

数学的な考えを支える認識を育てる算数学習

—第3学年「2けたのかけ算」の実践を通して—

川 上 公 範

1 なぜ認識を問題にしないといけないか

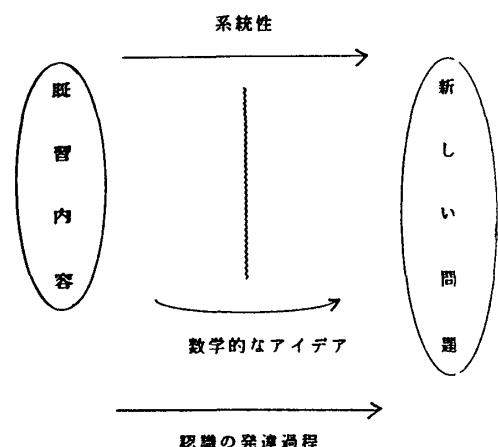
算数科の学習を通して育まれる「豊かな感性」とは、『いいなあ』と感じる心である。『いいなあ』とよさを感じる場面としては、①教材その物のよさに触れたとき、②方法のよさを実感したとき、③既習の内容が新たな問題の解決に役立ったとき、④既習の内容をもとに新たな問題を解決するのに必要な数学的なアイデアを生み出したときが考えられる。今回は、新たな問題を解決するとき、既習の内容、数学的な内容と認識の発達がどのように関わっているのかを考えてみたい。

算数科の内容は、系統性が強く、問題を解決するには、既習の内容を単独に、あるいは組み合わせたものが用いられる。どの既習の内容を用いるかによって、異なった解決方法が生まれてくる。それが、算数・数学において答えは一つであるが、解決の方法は、幾多もあるといわれる所以である。どんな既習の内容を思い出すか、そこにその人の感性、別の言い方をすると個性が表れるのである。

しかし、既習の内容をただ使えば問題が解決できるものではない。なぜなら既習の内容をただ使うだけで解決できるのであれば、その既習の内容を習得した段階で、後から出会う問題も解決できるはずだからである。実は、新しい問題が解決されるためには、既習の内容だけでなく、それに何等かの数学的なアイデアが必要である。既習の内容+数学的なアイデアによって系統の段階を一段一段登って行けるのである。

問題を解決するのにどんな数学的なアイデアが必要なのかは、算数科の内容を分析していけば、明らかになるが、いつでも、どこでも子ども達をその数学的なアイデアが求められる問題に出会わせれば、子ども達が数学的なアイデアを生み出すというものではない。確かにその問題に出会うことによって数学的なアイデアが触発されることはあるが、数学的なアイデアは、認識の発達に支えられているのである。教師が、いろいろな教具を使い何度指導しても子どもには、どうしても腑に落ちないといった気持ちになるとか、次の日になるとすっかり忘れてしまうということがあるのに、少し期間が経つと、理解ができるという感じではなく、当たり前といった感覚を子ども達は持つようである。まさしくこれは、認識の発達によるものである。例えば、図形の面積指導においては、図形の保存性の認識が、学習の支えとなっている事は言うまでもない。

以上の点から算数科学習における感性を研究する視点として認識の発達を設定することも必要だと考えるのである。



2 数の認識を支えるかたまりの認識

子ども達は、幼児期を経て、1年生へと進み、物と物、物と数詞とを一対一対応させる操作や、その物の中に共通性を見つけることを通して、いくつかのものを一つの固まり（グループ）とし

て意識し、その意識を基に自然数を認識していく。カントは、彼の書物のなかでかたまり意識を強い親和力といっているが、この意識により一つ一つの自然数が認識されるのである。この当たり前とも思えるかたまりの認識がなければ、数はいつまでたっても1を越えることができないのである。この“かたまり”の認識と数の保存性の認識を基に学習の内容は、二つのかたまりを結合して一つのかたまりにすることや、一つのかたまりを分けて、二つのかたまりにすることへと進む。これが、加法と減法である。さらに“かたまり”の認識は、十のかたまり、百のかたまり（十のかたまりのかたまりの認識は、この段階ではまだ相対化されていないと思われる。）、そしていくつかにまとめて数えるという学習内容へと発展する。このようにこの“かたまり”の認識と、数の保存性の認識により、数は、一対一対応の操作から判明するそれぞれの“かたまりの大きさの違い”から、グループの要素の数を示す指標へ、さらに同じ大きさのかたまりの数を示す指標へと次元を高めていくことが可能になるのである。2年生では、乗法を学習する。乗法とは、一般に同じ大きさのものが、いくつかの固まりを作っているときの全体の数を求める内容であるが、この学習においても“かたまり”の認識が根底で支えとなっていることが分かる。この学年では、十のかたまりを10こ集めて作られる百（操作は1年生）の位についての理解を深めるが、ここでは“かたまりのかたまり”という一つ次元の高くなった認識が大きな支えとなっている。3年生では、主に乗数が2けた・3けたのかけ算を学習する段階で、この“かたまりのかたまり”の認識が一般化されるのである。この“かたまりのかたまり”の認識により、結合法則・分配法則の理解も可能になるのである。

