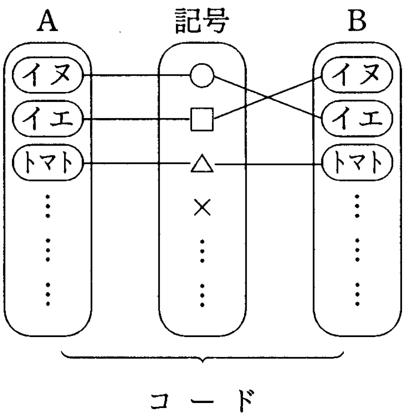
式の記号性についての考察

－第4学年「式と計算」の学習を通して－

川　上　　公　範

1　はじめに（算数における式の記号性について）

言語は記号である。記号はそれ自身では，何等意味を持たない。人がその記号に，ある意味を託したり，その記号から意味を読み取ったりすることから意味を持つようになる。右の図は，その様子を表したものである。人と人の間に記号が存在する。この記号にAという人が意味（イヌ，イエ，トマト，…）を託して表す。Bという人は，その記号から意味（イヌ，イエ，トマト，…）を読み取る。この一連の流れによりコミュニケーションは成立する。但し，Aの人が託した内容が記号を通して正しくBの人に伝わるためには，意味と記号とを正しく結びつける決まり（コード）が，必要である。このA，Bの両者において決まりが正しく用いられなければ，コミュニケーションは成立しない。つまり，記号がコミュニケーションの仲介の役を果たすためには，社会一般において広く認められるものでなくてはならない。



以上で述べたことは，算数・数学においても同じことが言える。なぜなら，算数・数学は，“＋”“－”“×”“＝”などの記号や記号の集まりである式を用いてコミュニケーションを図るものだからである。今回，算数を記号性，コミュニケーションという視点から考察をしてみた。

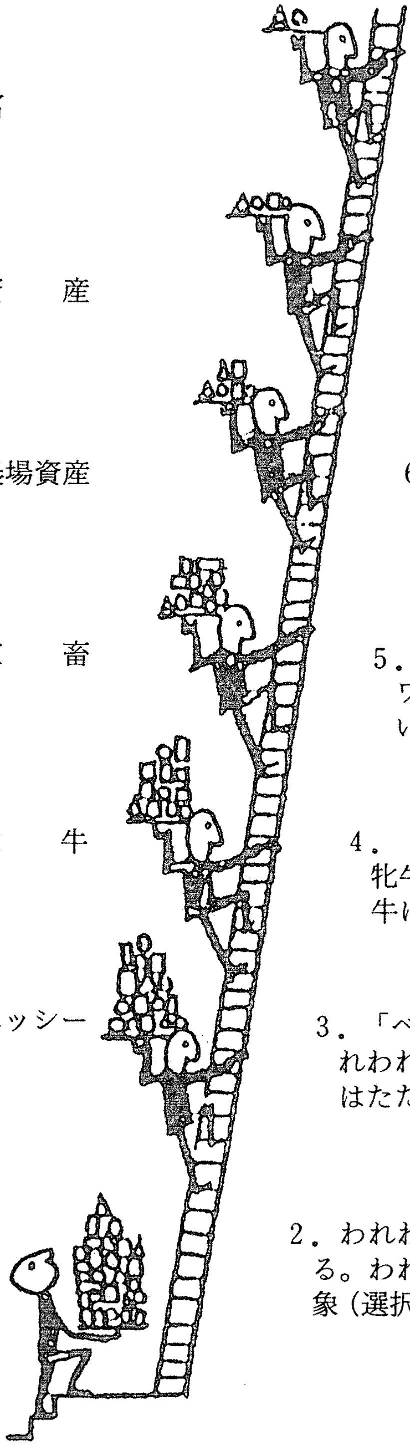
2　式が意味するもの（抽象度の違いについて）

コードが正しく働き，ある記号が発信者（ある記号に意味を託すもの）にも受信者（記号から意味を読み取るもの）にも同じ「もの」を指しているうちはよいが，人間の思考の深まり（抽象度の高まり）や生活様式（文明）が変化するのに伴い，１つの記号が抽象度の違うものを複数表すようになる。そのことをうまく表現しているのが，「ベッシーの牝牛」でよく知られている抽象のハシゴである。(S.I.ハヤカワ「思考と行動における言語」)

