広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要
〈第25号　1997. 3〉

数学的な見方や考え方のよさを認識させる授業の研究

── 中学校・高等学校における授業の実践(3) ──

中原　忠男　小山　正孝
河野　芳文　富永　和宏　酒井　秀二
砂原　　徹　長尾　篤志　仲渡　雅史
井ノ迫泰弘　宇佐川信行　平岡　賢治

Ⅰ．はじめに

我々は，数学的な見方や考え方のよさについての共同研究を過去8年間にわたって行ってきている。生徒に数学的な見方や考え方のよさを認識させることが重要であると考え，よさのとらえ方についての理論的研究から始めて，よさを認識させるための授業の開発的研究を経て，3年前からよさを認識させるための授業の実践的研究に取り組んできた。本稿は，実践的研究の第3報に当たるものであり，中学校及び高等学校において，数学的な見方や考え方のよさを生徒に認識させることを主眼として次の教材の授業を実践した結果を報告するものである。

中学校第1学年：等周問題とその三角形の場合への適用
中学校第2学年：一次関数の応用
高等学校第1学年：数列（数学A）
高等学校第2学年：三角関数の応用
　　　　　　　　－和や積のグラフ－（数学Ⅱ）
高等学校第2学年：三角関数の応用
　　　　　　　　－点の軌跡－（数学Ⅱ）
高等学校第3学年：関数の媒介変数表示（数学C）

以下では，それぞれの授業について指導のねらい，指導の実際，及び指導の反省と課題を述べ，最後にそれらを総括することにする。

Ⅱ．中学校における授業実践

(1) 中学校第1学年
「等周問題とその三角形の場合への適用」

1．指導のねらい

中学校第1学年における図形学習は，その入門的性格から，具体的かつ直観的扱いにならざるを得ない。しかし，だからといって，授業の中身が図形についての表面的な説明に終始することがあってはならないであろう。この点について，新学習指導要領は次のように述べている。

「平面図形や空間図形についての操作や実験などを通して，図形に対する直観的な見方や考え方を伸ばすと共に，論理的に考察する基礎を培う。」

その内容においては，前回の目標と大差はないが，今回の目標において,「論理的に考察する基礎を培う」との文言が明記されている点が注目される。図形についての関係や性質を既習事項を用いて順序立てて説明できる能力を身につけさせることは，図形の直観的な見方や考え方を伸ばすことと併せて重要なことであるが，今回の指導要領ではこれを目標としてはっきり述べているといえるであろう。

したがって，実際の授業ではいたずらに数学的推論を求めるべきではないが，操作や実験を援用しながら図形に対する直観的理解及び論理的に考察する姿勢を育てることが重要と思われる。

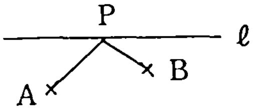
このような点を踏まえて，これまでに学習してきた基本的な作図法をもとに，上述のような観点を考慮して，周の長さが一定である三角形でその面積が最大となる場合の形状を決定させる課題について考えさせることにした。この課題学習によって，身近な問題の解決における操作や実験の有効性，問題を単純化することのよさ，関数的考察のよさ等を知らせるとともに，その解決にいたるまでの道筋をある程度論理的に考える姿勢を持たせたいと考えている。

2．指導の実際

図形についての学習としては，これまでのところ「平面図形」の章で，直線，線分，角，辺などの基本的用語についての説明と，合同な三角形の作図，角の二等分線，線分の垂直二等分線，垂線などの基本作図の方法について学んでいる。

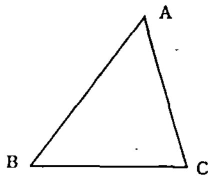
Tadao Nakahara, Masataka Koyama, Yoshifumi Kono, Kazuhiro Tominaga, Shuji Sakai, Toru Sunahara, Atsushi Nagao, Masafumi Nakato, Yasuhiro Inosako, Nobuyuki Usagawa, and Kenji Hiraoka:
A Study on Teaching for Appreciation of Mathematical Thinking and Ideas; Teaching Practices in Junior High School and Senior High School.

さらに，右図のように，直線ℓとℓ外の２点A，Bがあるとき，ℓ上の点Pで，ＡＰ＋ＰＢが最小となる点の作図法などを扱っている。



また，前時において底辺ＢＣを与えた上で，△ＡＢＣの面積が一定であるように頂点Aを動かすと，点Aが辺ＢＣに平行な２直線を描くことを学習しており，授業の終わりで，次時においては，面積でなく，周の長さが一定である三角形の形状について考えることを予告しておいた。

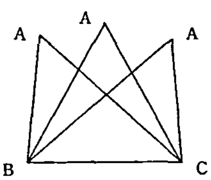
そして，授業者は，まず，次の課題を提示した。

> 課題；△ＡＢＣにおいて，
> ＡＢ＋ＢＣ＋ＣＡが一定であるとき，その面積が最大になるのはどんな三角形のときか。
>
> 
>

輪っかになった黒いひもで問題の意味を説明し，その意味を理解させた上で，この課題の答えがどうなるか予想させ，何人かの生徒に発表させると共に，その理由を尋ねた。

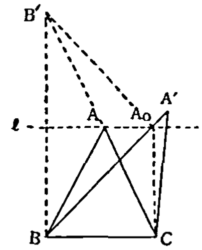
多くの生徒が答えは正三角形であると答えたが，その理由はわからなかったり，うまく説明できないと答えるものがほとんどであった。

