算数科における直観力の育成と評価に関する一考察
—方法・結果を直観的に見通す場の構成を通して—

松　浦　武　人

1　はじめに

TIMSS（Third International Mathematics and Science Study：第３回国際数学・理科教育調査）の報告書の中に，次のような興味深い一文がある。

「数値で判断する場合も，図形の面積で判断する場合も，児童は，小３の段階ですでに，直観的に確率をとらえ始めているようである。」[1]（下線は筆者）

これは，わが国では中学校３年及び高校で履修する確率の問題２題（１題は，袋の中から赤いおはじきを取り出す時の取り出しやすさを問う問題：「数値で判断する場合」，もう１題は，的の黒く塗ってある部分へ石を投げるときの当たりやすさを問う問題：「図形の面積で判断する場合」）に対する小学校３年生と４年生の正答率の高さ（右下の表参照）を取り上げての分析である。さらに，このような高い正答率の理由に関しては，次のような分析がなされていた。

「このような場面は，日常生活で経験しているからであろう。」[2]（下線は筆者）

確率の問題の正答率（％）

	小３	小４
数値で判断	61.6	70.5
面積で判断	88.8	88.7

上述の引用文１）２）から，「未習事項の問題解決場面において下される直観的な判断の基は既有の経験であろう」という見解を読みとることができよう。ここに筆者は，直観力育成の可能性とその方途への示唆を得た思いがした。

このような思いを胸に，本稿では，まず次節において先行研究における直観とその育成に関する記述を鑑みて，直観力は育成できるという立場からの「直観」の定義づけを行い，その具体例を示す。第３節においては，直観の定義に基いて，直観力を育むための学習過程の在り方と授業仮説設定についての基本的な考えを実践例を示しながら提案し，その一般化を図る。第４節においては，実践例における児童の反応から授業仮説の検証を行い，直観力育成の可能性を探ることにする。

2　直観のとらえ

(1)　「直観」の定義に関する記述

本項では，筆者が「直観」の定義づけを行う際に参考とした辞典類，認知心理学，数学教育学，理科教育学等の文献の記述を書き出し，とらえ方の特徴を考察していくことにする。

まず辞典類では，「直観」の定義について次のような記述がなされていた。

「反省・思考・推量などの思惟的活動を経ることなく対象を直接的に把握する認識作用・能力」[3]

「推理や判断によらないで物事の本質を直接とらえる心の働き」[4]

「推理によらず，直覚的（瞬間的）に物事の本質をとらえること」[5]

「推理や経験によらず，直接的・瞬間的に，物事の本質とらえること」[6]

認知心理学者の石田氏は，「直観的現象」という用語を用いて，次のように説明している。

「直観的な判断といえども，実はきわめて知的，理性的な働きのなせるわざといえよう。おそらく，情報，知識，推論，吟味などの機能が滑らかに連携し，きわめて効率よく，高速度に作動するとき，見事な直観的現象となって現れるのではないだろうか。」[7]

岩崎氏は「直観を例えば，『判断や推理などの思惟作用が介在しない直接的な認識』としても，その規定は我々の常識を出るものではない」[8]とし，数学教育学の立場から次のように述べている。

「情報化という時流が直観力を要請し，そしてそれが程度の差こそあれ全ての人の認識の根底に働く力とすれば，直観力の育成は算数・数学の今日的な課題になるであろう。例えば，必要な情報を選択する力，情報に意味づけする力，２つ以上の情報を総合する力，新旧の情報を組み合わせる力などは，容易に思いつける直観力の例になろう。」[9]

片岡氏は，「感性」や「情操」との関わりにおいて，直観を次のように定義づけている。

「感性は『価値あるものに気づく感覚』である。一瞬に本質を見抜く感覚――直観は，私たちの問題にしている感性や情操と切っても切れぬ関係にあるかもしれない。」[10]