この図からわかるように「ベッシーの牝牛」という言葉が抽象度の異なる意味を表している。逆の言い方をするとその言葉からそれぞれの人が８通りの抽象度の違う内容を思い浮かべるということである。以上のことから帰結されることであるが，コミュニケーションにおいて発信者があるコードに基づいて記号にある抽象度の意味を託したとしても，受信者が発信者と抽象度の違う意味を対応させたのではコミュニケーションは成立しない。このことは，算数・数学においても起こりうる。発信者がある式にある抽象度の意味を託して表したとしても，受信者がその式から違う抽象度の意味を読み取ったのでは誤解が生じたり，ひどいときには全く意味が分からなかったりする。この様なコードのずれや全く理解できないという状態とは，算数の学習においては発達段階の差に起因すると考えられる。

抽 象 の ハ シ ゴ

（下から上に読む）



8．富

8．「富」という語はきわめて高いレベルの抽象で，ベッシーのほとんどすべての特性が無視されている。

7．資　　産

7．ベッシーを「資産」という時，さらに多くの特性が落ちている。

6．農場資産

6．ベッシーが「農場資産」の一つとして教えられる時は，ただそれと農場の他のすべての売れる物件とに共通の点だけが言及されている。

5．家　　畜

5．ベッシーが「家畜」と呼ばれる時は，それが豚，ニワトリ，ヤギ，等々と共有している特性だけを指している。

4．牝　　牛

4．「牝牛」の語は，われわれが牝牛$_1$，牝牛$_2$，牝牛$_3$，……牝牛$_n$に共通の特性を抽象したものを代表する。特定の牝牛に固有の特性は捨てられている。

3．ベッシー

3．「ベッシー」（牝牛$_1$）の語は，2のレベルの知覚の対象にわれわれが与えた名である。名は対象そのものではない。それはただ対象を代表し，対象の諸特性の多くに言及しない。

