応することに気づかせたい。さらに、より細かい2数の積が6である数の組合せを考えさせるために、正方形を分割するという操作活動を取り上げた。

第二に数の拡張である。 $xy = 6$  を扱った段階で具体物から数（正の数から負の数への拡張）へ扱う対象を変更していったことである。グラフを描かせるという目標を定めており、 $xy = 6$  をみたす点  $(x, y)$  を座標平面上にプロットすることに重点を当てて授業を展開した。

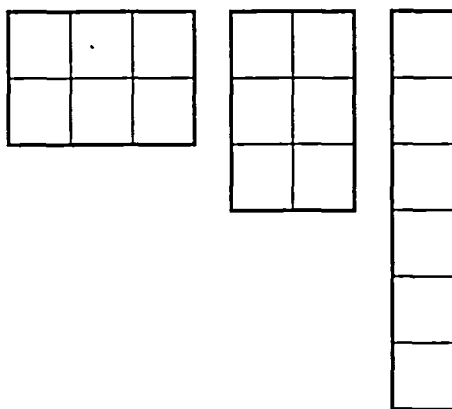
学習指導案作成の段階では、すべての正方形をより細かな正方形や長方形に分割する方法を生徒は行うであろうと考えていた。しかし、実際には後で述べるように予想を大きく超える方法を生徒たちはとり、授業の中で当惑させられた場面もあった。

われわれが重視したのは、正方形を分割して新たに長方形を組み立てる方法であった。生徒たちが、どのような方法により長方形をつくるのかということである。そして、正方形の紙が6枚、ハサミ、グラフ用紙を準備して授業を実施した。

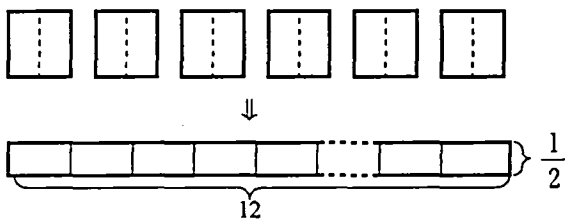


生徒の発表した方法は次のようである。

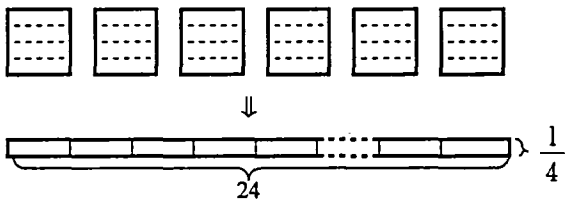
- ①  $1 \times 6, 2 \times 3, 3 \times 2, 6 \times 1$



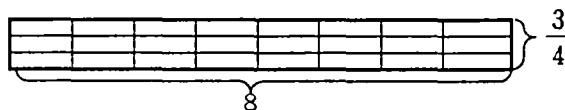
②正方形をたて（横）に二等分する



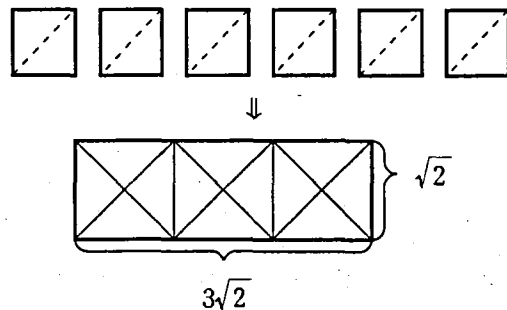
③正方形を4つの正方形に細分し、24の素因数分解（①の方法）を行う



あるいは



④正方形を対角線で二等分する



#### 4. 授業の事後検討

今回の授業では、反比例のグラフの導入としてよく行われている「1辺が1の正方形6つから同じ面積をもつ長方形をつくらう」という課題を扱うこととした。中学校としてどのような授業展開ができるかが、われわれの課題でもあった。単に、6の素因数分解で終わらないで、正方形の分割（長方形や正方形に分割し、再構成する）の発想が生徒から出てくるような授業を計画したが、正方形の対角線で分割し、それを組み合わせて1辺が無理数の長方形をつくることができるといふ生徒の発言には、生徒たちの発想の豊かさや、これまでの小学校での指導の深みを改めて知らされた。

授業では、

- ① 正方形の切断から辺の長さに視点を置かせること
- ② 面積に着目することから2辺の積 $xy = 6$ とすること
- ③ 具体的にこのような点 $(x, y)$ を座標平面上にプロットしていくこと