そこで，一度に３辺が変わると難しいので，まず１辺を固定して考えてみようということで，次の問題に取り組ませた。

> 問；線分ＢＣを固定して，
> ＡＢ＋ＡＣが一定であるとき，△ＡＢＣの面積が最大になるのはどのような三角形のときか。
>
> 
>

まず，ＡＢ＝ｘとおき，ｘが決まればＡＣが決まるから，△ＡＢＣが決まり，したがってその面積も決まること，すなわち，△ＡＢＣの面積はｘの関数になっていることを確認した。その上で，B，Cの位置に釘を打った教具を用い，先程の黒いひもをＢＣにかけて，頂点Aを左から右にゆっくり動かし，点Aが最も高くなる位置があること（最大値の存在！）を確認させた。その上で，点Aが最も高くなる位置を予想させたところ，ＡＢ＝ＡＣのときであるとの答えが返ってきた。そこで，Aより高い位置にあるA′でAB＋AC＝A′B＋A′Cをみたすものはないか，次の図を用いて考えさせた。（実線部分のみ）

しかし，反応がないので，点Aを通りBCに平行な直線ℓをひき，ℓとA′の交点をA_0として，AB＋ACとA_0B＋A_0Cを比べさせた。



すると一人の生徒が，ℓに関する点Bの鏡映B′をとれば，AB＋AC＝B′C，A_0B＋A_0C＝B′A_0＋A_0Cであるから，「三角形の２辺の和は他の１辺より大きい。」ことを用いて，ＡＢ＋ＡＣ＜A_0B＋A_0Cが成り立つことを指摘した。

そこで，A_0B＋A_0CとA′B＋A′Cも同様にして考えるよう投げかけたところ，こちらには意外に時間をとり，A_0C＜A_0A'＋A′Cからやっとの思いで，A_0B＋A_0C＜A′B＋A′Cであることを導いた。

得られた２つの不等式AB＋AC＜A_0B＋A_0C，A_0B＋A_0C＜A′B＋A′Cから，不等式AB＋AC＜A′B＋A′Cが得られることに注目させ，これは点A′のとり方に反することを述べた上で，結局Aより高い位置にある点A′は存在しないことを述べ，問を終えた。

そして，残りの時間で課題を考えるよう指示したところ，一部の者は解決していたが，かなりの者が答えを出しきれないでいたようにみえた。

３．指導の反省と課題

翌日の授業で，課題の解決ができたかどうかを尋ねたところ，できたと答えた者が39名中20名であった。そこで，どのように考えたか尋ねると，「問と同じ考え方で，もし等しくない辺があったら，もっと面積の大きい二等辺三角形が作れることになります。」と答えてくれた。この20人の中には授業後自分で考えてくれた者もいたであろうと思われるが，理解を徹底させるため，再度丁寧な説明を加えた。

扱った教材について，生徒の興味を惹くことはできたが，その答えが正三角形であることについて，なぜ説明が必要なのか困惑した者もいた。しかし，なぜ正三角形といえるのかを他人に納得させるには，筋道だった説明がいることを述べると，多くの生徒は納得してくれたように思う。それから数日の間は背理法のゲームに興じたりする者もあり，生徒の意識に多少の変化がもたらされたのではないかと思われる。このようなことを踏まえて，現在の指導でも“筋道だった説明”を強調しながら，授業を行っている。

しかし，授業を見られた先生方から，周の長さを具体的な数値にしたり，問の扱いをもう少し直観的なものにするなどして，子供達に無理のないよう配慮できたのではないかとの指摘を受けた。聞きながら，もっ

ともな意見と感じたことも多く，今後の授業ではそのような工夫を加えたいと思っている。［河野　芳文］

(2) 中学校第２学年「一次関数の応用」

1．指導のねらい

中学校において，数量関係，特に関数の分野の学習としては，第１学年で比例と反比例が，第２学年では一次関数が，第３学年では２乗に比例する関数やいろいろな関数が題材に扱われる。第１学年の学習では，関数の意味や，正比例，反比例を題材に表やグラフから対応関係の特徴をとらえたり，対応関係を表したグラフや式の特徴を理解させることを目標にしている。これを受けて第２学年では，一次関数についての学習を通して，関数関係の理解を一層深めるとともに，一次関数の特徴について理解しそれを用いる能力を伸ばすことを目標にしている。特に一次関数は身の回りの自然現象などに存在し，数学的な見方や考え方のよさを実感させるにはよい題材といえる。

具体的には，次に挙げられる３つの学習による経験を通して，数学的な見方や考え方のよさを感じとらせることができると考えられる。

① ある事象における対応関係を，変化の割合に注目してとらえ，それが一定であることを利用して変数の値を求めたり，その値をもとの事象に当てはめて問題解決を行うことによる数学的な見方や考え方のよさの経験

② 対応関係を方程式に表すことにより，関係をとらえやすくなることや，変数が計算できることによる数学的な見方や考え方のよさの経験

③ 対応関係をグラフに表すことにより，関係をとらえやすくなることや，例えばダイヤグラムなどのように，関係や条件を視覚化できることによる数学的な見方や考え方のよさの経験

さらに，この３つの経験を有機的に結びつけることが一次関数の学習における数学的な見方や考え方のよさを感じとらせる上で大切なことである。

今回の指導では，身のまわりの事象（列車の運行）について，③のグラフのよさに焦点を当てた授業を展開した。列車の運行を単にグラフ化するだけにとどまらず，対応関係を視覚化したことによって，課題の内容を整理してとらえ直すことができ，条件に合うように傾きを定められることや，グラフの傾きが列車の速度を表すということを理解させることによって，数学的な見方・考え方のよさを感じとらせ，一次関数の概念や，グラフを活用して問題解決に取り組む姿勢を育てることがねらいである。

2．指導の実際

導入として急行列車の通過待ちの時間の話をして，どうすれば列車の運行状況をとらえることができるかを考えさせた。ある時刻についての各列車の位置を図で表すことを考えた者，列車の運行時間を計算し，時刻表のようなものを作って表すことを考えた者もいたが，いずれも次の課題の解決に用いるには難しいことがわかったようである。