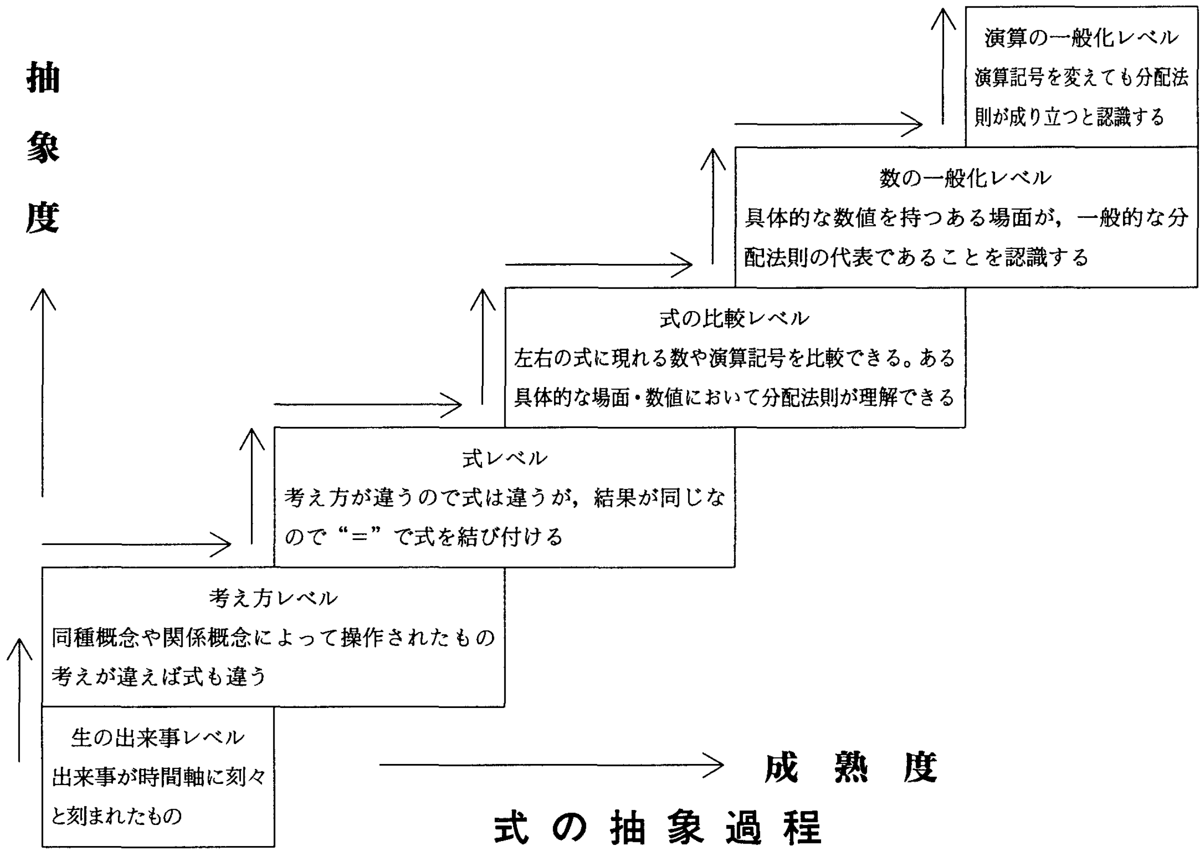
2．

2．われわれが知覚する牝牛は，語ではなく，経験の対象である。われわれの神経系が，過程－牝牛を形成する全体から抽象（選択）したもの。過程－牝牛の多くの特性は落ちている。

1．科学的に知られている牝牛，今日の科学の推定では，究極的には原子，電子等から成る。諸特性（○□△で示す）はこのレベルでは無限でまた常に変化しつつある。これが過程のレベルである。

3　抽象度を焦点を当てた実践

そこで今回，第4学年「式と計算」の学習を記号性とコミュニケーションの視点から考察した。小学校段階において抽象度は6段階から成り立つと考える。それを示したのが下の図であるが，横軸は成熟度，縦軸は抽象度を示している。横軸については，下のレベルから高まった段階とそれをステップにしてもう1段高まる状態とでは成熟度に差がある。それを表すために横長となっている。



式の抽象過程

各飛躍段階について説明する。(場面として載せるのは授業で提示したもの)

(1)　「生の出来事レベル」から「考え方レベル」へ

あきら君は，図工の材料を用意するため1000円もって，520円の毛糸と220円の折り紙を1つずつ買いに行きました。おつりはいくらになるでしょうか

ここで1つの場面を提示する。

我々の行動は，刻々と流れる時間軸に刻まれるが，この時間軸に刻まれたこの場面を忠実に再現すると式は，

①1000－520＝480　あるいは　②1000－520－220＝260
　480－220＝260

となる。このレベルが「生の出来事レベル」である。その後，子ども達はこのレベルから毛糸も折り紙もともに代金として1つにまとめて考えるようになる。これを式に表すと，

1000－（520＋220）＝260

となる。このレベルへ至るともう時間軸にとらわれない，同じ代金だから（同種概念）とか，（持っ

ていたお金)－（代金)＝（おつり）という関係概念によって出来事に操作を加えている。この段階が「考え方レベル」である。時間軸の流れを逆に進んだり，時間軸に刻まれた出来事に操作を加えられるようになるのが第１の飛躍である。