を授業展開の目標の1つとした。実際には負の数への拡張を大きな課題として授業展開を行った。しかし、比例をすでに学習していたためか、生徒たちは自然に座標軸を描き、グラフを負の数まで拡張して描いたものが半数を超えていた。さらに、離散的なグラフではなく、連続的な双曲線を描いたものが多くいたことは注目される現象であり、その理由の分析をすることが必要であろう。

#### 5. まとめ

小学校の観点からは、長方形づくりは具体性があり理解しやすい教材であろう。そして、紙を切ってつなぐという操作が中学校への接続と捉えることができる。細分化を通して、整数から有理数へ、場合によっては無理数への展開を考えることになるが、中学校1年の段階では電卓などを使って、近似値の計算でも十分ではないだろうか。しかし、 $xy = 6$ という仮定から授業展開ということも考えられなくもない。われわれとしてはできるだけ具体物をという観点から、このような指導展開を行った。負の数への展開が大変スムーズであったのは、これまでの積み重ねのよさがあったのではないかと考えられる。具体から抽象化への典型的な場面として取り上げることもできるであろう。

### [3] 個数の処理

#### 1. 中学校教育課程における「個数の処理」

教育課程の再編において、一般的には内容の先送りがすすめられがちである。しかし、小中高12年間を見通して、時間的に余裕の少なくなってしまった高等学

校の内容で、少し早い段階から学習を始めておくことがよいと思われるものを、中学校へ移行することを考えた。

「個数の処理」は現行の学習指導要領ではじめて高校1年の単元として設定されたものである。「数え上げの原則」「自然数の列」「場合の数」の3つの内容で構成されている。複雑な計算もなく、記号などの取り扱いに注意すれば中学1年でも十分学習が可能である。むしろ、中学1年で学習すれば、より柔軟でおもしろい発想も期待することができ、数学に対する興味や関心も高めることができると考えた。また、内容も生徒の身近なことがらを扱うことによって数学の有用性を感得させることにもつながる。

このような観点から「個数の処理」を中学1年で指導することとした。

#### 2. 中学1年における「個数の処理」の授業実践

##### (1) 指導計画

全7時間で次のように計画をした。

分類して数える……………	1時間
対応をつけて数える……………	1時間
順列・組合せを利用して数える……	3時間
漸化式を利用して数える……………	2時間

ただし、順列や組合せの総数を表す記号、漸化式という用語や式は扱わない。

##### (2) 授業の実際

それぞれの授業の概略を次に述べる。

##### ①分類して数える

第1時は10円玉、50円玉、100円玉が何枚かずつ入った貯金箱を教室に持ち込み、「ここに10円玉、50円玉、100円玉が何枚かずつ入った貯金箱がある。貯金箱の中に全部でいくらのお金があるか、計算するときどうするか。」と生徒に問いかけた。生徒からはすぐに「10円玉、50円玉、100円玉がそれぞれ何枚ずつあるか数えて計算する。」という答えが返ってきた。そこで「お金の種類によって分類して計算する、ということだね。」と確認して実際に金額を計算した。(合計金額は1500円)

次に「それでは、10円玉、50円玉、100円玉を何枚かずつ使って、合計金額が1500円になるのは他にどんな場合があるだろうか。」と問うと、「そんなのはいくらでもある。」と言って「例えば、10円玉が45枚で、50円玉が3枚、100円玉が9枚。」という例をあげた。「本当に、いくらでもある？全部で何通りあると思う？」と問うと「100通りぐらい」など口々に思い思いの数をあげていた。「実際に何通りあるか調べよう。」と課題を設定した。

生徒はしばらくどうすればいいか戸惑っていたが、

ある生徒の「100円玉を9枚使う場合が全部で13通りある。」という発言をきっかけにして「100円玉の枚数によって分類して考えてみよう。」ということになり、最終的に次の式を得た。

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 31$$

「これ、いくら？」と問うと「256」と一人の生徒が答えた。その生徒は $(1+31) \times 8$ と計算したとのことであった。「他の計算方法はないか。」と言うと「電卓で計算する。」という答えも返ってきたが、「電卓でも入力するのが面倒」ということになり、次の時間にこの計算について少し考えてみよう、と投げかけ第1時を終えた。