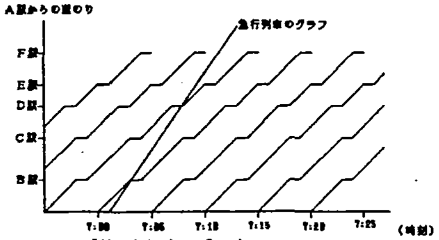
課題；下図のような路線でA駅からF駅に向けて電車が6時より５分間隔で運行している。普通列車は時速30kmで走り，各駅で１分間停車する。この路線にA駅からF駅の間をノンストップで，時速45kmで走る急行列車を走らせたい。７時以降に運行するとすれば始発はA駅を何時何分に出発するか。

	A駅		B駅		C駅		D駅		E駅		F駅
(km)		1.5		2		1.5		1		1.5	

はじめ，多くの生徒は，列車の運行を時刻表のように表して計算で答えを得ようとしたが，複雑でうまく行かず考えあぐねてしまった。そこで，この問題の解決には列車の位置を調べることが必要であるが，時間の流れと列車の位置という2つの要素が伴って変化しているということを確認した。また，図では列車の位置は表せても時間の流れが表せず，時刻表では各列車の位置がつかみづらいことを指摘した。さらに，２つの要素の関係を表すにはどのようにすればよいか問いかけ，軸が２つあるグラフに表せば両方の変化の様子をまとめて表すことができることに気づかせた。

そこで，普通列車の位置と時刻を表すグラフを描かせ，時速45kmの急行列車はどのように表せばよいか考えさせた。ここで時速が決まれば，グラフの傾きも決まることを確認し，時速45kmの傾きで定規を当てて調べ，それぞれの普通列車を追い越すのが，ちょうど駅になるような発車時刻を求めさせた。

問題の考察として，２つのともなって変化する要素の対応関係を調べるにはグラフが適していることを述べ，その有用性を確認するとともに，傾きや，x，y座標が現実世界の何を表しているかということを考えさせて，このような見方や考え方のよさを問題解決に活用することの大切さを感じとらせた。



「列車の運行を調べるグラフ」

3．指導の反省と課題

関数のグラフが単に変数の対応関係を表すもので，教科書の中にしか出てこないというイメージを持たせないように，身の回りの具体的な事例を扱ったり，操作的な活動を多く取り込んで指導にあたってきた。それに対し，生徒も今までの体験を交えて自分の考えを発表したり，さらに発表者の意見に応えて自分の考えを述べる生徒が出るなど，全体的に興味・関心を持って熱心に学習に取り組んでいた。

特に今回の指導の前では，先にも書いたとおり，対応関係を数値化して計算に頼ろうという姿勢が強かったのに対して，指導後には，グラフを使って問題を解決しようとする姿勢が見られるようになった。一次関数は1学期に学習した単元であるが，秋に投げ込み教材で学習した際にもこの姿勢は継続していた。これは，見方や考え方のよさを強く感じたことと，複雑な問題を計算だけに頼って解決することの難しさが印象的であったため，定着しているものと思われる。ただ，グラフを描くことを，生徒達はどちらかといえば面倒な作業と受け止めており，有用性と実用性の狭間で揺れていることも事実である。

これは，数学的な見方や考え方のよさを強く感じ取らせた成果とみることができる一方で，グラフを利用することを単に解法の技術としてとらえている生徒がいることを表している。無論，問題解決のために有用であるということを感じ取らせることは，生徒の中で問題解決の方略として整理・認識され，定着することに繋がるが，ある限定された場面における便利な解法という矮小化されたものになっては，学習の目標から外れることになってしまう。この点については複数の学習項目を持ち，多様な取り扱いができる教材を開発し，学習を進めることによって，今までの学習をとらえ，考えていく態度の育成をはかることが大切である。

この他の反省としては，グラフの有用性は理解しているのに，それをどの場面で利用すればよいのかがわからない生徒がいることが挙げられる。一つの問題場面で用いた方略を他の場面でも用いるには，学習の転用が必要であるが，これを促すには，いろいろな場面でその方略を用いる練習（問題演習）を行うことが考えられる。実際，練習を全くせずに，授業の課題を解決するだけで，その中で用いられた数学的な見方や考え方のよさを他の場面に応用するのは，かなり難しいことである。

今後の課題としては，次の2点が挙げられる。

① 複数の学習項目を持ち，多様な取り扱いができる教材の開発

② 数学的な見方や考え方，またそれを活用しようとする態度の評価方法の開発

特に②については，解法を細かく分類し，それを覚えることでよい成績をあげる生徒が少なくない現状において，数学的な見方や考え方，態度のよさがそのまま成績に比例するような問題作りや評価方法の研究は，教育現場においては是非とも必要な課題であるといえる。これらの課題について，今後とも取り組んでいきたい。　［富永　和宏］

Ⅲ．高等学校における授業実践

(1) 高等学校第1学年「数列」数学A

1．指導のねらい

数学Aは，数と式，数列，平面幾何，計算とコンピュータの4つの分野からなっており，この中から2分野を選択するのが基本である。また本来は，生徒が選択するのがその意図するところであるが，実情として多くの学校では，数と式，数列の2分野を選択させているようである。

数列については，数学Ⅰの「個数の処理」のところで，自然数の列について学習し，その基本的な考え方はすでに習得している。その後，引きつづき数学Aの「数列」の章で，数列の定義，等差数列とその和，等比数列とその和について学習し，いろいろな数列の和や階差数列についても学習している。