このように、数の質的な発達や数学的な法則の理解・アイデアの生み出しの根底には、“かたまりのかたまり”の認識が支えとなっているのである。

以上の内容をまとめると下の表になる。

学 年	学 習 内 容	かたまりの認識
幼児期 1年生	・ 対応によるかたまりの大きさの違い ・ 自然数の認識 ・ たし算・ひき算 ・ いくつかにまとめて数える	・ かたまりの認識 ・ かたまりの結合・分離 ・ 同じ大きさのいくつかのかたまり
2年生	・ 乗法 ・ 100の位	・ 同じ大きさのいくつかのかたまり ・ かたまりのかたまり
3年生	・ 乗数が2けた・3けたのかけ算 ・ 結合法則・分配法則	・ かたまりのかたまり

仮説の設定

認識の発達を基にし、学習の内容を焦点化すれば、子ども達は、自らの力で算数を構築していくことができるであろう。

3 指導事例Ⅰ

(1) 単元「2けたのかけ算」(第3学年)

(2) 単元について

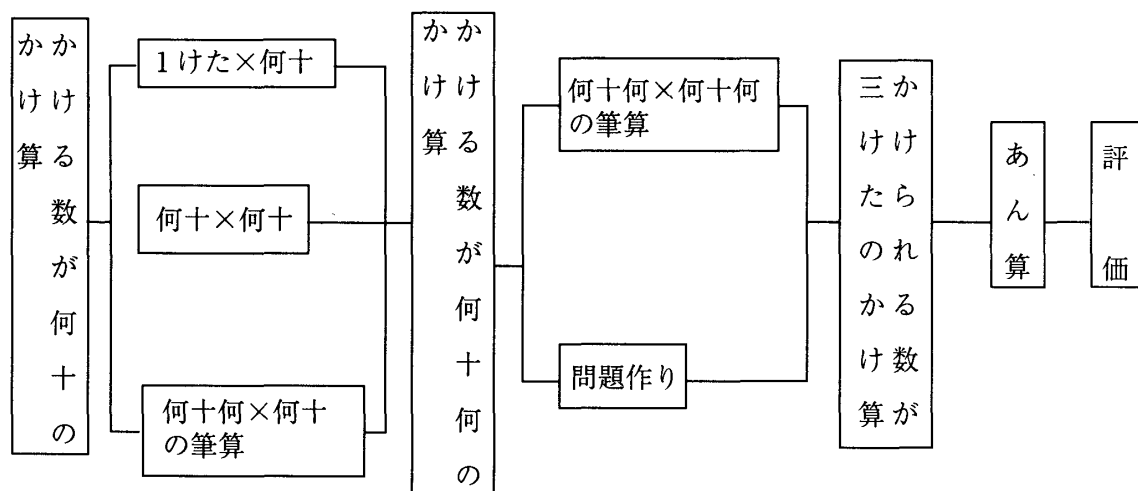
1学期に学習した被乗数が2けた・3けたのかけ算を基にして、乗数が、2けた・3けたのかけ算を学習する。しかし、この二つのかけ算は、場面の情景そして育てようとする認識が全く異なるかけ算である。後者は、累加の煩雑の解消、より簡潔な計算方法を考えるという一貫した流れであるが、前者は九九の範囲を越えたかけ算を今までのように九九を使って計算できないかという流れである。育てたい認識も、後者は“かたまりのかたまり”という高度なかたまりの認識であるのに対し、前者は、数の内包的な見方・外延的な見方という数の相対的な見方の獲得という違いがある。指導に当たっては、この両者の違いを基に、ねらいを焦点化した授業を組みたいと思う。

また、この単元では、かたまりの認識の発達を促すとともに、学習内容の焦点を図ることにより、算数科の内容は、子ども達の外部にあって、それを理解吸収するという立場ではなく、子ども達が作り出すという立場に立って指導していきたい。