(2)　「考え方のレベル」から「式のレベル」へ

Ａ君が近所の家に１こ420円の弁当と，１本110円のジュースをそれぞれ５こずつ配達しました。お金をいくらもらえばよいでしょうか。

ここで場面を提示する。
上の場面を式にすると下の２つが考えられる。

Ａ　$(420+110)\times 5=2650$　　　Ｂ　$420\times 5+110\times 5=2650$

Ａの式は，１人分の代金の５人分という考え方であり，Ｂの式は，(弁当代)＋（ジュース代)＝（代金）という考え方である。子ども達は，この２つの考え方を聞いてそれぞれ考え方が違うのであるから式が違うのは当然だと感じる。教師もこれまで算数は，答が同じでも考え方は幾通りもあると言ってきているのでなおさらである。これが考え方のレベルである。そこから１段階抽象度が高まり式のレベルへ進むと「そこに至る道筋はどうであれ，結果が等しいから“＝”で結び付けることに抵抗がなくなる。分配法則が理解されるための前段階である。

$$(420+110)\times 5=420\times 5+110\times 5$$

このレベルではこの式は，結果が等しいから結び付けたという意味であって，分配法則を意味しているのではない。子ども達が式と考え方を強く結び付けていると“＝”と結び付けることに抵抗を示す。

(3)　「式レベル」から「式を比較できるレベル」へ

考え方は異なるが，結果が同じということで２つの式を“＝”で結べるようになるのが，式レベルであった。さらに左右の式に現れる数や演算記号を比較することができるようになるのが，次の抽象段階の「式を比較できるレベル」である。この左右の式に現れる数は，420，110，５の３つであり同じである。また５の前につく演算記号は“×”は，(　）の中の２数に続いている。左右の式の数や演算記号が比較できる，すなわち具体的な数値を伴っているときに分配法則が理解できるのが「式を比較するレベル」である。

(4)　「式を比較できるレベル」から「数の一般レベル」へ

抽象度はさらに進み，左右の式に現れる数や演算記号を比較できる「式を比較できるレベル」から「数の一般化レベル」へと進む。このレベルでは，式に現れる数が，420，110，５でなく他の数でも左右の式の関係は，変わらないことが認識できる。すなわち，$(420+110)\times 5=420\times 5+110\times 5$ の式を（□＋△)×○＝□×○＋△×○の代表と見なすことができるレベルである。

ピアジェは，この学年の子どもの発達段階を具体的操作期としている。それは，数学的な法則を発見することができるけれども，それはあくまで具体的な場面や具体的な数を通してのみ可能ということである。この場合で言えば，子ども達は420円の弁当と，110円のジュースを５こずつ買うという場面において，分配法則を理解したのである。また，この単元が，上の教科書で学習され，具体的な場面を貫く決まりに着目することをねらいとする単元“変わり方”は下の教科書で学習される。以上２つの理由から，教科書では□，△，○等の記号を用いて，一般化された分配法則を指導しているが，時期尚早であると思われる。

(5)　「数の一般化レベル」から「演算の一般化レベル」へ

この段階の抽象度の飛躍については，教科書にも載っておらず指導する範囲外のものであるが，抽象のはしごの延長上に位置するものなので簡単にふれる。「演算の一般化レベル」とは，数が抽象され□，△，○等の記号を用いて一般化された数学の法則を読み取るレベルからさらに演算を変えても数学の法則は成り立つと認識できる段階である。つまり，(420＋110)×５＝420×５＋110×５の式から，(□＋△）×○＝□×○＋△×○だけでなく，次の演算群の代表と認識できるレベルである。

$$(\square \pm \triangle) \times \bigcirc = \square \times \bigcirc \pm \times \bigcirc$$
$$\div \qquad\quad \div \qquad \div$$

以上の考察により，出来事を知覚し，それを式化し，それを結び付けることでやっと，(420＋110)×５＝420×５＋110×５という式にたどり着く。この式にたどり着くまでに子ども達はずい分抽象度を高めなければならないが，この式の意味を読み取ることにおいても抽象度の異なる段階がいくつもあった。式に発信者が託す意味と受信者が読み取る意味とのずれによりコミュニケーションに乱れが生じたり，不能になったりする。算数の授業で言えば，授業者と子ども，子ども同士において，相互理解ができなかったり，その子どもの発想や能力を伸ばすことができなかったりする。授業者は，子どもの豊かな発想を大切にするというとき，視点の異なったとらえ方に焦点を当てるだけでなく，抽象度の高まりという視点からも考える必要があるように思う。子ども達の算数離れ，中等教育における数学教育の弱体化が言われているが，このことがその理由にもなってるのではないかと考える。

