シリーズ

応用計量経済学(1)

横浜市立大学商学部教授　松浦　克己
大阪大学国際公共政策研究科助教授　Colin McKenzie

第1章　OLSの基礎

本シリーズのねらい

所得が増加すれば消費も増加する、あるいは金利が低下すれば企業の設備投資が増加するというような会話を我々は日常的に行っている。

これは所得は消費の関数であるという経済モデルを表したり、金利は設備投資に影響するという変数間の関係を表現しているものということができよう。

実際我々は多くの経済理論を学び、現実の動きを示す数限りないデータを日々見聞している。しかしその理論はマネタリストとケィンジアンのようにしばしば対立するし、データの動きはまちまちである。そのために人々は往々にして経済がどちらに動こうとするのかの判断に迷うことになる。

その中で経済理論とデータを統合し、整合的に経済の動きを解明することが必要である。そうでなければ、実際の家計や企業が合理的な行動の選択を行うことは困難になり、思わぬ損失をこうむることになるであろう。また政策当局は政策の選択に誤りを起こすことになる。経済理論と実際のデータを突合して分析し、問題の解明に努めようというのが計量経済学である。このように計量経済学は実践的な色彩を強く持つもであるが、日本では必ずしも普及していない。それには、筆者達の大学での教育や実務家と共同して実際の分析を行う中で感じていることであるが、いくつかの壁があったと考えられる。

① 計量経済学は応用統計ともいうべき分野である。伝統的に文系・理系と分ける日本の教育システムの中で、（数学を軽視すると思われている文系の経済学部、大学院の経済学研究科の学生や卒業生には）数学に対する抵抗感があり、そのことが計量経済学に対する接近そのものを阻んだ。

② 実際に実証を目指す計量経済学は、理論と現実のデータと統計を用いる総合的な分野であり、より多くの学習（時間の投入）を必要とする。

③ 膨大な計算を必要とするが、それを容易にするパソコン（ハードとソフト）が普及していなかった。

本シリーズでは、これらの壁に配慮しながら、実証分析が行えるように計量経済学のエッセンスについて解説したい。具体的には数学分野でも特に抵抗感が強いと思われる行列式の利用は極力避ける。実際のデータを提供することで、計量経済学が何を行おうとしているのかを体験できるようにする。計量ソフトの中でプログラミングが比較的容易（メニュー形式で大半が行える）Eviewsを用い、計算方法を分かりやすく紹介する。

今日では計量ソフトの発達により、かなり高度なレベルまでコマンド一つで分析しうる。実際に計量を行おうとする者にとって（特にそれを政策

や経営に利用しようとする実務家にとって）重要なことは、a）ある推定を行おうとするときの前提条件は何か、b）得られた推定結果の解釈はどのように行えばよいか、ということである。我々は、推定の前提条件がどのようなものであるのか、その前提条件は充たされているのか、結果はどのように見たらよいのかということに焦点を当てながら解説を試みたい。

1　サンプル、平均、分散、標準偏差

我々が消費についてある情報を得たとする。例えば100世帯のアンケート調査を行いA家計は10万円、B家計は15万円、C家計は18万円等々の消費支出が報告されたとする。この様なアンケート調査は、母集団（population）から選ばれたものである。例えば日本の家計の消費支出の実状を知るためには全ての家計を調べれば正確であろうが、実際上それは不可能である。何らかの基準によって家計を選択し調査することになる。この選ばれたものがサンプル（sample）、標本である。

サンプルがn個、各々のサンプルの値がx_1、x_2、…、x_nであったとする。その平均（mean）は次により求められる[1]。

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\Sigma_{i=1}^{n}x_i}{n} \qquad 1.1)$$

またサンプルを小さい値から並べたとき、真ん中に来るサンプルの値を中央値（median）という。サンプルの中で最も数多く出てくる値を最頻値（mode）という。

しかし現実の問題を考えるとき、平均や中央値だけで推し量ることはできない。たとえば800万円の家計と千万円の家計の平均は900万円であるが、200万円の家計と1,600万円の家計の平均も900万円である。この両者を同じグループだと考えることはできないであろう。そこでデータのばらつき度合いを示す分散（variance）をみてみることが有用となる（分散は通常VAR、Vあるいはσ^2で表記される）。

$$V(x)=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{(n-1)}$$

$$=\frac{\Sigma(x_i-\overline{x})^2}{(n-1)} \qquad 1.2)$$

この分散の平方根である標準偏差（standard deviation, Std. Dev）を用いることもしばしば行われる（標準偏差はσ、あるいはsで表記されることが多い）。

$$s_x=\frac{\sqrt{\Sigma(x_i-\overline{x})^2}}{\sqrt{(n-1)}} \qquad 1.3)$$

またデータを図に表示してみると、平均の回りでなだらかに分布するケースの他、右(左)に偏っていたり上に尖っていたりすることがある。これを歪度（skewness）、尖度（kurtosis）という。後述する標本の正規性との関係で有益な情報を与える。

$$\text{skewness}=\frac{1}{n}\Sigma\left[\frac{x_i-\overline{x}}{s_x}\right]^3 \qquad 1.4)$$

歪度は、データが対称分布であれば0となり、右に偏っていれば正の値をとり、左に偏っていれば負の値をとる。

$$\text{kurtosis}=\frac{1}{n}\Sigma\left[\frac{x_i-\overline{x}}{s_x}\right]^4 \qquad 1.5)$$

尖度は、データが正規分布（normal distribution）であれば3となる。上方に偏っていれば3を上回り、下方に偏っているならば3未満となる。

これらはデータの性質を示すものであり。記述統計量（descriptive statistics）と言われる。

これを家計のデータをもとに、米国で開発された計量経済学の分析用ソフトであるEviewsで求

[1] 本シリーズでは、表記の簡潔化のため$\Sigma_{i=1}^{n}x_i$のケースについて、誤解のない限り$i=1$、nは以下省略する。

めてみよう[2)]。

郵政研究所「家計の金融資産選択（1996年）」より可処分所得、世帯人員、世帯主年齢、月間消費支出、世帯主性別、金融資産、負債、持ち家の有無の８変数を取り上げる。

データセットの読み込みと記述統計量の計算は次のようである。

AドライブにSTAT.PRGというファイルに以下のようなプログラムが書いてあるとしよう。

```
1  workfile a:ols u 123
2  smpl 1 123
3  read a:¥read1.dat disposal number age
   consump
4  read a:¥read2.dat sex money debt
   myhome
5  group group11 disposal number age
   consump
6  group11.stats
7  stats sex money debt myhome
8  save a:¥olsout.txt
```

（蛇足だが１から８の数字は説明の便宜に加えたものであり、実際は不要である。なおEviewsは大文字と小文字を区別しないので、説明は適宜の文字を使用する。）

Eviewsを立ち上げ、メインメニューの中からFileを選び、次にOpen、Programを選択する。そこでAドライブのSTAT.PRGを指定する。

１行目でAドライブのolsという作業領域を設ける。Eviewsはデータの時系列、クロスセクションの別を指定することが必要である。クロスセクションデータであるのでUを指定する（年次データであればA、四半期はQ、月次はM、週はWである）。作業領域の最大が123であることを指定する（この作業領域は任意の大きさに設定できる）。