漸化式は，数列の分野に含まれている1つの項目であるが，その目標は次のようなものであろう。

1　具体的な例を用いて，数列の帰納的定義について理解させる。

2　帰納的に定義された数列の一般項を，いろいろな方法で求めることができるようにする。

3　実例の中にある数列の一般項を，帰納的な方法で求めることができるようにする。

漸化式については，隣接2項間の関係式から一般項を求めることや，具体例について漸化式を作って問題を解くことを学習している。数列の帰納的定義という考え方そのものは比較的理解し易いようである。しかし，漸化式から一般項やその和を求めることは一般には容易でなく，深入りはしていない。

一方，調和数列については，等差数列のところで，線分ＯＡを2：1に内分する点Ｐと，2：1に外分する点Ｑをとるときの，ＯＰ，ＯＡ，ＯＱの長さという具体例を用いてその定義を学んでいる程度である。

ここでは，具体例を用いて漸化式をつくり，その漸化式から調和数列の和の形を導き出すことによって，調和数列と漸化式の融合を図り，それらの有用性や美しさを感じ取らせることを，そのねらいとした。さらに，項が無限にあれば，調和数列の和はいくらでも大きくなることを実感させ，無限や極限の考え方への，基礎的な概念形成をも視野に入れた。そのことによっ

て，数列が自然数nの関数であることを実感させ，テーマ「関数」との結びつきを図った。

2．指導の実際

生徒の興味を引く具体例をと考え，次のような問題をその課題とした。

> 問題；長さ100mの絨毯の端に私が立っている。もう一方の端に悪魔が立っていて，そこまでたどり着いたら命の泉をくれるという。ただし，立ち止まったら絨毯の端をひっぱって，全体の長を100m伸ばすという。老いた私は1m進むごとに，一休みしなければならない。私は命の泉をもらえるだろうか。

まず最初に，絨毯全体でなく，端だけが伸びる場合を説明し，その場合には等差数列となるので，和はいくらでも大きくなり，私は，たどり着けないことをおさえた。この説明により，全体が平均して伸びることの仮定を，よりしっかりと理解させることができたと考える。

次に，最初の位置をa_1とし，1回目に休んで絨毯が伸びたときの最初の位置からの距離をa_2，2回目に休んで絨毯が伸びたときの最初の位置からの距離をa_3，………として漸化式をつくることにした。

この漸化式をつくる過程は多少難しいので，図を使って説明することにし，a_2からa_3を作る場面，a_3からa_4を作る場面を利用して，一般の場合を類推させた。その場合，図と並べて次のような式を示した。これらの式は，生徒から引き出したものである。

$a_1=0$

$a_2=1\times(2/1)=2$

$a_3=(2+1)\times(3/2)=9/2$

$a_4=(9/2+1)\times(4/3)=44/6$

これらを用いて，

$a_{n+1}=(a_n+1)\times((n+1)/n)$

を導かせた。

次に，漸化式の次のような変形が必要になってくるが，これについては教師主導でいかざるを得なかった。

$a_{n+1}/(n+1)=a_n/n+1/n=1+1/2+\cdots\cdots+1/n$

この最後の等号は，nを1ずつ下げた式を作り，代入していくことで説明したが，後で述べるようにa_n/nを移行した式を用いる方が，理解しやすかったかもしれない。

また，この段階で最後の式$1+1/2+\cdots\cdots+1/n$が調和数列であることを説明した。

続いて上式を用いて，一般項

$a_n=(1+1/2+1/3+\cdots\cdots+1/(n-1))\times n$

を求めた。

最後に，右辺

$(1+1/2+1/3+\cdots\cdots+1/(n-1))\times n$

が100nより大きくなることを示さなければならないが，それには次のような手法を用いた。

$1>(1/2)$

$(1/2)\geqq(1/2)$

$(1/3+1/4)>(1/4)\times2=(1/2)$

$(1/5+1/6+1/7+1/8)>(1/8)\times4=(1/2)$

この操作はいくらでも続けることができるので，和はいつかは100を超えることができることを説明した。

追加の問題として，100を超えるためには，いったいどのくらいの時間が必要なのかという点を問題点として残した。

3．指導の反省と課題

まず，授業の時間的経過にそって反省をしてみたい。最初の問題設定はいろいろ工夫したが，結局やや不自然な様子を残しながらもこの形に落ち着いた。最初は，いくらでも伸びるゴム紐を虫が歩くというような設定であったが，紆余曲折を経て出来上がったものである。

この場面設定の意味が分かりにくいのでは，という意見があったので，絨毯の端だけが伸びていく場合を挿入したが，これはよい効果があったと思う。

a_2からa_3を作る場面，a_3からa_4を作る場面等から，a_nからa_{n+1}を作る場面を考えさせるところも，図を用いて説明したからか，予想以上にスムーズに引き出すことができた。

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}$$

から，これが

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

となることの説明では，後の反省会において，

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n}$$

と変形した式で，nを順次下げていった式をつくり，辺々を加えていった方が分かりやすいのでは，という意見が出たが，まさにその通りだったかもしれない。

最後の，いくつか項を集めると必ず（$\frac{1}{2}$）以上になるところでは，感動を表す生徒も何名かいた。

全体として，この1時間の授業で，生徒がどのように変化したかという点については，はっきりと「こうだ」とはいい難い。少なくとも，何時間かの積み重ねが必要である。 ［酒井　秀二］

(2) 高等学校第2学年

「三角関数の応用－和や積のグラフ－」数学Ⅱ

1．指導のねらい

三角関数はその周期性に大きな特徴がある。

$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$については，単位円を利用して比較的容易にグラフをかくことができることもあって，実際に生徒各自がノートまたはグラフ用紙にかき，板書もして，周期や振幅，相互関係などについて調べることができる。$y=\sin 2x$程度であれば，式がやや複雑になってもグラフの拡大・縮小，平行移動の考え方を用いればよいので，さほど困難ではない。この段階で生徒には，正弦曲線の美しさなど，三角関数の審美性について感じるところがあるだろう。