### ②対応をつけて数える

第2時は前時の計算方法について考えることから始まった。それに約0.5時間を費やした。

その後「16チームでサッカーの試合を行う。試合はトーナメント方式で行うとすると、優勝チームが決定するまでに全部で何試合行われるか。ただし、引き分けや再試合はないものとする。」と課題を与えると、ほとんどの生徒がトーナメント表(図?)を書いて、すぐに15試合と答えた。「67チームのときは全部で何試合になる？」と問うと、トーナメント表を書くのが面倒だ、と不満を言う生徒が多かった。「面倒だと思うのなら、うまく計算する方法を考えなさい。」と言うと、ある生徒が「全部で66試合。」と答えた。「どうして？」と聞くと「1試合する毎に1チームが消えていく。優勝チームが決まるまでに66チームが消えなければならないから試合数は全部で66試合。」とのことであった。その生徒が言ったことを16チームの場合で確認し、「よく思いついたね。」と言うと、ある本で読んだことがあるとのことであった。

「1試合と消えていく1チームがうまく具合に対応しているから、あるチームが優勝するというのを66チームが消えると読み替えて試合数を求めた。このように、うまく対応がつく他のものを考え、そちらの数を数えるとうまくいくことがあるんだね。」とまとめをした。

### ③順列・組合せを利用して数える

第3時は前時からの続きを考えてリーグ戦の総数を求めることから始めた。まず、「16チームでトーナメント戦をすると全部で15試合だった。16チームでリーグ戦をすると全部で何試合になる？」と問うと戸惑っている生徒もいたが、多くの生徒が比較的簡単に「120試合」と答えた。どうやって求めたかを問うと、多くの生徒がリーグ戦の星取り表を考えたと言う。リーグ戦の星取り表でそれぞれのチームが試合をするのは自分のチームを除いた15チームだけど、星取り表の対角線の上側と下側は同じ対戦を表しているから試合数

は次の式で求められるということであった。

$$15 \times 16 \div 2$$

「それでは、いま、ここに1から5までの数字を一つずつ書いた5枚のカードがある。この中から2枚のカードを選び出す選び出し方は全部で何通りあるか。」と問うと、最初、問題の意味がわからず戸惑っている生徒が多かったが、しばらくしてほとんどの生徒が10通りと答えた。どうやって考えたか聞くと、1と2、1と3、……のように書いていったというもの以外なかった。「うまく計算で求めることはできないかな？」と言うと、ある生徒がしばらくして

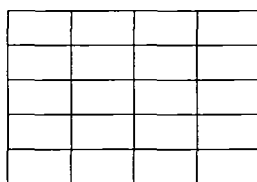
$$4 \times 5 \div 2$$

と計算すればいい、と答えた。「なぜ？」と問うと「16チームでするリーグ戦の試合の数は、16チームのうちから試合をする2チームを選び出す選び出し方の数だと考えれば、この場合と同じことになる。」ということであった。周りの生徒がよくわからなそうであったのでその生徒は「つまり、いまの場合は、1から5までの数字をつけた5つのチームがあって、その5つのチームの中から対戦する2チームを選び出す選び出し方の数がリーグ戦の試合数と同じになる。結局、それが5枚のカードから2枚のカードを選び出す選び出し方の数と同じになる。」と説明をし、周りの生徒も納得したようであった。「と言うことは、例えば、1から13までの数字を1つずつ書いた13枚のカードから2枚のカードを選び出す選び出し方は全部で……。」と言うと

$$12 \times 13 \div 2 = 78 \text{通り。}$$

と、多くの生徒が答えた。

さらに、「次の図の中に長方形はいくつあるか。」



という課題を考えさせた。生徒はいろいろな長方形をすべて数え上げていたが、時間内にはどの生徒も数え切れなかった。

第4時は前時の課題を引き続いて考えることから始めた。「長方形は全部でいくつあった？」と問うと「144」とか「152」などのように150前後の数が生徒から返ってきた。「どうしてそうなったの？」と聞くと「全部数えた。どういうふう数えたか忘れた。」という答えが多く、漏れや重複がないかを確認することができなかった。

ある生徒が「150」と答えるので「どうして？」と聞くと「 $(5 \times 4 \div 2) \times (6 \times 5 \div 2)$ 」で出る。そう教えてもらった。」と言う。「どうしてそう計算したら出るの？」と続けて聞くとよくわからないようであった。「だれかわかる人は？」と聞いたが、だれもわからないようであったので、「みんな、その中の1つの長方形をとってごらん。自分でとった長方形の縦の線と同じ縦の線をもつ長方形はいくつある？」と問うと、何人かの生徒が「15」と答え、しばらくして数人の生徒が「わかった！」という声を上げた。その中の一人の生徒に聞くと「縦の5本の線の中から2本の線を選び出す選び出し方が $5 \times 4 \div 2$ 、横の6本の線の中から2本の線を選び出す選び出し方が $6 \times 5 \div 2$ 、それらを掛けて150。」と説明した。「どうして掛けるの？」と問うと「縦の2本の線を決めるとその2本の線を辺にもつ長方形が15ずつあるから。」と答えた。他の生徒も納得したようであったので、「1つの長方形を決めることと、縦の線を2本、横の線を2本選び出すことがうまく対応しているから、後の方を計算して長方形の数を求めたんだね。」と確認をした。