小山氏は，直観的に把握する対象について次のように丁寧に述べて定義付けしている。

「直観とは，感覚的・具体的な対象から，その対象の全貌，本質，意義，意味，構造やあるいはその対象の背後にある抽象的理想的なものを，判断・推理などの思惟活動を加えることなく直接的に，把握する認識作用である。」[11]

中原氏の定義は辞典類の定義と類似している。

「判断・推理などの思惟作用を加えることなく，対象を直接に把握する作用」[12]

堀氏は「経験」を基にした「思考過程の圧縮化」という表現を用いて直観を定義づけている。また，次のように大人と子どもの差を指摘している点が特徴的である。

「大人は，経験を積み重なる中で，一連の思考過程を圧縮化しているという意味での直観に依存した思考をすることが多いのであるが，子どもにはそれがほとんど見受けられない……」[13]

(2) 「直観（力）の育成」について

ここでは「直観（力）の育成」に関する記述をみていくことにする。

石田氏は直観力を育成する上での経験の重要性を次のように述べている。

「直観力とは，いわば，複合的，総合的な力であり，直観力それ自体を育てるような便利な方法など存在しない……直観を磨くうえでも最も効果的なのは，やはり何といっても経験を積むことであろう。……直観現象はほとんど経験の産物といっても過言ではないかもしれない。」[14]

岩崎氏は直観力の育成に関わって次の４点を具体的に提案している。

a　具体的な操作活動を経験させる	b　図的表記を重視する
c　算数的発想の重視	d　類比のすすめ

[15]

小山氏は「一般的には，直観を育成するとは，経験や学習によって直観に磨きをかけたり改めたりして，より高次の直観に高めることであると捉えられている」[16]とし，直観を育成する方法を次のようにまとめている。

(1)一般的方法
　①自主的な活動をさせる。
　②ある特定の分野での種々の経験をさせる。
　③児童・生徒に自信と勇気をもたせる。
　④教師が児童生徒を評価する基準を改善する。
(2)理解に関する方法
　①概念や状況のイメージ化を図る。
　②知識や状況の構造化を図る。
　③図，表，グラフ，絵等によって，解決の視覚化を図る。
　④物理的議論によって，概念や原理・法則の現象化を図る。
(3)問題解決に関する方法

[17]

①類比，類推をさせる。
②帰納的推論をさせる。　――結果を直観する方法
③図式化，図形化させる。
④特殊化させる。　――方法を直観する方法
⑤単純化させる。

中原氏は直観を「視覚的直観」「純粋直観」「知的直観」の３つに分類し，その内の「視覚的直観」と「純粋直観」については人間に先天的に備わっているか，自然的に発達，獲得されていくものが多いとして，「教育において意図的計画的にその育成を図っていく必要はとくにはない」[18) と述べている。そして，３つめの「知的直観」に関しては，次のように教育の可能性と必要性を示唆している。

「直観が働く対象はもう一つある。それは，問題の構造や本質，ポイントなどを既有の経験，知識を基にして把握していく場合である。こうした直観は，知的直観とでも呼ぶことができよう。それは，教育，学習の結果として働くものであり，算数教育で育成するのは，主としてこの知的直観である。」[19)

(3)　「直観」の定義

前節の TIMSS の結果の分析と前前項の直観の定義，前項の直観（力）の育成に関する記述をもとにして，本研究では，算数科の学習における「直観」を次のように定義する。

直観とは，既有の経験や知識を基にして，学習対象となる事象の本質（数学的な価値）や構造を瞬時に把握すること，また，問題解決において方法や結果の見通しを瞬時にもつこと

また，同様にして，「直観力」という用語を用いる場合には，次の定義づけによるものとする。

直観力とは，既有の経験や知識を基にして，学習対象となる事象の本質（数学的な価値）や構造を瞬時に把握する能力，また，問題解決において方法や結果の見通しを瞬時にもつ能力