計算に用いるサンプルが１から123であることを２行目で指定する。

３、４行目でAドライブのread1.datとread2.datの２つのデータ・ファイルを読み込んでいる。その変数名がdisposal（家計の年間可処分所得）、number（世帯人員）、age（世帯主の年齢）、consump（家計の月間消費支出）とsex（世帯主の性別、男＝１、女＝２）、money（家計の金融資産）、debt（家計の負債）、myhome（持ち家の有無、有り＝１）であることを指示している。disposal、consump、money、debtの単位は万円である。

データは家計毎（by observation）に入っているので、２つのデータセットは４つの列と123の行がある（データを変数毎（by variable）に入れることも可能である）。

５行目でdisposal、number、age、consumpをまとめてgroup11と名付けている。

６行目でgroup11に属する４個の変数の記述統計量を求めている（statsが記述統計量を求めるコマンドである）。

７行目でsex、money、debt、myhomeの４つの変数について記述統計量を求めている（６行目と７行目は同じ機能を果たす）。

８行目で結果をAドライブのolsout.txtに保存している（Eviewsは改行マークが実行文である。１つの命令が長くなるときは改行せずにそのまま命令文を書き続けると良い）。

Programが表示されている画面の中からRUNを選び、実行してほしい（プログラムエラー等を何回許容するかを指示する欄がある。これを例え

[2)] EviewsはQuantative Micro Software社により開発された（ホームページはhttp：//www.eviews.comである）。Excelと同じメニュードライブ形式で使いやすいソフトである。プログラミングを行う場合は、日本でよく使われているTSPと類似している。その意味で多くの人には馴染みやすいであろう。メニュー形式であるが，計量経済学の論理を追うため、本シリーズではEviewsのプログラミングもできるだけ紹介する。

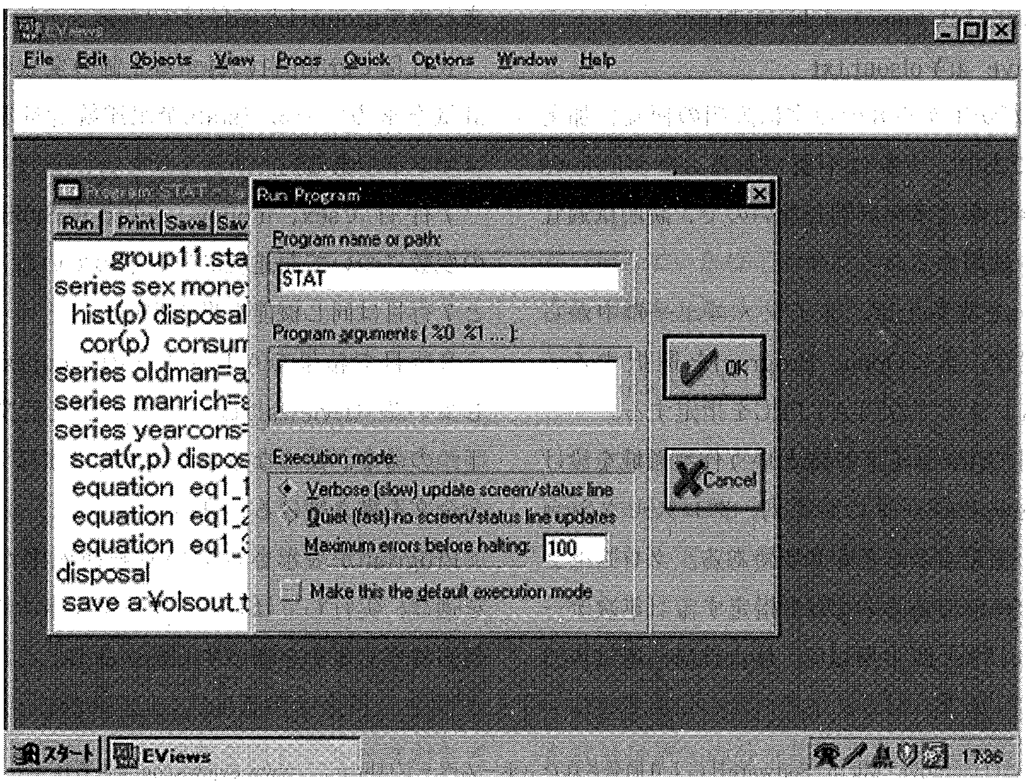
ば100にしておくと、途中間違いがあっても、正しい部分はミスの回数が100回までは計算する。図1. 1参照)

結果（print out）は表1. 1に示す通りである（group11の例)。Eviewsは平均（Mean)、中央値（Median)、最大（Maximum)、最小（Minimum)、標準偏差（Std. Dev)、歪度（Skewness)、尖度（Kurtosis）および正規性に関するJarque－Beraの統計量（Jarque－Bera, Probability）と標本数（Observations）を表示する[3]。

disposal（可処分所得）の例を取ると単位は万円であるから、サンプルの平均値は673万円であり、中央値は540万円であることが分かる。所得や資産については平均と中央値、あるいは最頻値でかなりの開きがあることが知られている（分布は右に偏り、尖っている)。このケースも同様である。最も所得の高い家計は3,450万円であるが低い家計は40万円である。散らばりの尺度である標準偏差（504万円）はかなり大きいようである。歪度は2.4と正であり右に偏っていることがうかがわれる。尖度は11.7と３を上回るので分布は上方に尖っているようである。

Eviewsの特徴の一つはグラフィック機能が優れていることである。歪度と尖度の値からdisposalは分布が歪んでいることがうかがわれる。それをグラフで確かめてみよう。読者は先のプログラムの結果を表示してほしい。メインツールバーQuickを選択し、そこからSeries Statisticを次に選び、ウィンドウの中にSERIESとしてdisposalを指示し、その後Histogram and Statsを選択し実行してもらいたい。以下のような頻度（Histgram）のグラフと記述統計量が表示されるであろう（１変数のみの記述統計量を求める場合はこの方法で求めることができる)。

図1. 1　Eviewsの実行画面



[3] Jarque-Beraの統計量は正規性の検定に関するものである。これについては後の章で後述する。なお本シリーズでは紙幅の制約から、特に断ることなくoutputを編集することがある。

図1. 2にみられるように明らかに右に裾が重く上に突出した分布であることが確認できる（以下選択の順序をQuick/Series Statistic/Histogram and Statsのように表記する）。

また以下のコマンドで行うこともできる。

hist (p) disposal

なお（p）は結果を印刷せよというオプションの指示である。

2　2変数の関係

yはxの関数であるというとき両者が何らかの関連を持つことを想定している。2変数間の関係については共分散（Covariance。Covと書くことがある）と相関係数（Correlation。r,Rと書くことがある。）の概念が重要である。共分散は各々の変数についてその平均との差を求め、それを乗じて足したものである。

$$Cov(x_i, y_i) = \Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/(n-1) \quad 1.6)$$

