自己回帰モデルにおける非定常性と推測

小　滝　光　博

1. は じ め に

近年，時系列分析の分野においては，非定常性の問題が重大な関心を集めてきている．といっても，経済時系列を含む多くの時系列が非定常的なものであるということは古くから認識されていたし，また，ランダムウォーク性の検定などもかなり以前から研究されてきていた．しかしながら，多くの実証研究での非定常性の問題への取り組みは，時系列における標準的推測理論が定常時系列下において妥当性を持つということから，非定常時系列を定常時系列に変換するという作業に重点が置かれていたといってよく，その意味では，非定常時系列の問題をいかに回避するかということに努力が傾けられてきた．Fuller (1976), Dickey and Fuller (1979, 1981) 以降，多数の論文によって，非定常時系列そのものに対する推測が取り扱われ始め，また，Nelson and Plosser (1981) 等によって，時系列の非定常性は確率的なもの (stochastic nonstationarity) と確定的なもの (deterministic nonstationarity) とに分類され，それ故，定常時系列への変換のやり方も一義的ではないことが強調され始めた．

一般に，非定常時系列の下では，定常時系列のための漸近正規性に基いた漸近理論は成立しないし，定常の場合の様な統合的且つ画一的理論を組み立てることは難しいものとなっている．本稿ではまずその点について，自己回帰モデル（AR モデル）における OLS 推定量の漸近的性質を通して確認する．さらに，本稿では，非定常自己回帰モデルに対しても，定常時系列下における様な漸近的性質（漸近的正規性）を成立せしめる様な，新たな推定量を提示する．

本稿の構成は以下の様になっている．2節から3節にかけては，過去の諸研究によって指摘されてきた，非定常時系列下での OLS 推定にともなう問題点が再検討される．すなわち，2節では，非定常 AR(1) モデルを例にとって，OLS 推定量の漸近的性質が標準的なものではない（漸近分布が正規分布ではない）ことが説明される．3節では確率的非定常性あるいは確定的非定常性の検定問題について触れ，併せて OLS 推定量の漸近的性質が二つの非定常性の強弱によって異なったものになることが指摘される．4節においては，OLS 推定量に代わる新たな推定量を提示し，これの漸近的性質について吟味する．この節の補助定理並びに定理の中では，定常性や非定常性についての仮定が置かれていないきわめて一般的な高次のベクトル自己回帰モデル（VAR モデル）において，この推定量の漸近分布が正規分布であることが示される．この推定量は，モデルの真のラグの長さの二倍の長さのラグをもつ VAR モデルにおける OLS 推定量に基いていることも指摘される．5節では，二つの簡単な AR モデルを例にとって，4節で提示された推定量に基く検定統計量と OLS に基く検定統計量（t 値，あるいは Dickey-Fuller 検定統計量）とを，その漸近分布並びにパワーについて比較検討する．小標本（$n=50, 100$）でのモンテカルロ実験の結果についても報告される．さらに，パワーを改善させる手法についても述べる．4節の補助定理並びに定理の証明は7節でなされる．6節はまとめになっている．

2. AR(1) モデルにおける OLS 推測と非定常の問題

以下の様な簡単な AR(1) モデルを考察しよう．

$$y_t=ay_{t-1}+\varepsilon_t,\quad E\varepsilon_t,\quad E\varepsilon_t^2=\sigma^2,\quad t=1,\ 2,\cdots$$
$$a=a_0,\quad 0<\sigma^2<\infty \tag{1}$$

$\{\varepsilon_t\}$ はさらに次の仮定(i)(ii)も満足するものとしよう．

仮定(i)　$\{\varepsilon_t\}$ が（系列的）に独立に分布する．

仮定(ii)　$E|\varepsilon_t|^{2+\beta}<\infty$ for some $\beta>0$

観測値 $\{y_1, y_2, \cdots y_n\}$ が与えられた時，a_0 の OLS 推定量 $\hat{a}$ と a の水準を検定するための t-タイプ統計量 $\hat{t}(a)$ は以下の様に書かれる．

$$\hat{a}=\left(\sum_{t=1}^{n-1}y_t^2\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{n-1}y_ty_{t-1}\right)$$
$$\hat{t}(a)=(\hat{\sigma}^2)^{-1/2}\left(\sum_{t=1}^{n-1}y_t^2\right)^{1/2}(\hat{a}-a) \tag{2}$$