例えば，次のような問題においては，「きまりを見つけて解く」という既有の経験を基にして，「50段目そのものを考えずに３段目ぐらいまでを実際に調べるときまりを発見できるだろう」という方法の見通しを瞬時にもつこと，また，１段目，２段目，３段目の和を求めていき，１，４，９という数に出会ったときに，「これらは基本的な二乗の数である」という既有の知識を基にして「50段目は50×50で2500になるだろう」という結果の見通しを瞬時にもつこと……これらは直観のはたらきであるととらえている。

【問　題】

次のように，数のピラミッドをつくっていきます。50段目に並ぶ数の和はいくらでしょう。

1　…………１段目
1 2 1　………２段目
1 2 3 2 1　……３段目
1 2 3 4 3 2 1
1 2 3 4 5 4 3 2 1
・・・・・・・・・・・

この数のピラミッドは，各段の真中が最大の値で左右に１ずつ減っていくという対称性をもっているので，実際に，50段目の中央の数である50の右側に並ぶ数下段に移動すると，右に示すように，50が50こ並ぶことになるわけであるが，直観的な問題解決においては，このように問

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & 49 & 50 \\ +) & 49 & 48 & 47 & \cdots\cdots & 1 & \\ \hline & 50 & 50 & 50 & \cdots\cdots & 50 & 50 \end{array}$$

題構造を論理的に認識する過程を踏まずに，Ｓ段目の数の和が「Ｓ×Ｓ」になるという本質的な構造のみを瞬間的に把握しているのである。

【直観的な問題解決】

既有の経験・知識	• きまりを見つけて解く （このようなときは，50段目そのものを考えない） • 基本的な二乗の数
方法の見通し	① 3段目ぐらいまでを実際に調べるときまりを発見できるのでは？
事象の本質構造の把握	② 1段目…………1 2段目…………4 3段目…………9 Ｓ段目はＳ×Ｓだ！
結果の見通し	③ 50段目は，50×50だろう。

3 直観的に見通す場を取り入れた授業創り

ここでは，前節に示した直観の定義に基いて，直観力を育成するための学習過程の在り方と授業仮説設定についての基本的な考えを実践例を示しながら提案し，その一般化を図りたい。

(1) 提案①：「直観的に見通す場」の設定

問題解決学習の学習過程は，一般的に次のように構成されている。

めあて意識をもつ場 → 見通す場 → 解決する場 → **（活用する場）** → ふりかえる場

この過程の中で，「活用する場」は，他に「生かす」，「選択する」，「発展する」，「拡げる」，「深める」などの用語を用いて表されていることからも分かるように，本来は，本時の学習問題の類似問題や発展・応用問題に取り組み，学習をさらに拡げ，深め，高めるという貴重な学習の場である。しかし，括弧をつけて示しているように，実際の授業場面の中では時間の都合上省略されたり，単なる練習問題を扱う場としてしか意識されていないことが多いようである。筆者は，上述したように，問題解決学習の学習過程の中に「活用する場」を明確化する必要性があると考えている。そこで，「活用する場」を「直観的に見通す場」として意識し，次のように学習過程の中に明確に位置づけることにした。

めあて意識をもつ場 → 見通す場 → 解決する場 → **【直観的に見通す場】** → ふりかえる場

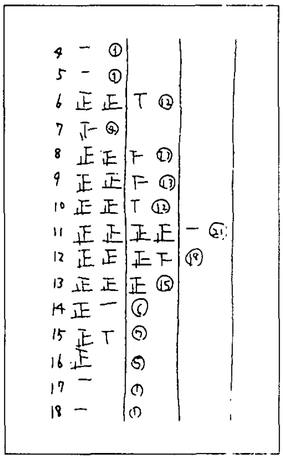
そして，この「直観的に見通す場」では，次のような学習活動を行う。

○本時の問題解決において出された多様な解決方法の中から，類似問題に適した効率的な解決方法を直観的に見通す。
○本時の問題解決を基に，発展・応用問題の解決方法や結果を直観的に見通す。

つまり，「活用する場」を「直観的に見通す場」として構成し，そこで直観力の育成を図るのである。また，これは，「直観的に見通す場」に到るまでの本時の問題解決過程（めあて意識をもつ場→見通す場→解決する場）を，「直観的に見通す場」で働く「直観の基となる経験や知識」としてとらえなおすことでもある。一つの実践例を示してみたい。