ところがいろいろな公式が登場するあたりから，授業の実態として，式変形に追われがちではないかと思われる。それは，公式が見かけ上数多くあり，簡単にグラフをかいて視覚的に表現することが困難なものが多いからである。

それでも，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$ などでは，$y_1=\sin\theta$，$y_2=\cos\theta$のグラフを同一座標平面にかき，y_1とy_2の値を加えた値を順次プロットしていく方法によって，できあがったグラフが1つの正弦曲線になることを視覚的にも感じさせ，左辺から右辺への変形ができることを，さほどの困難なく予想させることができる。さらに，この式変形を，$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の典型的な例として考え，三角関数の合成についての授業を展開していくことができる。

しかしながら，例えば，$\sin 3\theta+\sin 5\theta$などのように和と積の公式を適用するものになると，グラフをかいて値を加えることもかなりの手間がかかり，かけたグラフについても$\sin A+\sin B$の典型的な例として考えることができるのかどうか，また，一般的にどうまとめていくことができるのかがわからない。もともと和と積の公式は，三角関数の値の乗法を簡便に計算する必要からつくられた公式ではあるが，電卓やコンピュータなどが手軽に使える時代に，高等学校の段階で扱える問題の中で，この公式の実用的なよさを実感させることは困難であろう。そこで，普通教室で生徒が各自の机の上で，関数のグラフを次々と簡単にかけるグラフ電卓を活用することによって，和と積の公式についても，視覚的にとらえさせる授業を試みることにした。そのことによって，実用的なよさよりもむしろ，いろいろな考察によって得られる結果の美しさ，発展性といった点によさが感じられるような授業を展開するよう計画した。

2．指導の実際

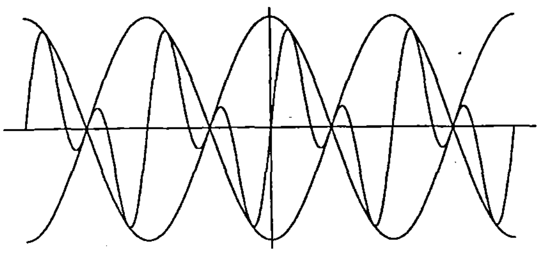
1）題目　三角関数のグラフ

2）目標　三角関数の和や積のグラフをグラフ電卓でかき，その性質を理解させる。

3）展開

〈導入〉最初に，グラフ電卓の使い方の確認もかねて，$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\sin 2x$，$y=2\sin x$などのグラフをグラフ電卓でかかせた。次に，$y=\sin x+\cos x$，$y=\sin x+2\cos x$のグラフは正弦曲線になることを，あらためてグラフ電卓に表示することによって確かめた。そのことは，すでに学習している合成の公式$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$によって裏づけられることを確認した。

〈展開〉次に$y=\sin x+\sin 2x$のグラフについて考えさせ，グラフ電卓に表示されたものを見て，周期性や振幅などについて調べさせた。そこで，このグラフは$y=\pm 2\cos\frac{x}{2}$のグラフの中にはさまれているとみることができるという観点を示した。それは，和と積の公式$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$を適用すると，$\sin x+\sin 2x=2\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}$となることからわかることに気づかせた。



$y=\cos\frac{1}{2}x$は周期720°，$y=\sin\frac{3}{2}x$は周期240°であることから，$\sin x+\sin 2x$のグラフは$y=2\cos\frac{1}{2}x$という周期720°の曲線をもとにして，その値を240°の周期で$\sin\frac{3}{2}x$倍（－1倍から1倍）させた振幅する曲線として存在していることを理解させた。また別の例として，$y=\sin 9x+\sin 11x$についても同様に考えさせ，$\sin 9x+\sin 11x=2\sin 10x\cos x$となること，$y=\cos x$は周期360°，$y=\sin 10x$は周期36°であることから，グラフが$y=\pm 2\cos x$のグラフの間にはさまれたものになることを理解させた。また，$2\cos x$の1周期の間での振動数についても考えさせた。

〈まとめ〉$y=\sin x+\sin 2x$や$y=\sin 9x+\sin 11x$などのグラフは，概形の見当はつけにくいが，周期関数になること，グラフの概形については和を積の形に直す公式を利用して変形すれば，解釈ができることを十分ではないにせよ，一応確認した。

また，このような波形は音の波などで身近なところに存在していることも付け加えた。

3．指導の反省と課題

この授業については，機器利用についての問題点が大きく，それが克服されなければ授業の成功はあり得ない。グラフ電卓は1人で1台を使用したが，まだグ

ラフ電卓そのものが一般に普及したものとは言い難く，生徒もこの授業の前に2時間程度使用したことがあるだけで操作に習熟できておらず，グラフをきちんと表示することに大変手間取ってしまった。そのために，授業内容を理解したり，考察を深めたりすることに至っていない生徒が多かった。個人で操作することが困難な場合に備えて，ＯＨＰ提示用のグラフ電卓も準備して使用したが，これもまだ開発途上のものということで見えにくく，視覚的にとらえさせるためには，コンピュータの大型画面も併用するなど，機器利用の方法について入念に検討，準備する必要がある。

授業の中心となる機器利用に問題があったことが大きく影響して，授業のねらいとしていた三角関数の和と積の公式の視覚的な理解やそれについて考察を深めることはかなり困難であった。グラフをかいてみると，単調な式変形に留まらない考察ができることは理解されたと思われる。しかし，機器の問題に加えて，主張が漠然とした授業であったために，生徒にも数学的な見方や考え方を伝えることができず，反応もあまりよくなかった。数学的な見方や考え方のおもしろさやよさがもっとアピールできるような教材開発が必要であることを痛感させられる授業であった。［砂原　徹］