次に「昨日の1から5までの数字を1つずつ書いた5枚のカードから、今度は3枚のカードを選び出そう。選び出し方は全部で何通り？」と課題を出すのとじっと考えている生徒、全部書き出している生徒に分かれたが、しばらくして全部書き出していた生徒が「10通り」と答えた。「5枚のカードから、2枚のカードを選び出す選び出し方の数と3枚のカードを選び出す選び出し方の数が同じだね。どうして？」と問うと何人かの生徒から「偶然。」という答えが返ってきた。「偶然かね？」と念を押すと、1人の生徒が「5枚のカードから2枚のカードを選び出したら3枚のカードが残る。残った3枚のカードを選び出したと思えば、2枚のカードを選び出す選び出し方と当然、同じになるんじゃないか。」と言い「5枚の中から3枚のカードを選び出すのは、残す方の2枚のカードを選び出すのと同じことだ、という意味だね。」と全体に確認することができた。

「では、この5枚のカードから3枚のカードを選び出して3桁の数を作ると何通りできるか。当然、123と213は別の数だよ。」と問うと、数人の生徒が「60通り」と答えたところで時間切れとなった。

第5時は前時の課題の確認から始めた。「この前の授業の終わりに60通りという答えがあったけどみんな60通りでいい？ どうして60通りになったの？」と問うと「5枚のカードから3枚のカードを選び出す選び出し方が10通り。例えば、1と2と3を選び出したら、その3枚のカードから、123、132、213、231、312、321の6通りの数が作られる。それで $6 \times 10$ で60通り。」と

の答えが返ってきた。先に5枚のカードから3枚のカードを選び出す選び出し方の総数を求めさせており、そのとき全部書き出した生徒が多かったのでその結果を利用したようであった。「他のやり方で求めた人は？」と聞いても手は上がらなかった。そこで、生徒に発問しながら樹形図を作り、求める3桁の数が60通りあることを確認した。

「この5枚のカードから4枚のカードを選び出して4桁の数を作ったら何通りできる？」と問うと4枚のカードを選び出すところで迷っている生徒、さっと樹形図を利用して4桁の数の総数を求めた生徒、しばらく迷って樹形図を利用した生徒などに分かれた。答えを聞くと「120通り」と返ってきた。ほとんどの生徒が先ほどの樹形図を利用したと言う。

「では、5枚のカードから4枚のカードを選び出す選び出し方は何通りある？」と聞くと、1人の生徒が即座に「5通り」と答えた。「どうして？」と聞くと「この前やったように、5枚のカードから4枚のカードを選び出すのは、残す1枚のカードを選び出すのと同じことだから。」とのことだった。「例えば1, 2, 3, 4の4枚のカードを選び出したとして、この4枚のカードで4桁の数はいくつ作られる？」と問うと「 $4 \times 3 \times 2 \times 1$ で24通り。」という答えが返ってきたので「さっきの4桁の数の総数は $24 \times 5$ で120通りと考えてもいいね。」と確認した。

「同じような7枚のカードがある。このカードの中から4枚のカードを選び出して4桁の数を作るとき、何通りの数ができるか。」と問うと、しばらくして「840通り」という答えがいくつも返ってきた。樹形図を利用して、 $7 \times 6 \times 5 \times 4$ を計算したという。「7枚のカードから4枚のカードを選び出す選び出し方の数は？」と問うたが、答えが出る前に時間がきてしまった。

第6時は当初の予定を変更して前時の続きを行った。「1から7までの数字を1つずつ書いた7枚のカードから4枚のカードを選び出し4桁の数を作ると840通りの数ができた。7枚のカードから4枚のカードを選び出す選び出し方の数は何通りになったかな？」「7枚のカードから3枚のカードを選び出す選び出し方の数と同じだから、全部書き出したら35通りだった。」という答えが返ってきた。「さっきの840は利用できないかな？ 7枚のカードから4枚のカードを選び出す選び出し方の数はわからないとして $x$ とおくと $x$ を使った方程式が作れないかな？」と問うと1人の生徒が「4枚のカードを使って4桁の数を作ると24通りできたから、 $24x = 840$ 。だから $x$ は35。35であっている。」と言った。しかし、よくわからなかった様子の生徒が多かったので、「こう書いた方がよくわかるかもしれない。」と言って