ここで$\bar{x}$と$\bar{y}$はそれぞれxとyの平均である。また相関係数は次式で求められ、$-1 \leqq r \leqq 1$である。

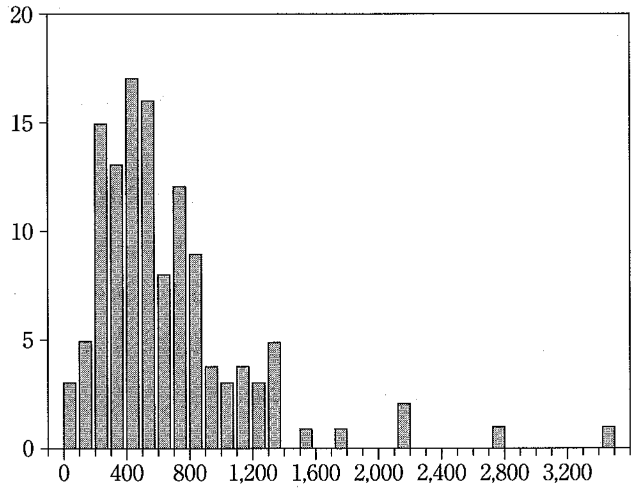
$$r_{xy} = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 \Sigma (y_i - \bar{y})^2}} \quad 1.7)$$

順相関であれば正、逆相関であれば負となり、両者に全く関係がなければ0となる（無相関)。

表1. 1　記述統計量

	DISPOSAL	NUMBER	AGE	CONSUMP
Mean	673.2276	3.065041	50.01626	30.31707
Median	540.0000	3.000000	49.00000	30.00000
Maximum	3450.000	7.000000	79.00000	65.00000
Minimum	40.00000	1.000000	20.00000	4.000000
Std. Dev.	503.7358	1.469581	14.87874	12.45011
Skewness	2.438671	0.385230	0.076727	0.564426
Kurtosis	11.72452	2.598608	2.091886	3.051652
Jarque–Bera	512.0171	3.867967	4.347118	6.544503
Probability	0.000000	0.144571	0.113772	0.037921
Observations	123	123	123	123

図1.2　ヒストグラムの図



Series : DISPOSAL	
Sample 1 123	
Observations 123	
Mean	673.2276
Median	540.0000
Maximum	3450.000
Minimum	40.00000
Std.Dev.	503.7358
Skewness	2.438671
Kurtosis	11.72452
Jarque—Bera	512.0171
Probability	0.000000

ところで1.7）式の分子は共分散の定義であるから共分散が０であれば、両変数は無相関ということになる[4)]。

Eviewsでconsumpとdisposalの相関係数を求めてみよう。

Quick/Group Statistic/Correlationsを選択しダイアログに**consump disposal**と書き実行する。

また以下のようにコマンドで行うこともできる。

cor（p）consump disposal

ここでも（p）は結果を印刷せよという指示である。

結果は表1．2に相関係数行列（Correlation Matrix）として示されている。相関係数が0.55であるから両者は正の関係に立つことがわかる。

表1．2　相関係数行列

	CONSUMP	DISPOSAL
CONSUMP	1.000000	0.553724
DISPOSAL	0.553724	1.000000

3　単純回帰

3．1　パラメータの求め方と誤差項

（正規方程式）

ここまでの準備を踏まえて最小二乗法（Ordinary Least Squares, OLS）を試みてみよう。y（たとえば消費）はx（所得）の関数であるというとき、経済学では

$y=f(x)$のように表記する。しかしそれを、

$y_i=a+b_1x_i$のようにa（定数項、intercept）とxの係数（parameter）であるb_1で説明できるのは、y_iとx_iが完全に一直線の関係に立つ場合のみである。しかし通常はそのようなことはあり得ないであろう。標本から得られる現実のデータを当てはめたとき、$y_i=a+b_1x_i$で描かれる直線からは乖離が生じる。その乖離を誤差項（error term, disturbance）という。これをe_iで表記することにすると、計量経済学でいうyとxの関係は1.8）式で示される。

なお計量経済学では、yはxの関数である（xはyに影響する）というとき、yを被説明変数あるいは従属変数（dependent variable）、xを説明変数（explanatory variable）または独立変数（independent variable）という。説明変数が１個の場合を単純回帰（Simple Regression）という。また被説明変数と説明変数の関係が１次関数で表されるとき、線形関数（Linear Regression）という。それは次のように表される。

$$y_i=a+b_1x_i+e_i \qquad i=1、\cdots\cdots、n \qquad 1.8)$$

$$e_i=y_i-a-b_1x_i \qquad 1.8')$$

OLSはこの誤差項の二乗和（残差平方和、Residual Sum of Squares, Error Sum of Squares, RSS）を最小にしようとするものである。

1.8'）式を二乗した目的関数（objective function）を考える。

$$S(a, b_1)=e_1^2+e_2^2+\cdots+e_n^2=\Sigma e_i^2$$
$$=\Sigma(y_i-a-b_1x_i)^2 \qquad 1.9)$$

1.9）式を最小にする定数項と係数を求めてやればよい。

それを$\hat{a}$、$\hat{b}_1$と書くことにする。1.9）式を最小にする（minimise）にはaとb_1に関して偏微分し０とすることが一階の必要条件（first order necessary conditions）である。

$$\partial S/\partial\hat{a}=n\hat{a}-\Sigma y_i+\Sigma\hat{b}_1x_i=\Sigma(\hat{a}-y_i+\hat{b}_1x_i)=0 \qquad 1.10)$$

$$\partial S/\partial\hat{b}_1=\Sigma\hat{a}x_i-\Sigma x_iy_i+\Sigma\hat{b}_1x_i^2$$
$$=\Sigma x_i(\hat{a}-y_i+\hat{b}_1x_i)=0 \qquad 1.11)$$

上記２式を書き換えると、次の正規方程式（normal equations）を得ることができる。

$$n\hat{a}+\Sigma\hat{b}_1x_i=\Sigma y_i \qquad 1.10')$$

4）　２つの確率変数xとyについて統計的に独立であれば共分散は０となる。逆は必ずしも成立しない。

$\Sigma \hat{a} x_i + \Sigma \hat{b}_1 x_i^2 = \Sigma x_i y_i$ 1.11')

これから次の推定量（estimator）を得ることができる（このように計算プロセスから得られるものを推定量といい、計算プロセスに具体的なデータを当てはめて得られた結果を推計値、推定値（estimates）という。以下の文脈において混同することはないであろう。特に被説明変数については予測値（fitted value）ということがある）。$\overline{y}$と$\overline{x}$はそれぞれyとxの平均である。

$$\hat{b}_1 = \frac{\Sigma (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\Sigma (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\Sigma (x_i - \overline{x}) y_i}{\Sigma (x_i - \overline{x})^2} \quad 1.12)$$

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}_1 \overline{x} \quad 1.13)$$

$\hat{b}_1$は共分散と分散の定義からCov（x, y）/V（x）であり、また相関係数と標準誤差の定義から$r_{xy}\frac{S_y}{S_x}$であることがわかる。1.12）式のようにb_1がy_iの１次式で表さるとき、線形推定量（linear estimator）という。

得られた推定量から求められる被説明変数の予測値は次のように定義される。

$$\hat{y}_i = \hat{a} + b_1 \hat{x}_i \quad 1.14)$$

被説明変数の実現値と予測値の差を残差（residual）といい、

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{a} - \hat{b}_1 x_i \quad 1.15)$$