《実践例：正八面体サイコロの和（第５・６学年対象）》

正八面体サイコロ（２から９の目がある）２つをふって，その目の和を記録していくという簡単なゲームを行う。子どもたちは２つのサイコロの和として４から18の数が出ることを容易に予想し，ノートに４から18の数を並べ，出た目の和の数に正の字を記入していく。やがて右のような結果に驚きの声があがり始める。なぜ，11がこれほど多いのかという問いをもち，追究する活動を通して，和をつくる組み合わせの数に着目すればよいという考えに到る。…………



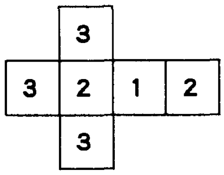
ここまでの学習で本時をふりかえり，まとめることもできる。しかし，あえてここで次のような問題を提示し，「直観的に見通す場」を設けるのである。

【活用問題①】

正六面体サイコロを２つ使ったら，どのような結果が出るでしょうか？

【活用問題２】

次のような目をもつ正六面体サイコロを２つ使ったら，どのような結果が出るでしょうか？



活用問題に対する児童の反応は次節において示し，分析を行うことにして，次に「授業仮説」についての提案をする。

(2) 提案②：「授業仮説」の設定

授業を一つの研究の場としてとらえるならば，その研究の仮説としての授業仮説を設定することができる。一般的には「～するならば，～するであろう。」という形式で表現することができる授業仮説であるが，次に示すように，「～するならば」の部分に「直観の基となる経験や知識」を記述し，「～するであろう」の部分に「直観のはたらき，直観力の表出」を記述することによって，直観の基となる経験や知識を授業を通して検証していくことができるのである。

【授業仮説と直観との関わり】

～するならば……………直観の基となる経験，知識
↓↓↓
～するであろう…………直観のはたらき，直観力の表出

例えば，上述の「正八面体サイコロの和」の授業では，次のような仮説を立て，検証していくことになる。

《授業仮設》

正八面体サイコロ２つの目の和を記録し，その結果の原因を追究する学習活動の場を設定するならば，児童はその他（正六面体等）のサイコロにおいても，目の和の出方を瞬時に予想することができる。

4　調査結果の分析

(1)　調査A：質問紙法（対象：第６学年児童32名）

この調査は，前節の実践例「正八面体サイコロの和」の学習過程の「直観的に見通す場」において，一斉に質問用紙を配布し，活用問題①②をそれぞれ制限時間内で回答させるという調査である。

活用問題	制限時間(秒)	回　答	人　数	正答率(％)
①	30	7 6 9 11	28 1 1 1	87.5 (90.6) （正答：7）
②	30	4 5 6	2 17 13	 53.1 （正答：5）

調査結果を左表のようにまとめてみた。

活用問題①については，87.5％という高い正答率を得た。30秒という制限時間で，正六面体サイコロ２つの目の和として考えられる２から12のそれぞれについて，その和を構成する組み合わせの数を全て数え上げることは不可能であると思われる。よって，この正答は正八面体サイコロの学習を基にして，２と12の真ん中の数が最もよく出るという結果の見通しを直観的にもち，その数「７」を導き出したものと考えられる。また，「６」という回答は誤答ではあるが，考え方としては２から12の数の真ん中の数をとらえようとしたもの（※これを後述する調査Ｂの結果からの推測である）と思われる。

活用問題②については，３の目の数の多さに惑わされて，その和である「６」を回答する児童も多くいたが，半数以上の児童が和の組み合わせの数を考えて「５」と答えることができた。問題①と比較すると正答率は低いが，昨年，同じく第６学年児童40名を対象にこの問題を授業の導入問題として扱った際に，「５」と答えることができた児童が一人もいなかったことから考えれば，ここでも，「まず組み合わせの数を考えなければならない」という直観的な解決方法の見通しがはたらいているように思われる。