(3) 高等学校第2学年

「三角関数の応用－点の軌跡－」数学Ⅱ

1．指導のねらい

三角関数は円関数の別名もあるように円運動と密接に関係した関数である。ところが，私の場合，これまで，そのことを十分に学ばせることができず，次々に出てくる公式を覚えさせて計算に習熟させるのに汲々としていたのが実情である。そこで今回は数学Ⅱ「三角関数」の指導内容の順序を教科書の順序とは多少入れ替え，これまでよりさらに単位円を強調して指導した。また，コンピュータを授業の中で適宜活用した。さらに三角関数が円運動と密接に関係した関数であることを確実におさえ三角関数の有用性を生徒に理解させるため，発展学習として内トロコイドの指導をした。

内トロコイドの指導においては，生徒に興味・関心を持たせるため，生徒の身の回りにある教具としてデザイン定規（デザインルーラー）を使用することにした。

2．指導の実際

ここでは「三角関数の応用－点の軌跡－」と題して行った内トロコイドの授業について述べたい。

指導にあたっては，この授業に先立ち弧度法およびサイクロイドの授業を行った。この2つの内容は共に数学Ⅱの範囲を逸脱するが授業を展開する上でやむを得なかった。

弧度法の授業は1時間で次のように行った。

小学校以来使用してきた角の測り方を60分法とよぶ。時間の測り方もよく似ているが両者には何か関係があるのだろうか，と投げかける。1年は365日であるが，これを360日と考え，図に表すことを考えてみる。1年を円を用いて表すことにし，円周を360等分する。どのような大きさの円を描いても，半径分の長さの弧をとるとその弧は円周上で約60日を表し，中心角はすべて等しくなる。これは古代のバビロニアの人々が発見したことでその後，人々は60を1つの単位として考えるようになった。角についていえば，1°を60分，1分を60秒として現在使われている60分法ができた。

ところで，先に述べたように，どのような大きさの円を描いても，半径分の長さの弧をとると中心角はすべて等しくなる。そこで，角の大きさを測る単位として半径の長さと等しい弧を用いることを考えてみよう。どのような大きさの円を描いても，円周の長さは半径の長さの2π倍。そこで，$360° = 2\pi$とする。

それでは，180°，90°，60°はどうなるだろうか。このような角の大きさの測り方を弧度法という。単位はラジアンである。

$$1° = \frac{\pi}{180}\text{ラジアン} \qquad 1\text{ラジアン} = \frac{180°}{\pi}$$

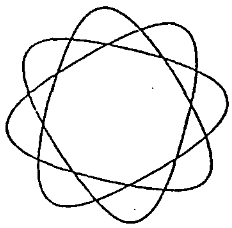
サイクロイドの授業は1.5時間で次のように行った。

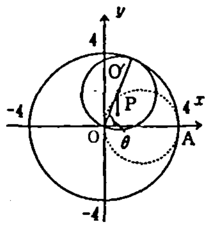
一定の直線上を半径が1の円が転がったとき，円周上の定点はどのような軌跡を描くだろうか，と投げかける。この軌跡をコンピュータで描くため，座標平面で半径1の円がx軸上を中心角θだけ転がったときの定点（原点にあった点）の座標をθで表すことを課題とした。

中心が原点で半径が1の円周上にあり，x軸とのなす角がθである点の座標は（$\cos\theta$，$\sin\theta$）で表される。中心が（a，b）のとき，点の座標はどのように表されるか。さらに，中心が原点で半径が1の円で（0，－1）にある点が$-\theta$回転したとき，点の座標はどのように表されるか，中心が（0，1）で半径が1の円が中心角θだけ転がったとき中心の座標はどのように表されるか考えさせた後，最初の課題を考えさせた。求めた式をコンピュータに入力し曲線を描いた。

内トロコイドの授業は1.5時間で次のように行った。

生徒が授業内容に興味を抱き，かつ目標を明確にするため0.5時間を使って，デザイン定規で自由に曲線を描かせた。（次頁左図）





そして，これらの曲線はすべて「内側の円が外側の円に内接したまま円周上を転がったとき，内側の円内の定点の描く軌跡」であることを確認した。引き続き，次の１時間では，まず次のような課題を提示した。

上右図のような２つの円O，O′がある。円O′は∠AOO′＝θの位置まで転がって移動したものとする。円O，O′の半径をそれぞれ４，２，線分O′Pの長さを１とするとき，点Pの座標をθを用いて表せ。

この課題を解決した後，デザイン定規を使って課題の条件に近い条件のもとで実際に曲線を描かせ，その曲線が楕円であるらしいことを感じとらせた。

次に２つの円の半径をそれぞれａ，ｂ，線分O′Pの長さをｃとして，点Pの座標をθを用いて表し，コンピュータに式を入力してａ，ｂ，ｃの値を変化させ，いくつかの曲線を描いた。これは，デザイン定規を使用すればかなり複雑な曲線が描けるが，それらの曲線はすべて三角関数を使って簡潔に式で表すことができ，コンピュータを使ってそれを確認することで三角関数の有用性を理解させることを企図したものである。

最後にまとめとして三角関数と円運動との関係にふれた。

３．指導の反省と課題

弧度法の学習は今回の学習指導要領の改訂により，数学Ⅲ，数学Ｃで行うことになっている。したがって，これらの科目を履修しなければ弧度法を知らずに高校を卒業することになる。弧度法は普段の生活の中で使うことがほとんどないことから，慣れるのに時間がかかる。しかし，そのもとになっているのは円の中心角の大きさは弧の長さに比例し，円周の長さは半径の２π倍であるというよく知られた事実である。この事実を使って角の大きさを測るものであり，理解することが困難なものではない。また「ものを測る」ということを再考させるためにも有意義な内容だと思われる。60分法の成り立ちにもふれ興味を持たせながら，できるだけ多くの生徒に指導すべきだ，と考えている。