と定義される。

また、1.10）式を$-\Sigma(y_i - \hat{a} - \hat{b}_1 x_i) = 0$に、1.11）式を$-\Sigma x_i(y_i - \hat{a} - \hat{b}_1 x_i) = 0$と変形すると

$$\Sigma \hat{e}_i = 0 \quad 1.16)$$

$$\Sigma x_i \hat{e}_i = 0 \quad 1.17)$$

であることが示される。これから残差の和は０であり、また説明変数と残差は直交している（orthogonality conditionを充たす）ことが示される。

さらに

$$\Sigma \hat{y}_i \hat{e}_i = \Sigma(\hat{a} + \hat{b}_1 x_i)\hat{e}_i = \hat{a}\Sigma \hat{e}_i + \hat{b}_1 \Sigma x_i \hat{e}_i = 0 \quad 1.18)$$

となるので予測値と残差も直交することが分かる。

OLSの推計を図で示してみよう。推計により$\hat{y}_i = 0.8 + 0.7x_i$という結果が得られたとする。$\hat{y}_i$を示したものが図1.3の回帰直線である。実際に観察される（y_i, x_i）の組み合わせは、この回帰直線に必ずしも当てはまらない。（y_1, x_1）、（y_2, x_2）、（y_3, x_3）のように少しずれているであろう。

このずれである$\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$、$\hat{e}_3$の二乗和を最小にするのがOLSである。

またこの線形回帰の経済学的な意味を考えてみよう。1.8）式の$y_i = a + b_1 x_i + e_i$をx_iについて微分すると（簡便化のためにaを無視する）

$\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = b_1$であるから、$x_i$が１単位増加すると$y_i$は$b_1$単位増加する。それは$y_i$や$x_i$の具体的な値に関わらず一定である（限界効果、限界性向は一定である）。

$\frac{\partial y_i / y_i}{\partial x_i / x_i} = b_1 \left(\frac{x_i}{y_i}\right)$にであるから、弾性値は$x_i$と$y_i$の値よって異なることになる。すなわち弾性値（$x_i$が１％伸びたとき$y_i$は何％伸びるか）は得られた推定値の他に$y_i$や$x_i$の具体的な値に依存することが分かる。

（誤差項の意味）

1.8）式に表れる確率変数である誤差項は、経済学的モデルと計量経済学を分けるものである。経済理論は、ある分析目的のために現実の動きを抽象化している。そもそも企業や家計、政府などの経済主体の行動を完全に描写することはできない。モデルは、直接関心のない事項は捨象して作られるものである。この捨象された部分の影響が誤差項として捉えられることになる。

第２に理論と現実のデータとは必ずしも一致しないことが上げられる。たとえば恒常所得仮説は、消費に影響するのは恒常所得であるとする。しかし我々が観測しうるのは恒常所得と変動所得を併せた所得であり、両者を完全に分離することは困難である。この様に経済学の概念と我々が実際に用いることができるデータの意味とは異なること

がある。この差も誤差項に反映される。

第3に測定誤差の問題がある。様々な統計集を見ると誤差脱漏という項目があることに気づかれるだろう。我々が手にすることができるデータには、この様に真の値と食い違いのあることがある。例えば経済データの代表であるSNAは諸々の情報を加工して得られるので、そこにはバイアスが生じうる（従って速報値と確定値があり、場合によっては遡及して修正が行われることになる）。このギャップも誤差項には反映される。

言い換えれば誤差項は経済モデルと現実の動きの差を一括して扱うものと言えよう。また誤差項は確率変数であるから、そこから得られる被説明変数の推計値もまた確率変数ということになる。

3. 2　OLSの標準的仮定

（標準的仮定）

1.8）式をもとにOLSについての標準的な仮定（standard assumptions, classical assumptions）についてみることにしたい。

A.1　誤差項の期待値は0である。

$$E(e_i)=0 \quad \text{for all } i \qquad 1.19)$$

$y_i=a+b_1x_i+e_i$である。仮に$E(e_i)\neq 0$で、ある値kを取るとすると、定数項はkだけずれることになる。これを排除するための条件である。

A.2　誤差項の分散は一定である（homoscedasticity）。

$$Var(e_i)=E(e_i^2)=\sigma^2 \quad \text{for all } i \qquad 1.20)$$

y_iとx_iを所与とすると、その差は一定であることを意味している。

A.3　誤差項間に系列相関はない（no serialcorrelation, serially uncorrelated）

$$Cov(e_i, e_j)=E(e_ie_j)=0 \quad \text{for all } i\neq j \qquad 1.21)$$

誤差項が統計的に独立であり、一定のトレンドや周期を持たないということを仮定している。

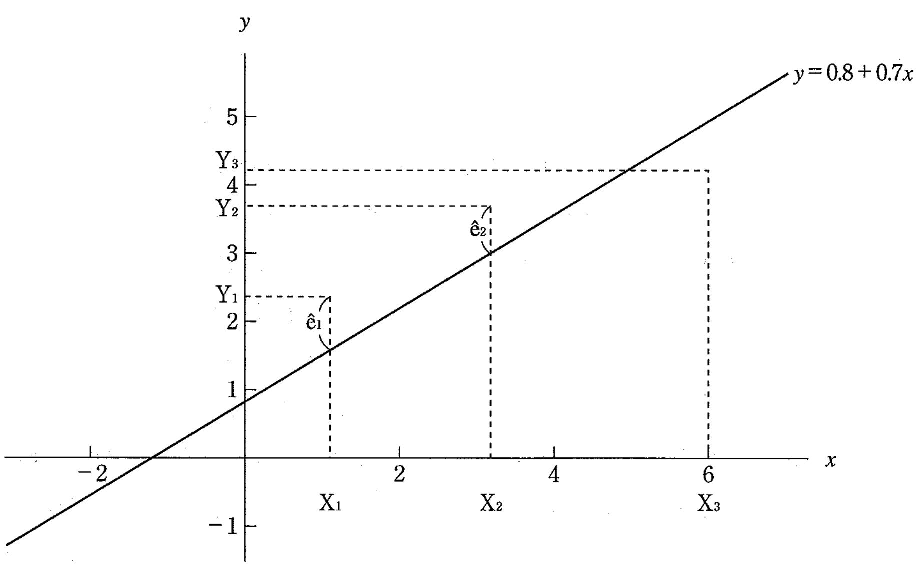
A.4　誤差項は正規分布（normal distibution）に従う。

正規分布は、期待値をμ、分散をσ^2とするとき密度関数（pdf、ϕ（x））が

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp-[0.5(x-\mu)^2/\sigma^2] \qquad 1.22)$$

で与えられるものである。1.22）式から$\mu=x$のとき最大の値をとり、左右対称の分布となることが分かる。その中で特に期待値（平均）0、分散

図1.3　OLSの回帰直線



1のものを標準正規分布といい、N（0，1）で表す。

この仮定は統計的推論を行うための仮定である。

A.5　説明変数はある特定の値をとるものであり、非確率変数（non－stochastic variable）である[5]。この仮定も統計的推論を容易に行うための仮定である。