ここで $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1}(y_{t+1}-\hat{a}y_t)^2$

以下において，および $\hat{t}(a)$ の漸近的性質について，a_0 の値に対応して(A)(B)(C)という以下の三つの分類別に論じる．

(A)　$|a_0|<1$ の場合 (stationary case)

その時

$$\sqrt{n}(\hat{a}-a_0)\xrightarrow{h}h_1\sim N(0,\ \sigma^2R^{-1})$$
$$\hat{t}(a_0)\xrightarrow{h}h_2\sim N(0,\ 1) \tag{3}$$

ここで　$R=Ey_t^2$

という結果が得られる．ここで $a\sim N(b,\ c)$ は a が平均 b，分散 c の正規分布に従う確率変数であること，$a_n\xrightarrow{h}a$ は a_n の漸近分布が a の確率分布に等しくなっていることを意味している．(3)の結果は明らかに，定常時系列についての標準的漸近理論に含まれるものであるが，

$$y_t=\sum_{j=0}^{\infty}a_0^j\varepsilon_{t-j}$$
$$=O_p(1),\quad t=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$
$$y_n^2=O_p(1),$$
$$\sum_{t=1}^{n-1}y_t^2=O_p(n) \tag{4}$$

が，(3)の結果を成立せしめるために本質的なものとなっている．

(B)　$a_0=1$ の場合（実単位根が存在する場合）

仮定(i)(ii)に加えて

仮定(iii)　y_t の初期値 y_0 について以下の様に定める．

$y_0=c+dz,$

ここで c, d は適当な定数，z は ε_t, $t=1,\ 2,\ \cdots$ と独立且つ $O_p(1)$ である様な確率変数とする．

を仮定する．この場合(1)はランダムウォーク過程と呼ばれる．その時，

$$n(\hat{a}-a_0)\xrightarrow{h}g_1=\left(\int_0^1W(s)^2ds\right)^{-1}\frac{1}{2}(\chi^2(1)-1)$$
$$\hat{t}(a_0)\xrightarrow{h}g_2=\left[\int_0^1W(s)^2ds\right]^{-1/2}\frac{1}{2}(\chi^2(1)-1) \tag{5}$$

ここで $\chi^2(1)$ は自由度1のカイ2乗分布する確率変数，$W(.)$ は $[0,\ 1]$ における標準的なウィナー過程を表している．

g_1 および g_2 の確率密度関数は明示的には表現できないが，それらが正規分布でないことは明かである．すなわち，y_t が単位根を持つ場合の OLS 推定に基く推測はもはや漸近的正規性に準拠できないものとなっている．しかしながら，このことは $a_0=1$ のケースでの OLS に基く推測の結果が $|a_0|<1$ のケースよりも悪くなっているということを意味しない．逆に，$a_0=1$ のケースでは，$|a_0|<1$ のケースよりも $\hat{a}$ の a_0 への収束の速度は速くなっている．Fuller (1976) 及び Dickey (1977) のモンテカルロ実験の結果によると，$n(\hat{a}-1)$ 及び $\hat{t}(1)$ の実験分布は，比較的小標本（$n=50$ くらい）のもとでも漸近分布にきわめて近い．(5)の結果を導出するために本質的な役割を果たしているのは，以下の事項である．[1)]

$$y_t=\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_j+y_0=O_p(t^{1/2}),\quad t=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$
$$y_t^2=O_p(t),\quad t=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$
$$y_n^2=O_p(n),$$
$$\sum_{t=1}^{n-1}y_t^2\doteq n^2\sigma^2\sum_{t=1}^{n-1}\Bigl(\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_j/\sqrt{n\sigma_2}\Bigr)^2\cdot\frac{1}{n}=O_p(n^2),$$
$$\sum_{t=1}^{n-1}y_t\varepsilon_{t+1}\doteq\frac{n\sigma^2}{2}\Bigl[\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j/\sqrt{n\sigma^2}\Bigr)^2-\frac{1}{n\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\Bigr]=O_p(n) \tag{6}$$