デザイン定規を使用してこれまでに曲線を描いたことのある生徒は何人かいた。しかし先にも述べたようにこの曲線はかなり複雑で，この曲線が式で表されるということは生徒には驚きであったようである。また，この曲線の式は三角関数を用いれば，比較的簡単に求められ表記も簡潔になる。今回の授業ではその三角関数の有用性を確認するためコンピュータを活用した。

生徒が数学に興味や関心を抱く要素として，結果に驚きを持つことやその有用性を理解することがあげられる。

それもできるだけ生徒の身近な題材を用いることができれば効果は大きいと思われる。授業後の生徒の感想に「三角関数はおもしろい関数だ」というものもあり，今回のこの内トロコイドの授業では，デザイン定規やコンピュータを用いて，生徒に少しは数学に興味や関心を抱かせることができたのではないかと自負している。　［長尾　篤志］

(4)　高等学校第３学年
「関数の媒介変数表示」数学Ｃ

１．指導のねらい

本年度より高等学校において数学Ⅲと数学Ｃの組み合わせが実施され，新学習指導要領が完全実施となった。今回の改訂の柱は様々であるが，特にその一つとして数学Ｃにコンピュータの活用を積極的に取り入れた事が挙げられる。

しかしコンピュータを導入することが数学的な見方や考え方のよさを認識させることにどう繋がるのか，その意義や方法はどうあるべきか，教育現場では様々な混乱や疑義があるように見受けられる。また設備や指導者や受験の制約により，多くの学校ではその改訂の趣旨を実際の授業の中で生かすことが困難である。

個人的にも４月以来様々な試行錯誤を繰り返す中で，新しい学力観に基づく新しい授業の試みや，応用数理の考え方を取り入れた教育内容に魅力を感じてはいるが，しかし同時に，新しい指導要領に対する様々な疑問や不満も感じる。

新しい学習指導要領に従い，「応用数理の観点から，コンピュータを活用して」数学Ｃの指導を行うには，どのような課題が存在するであろうか。

第一の課題は教師の意識である。「受験にコンピュータは役立たないのではないか」「数学の指導にコンピュータは不必要ではないか」という疑義があちこちで聞かれる。

第二には現場の教育環境の課題がある。よく指摘されるのは機器や施設であるが，実はソフトウェア環境や教師の資質，教師の研修環境，なによりも学校内外の人の理解などが重要である。

第三に，コンピュータの活用に関して「学校が何をどこまで」指導すべきであるか，社会において，いまだ具体的で明確な意見の一致が無いことが挙げられる。

卑近な例で「受験でどう出題すべきか」といった混

乱，Basic，表計算，IBM，Mac.だのの規格の問題等もあるが，何よりも「教師は何をどこまで教えるべきか」という混乱があるように見受けられる。

そのような様々な課題の中で，新指導要領にコンピュータ活用を導入する意義は何であろうか。

まず社会的には，情報社会の進展に伴い学校の社会的役割として，コンピュータを扱って欲しいという要請がある。

次に学問としての数学においては，近年国立大学の数学科が数理科学科となり，物理科学や生物科学，社会科学との繋がりがいよいよ深くなっている。その中で高等学校においても，応用数理的内容がより必要とされる。この新しい内容は，生徒に数学的な見方・考え方の面白さやよさを発見させる新しい可能性を秘めており，それを活用することができる。

最後に，意志疎通の道具としてのコンピュータネットワークは授業形態を変化させ，生徒の自発的発見を促し，共同作業や試行錯誤，個性を生かす学習等を，より柔軟に実現する可能性がある。またインターネットの活用による学校を越えた学習活動も，既に幾つかの事例研究がある。

上記の観点で授業を行う場合，コンピュータはどのように活用されるべきであろうか。ここでは三つの観点から考えたい。

1．コンピュータについての授業
2．コンピュータを用いた授業
3．ネットワークの活用

第一に，コンピュータについての授業，つまりプログラミングや操作の授業は，前項の目的達成のためには重要でない。すぐに変化してしまうソフトやハードの知識より「コンピュータで何ができるか」といった基本的理解がより大切である。

第二に，数学的な見方や考え方のよさを，生徒の自発的活動や問題解決により発見させるには，学習内容のグラフィック化やシミュレーションなどが有用である。また複雑な処理をソフトウェアに任せることにより，生徒の関心を数学的考察により集中させることも可能である。

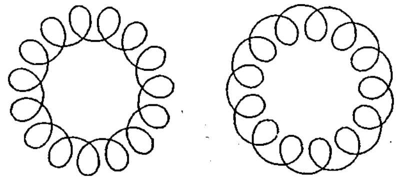
第三に，生徒の発見活動や共同作業，個性を生かす活動を，より柔軟な形で実現するには，ネットワークの活用が必要不可欠である。しかし，このネットワーク活用という問題は，まだ研究されていない部分が多く，より一層の研究が待たれる。

2．指導の実際

前項の観点からの授業を行った。対象は第Ⅲ学年「数学C」選択者35名。指導単元は「いろいろな曲線」における「媒介変数表示」。指導機器として教室の22台のコンピュータネットワークを用いた。

最初の授業においては，まず生徒に「太陽のまわりを地球がまわり，地球のまわりを月がまわるとき，その軌道はどのようになるのか。」と質問を問いかけた。

生徒の回答は，月が内向きの回転をしつつ太陽のまわりをまわるもの，外向きの回転をしつつまわるもの，などなど様々であった。



次にコンピュータの電源を入れさせ，教師の端末からネットワーク経由で表計算ファイルを配布した。

そしてさまざまな半径と角度に対して，媒介変数の考え方を用いれば軌道がシミュレーションできることに気づかせ，表計算ソフトウェアを用いて軌道の計算とグラフ作成を行わせた。その結果，ほとんどの生徒の予想に反して軌道（公転半径38万㎞）はわずかに揺れる円軌道となり，教室におどろきが広がった。