（OLSの推定量の性質）

標準的仮定A.1～A.5を全て満足するとき、OLSの推定量は以下の性質を充たすことが知られている。

1　$\hat{a}$，$\hat{b}_1$は不偏推定量（unbiased estimator, Unbiasedness）である（A.1、A.5より）。

$$E(\hat{b}_1)=b_1 \quad E(\hat{a})=a \qquad 1.23)$$

推定量は平均すれば過大推計でも過小推計でもないことを意味している。

2　$\hat{a}$，$\hat{b}_1$は一致推定量（consistent estimator, Consistency）である（A.1，A.5より）。

サンプル数nが十分大きくなる（$n\to\infty$）確率極限（probability limits）の意味で、

$$\mathrm{plim}(\hat{b}_1)=b_1 \quad \mathrm{plim}(\hat{a})=a \qquad 1.24)$$

となる。サンプル数が増加し母集団に近くなれば、その平均や分散は母集団のものと限りなく近いものになるであろう。それは許容される極小の誤差をεとすると、サンプルが無限になるにつれ$P(|\hat{b}_1-b_1|<\varepsilon)\to 1$ということを意味している。

3　誤差項の母分散の推定量s^2は分散σ^2の不偏推定量である（A.1～A.3、A5より）。

$$E(s^2)=\sigma^2 \qquad 1.25)$$

である。なおsを方程式の標準誤差（standard error of regression，SER）という。

4　a，b_1は正規分布に従う（A.4、A.5より）。

A4以外の仮定が充たされる時、線形不偏推定量の中でOLSの推定量の分散は最も小さく、OLSの推定量は最良線形不偏推定量（Best Linear Unbiased Estimator, BLUE）であるという。全ての仮定が充たされている時、不偏推定量の中でOLSの推定量の分散は最も小さく、推定量は最良不偏推定量（Best Unbiased Estimator, BUE）であるという。

3.3　係数の有意性とモデルの当てはまり

（t分布、t検定）

OLSの推定量の性質4から、我々は実際に得られた推定値（パラメータ）の統計的な有意水準を求めるための方法を導出することができる。それは差の検定の考え方を利用するものである。

具体的にはある推定値$\hat{b}_1$がb_1と異なるかどうかをみるものである（例えば記述統計量で得られたdisposalの平均値673万円が600万円と異なるかどうかというケースである）。

この差の検定は（disposalの平均を$\overline{\mathrm{disposal}}$と表すと）

$$t=\frac{673-600}{s_d/\sqrt{n}} \quad s_d^2=\frac{\Sigma(\mathrm{disposal}_i-\overline{\mathrm{disposal}})^2}{n-1} \qquad 1.26)$$

s_d^2は母分散の推定量。表1.1より$s_d=503.8$、$n=123$を代入すると$t=1.61$を得る。このtはt分布に従うことが知られている。これを用いる検定をt検定という[6]。

OLSの標準的仮定の下で

$$V(\hat{b}_1)=\frac{\sigma^2}{\Sigma(x_i-\overline{x})^2} \quad V(\hat{a})=\frac{\sigma^2\Sigma x_i^2}{n\Sigma(x_i-\overline{x})^2} \qquad 1.27)$$

で分散の推定値が得られる。1.27）式のσ^2を直接観測することはできないが、σ^2の推定量s^2を用い

5) 説明変数は少なくとも異なる2個以上の値をとる。そうでなければ1.12）式を求めることはできない。

6) この例はある記述統計量が報告されているとき、それには平均値、分散（標準偏差）とサンプル数の3種類の情報が含まれていない限り有益な判断を下せないことを意味している。

$$\hat{V}(\hat{b}_1)=\frac{s^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\quad \hat{V}(\hat{a})=\frac{s^2\Sigma x_i^2}{n\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\qquad 1.28)$$

を得ることができる。

この平方根が標準誤差（standard error）である。$\hat{b}_1$の標準誤差をse$(\hat{b}_1)$と表すと

se$(\hat{b}_1)^2=\hat{V}(\hat{b}_1)$となり、$t=\frac{\hat{b}_1-\hat{b}_1}{se(\hat{b}_1)}$が自由度（n－2）のt分布に従う（2はパラメータの数である。$b_1=0$であれば$t=\hat{b}_1/se(\hat{b}_1)$となる。）。得られた推計値が0と異なるかどうか（説明変数が被説明変数に影響しているかどうか）に、我々は関心を持つのでそれを検定することが必要である（仮説の検定については後の章で詳細に説明する）。t分布は自由度と有意水準（何％の確率で誤るか）が知られているので、それを見て検定を行えばよい（例えば自由度120、有意水準5％のt値は1.980である）。

（モデル全体の適合度）

モデルが全体として、どの程度被説明変数の動きを捉えているのか、というモデルの適合度（goodness of fit）を次に見てみる。実際の被説明変数の値と推計値、残差の関係は次式で示された。

$$y_i=\hat{y}_i+\hat{e}_i \qquad 1.29)$$

両辺から$\bar{y}$を引き、二乗し和をとると

$$\Sigma(y_i-\bar{y})^2=\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y}+\hat{e})^2$$
$$=\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})^2+2\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})\hat{e}_i+\Sigma\hat{e}_i^2 \qquad 1.30)$$

ここで$\Sigma\hat{e}_i=0$（残差の和は0）、$\Sigma x_i\hat{e}_i=0$と1.18）式より$\Sigma\hat{y}_i\hat{e}_i=0$（つまり被説明変数の予測値と残差は直交する）ので

$$\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})\hat{e}_i=\Sigma\hat{y}_i\hat{e}_i+\bar{y}\Sigma\hat{e}_i=0$$

を得ることができる。ここから1.30）式の右辺第2項は0となり、

$$\Sigma(y_i-\bar{y})^2=\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\Sigma\hat{e}_i^2 \qquad 1.31)$$

となる。すなわちモデル全体の変動（$\Sigma(y_i-\bar{y})^2$, Total Sum of Squares, TSS）はモデルで説明できた部分（$\Sigma(y_i-y)^2$, Explained Sum of Squares, ESSあるいはSSE）とモデルで説明できない部分（$\Sigma\hat{e}_i^2$, Residual Sum of Squares, RSSあるいはSSR）に分解される。TSS＝ESS＋RSSが成り立つ。ここからモデルの適合度の尺度してモデルによって説明できた割合である決定係数（Coefficient of Determination, R^2と書くことがある）

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=1-\frac{RSS}{TSS} \qquad 1.32)$$

を算出することができる。定義により、ESS≧0、TSS≧0、RSS≧0なので,

$1\geq R^2\geq 0$

である。

3.4 Eviewsによる推定例

Eviewsによる新しい変数の作り方や計算方法をみながら、consump＝f（disposal）の短期のケインズ型の消費関数を考え、具体的に消費を所得と定数項に回帰する例をみてみよう。

データから得られるdisposalは年間の可処分所得であった。他方でconsumpは月間の消費支出であるので、それを12倍にして年間の消費支出を代理させよう。そこで年間消費を示す新しい変数を作る。そのためにseriesで新しい変数を作ることを指示する必要があるので、新しい変数名を指定する（ここではyearconsと名付ける）。

series yearcons＝12*consump

すなわち、

series　新しい変数名＝演算

とすることで変数が作られる。またEviewsは次のような算術演算子を用いて計算を行う。

＋加算、－減算、*乗算、/除算、^べき乗、log（consump）はconsumpの自然対数値、exp（consump）指数値、abs（consump）絶対値を計算する。