4　計算の順序の恣意性について

１つの式に“＋”“－”“×”“÷”の演算が複数含まれている場合，演算の順序は“×”“÷”が先で，“＋”“－”が後という決まりがある。この決まりを子ども達に身につけさせるのに「そういう決まりになっていて，皆がそうやっているのだから，あなたもそれに従いなさい」と押しつけていることが多いのではないかと思われる。決まりとは，コミュニケーションにおいて，コードに当たり，それを守らなければ，コミュニケーションそのものが不能になるので，必ず守る必要があり，その点から先ほどの説明は，正しい。しかし，できれば子ども達に決まりを作り出す経験，すなわち算数・数学における恣意性についても経験させたいと考え実践を行った。

今回，先で提示した弁当とジュースの場合の式を下記のように扱った。A，Bの式は，子ども達が考えたものである。

A	420×５＝2100	B	420×５＋110×５＝2650
	110×５＝550		(a)　(b)　(c)
	2100＋550＝2650		

共同解決の場において，Aの考え方を説明させる。すると，

①　まず，弁当代を出す

②　次に，ジュース代を出す

③　最後に，合計を出す

となる。ここでAの考え方になるようにするには，Bの式の計算の順序をどのようにすればよいかを問う。そうすれば，(a), (c), (b)の順序になり，“＋”より“×”の方を先にする方がよいことに気づく。下の図は，計算の決まりが生まれひとり歩きするまでの過程である。

きまりレベル	既成のきまりに従う	共通性・一般性・社会性	
	⇧		
式レベル	子どもが考えだした順序	恣　意　性	具
	⇧		体
行動・考えレベル	子どもが問題解決した順序	考え方レベル	的

計算の順序の抽象過程

5　算数・数学の表現形式について

第２学年で３口の計算を学習する。例えば，４＋７＋３である。この式の計算順序を考えるときに，下記の２通りが考えられる。

①４＋７＋３　　　　　　　　　②４＋（７＋３）

４学年の子どもに（　）の意味を問うと最初に計算する記号と答えた。それで間違いはないが，計算の順序というレベルだけではなく，コミュニケーションの立場から捕らえさせたい。②の式において，７＋３に（　）が付けられている。これは，７＋３を先に計算せよという指示である。①の式には何も指示は出ていない。このときは，左から右へと計算するのが原則となっている。ここで注目したいことは，左から右へ計算せよということが式のどこにも示されていないことである。つまり，それが前提，コード化されているのである。その前提があるから，（４＋７）＋３という式はおかしいということになるのである。もし，前提・コードがなければこの式は正しい。このように見ていくと，（　）意味は，ここを最初に計算せよという意味だけではなく，前提となっているもの，コードを変更するよという意味も含まれなければならないと考える。このように考えると，算数・数学の表現形式（式）は，それに初めて出会う者（前提，コードを知らない者）にとっては，至って不親切である。これが算数・数学嫌いを作る原因の１つになっているかもしれない。

しかし，実は，これは前提・コードを作っておいて，表面に現れる部分をできるだけ簡潔にするという算数・数学的態度の裏返しであるとも言える。

6　おわりに

今回，算数・数学の表現形式である式を記号論，コミュニケーションの立場から考察した。子ども達を見ていると，式は答えを出すための道具となっている。確かに，そういう面はあるが，算数科のねらいとしては，式は，記号であり，式はコミュニケーションを成り立たせるものである，と言う視点からとらえられる子どもを作っていく必要があると考える。それが，算数・数学が人間教育に貢献できる面だからである。