(2)　調査B：面接法（個人観察法）（対象：第５学年児童10名，第６学年児童10名）

調査Bは，調査Aと同じく「正八面体サイコロの和」の学習過程の中で，正八面体サイコロの目の出方（11が最もよく出ること）を発見し，その理由（組み合わせが最も多い）を追究した段階で一斉での学習は終了し，その後，各児童と教師の１対１で面接を行い，その中で活用問題①②を提示し，児童の反応と所要時間を細かく観察記録するという調査である。次表がその結果である。

児童	活用問題①		活用問題②	
5　年	回答：最頻値（回答の理由）	時間(秒)	回答：最頻値（回答の理由）	時間(秒)
A	２と12の真ん中	1	6（目の数の多い３と３で６）	1
B	12（感）	1	6（目の数の多い３と３で６）	1
C	２と12の真ん中	1	6（目の数の多い３と３で６）	1
D	２と12の真ん中	1	5（組み合わせの数が多い）	1
E	２と12の真ん中	1	6（目の数の多い３と３で６）	4
F	6（２と12の真ん中で６）	10	6（目の数の多い３と３で６）	28
G	２と12の真ん中	1	5（組み合わせの数が多い）	22
H	２と12の真ん中	1	5（組み合わせの数が多い）	1
I	6（２と12の真ん中で６）	25	4（２と６の真ん中）	30
J	２と12の真ん中	1	4（２と６の真ん中）	1

児童	活用問題①		活用問題②	
6　年	回答：最頻値（回答の理由）	時間(秒)	回答：最頻値（回答の理由）	時間(秒)
K	6（2と12の真ん中で6）	1	5（組み合わせの数が多い）	1
L	6（2と12の真ん中で6）	1	6（目の数の多い3と3で6）	1
M	7（2と12の真ん中で7）	3	4（2と6の真ん中）	1
N	2と12の真ん中	1	4（2と6の真ん中）	1
O	7か8（2と12の真ん中）	8	6（目の数の多い3と3で6）	13
P	2と12の真ん中	1	6（目の数の多い3と3で6）	1
Q	7（2と12の真ん中で7）	1	5（組み合わせの数が多い）	103
R	7（2と12の真ん中で7）	14	6（目の数の多い3と3で6）	1
S	7（2と12の真ん中で7）	1	6（目の数の多い3と3で6）	1
T	6（2と12の真ん中で6）	1	5（組み合わせの数が多い）	23

上の表に示したように，活用問題①に関しては，第5学年児童10名のうち7名が「2と12の真ん中が最もよく出る」と即答した。(時間の「1」は，教師の質問が終わるとすぐに回答したことを表す。）また，「6」と答えた児童2名については，その理由を尋ねたところ，いずれも，「2と12の真ん中の数を選んだ」ということであった。「6」は誤答ではあるが，「2と12の真ん中」という「結果の見通し」はもてたことになる。(調査Aの考察における推測※は，この事実によるものである。）第6学年児童においては，10名全員が短時間の内に「2と12の真ん中が最もよく出る」という見通しをもつことができた。しかも7名は即答であった。さらに，第5学年児童には見られなかった「7」という具体的な最頻値まで出した児童も4名いた。

活用問題②に関しては，両学年とも，組み合わせの数を考えて「5」と回答した児童が3名，3の目の数の多さに惑わされて「6」と回答した児童が5名，和としての2と6の真ん中の数を取って「4」と回答した児童が2名であった。正答の児童の中でも，D，H，Uの3名は，即答で「5」と答えることができた。また，児童Qは103秒という時間を要しているが，このことについて訪ねると,「組み合わせの数を比べていた」と述べた。このことから,「組み合わせの多いものを探そう」という方法の見通しは，瞬時にもっていたことが分かった。正答者は20名中6名ではあったが，この6名に関しては，正八面体サイコロの学習過程が活用問題②においてはたらく直観力の基となったと言えよう。一方,「4」と答えた児童4名は，いずれも，理由が「2と6の真ん中だから」ということであった。これは,「正八面体サイコロ2つでは4と18の真ん中に山ができた」という結果としての知識のみが，直観的にはたらいたためであると考えられる。ここには，結果をもたらした理由としての「組み合わせの数」への意識が見受けられない。このことから，直観力の基となる経験・知識は，経験したことの表面的な現象や結果のみの知識ではなく，その現象や結果をもたらした根拠や理由の認識までも含めての経験や知識となり得ていない限り，かえって誤った方向に直観をはたらかせる要因ともなることが分かった。