計算の順序は通常の数学の場合と同じである（カッコが有ればカッコ内の計算を優先する)。

論理演算子として大小関係は>、<、>=、<=、=、<>（等しくない）で表す。

またand（かつ)、or（または）も用いる。

例えば世帯主年齢が60歳以上かつ男性を、oldmanという変数にする場合は

series oldman = age > = 60 and sex = 1

とする。この条件を充たすものがoldman = 1として保存される（条件を充たさないものはoldman = 0として保存される)。

男性または1千万円超の家計をmanrichとすると

series manrich = sex = 1 or disposal > 1000

とする。同様に条件を充たすものがmanrich = 1（充たさないものはmanrich = 0）として保存される。

最初にyearconsとdisposalのデータの散布図（scatter diagram）と推計された回帰直線（fitted regression line）を図示してみよう。これはデータの性質や変数間の関係の直感的な把握には便利である。これは以下のコマンドで行うことができる。

scat（r, p）disposal yearcons

scatは2個以上の変数の散布図を書くことを指示する。rで回帰直線を併せて表示すること、pで結果を印刷することを指示している。散布図を書く変数がdisposalとyearconsであることを指示している。

なお**Quick/Group Statistics/Descritive Statistics/Common Sample**でdisposalとyearconsを指定し、それを実行した後さらに**View/Graph／Scatter/Scatter with Regression**とすることでも可能である。

結果は図1.4に示す通りである。かなりばらつきが大きく、また回帰直線から相当離れた組み合わせが多く、またyearconsとdisposalとの間に正の関係があるようなことがうかがわれる[7)]。

次にOLSのプログラムをみてみよう。

$yearcons_i = a + b_1 disposal_i + e_i$

を推計するためのコマンドは次の通りである。

equation eq 1 _1. ls yearcons c disposal

equationで回帰分析を行うことを指示する。その方程式をeq 1 _1と名付けて保存する。.lsで推計方法をOLSによることを指示する。被説明変数がyearcons、説明変数が定数項（c、cはEviewsでは定数項を指す決まり文句である）とdisposalであることを指示する。

（**Quick/Estimate Equation**を選び、**Equation Specification**のダイアログに**yearcons c disposal**と回帰式を書き、同じダイアログの**Estimation Settings**から**Method. LS**を選ぶことで実行できる）

結果は表1.3に掲げるとおりである。

被説明変数がYEARCONSであることやサンプル数が123であることが表示されている。

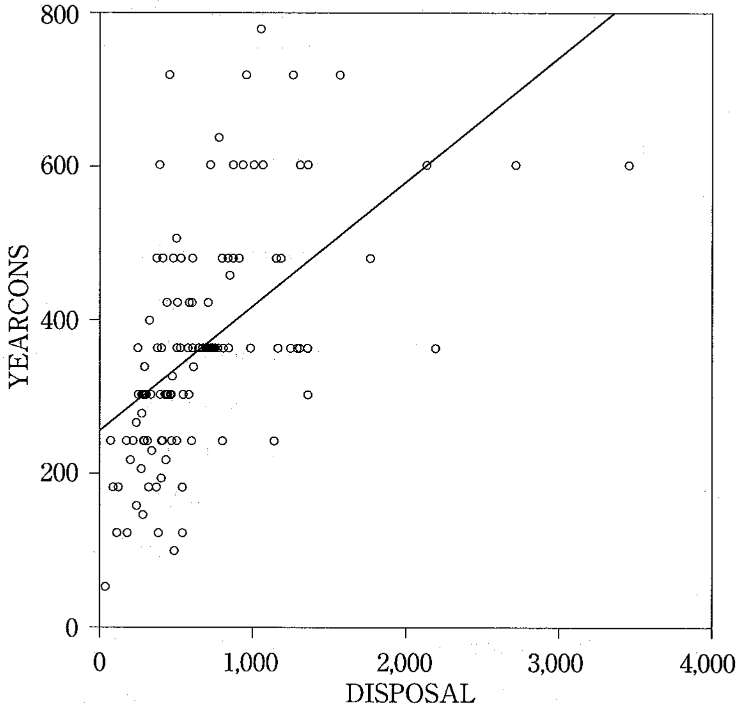
その次に変数（Variable）、パラメータ（Coefficient）、標準誤差（Std Error）、t値（t–Statistic）とp値（Prob）が表示される。

aの推計値$\hat{a}$は253.24である。b_1の推計値$\hat{b}_1$は0.16である。したがってdisposalが1単位（この例で単位は万円であったから1万円）増えると消費は0.16（1,600円）増えることが分かる（つまり限界消費性向は0.16である。かなり低いように見えるが、その問題については注7を参照されたい)。

---

7) 年間消費を単純に12倍している。データの月間消費支出はボーナス期の12月を含んでいない。しかし、このボーナス期の支出は他の月に比例するというよりは、低所得層ほどより多く支出する傾向がある。一種の非線形となっている。この影響を考慮していないことの影響で限界性向や弾性値の値が低くなっていると考えられる。

図1. 4　散分布と回帰直線



また表1. 1にあるyearconsとdisposalの平均で評価した弾性値は、

0.16*(637.2/363.8)＝0.296

と計算することができる。すなわちこの例では、disposalが1％増えると消費は0.296％増える。

p値はt値によって判断した場合にその判断が誤る確率である（たとえばdisposalの係数は0.16となっており、0ではない。そのt値を7.31としたとき、本当はdisposalの係数＝0であるという確率が0.0000であるということを指している。t分布表の役割を果たすものである。詳しくは後の章で触れることにする)。

この短期の消費関数を求める例では、定数項に理論的に期待される符号条件は、a＞0である（人は所得が0でも、なにがしかの消費をしなければ生きていけない)。aは253であるから、結果はこの符号条件を充たしている。yearconsの単位は万円であったから、このケースでは1世帯の最低消費額は定数項の推計値である253万円と解釈される。またt値は13.4でありp値も0.0000であるから統計的には1％水準でも有意である（定数項が0となる確率は1％以下である)。

決定係数（R-squared)、方程式の標準誤差（S.E. of regression)、残差平方和（Sumsquared resid)、被説明変数の平均値（Mean dependent var）とその標準偏差（S.D. dependent var）が下欄に示されている。R-squaredは0.3であるからこのモデルは消費の変動の約30％捉えていることが分かる。その他の変数の意味については関係の箇所で後述する。

4　多重回帰への拡張

モデルは定数項と1の説明変数で記述されるよりも、2個以上の説明変数で記述される場合の方が一般的であろう。

$$y_i = a + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + \cdots + b_kx_{ki} + e_i \qquad 1.33)$$