(C)　$|a_0|>1$ の場合 (explosive case)

仮定(iii)と

仮定(iv)　$\{\varepsilon_t\}$ は独立同一に正規分布に従う，すなわち，$\varepsilon_t\sim i.i.n(0,\ \sigma^2)$

を仮定する．その時，

$$\begin{aligned}[a_0^2-1]^{-1}|a_0|^n(\hat{a}-a_0)&\xrightarrow{h}g_3\sim \text{Cauchy 分布}\\ \hat{t}(a_0)&\xrightarrow{h}g_4\sim N(0,\ 1)\end{aligned} \tag{7}$$

$$y_n=y_0+\sum_{j=0}^{n-1}a_0^j\varepsilon_{t-j}=O_p(a_0^n),\quad t=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$
$$y_n^2=O_p(a_0^{2n}),$$
$$y_t=y_na_0^{t-n}-\sum_{j=1}^{n-t}a_0^{-j}\varepsilon_{t+j}=O_p(a_0^t),\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$
$$\sum_{t=1}^{n-1}y_t^2\doteq y_n^2\Bigl[a_0^{-n}\sum_{t=1}^{n-1}a_0^t\Bigr]=O_p(a_0^{2n}),$$
$$\sum_{t=1}^{n-1}y_t\varepsilon_{t+1}\doteq y_n\Bigl[a_0^{-n}\sum_{t=1}^{n-1}a_0^t\varepsilon_{t+1}\Bigr]=O_p(a_0^n) \tag{8}$$

及び ε_t についての正規性の仮定である仮定(iv)が，(7)の導出にとって本質的なものとなっている．(C)のケースにおいても(B)と同様に，(1)は非定常な AR(1) モデルとなっているが，(B)と異なり(7)で得られている漸近分布は標準的なものである．しかしながら，(7)は(3)と違って中心極限定理から導出されたものではなく，仮定(iv)の正規性が保証されない時は，(7)の結果は成立しなくなる．

非定常 AR(1) モデルにおける(5)及び(7)の結果は，Anderson (1959) によって得られたものである．そして，そのことと関連して，$a_0=1$ の時の $n(\hat{a}-1)$ の n^{-2} の項までの漸近展開が Phillips (1987) によって，また，$a_0>1$ の場合の $(a_0^2-1)^{-1}(a_0)^n(\hat{a}-a_0)$ の漸近展開は Satchell (1984) によって，それぞれ標準的ではないやり方でもってなされている．

(B)の様な単位根が存在する場合の $n(\hat{a}-1)$，$\hat{t}(1)$ の漸近分布についての結果は，もっと一般的なモデルのもとでも得られる．

1）特に $\hat{a}$ の分母にあたる $\sum_{t=1}^{n-1}y_t^2$ が，n で標準化されようが n^2 で標準化されようが一定値に確立収束しないことが重要である．

$$y_t = a y_{t-1} + u_t$$

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}$$

$$t = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{9}$$

ここで　$y_0=0$, $\varepsilon_t \sim i.d.(0,\ 1)$, $E|\varepsilon_t|^{2+\beta}<\infty$ forsome $\beta>0$, $\phi_0 \neq 0$, $\sum_{j=0}^{\infty} j^{1/2}|\phi_j|<\infty$ を仮定する．$a=1$ の時

$$y_t = \phi(1) \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j + v_t - v_0, \quad t=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{10}$$