(3) 指導目標

- ・かたまりの意識をかたまりのかたまりという段階へと育む。
- ・乗数が2けた・3けたのかけ算のやり方を理解させる。
- ・子ども達の考えを基に、筆算の方法を生み出させる。

(4) 指導計画と計画 全9時間(本時 第1次第1時)



(5) 授業設計の焦点

1けた×2けた(何十)の計算は、累加の考えを基に考えられる。累加の煩雑さ、大変さを感じ取らせるために、4枚のシールを貼った台紙30枚を縦に3段・横に10列並べた図を基に考えさせる。また、図を理解し、状況をつかみやすくするために実物を1つ提示する。子ども達には、かたまり(台紙)のかたまりを作るという操作は比較的抵抗ないと思われるが、中には大きさの異なるかたまりを基に考えようとする児童もいるであろう。その場合は、それを認めながらも同じ大きさのかたまりを作って考えるよう指導していきたい。

かたまりのかたまりの考え方は、幾通りも考えられるが共同解決の場面では、共通性が見つけられるように、3, 4つぐらいに絞り、他のやり方の典型として扱いたい。

結合法則の理解を深める場面では、立式と解決方法の式(結合法則)のつながりを図(かたまりのかたまりの考え)を基に考えさせていきたい。

(6) 本時の目標

かたまりのかたまりの認識を基に、1けた×何十の計算のやり方を理解する。

(7) 評価の観点

意欲・関心	図を使って進んでシールの個数を調べようとする。
認識 数学的な考え	かたまりのかたまりの認識を基にシールの個数を簡潔に求めることができる。結合法則の理解を深める。
技能	1けた×何十の計算ができる。
知識	1けた×何十の計算の方法を知る。

(8) 学習過程

学 習 活 動	指 導・支 援 活 動
1 問題場面の把握 2 立式・見通し 3 課題を把握する 4 シールの個数を調べる 累加 縦三列を基に計算 横十列を基に計算 その他のかたまりを使って計算 5 共通する考え 6 ま と め 7 技 能 定 着 8 ふ り 返 り	1 問題場面を把握しやすいように実物を提示する。 2 ◎立式の根拠を明らかにしやすいように、また累加の煩雑さを感じさせるために黒板に図を貼付する。図は、かたまりの考えが出しやすいように3段10列に並べた物 4 大きさの違うかたまりを作っている児童には、それを認めながらも、同じ大きさのかたまりで求めてみるよう指導する。 累加の考えでやっている児童がいない場合は、既に同じ大きさのかたまりでやっている児童に考えさせる。 5 説明は、累加のやり方の煩雑さを解消し、簡潔に求める工夫ということで他の3つの方法を扱うため、累加による方法を先に説明させ比較させる。 かたまりのかたまりということを意識させるため、実物を提示し、今までのかけ算との違いに気づかせる。

指導事例Ⅱ（子ども達が自らの力で算数を構成していく練りあげの場）

何×何十の計算から、何十×何十、さらには何十何×何十へと学習が進む。この学習内容の流れは、累加の煩雑さをアイデアを出して、省力化を図るという構成である。しかし、子ども達は、被乗数が何十何となる1学期に学習したかけ算を思い出し、被乗数を十の位と一の位に分けようとする。これは、1学期のかけ算が、数を外延的な見方から内包的な見方へと認識を高めることによって、かけ算の範囲を一挙に拡張できるという画期的な経験を踏んでいるだけに無理からぬことである。実際には、被除数を位ごとに別けても計算はできるのである。そのように考える子ども達に、被除数は分けなくて計算することを納得させる場として、今回能率のよさという観点で練り上げの場面を設定した。

問

1まい34円の画用紙を20まい買いました。
代金は、いくらになるでしょうか。

この問いに対して、下のように三通りの考え方が出てきた。（実際には言葉による説明が式の間に入っていたが、ここでは紙面の都合で割愛する。）

S君

$$\begin{aligned} 30 \times 20 &= 600 \\ 4 \times 20 &= 80 \\ 600 + 80 &= 680 \end{aligned}$$

Nさん

$$\begin{aligned} 34 \times 2 &= 68 \\ 68 \times 10 &= 680 \end{aligned}$$

Mさん

$$\begin{aligned} 34 \times 10 &= 340 \\ 340 \times 2 &= 680 \end{aligned}$$

この三通りの考え方に対して以下のような練り上げを試みた。

① この三つの考え方のうちで今までに学習してきたことを使っているのはどのやり方なのか考えさせる。

この質問には、すべてが該当する。まず既習の内容を使っているということ、つまり既習の内容のよさを味わわせるための場である。

② 考え方が他の考え方と違うものはどれか考えさせる。

出された考えを共通点を見つけてグルーピングする場である。一つ一つの考えをバラバラに考えていたのでは、共通性や相違性は見つけにくい。グルーピングすることにより相違点が明らかになる。被除数を分ける考え方と乗数を分ける考え方のグループに分けられる。