モデルが2個以上の説明変数を含むケースを多重回帰（multiple regression）という。

4.1 多重回帰の係数の求め方

多重回帰も単純回帰モデルの延長で考えることができる。簡単化のために

$y_i = a + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + e_i$ というケースを考える。残差の二乗和を最小にするために

$$\partial S/\partial \hat{a} = n\hat{a} - \Sigma y_i + \Sigma \hat{b}_1x_{1i} + \Sigma \hat{b}_2x_{2i}$$
$$= \Sigma(\hat{a} - y_i + \hat{b}_1x_{1i} + \hat{b}_2x_{2i}) = 0$$
$$\partial S/\partial \hat{b}_1 = \Sigma ax_{1i} - \Sigma x_{1i}y_i + \Sigma \hat{b}_2x_{1i}x_{2i} + \Sigma \hat{b}_1x_{1i}^2$$
$$= \Sigma x_{1i}(\hat{a} - y_i + \hat{b}_1x_i + \hat{b}_2x_{2i}) = 0 \quad 1.34)$$
$$\partial S/\partial \hat{b}_2 = \Sigma \hat{a}x_{2i} - \Sigma x_{2i}y_i + \Sigma \hat{b}_2x_{1i}x_{2i} + \Sigma \hat{b}_2x_{2i}^2$$
$$= \Sigma x_{2i}(\hat{a} - y_i + \hat{b}_1x_i + \hat{b}_2x_{2i}) = 0$$

この連立方程式を正規方程式に書き直すと次のようである。

$$n\hat{a} + \hat{b}_1\Sigma x_{1i} + \Sigma \hat{b}_2\Sigma x_{2i} = \Sigma y_i$$
$$\hat{b}_1\Sigma(x_{1i} - \overline{x}_1)^2 + \hat{b}_2\Sigma(x_{1i} - \overline{x}_1)(x_{2i} - \overline{x}_2)$$
$$= \Sigma(x_{1i} - \overline{x}_1)(y_i - \overline{y}) \quad 1.35)$$
$$\hat{b}_1\Sigma(x_{1i} - \overline{x}_1)(x_{2i} - \overline{x}_2) + \hat{b}_2\Sigma(x_{2i} - \overline{x}_2)^2$$
$$= \Sigma(x_{2i} - \overline{x}_1)(y_i - \overline{y})$$

ここで

$$S_{11} = \Sigma(x_{1i} - \overline{x}_1)(x_{1i} - \overline{x}_1)$$
$$S_{22} = \Sigma(x_{2i} - \overline{x}_2)(x_{2i} - \overline{x}_2)$$
$$S_{12} = \Sigma(x_{1i} - \overline{x}_1)(x_{2i} - \overline{x}_2)$$
$$S_{1y} = \Sigma(x_{1i} - \overline{x}_1)(y_i - \overline{y})$$
$$S_{2y} = \Sigma(x_{2i} - \overline{x}_2)(y_i - \overline{y})$$
$$S_{yy} = \Sigma(y_i - \overline{y})(y_i - \overline{y})$$

と置くことにする。パラメータは以下のようになる。

$$\hat{a} = \hat{y} - \hat{b}_1\overline{x}_1 - \hat{b}_2\overline{x}_2$$
$$\hat{b}_1 = \frac{S_{22}S_{1y} - S_{12}S_{2y}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad 1.36)$$
$$\hat{b}_2 = \frac{S_{11}S_{2y} - S_{12}S_{1y}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

また仮定のA.1～A 3、A.5が充たされていれば、得られた推定量は最良線形不偏推定量(BLUE)、すなわち線形不偏推定量の中で分散の最も小さい推定量であることが知られている。

4.2 t値、自由度修正済み決定係数

多重回帰の場合でも残差 ($\hat{e}_i = y_i - \hat{a} - \hat{b}_1x_{1i} - \hat{b}_2x_{2i}$) の期待値はゼロ、説明変数と直交する

$$\Sigma\hat{e}_i = 0、\Sigma x_{1i}\hat{e}_i = 0、\Sigma x_{2i}\hat{e}_i = 0$$

の制約が成立している。

誤差項の分散(σ^2)不偏推定量は$s^2 = \frac{\Sigma e_i^2}{n-3}$である。このとき$\hat{b}_1$、$\hat{b}_2$の分散は次式で与えられる。

表1.3 単純回帰のOLSの推計例

Dependent Variable: YEARCONS
Method: Least Squares
Sample: 1 123
Included observations: 123

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	253.2427	18.85030	13.43441	0.0000
DISPOSAL	0.164227	0.022452	7.314707	0.0000

R-squared	0.306610	Mean dependent var	363.8049
Adjusted R-squared	0.300879	S.D. dependent var	149.4013
S.E. of regression	124.9196	Akaike info criterion	12.50934
Sum squared resid	1888192.	Schwarz criterion	12.55507
Log likelihood	−767.3246	F-statistic	53.50494
Durbin-Watson stat	1.917378	Prob (F-statistic)	0.000000

$$V(\hat{b}_1)=\frac{\sigma^2 S_{22}}{S_{11}S_{22}-S_{12}^2}=\frac{\sigma^2}{S_{11}(1-r_{x1x2}{}^2)}$$

$$V(\hat{b}_2)=\sigma^2\frac{S_{11}}{S_{11}S_{22}-S_{12}^2}=\frac{\sigma^2}{S_{22}(1-r_{x1x2}{}^2)}$$

ここでr_{x1x2}はx_1とx_2の相関係数。この分散の推定量は次で得られる。

$$V(\hat{b}_1)=s^2\frac{S_{22}}{S_{11}S_{22}-S_{12}{}^2}=\frac{s^2}{S_{11}(1-r_{x1x2}{}^2)}$$

$$\hat{V}(\hat{b}_2)=s^2\frac{S_{11}}{S_{11}S_{22}-S_{12}{}^2}=\frac{s^2}{S_{22}(1-r_{x1x2}{}^2)} \qquad 1.37)$$

それらの平方根（se（$\hat{b}_1$）、se（$\hat{b}_2$））が標準誤差である。

共分散は次式による。

$$\mathrm{Cov}(\hat{b}_1,\ \hat{b}_2)=-\sigma^2\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22}-S_{12}{}^2}=\frac{-\sigma^2 r_{x1x2}}{(1-r_{x1x2}{}^2)\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}}}$$

1.38)

各係数のt値は単純回帰の場合と同様に

$$t=\frac{\hat{b}_i-b_i}{se(\hat{b}_i)} \quad i=1、2 \qquad 1.39)$$

で与えられる。ただし係数が３個なので自由度はn－３である（自由度＝サンプル数－パラメターの数である。定数項を含むモデルの係数がk個であるとき、自由度はn－kで与えられる。またこのt値は通常$b_i=0$という前提で計量ソフトで自動的に計算される。)。

モデル全体の適合度を次に見てみよう。決定係数は単純回帰の場合と同じく$R^2=\frac{ESS}{TSS}=1-\frac{ESS}{TSS}$で与えられる。しかし追加された説明変数が被説明変数と無相関でない限り、R^2は必ず大きくなる。標本数＝係数の数、のときR^2は１となる。理論的に何の関係もない変数、例えば消費関数に江戸時代に死んだ祖先の数を入れてもR^2は大きくなる。しかし、それでは意味がないであろう。またモデルの自由度はサンプル数－パラメターの数であるから、説明変数が増えるほど、モデルの自由度は低くなる。そうするとパラメータのt値も低くなり、有意な推定結果が得られなくなる。そこで多重回帰の場合モデルの適合度としては、説明変数の数を明示的に考慮した次のような自由度修正済み決定係数（Adj R^2、あるいは$\bar{R}^2$で表す）を考える。

パラメータの数をk個とする。

$$\mathrm{Adj}\ R^2=1-\frac{\Sigma\hat{e}_i^2/(n-k)}{S_{yy}/(n-1)}=1-\frac{\Sigma\hat{e}_i^2}{S_{yy}}\frac{(n-1)}{(n-k)}$$