5　結　　語

本稿は，直観力育成の可能性を探ることを第一の目的として，算数科における直観力の育成と評価について，問題解決の方法や結果を直観的に見通す場を構成することを通して考察してきた。これまでの流れをまとめて，本稿を終わることにする。

まず，第2節においては，算数科の学習における「直観」を「既有の経験や知識を基にして，学

習対象となる事象の本質（数学的な価値）や構造を瞬時に把握すること，また，問題解決において方法や結果の見通しを瞬時にもつこと」と定義した。また，同様に，「直観力」を「既有の経験や知識を基にして，学習対象となる事象の本質（数学的な価値）や構造を瞬時に把握する能力，また，問題解決において方法や結果の見通しを瞬時にもつ能力」と定義した。

第３節では，第２節の定義に基づいて，直観力を育成するための２つの提案をした。一つは，問題解決学習の学習過程を《めあて意識をもつ場→見通す場→解決する場→【直観的に見通す場】→ふりかえる場》として，学習過程の中に直観をはたらかせる場を明確に位置づけることである。もう一つは，「直観の基となる経験や知識」と「直観のはたらき，直観力の表出」の関係を検証していくための授業仮説の設定である。

第４節では，「直観的に見通す場」における直観のはたらきを，２つの調査結果から分析した。そこでは，問題解決の方法や結果を瞬時に見通したと評価される反応，つまり，直観力の表出が多くの児童の反応に見られた。しかし，その一方で，直観力の基となる経験・知識は，経験したことの表面的な現象や結果のみの知識ではなく，その現象や結果をもたらした根拠や理由の認識までも含めての経験・知識となり得ていない限り，誤った方向に直観をはたらかせる要因ともなることを指摘した。

引用・参考文献

1）国立教育研究所，『小・中学生の算数・数学，理科の成績』，東洋館出版社，1996，p. 58.
2）同上
3）梅棹忠夫・金田一春彦・板倉篤義・日野原重明監，『日本語大辞典』，講談社，1989，p. 1280.
4）宇野哲人編，『新修広辞典』，集英社，1992，p. 607.
5）金田一京助・柴田武・山田明雄・山田忠雄編，『新明解国語辞典』，三省堂，1991，p. 833.
6）樺島忠夫・植垣節也・曽田文雄・佐竹秀雄編，『福武国語辞典』，福武書店，1989，p. 824.
7）石田　潤，「直観のメカニズム」，若き認知心理学者の会著，『認知心理学者教育を語る』，北大路書房，1993，　p. 60.
8）岩崎秀樹，「直観と論理」，岩合一男編『算数・数学教育学』，福村出版，1990，p. 155.
9）同上，p. 159.
10）片岡徳雄著，『子どもの感性を育む』，ＮＨＫブックス，1990，pp. 74-75.
11）小山正孝，「数学教育における直観に関する研究」，平林一榮先生頌寿記念出版会編，『数学教育学のパースペクティブ』，聖文社，1990，p. 177.
12）中原忠男，「新学習指導要領と直観力，論理的な思考力の育成」，『算数教育』明治図書，1990. 4，p. 89.
13）堀　哲夫著，『理科教育学とは何か』，東洋館出版社，1994，p. 176.
14）同７）p. 61.
15）岩崎秀樹，「直観力とその育成」，『算数教育』明治図書，1990. 5，pp. 89-91.
16）同11）p. 185.
17）同11）p. 186.
18）同12）p. 90.
19）同上