次の式を書いた。

$$x = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

分母、分子の式の意味を振り返って、最後に「1から9までの数字が1つずつ書かれた9枚のカードから5枚のカードを選び出してできる5桁の数は何通りできるか。また5枚のカードを選び出す選び出し方は何通りあるか。」を考えさせ、理解を確認した。

#### ④漸化式を利用して数える

第7時は、いわゆるハノイの塔の問題を考えさせた。問題は次の通りである。

「3本の柱があり、3本の柱の1本には大きさの異なる10個の輪が下から大きい順に重なっている。この輪を次の規則にしたがって、できるだけ少ない回数で、3本目の柱に最初と同じ状態になるように移したい。最小何回で移すことができるか。

規則：● 1回の移動では、1個の輪しか動かさない。

- どの柱においても、小さい輪の上に大きい輪を重ねてはいけない。」

問題を説明した後、生徒に自由に考えさせた。席の近い生徒が数人ずつグループを作るなどして硬貨を使うなど実際に回数を数え上げていた。

第8時はまず、前時の課題の結果を聞いた。「輪の数が少ない場合はやってみたが、輪の数が増えるとわからなくなった。」という答えが返ってきた。「何個まで数えた？」と聞くとある生徒が5個までと言うので、輪の数が5個までの回数を黒板に順に書いていった。

1, 3, 7, 15, 31

「この数を見て気づくことはないか。」と聞いても返答がないので「輪の数が6個の場合を数えてみよう。」と、実際に回数を数えさせた。「分かった。前の回数の2倍に1足したらいい。」という生徒がいたので、理由を聞くと「説明できそうできない。」と言うので「もう少し考えてごらん。」と指示した。大体、回数を数え終わったころ、回数を聞くと「63回」という答えが返ってきた。先ほどの生徒の発見を全体に紹介して「理由を説明できる？」と聞いたが「まだ、うまくできない。」という。すると他の生徒が「例えば、いまの場合だと、6個の輪のうち上の5個の輪を2本目に移すのに31回、それで一番下の輪を移してその上にもう一回5個の輪を移すのに31回。同じように考えればいいから、前の回数の2倍に1足したらいい。」と説明した。周りの生徒もその説明に納得したようであったので「この前の答えはいくら？」と言うと、少しして「1023回」という答えが返ってきた。「こんなふうに数の少ない、数えやすいところから順々に数え上げていくとうまくいく場合もあるね。」とまとめをした。

### (3) 反省と課題

授業を実施してみて反省点、課題はいろいろあるが、ここでは次の2点をあげておく。

第一は内容の検討が不十分であったことである。生徒に興味、関心を持たせることや身近なことから取り上げ数学の有用性を感じさせることにはある程度成功したかもしれないが、生徒の柔軟な発想を引き出すということにはほど遠い授業であった。また、内容の連関は考えたつもりであるが、生徒に、まとまった内容のものを学んだという実感は与えることができなかったと感じている。いずれも内容の検討が不十分であったためと考えている。

第二に、上のことがらと関連するが、7時間ではまったく時間数不足だということである。途中で予定を変更したため総時間数は8時間となったが、それでも深まりのない授業になってしまった。授業をしていて、時間が気になり強引に誘導することもあった。大きな反省点である。

#### 3. まとめ

今回中学1年生に授業を行ったが、生徒の反応はともよかった。教科書を離れて学習しているという少し自由な気持ちがあるからか、第7時、第8時の授業のように生徒が自分で解決方法を考えていこうとする姿勢が随所に見られた。これからの教育内容を考えていくうえで、離散数学の内容は重視されるべきであるとの感を強くした。

ただ、2 (3)でも述べたように、内容の検討を十分にを行い、時間数ももう少し増やさなければ、深まりのない内容となり、生徒に達成感を抱かすことができなくなる可能性があるため、その点を十分に注意しておきたい。

#### 4. おわりに

本年度は、教育内容の重点化を具体的に検討するために、われわれの問題意識が強かった3つの項目をとりあげて、実際に授業を実践することを中心に研究を進めた。新構想での授業は順調に行われ、われわれの検討内容はおおむね妥当であったと考えている。しかしながら重点化はこれら3つの項目だけに留まらないことはいまでもない。今後は、昨年度検討した小・中・高12年間の教育課程にたちかえり、全体を見通したスケールの大きい重点化を研究していかなければならないであろうと考えている。

#### 付記

本研究はプロジェクトのメンバーの他、広島大学附属小学校の赤井利行先生、宮本泰司先生、脇坂郁文先生とも協力して行っているものである。