ここで　$\phi(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j$,　$v_t = \sum_{l=0}^{\infty}\left(-\sum_{j=lH}^{\infty}\phi_j\right)\varepsilon_{t-l}$

となるが，$\phi(1) \neq 0$ の時，

$$n(\hat{a}-1) \xrightarrow{h} g_5 = \left[\int_0^1 W(s)^2 as\right]^{-1} \frac{1}{2}\left[\chi^2(1) - \frac{\phi_0^2}{\phi(1)^2}\right]$$

$$\hat{t}(1) \xrightarrow{h} g_6 = \left[\phi_0^2\right]^{-1/2}\left[\int_0^1 W(s)^2 ds\right]^{-1/2} \frac{1}{2}\phi(1)\left[\chi^2(1) - \frac{\phi_0^2}{\phi(1)^2}\right] \tag{11}$$

Phillips and Perron (1986) は，u_t についてのより弱い仮定のもとで，$n(\hat{a}-1) \xrightarrow{h} g_5$ 及び $\hat{t}(1) \xrightarrow{h} g_6$ であることを示した．さらに，Phillips and Durlauf (1986) は，同様の結果を多変量時系列について拡張した．

3.　確率的非定常性および確定的非定常性の検定

マクロ経済時系列データについての単位根検定いは，今や応用計量経済学における重要なトピックの一つであるが，分析対象として定式化されるのは，単純な AR(1) モデルではなくて以下の様な定数項 (drift) つきの AR(1) モデルである.

$$y_t = a y_{t-1} + \mu + \varepsilon_t, \quad t=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{12}$$

ここで μ は定数，$y_0=0$,　$\varepsilon_t \sim i.d.(0,\ \sigma^2)$,　$E\varepsilon_t^4<\infty$ とする．

$a=1$ 及び $\mu \neq 0$ の時，

$$y_t = \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j + t\mu, \quad t=1,\ 2,\ \cdots \tag{13}$$

となるが，y_t の $(y_{t-1},\ 1)$ への OLS 推定量

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 & \sum_{t=1}^{n-1} y_t \\ \sum_{t=1}^{n-1} y_t & \sum_{t=1}^{n-1} y_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} y_{t+1} \\ \sum_{t=1}^{n-1} y_t y_{t+1} \end{bmatrix}$$ については，

$$\begin{bmatrix} n^{1/2}(\hat{\mu}-\mu) \\ n^{\frac{3}{2}}(\hat{a}-1) \end{bmatrix} \xrightarrow{h} N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{2} \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu^2}{3} \end{bmatrix}\right) \tag{14}$$

が得られる．

$$\sum_{t=1}^{n-1} E y_t = \mu \sum_{t=1}^{n-1} t = \mu \frac{n(n-1)}{2}$$

$$V\left(\sum_{t=1}^{n-1} y_t\right) = V\left(\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j\right) = O(n^3)$$

$$\sum_{t=1}^{n-1} y_t = \mu \frac{n(n-1)}{2} + O_p(n^{\frac{3}{2}})$$

$$\sum_{t=1}^{n-1} y_t^2 = \mu^2 \frac{n(2n-1)(n-1)}{6} + O_p(n^{\frac{5}{2}}) \tag{15}$$

が，上の結果を成立せしめるために本質的なものになっている．

上の様に，単位根を持つ自己回帰モデルにおいては，定数項 (drift) がゼロであるか否かで，推定量並びに検定統計量の漸近的性質は異なるものとなる．定数項がゼロでない時，y_t は確定的なトレンド (deterministic trend) である t を持ち，それの deterministic nonstability (deterministic nonstationarity) が stochastic nonstability (stochastic nonstationarity) を上回るがゆえに，漸近的正規性が成立したのである．

マクロ経済時系列において問題にされるのは，単なる単位根の有無ではなく，確率的トレンド $-\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j$ が支配的か確定的トレンド $-t\mu$ の方が優勢かという点である．以下の様なモデルを考察しよう．

$$y_t - y_{t-1} = \mu + \phi(1)\varepsilon_t + v_t - v_{t-1}$$
$$t=1,\ 2,\ \cdots \tag{16}$$