③ 最後に、より効率のよい求め方はどれか考えさせる。

この場面で初めて、計算方法を統一する。これまでの何×何十、何十×何十までの段階は、縦何段を先に求めてやる方法でも、横10列を先に求めてやる方法でも、よいので一人一人の子どもの判断に任せた。しかし、この段階では、筆算と結びつける必要があるので計算方法を子ども達の話合いによりまとめ上げていった。

指導事例Ⅲ（アルゴリズムの筆算から子ども達が作り上げる筆算へ）

アルゴリズムとは、“一定の種類の問題を解くために、常に利用されるような厳密に順序づけられた有限回の定まった計算方法”と定義されている。もっとわかりやすくいえば、同じ手続きを踏む操作がくり返されるということであろう。この定義からは、コンピューターのような操作の仕方をイメージさせる。実際筆算を指導する場合、形式のみを教え、後はその操作というより作業（九九、答えを書く場所）を間違えないようにさせることに重点がおかれる。まさに、筆算は

“考える算数”“創りあげる算数”とは、真反対の“覚える算数”“機械的な操作を間違えない算数”である。今回、筆算をアルゴリズム的な立場からではなく、子ども達が創りあげるという立場で指導を試みてみた。教科書各社を調べてみると、どの教科書においても、指導の流れとして、何十何×何十の後、何十何×何十何の段階で筆算を指導している。この段階で乗数を十のくらいと一の位に分けてそれぞれを求めさせる。(ここまでは子ども達のアイデア)その後、一挙に筆算の説明に入っている。そして、筆算の形式に慣れた後で、前時に学習した内容である何十何×何十の筆算を考えさせている。

《例》

46×38		76×30
$46 \times 8 = 368$	→	46
$46 \times 30 = 1380$		→
1748		76
	$\times 38$	$\times 30$
	3668	00
	138	228
	1748	2280

どうして子ども達が考えた内容を整理した形で筆算を導き出さないのだろうか。教科書の形式で筆算を指導するねらいとしては、アルゴリズムの経験、一般から特殊へという指導の流れの原則、そして一か所にまとめて指導することによる、紙面や指導場面の節約が考えられる。今回、筆算を子ども達の考えを整理したものという立場で指導するとどうなるかみてみた。それは、何十何×何十の段階で筆算を導入するのである。そして、何十何×何十何の筆算を先に学習した何十何×何十の筆算と1学期に学習した何十何×何の筆算を合体させて導き出すのである。

《例》

34×20	※この計算の考え方は、34の2こ分を調べ、10倍するのであるが
34	暗算で求められる。
$\times 20$	
680	

その後の指導

46×38		
子ども達が考え出した方法		
$46 \times 8 = 368$	⇒	$\begin{array}{r} 46 \\ \times 8 \\ \hline 368 \end{array}$
$46 \times 30 = 1380$		
	↘	$\begin{array}{r} 46 \\ \times 38 \\ \hline 368 \end{array}$
		 8こ分
	↗	$\begin{array}{r} 46 \\ \times 30 \\ \hline 1380 \end{array}$
		 30こ分
		$\begin{array}{r} 46 \\ \times 38 \\ \hline 1748 \end{array}$
		 38こ分
	$\begin{array}{r} 46 \\ \times 30 \\ \hline 1380 \end{array}$	

ここで問題になるとすれば、アルゴリズムの筆算では、 46×30 は⑩が1380ということの下で下の段に138と書く。ここでは、8を書く位置が重要である。アルゴリズムの筆算では、中学年で理解を深めなければならない、数の相対的な見方をねらいとして持っていると考えられる。子ども達の考えをまとめあげた筆算では、1380とそのまま書く(書くように強制するのではない)ので、数の相対的な見方は、育たないかもしれない。しかし、子ども達の考えを形式的に整理し、まとめ上

げることが大事であると考えれば、1380と書いてもよいのではないかと考えるのである。アルゴリズムの筆算で指導された場合、指導されて間もないうちはよいが、時間の経過とともに下のような間違いが増えてくる。また、数の相対的な見方が十分身についていない子どもには、アル