この「おどろき」により，媒介変数の利用という数学的な見方や考え方に対する印象づけを意図した。ついで，その軌道の媒介変数表示を用いたファイルを，ネットワーク経由で教師用端末へ提出させ，プロジェクタを用いて媒介変数表示のまとめを行った。

その次の時間にはまず，自転車が何かを踏んだとき，それがどのような軌跡で動くかを生徒に考えさせた。

生徒は前回用いたファイルの媒介変数表示を変えることにより，サイクロイド曲線をシミュレートしたので，その代表的なアルゴリズムを生徒に説明させ，さらにアステロイドや外サイクロイド，内サイクロイドについてもシミュレートできるか問いかけた。

これにより媒介変数という数学的な見方の印象づけを強化すると同時に，そのアルゴリズムの定着を図った。さらにそれを提出させ代表例についてまとめを行った。

3．反省と課題

生徒の反応として，まず最初の時間に幾人かが，月の軌道に特異点が生じるのはどのような半径比や回転速度の場合なのかに疑問を持ち，追求していたのが印

象的であった。残念ながら授業時間や微積分の授業進度の関係でその内容を充分に深化できなかったことが，反省に挙げられる。

またネットワークに対する生徒の評判は悪くなく，アルゴリズムについてもその後の授業や，定期テストでよく定着していた。質問も多く，関心も高かった。

しかしコンピュータに対する珍しさや好奇心が，学習内容への動機づけとなった要素が否めない。この珍しさがなくなった場合には動機づけが弱くなる可能性が十二分にあると思われる。従ってすべての評価を行うには時期尚早であろう。より多くの研究や実践が必要である。

またコンピュータを用いた時間数も数学C全体の2割程度であり，充分活用しているとは言い難い。

さらに問題解決や，個性を生かした授業という観点から見ると，ネットワーク等がまだまだ有効利用されておらず，これからも研究が必要である。

これからも行列計算や近似計算，統計計算などにコンピュータを活用して,「数学に対する感動」を掘り起こしたい。　　　　　　　　　　　　　[仲渡　雅史]

Ⅳ. おわりに

本稿では，中学校及び高等学校の生徒に数学的な見方や考え方のよさを認識させることをねらって実践した6つの授業について，その指導のねらいや実際，及び反省と課題を述べた。これらの授業で生徒に認識させようとした数学的な見方や考え方と指導の結果をまとめると，以下のようになる。

中学校第1学年の授業「等周問題とその三角形の場合への適用」では，身近な問題の解決における操作や実験の有効性，問題を単純化することのよさ，関数的考察のよさを生徒に認識させるとともに，その問題の解決にいたるまでの道筋をある程度論理的に考える姿勢をもたせることをねらった。その結果，本教材に対して生徒は興味をもち，多少の困難さはあったが，筋道だった説明の必要性を納得し，「背理法ゲーム」に興じたりする生徒も見られた。

中学校第2学年の授業「一次関数の応用」では，身の回りの事象の中にひそむ関数関係を取り出し，それをグラフ化することにより，対応関係を視覚化することに焦点を当てた。グラフ化により課題の内容を整理してとらえることが可能になり，問題解決が容易になることから，視覚化することのよさを知らせることをねらった。その結果，生徒の中に対応関係をグラフ化して考えようとする姿勢が見られるようになったが，それを単なる技術と見る者もあり，今後の授業で方略として定着させる必要がある。

高等学校第1学年の授業「数列」(数学A）では，具体例を用いて漸化式をつくり，その漸化式から調和数列の和の形を導き出すことによって，調和数列と漸化式の融合を図り，生徒にそれらの有用性や美しさを感じとらせることをねらった。その結果，漸化式のよさ，調和数列の和　$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$がいくらでも大きくなることを納得させるアイデアのよさ，などを示すことができたが，こうしたよさが生徒に定着するためには，さらに継続した指導が必要である。

高等学校第2学年の授業「三角関数の応用－和や積のグラフ－」(数学Ⅱ）では，グラフ電卓を活用することによって生徒に三角関数の和や積のグラフを視覚的にとらえさせ，結果の美しさや発展性というよさを感じさせることをねらった。その結果，生徒は興味を示したが，グラフ電卓の利用に関して今後解決すべき問題点が明らかになった。

高等学校第2学年の授業「三角関数の応用－点の軌跡－」(数学Ⅱ）では，コンピュータとデザイン定規を活用することによって，三角関数が円運動と密接に関連した関数であることと三角関数の有用性を生徒に認識させることをねらった。その結果，デザイン定規を使って描いたかなり複雑な曲線が三角関数を用いて簡潔に式に表せることに生徒は驚きを感じ，三角関数の有用性を理解することができた。

高等学校第3学年の授業「関数の媒介変数表示」(数学C）では，教室の22台のコンピュータネットワークを利用し，そのファイル転送やシミュレーション機能を活用することによって，軌道を媒介変数の考え方でシミュレーションしたり計算やグラフ化したりできるという媒介変数のよさを生徒に実感させるとともに，アルゴリズムの定着をねらった。その結果，生徒はこの媒介変数の考え方に驚きと興味を示し，アルゴリズムの定着もよく，多くの質問をするなど関心も高かった。今後もコンピュータネットワーク等の有効利用について，さらなる研究をする必要があることが明らかになった。

今後もこれらの成果と課題を踏まえて，中学校及び高等学校の生徒が数学的な見方や考え方のよさを認識できるような授業を計画・実践するために，数学的内容などの教材に関する研究やグラフ電卓・コンピュータなどの教育機器の有効活用に関する研究を行いたい。それとともに，数学的な見方や考え方のよさの認識に関わる生徒の長期的変容についても研究しなければならないと考えている。　　　　　　　　[小山　正孝]