1.40)

1.34）式からkが増えるとAdj　R^2は小さくなることが有り得ることが分かる。決定係数は$\Sigma(y_i-\bar{y})^2=\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\Sigma\hat{e}_i^2$から求められた。$R^2=1-\frac{\Sigma e_i^2}{S_{yy}}$と変形し、1.34）式に代入すると

$\mathrm{Adj}\ R^2=1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-k}$となる。これから$R^2<\frac{k-1}{n-1}$のときAdj$R^2$は負となることが分かる。

これも説明変数をいたずらに増やすことが好ましくないことを示す一つの例である。AdjR^2がとりうる範囲は$1\geqq$AdjR^2となる。

4.3　変数をコントロールすることの意味

家計の消費を考えるとき、それは所得の影響を受けるのみならず世帯人員の影響も受けるであろう。世帯人員の影響を明示的に考慮すると、消費は所得と世帯人員の関数となる（我々の例ではconsump＝f（disposal、number）である)。言い換えればある変数（世帯人員）を説明変数として加えることは、世帯人員の被説明変数である消費に対する影響を所与として、所得の消費に対する影響を取り出してみることである。

このことは説明変数を追加すれば（例えば金融資産）その変数（及び世帯人員）の消費に対する影響もコントロールした後での、所得の効果をみることになるので、所得のパラメータが変化する

ことを意味している。このことはモデルの定式化に当たり必要な変数を含み、他方では不必要な変数を加えないようにすることが重要であることを示唆している(必要な変数を落とすことをomitted variable、不必要な変数を含むことをredundant variableの問題という。これについては後の章で詳細に検討する)。

実際にEviewsで推計し、パラメータがどのように変化するかをみてみよう。まず世帯人員を説明変数に加え、次に消費に対する資産効果をみるために金融資産を加えてみる。すなわち次の2つのモデルを考えてみる。

$$yearcons_i = a + b_1 disposal_i + b_2 number_i + e_i$$

$$yearcons_i = a + b_1 disposal_i + b_2 number_i + b_3 money_i + e_i$$

このモデルを推計するためのEviewsのコマンドは次の通りである。

equation eq1_2 .ls yearcons c disposal number

equation eq1_3 .ls yearcons c disposal number money

(なおプログラムでは方程式の名前をeq 1 _ 2、eq 1 _ 3 としている)

結果は表1. 4 に掲げる通りである。

equation 1 _ 2 でnumberをコントロールするとdisposalのb_1の推定値は0.14となっている(これが限界性向を示していることは単純回帰の場合と同様である)。単純回帰ではこの推定値は0.16であったから、先の値はnumberを考慮しなかったので高めに出ていたことが分かる。なおAdjR^2は0.36である。

さらにmoneyをコントロールするとdisposalのb_1の推定値は0.12となっている。ところでmoneyのt値は1.71であり、p値は0.09である。このp値からmoneyの係数を0と仮定した場合、moneyのb_3の推定値の絶対値が0.12より大きくなる確率が9%となっている。

なお回帰分析の結果は論文などでは通常以下のように表記することが多い。

$$yearcons_i = \underset{(6.76)}{179.28} + \underset{(4.96)}{0.123}\, disposal_i$$

表1. 4. 1　多重回帰の例(説明変数が2個)

Dependent Variable: YEARCONS
Method: Least Squares
Sample: 1 123
Included observations: 123

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	186.2305	26.39564	7.055350	0.0000
DISPOSAL	0.142160	0.022405	6.344953	0.0000
NUMBER	26.71045	7.679926	3.477957	0.0007

R-squared	0.370104	Mean dependent var	363.8049
Adjusted R-squared	0.359606	S.D. dependent var	149.4013
S.E. of regression	119.5578	Akaike info criterion	12.42957
Sum squared resid	1715289.	Schwarz criterion	12.49815
Log likelihood	−761.4182	F-statistic	35.25387
Durbin-Watson stat	1.862537	Prob (F-statistic)	0.000000

表1.4.2　多重回帰の例（説明変数が3個）

Dependent Variable: YEARCONS

Method: Least Squares

Sample: 1 123

Included observations: 123

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	179.2796	26.50155	6.764873	0.0000
DISPOSAL	0.123178	0.024851	4.956616	0.0000
NUMBER	28.36190	7.680394	3.692766	0.0003
MONEY	0.009182	0.005376	1.708055	0.0902
R-squared	0.385178	Mean dependent var		363.8049
Adjusted R-squared	0.369678	S.D. dependent var		149.4013
S.E. of regression	118.6139	Akaike info criterion		12.42160
Sum squared resid	1674242.	Schwarz criterion		12.51306
Log likelihood	−759.9287	F-statistic		24.85061
Durbin-Watson stat	1.887142	Prob（F-statistic）		0.000000

$$+28.362 number_i + 0.009\ money_i + v_i$$
$$\quad (3.69) \qquad\qquad (1.71)$$

$AdjR^2 = 0.370 \quad SER = 118.61$

研究者によっては$AdjR^2$に替えてR^2を提示する人もいる。またカッコ内はt値に替えて標準誤差を書くこともある。最後にv_iが加えられているのは理論モデルによってyearconsの変動を完璧には説明していないことを強調するためである（ただし省略されることもある）。

参考文献

本シリーズでは、解説的な性格上引用文献を詳細に上げることはしない。併読すれば理解がしやすいであろうもの、トピックを一歩進んで理解するための文献を中心に紹介する。

1－1　加納悟・浅子和美［1998］『入門経済のための統計学』日本評論社

1－2　岩田暁一［1983］『経済分析のための統計的方法』東洋経済新報社

1－3　山本拓［1995］『計量経済学』新世社

1－4　Hill, C., W. Grifftihs and G. Judge ［1997］ *Undergraduate Econometrics*: John Willey & Sons, Inc

1－5　Maddala, G.S. ［1992］ *Introduction to Econometrics*: Prentice Hall, Inc（和合肇訳［1996］『計量経済分析の方法』シーエーピー出版）

1－6　Kennedy, P. ［1998］ *A Guide to Econometrics*: Blackwell

1－1は計量経済分析の前提となる確率の分布や性質、さらに推定方法や仮説の検定などについて分かりやすく丁寧に紹介してある教科書である。事例を追えば無理なく統計学が理解できるように構成されている。

１―２は上級の統計学の教科書で、数学的に厳密に式が導出してある。

１―３は計量経済学の理論的方法論的側面に重点を置いてる。それだけに各種推定量の導出は丁寧で、我が国の計量経済学の代表的なテキストの一つである。

１―４は国際的にも評価の高い上級レベルの教科書を行列を使わない形で分かりやすく書き直されたものである。事例が豊富であり、実践にも役立つ。

１―５は大学院の初級クラス、学部の上級クラスを対象にしている。統計学の知識は前提とされているが、（行列は原則として使用されていないので）上級へのステップとして有益な教科書である。

１―６は数式の使用を最小限にし、叙述主体で書かれたものである。辞書的に使うのに有益である。

Eviewsのマニュアル（ソフトに添付されている）Eviews Unser’s Guide

Eviews Command Programming Reference