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 38 \\ \hline 368 \\ 138 \\ \hline 506 \end{array}$$

ゴリズムの筆算は、まさしく意味の分からない方法のみが重要視される計算方法になるのである。同じ算数の内容でも発達段階が違えば解釈の仕方も違ってくる。それは、それぞれの発達段階で解釈を行う回路が違うために違った解釈が生まれてくるわけで、解釈のための回路が変わっていくことがいわゆる発達なのである。それ故、学習の内容は、それを学習する学年の子ども達の思考回路によって解釈されたものを基に構成されるべきだと考える。また、アル

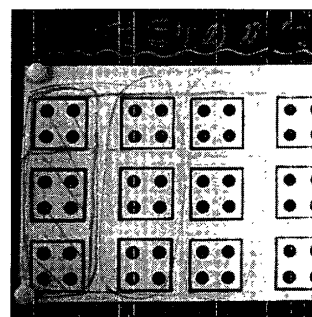
ゴリズムの筆算には、まだ問題点がある。それは、 46×30 は、46の30分を求めることであるが、
 $46 \quad 46 \quad 46 \cdots \cdots 46 \quad 46$ 図で示すと左ようになる。この図からもわかるように、この左
 $46 \quad 46 \quad 46 \cdots \cdots 46 \quad 46$ 図からは、 $46 \times 3 \times 10$ あるいは $46 \times 10 \times 3$ の発想は出てくるが、
 $46 \quad 46 \quad 46 \cdots \cdots 46 \quad 46$ ⑩が 46×3 こという発想は生まれてこないのである。つまり、この筆算のねらいの数の相対的な見方と、この単元の場面構成の累加の煩雑の解消とは、矛盾するのである。

以上の理由により、筆算はアルゴリズム的な立場で指導するより、子ども達の考えを整理統合したものという立場で指導すべきではないかと思う。

考 察

かたまりのかたまりの認識を基に、子ども達は解決の方法を考え出したのであろうか

子ども達は、累加の煩雑さを感じ、意欲的に簡潔な方法を捜し求めていた。その支援として、黒板への貼付図、各自に配ったプリントは、よかった。子ども達は、その図に積極的に書き込みをし、それを基にシールの個数を求めていた。しかし、共同解決の場において、「3つのやり方に共通する考えは？」と質問したとき、子ども達は確にかたまりのかたまりの意識を持って図に書き込み、シールの個数を求めていたが、それにもかかわらず、手の挙げ方が減ったのは、かたまりのかたまりを意識化するよりも、もっと具体的な求答につながる方法について考えていたのではないと思われる。右の写真からもわかるように、“1枚の台紙にシールが4まい貼ってあるが、台紙30まいのシールの個数は、全部調べなくても、台紙何まい分のシールの個数を調べれば、可能になるか、という方向に意識が向いていたのではないだろうか。つまり子ども達が考えていたのは、全体の大きさをその一部から求めるという数学的な考えだったのかもしれない。それは、指名された子どもが、「かたまりのかたまりです。」と答えたときそれを聞いていた児童達の「何だそんなことか」という眩きからもうなづける。そうなった原因は、前に出て説明する子どもが、かたまりのかたまりを1つしか作らずに計算し、シールの個数を求めたが、説明を聞いていた他の子ども達も“かたまりのかたまり”を意識化していると早合点したためかもしれない。その点では、黒板を使って考えを説明した子ども達に、かたまりのかたまりの図を1つではなく、すべて書かせればよかったかもしれない。



共同解決の場で3つの考えを順序付けし、絞り込む必要はなかったか。

累加による方法と比較し、3つの方法に共通する考えは？という形で、共通性だけに目を向けた練り上げであったが、その後3つの考えに序列化させる必要はなかったであろうか。序列化を図り、一つに絞りこんでいないために、その後の授業、何十×何十、何十何×何十の学習場面まで子ども達は、それぞれ自分のやりやすい方法で計算していた。そして、何十何×何十の練り上げの段階で一つに淘汰された。この淘汰される場面では、淘汰される必然性が子ども達に感じられたにせよ、2時間もの猶予期間は長過ぎたのではないかということである。しかし、不自然なまとめ方をするよりは、算数の内容を子ども達自らの力で創り上げらせるべきだと考える。2時間後に一つに淘汰されたとき、子ども達の様子にさほどの戸惑いもなかったことから考えても、問題はなく、よかったのではないかと思われる。

参考文献

- ・「純粋理性批判」 カント 岩波文庫
- ・「算数教育指導用語辞典」 日本数学教育学会