ここで，$\phi_0 \neq 0$，$\phi(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j$，$v_t = \sum_{l=0}^{\infty} \left(-\sum_{j=l+1}^{\infty} \phi_j \right) \varepsilon_{t-l}$

$y_0 = v_0 + c$ (c は定数)，$\varepsilon_t \sim i.d.(0,\ 1)$，$E\varepsilon_t^4 < \infty$，$\sum_{j=0}^{\infty} j^{1/2} |\phi_j| < \infty$ を仮定する．(16)から，

$$y_t = t\mu + c + \phi(1) \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j + v_t$$
$$t=1,\ 2,\ \cdots \tag{17}$$

が得られる．(17)において $t\mu$ が y_t の確定的トレンド (deterministic trend) に相当し，$\phi(1) \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j$ が y_t の確率的トレンド (stochastic trend) ということになる．検定すべきことは，$\phi(1)=0$ か否かである．$\phi(1) \neq 0$ であると判断された時には，トレンドの除去は y_t の階差 (difference) をとることによってなされる．[2] 他方，$\phi(1)=0$ である時には，トレンドの除去は(17)に従って，y_t を $(1,\ t)$ に回帰させることによって行う．

Nelson and Plosser (1982) 以後，多くの論文によって，様々のマクロ時系列データに対して $\phi(1)=0$ の検定が試みられてきている．$\phi(1)=0$ を検定するための（但し $\phi(1) \neq 0$ が帰無仮説としてとられている）統計量としては，t-タイプ統計量が挙げられるが，一方で $\phi(1)=0$ の検定は，y_t の階差 $z_t = y_t - y_{t-1}$ についての MA 多項式の invertibility に関する検定としても解釈できる．その場合，定常時系列を用いて検定統計量を構成し，論ずることが可能となる．Phillips and Ouliaris (1987) によって cointegration の検定のために提案された検定方式は，この場合にも適用可能である．

4. 定常あるいは非定常ベクトル自己回帰モデルにおける係数パラメーターの推定と漸近正規性

2，3節で考察してきた様に，非定常時系列の下での OLS 推定量の漸近的性質は，状況に応じて（例えば，定数項付きの AR モデルか否かで）微妙に異なってくる．それ故，非定常時系列の下でも定常の場合と同様の漸近的性質（漸近的正規性）を持つ様な，推定量並びに検定統計量を新たに構築することも重要である．Lai and Siegmund (1983) は，(1)のランダムウォークモデルにおいて，

仮定(v) ε_t が系列的に独立同一分布に従う，すなわち，$\varepsilon_t \sim i.i.d.(0,\ \sigma^2)$

仮定(vi) $E\varepsilon_t^4 < \infty$

仮定(vii) y_t の初期値 y_0 について $y_0 = 0$

2) マクロ経済時系列を分析する際の伝統的手順は，まず，レベルでのデータ y_t からトレンドを除去して，その残差に定常時系列モデルを適合させるというものであった．

仮定(viii)　$|a_0|\leq 1$
が置かれた時，適当な定数 c に対して $\sum_{t=1}^{n-1} y_t^2 \geqq c\sigma^2$ となる様な最初の n を N_c と定義し，N_c までのサンプリングによる観測値のみを用いて OLS 推定をすることを提唱し，且つ

$$\left(\sum_{t=1}^{N_c} y_t^2\right)^{1/2} (\hat{a}_{N_c}-a_0) \xrightarrow{h} N(0,\ \sigma^2)^{3)}$$

$$\hat{a}_{N_c}=\left(\sum_{t=1}^{N_c-1} y_t^2\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{N_c-1} y_t y_{t+1}\right) \tag{18}$$

が成立することを示した．一方，Kawashima (1980) 及び Ahtola and Tiao (1987, b) は定常根及び非定常根の両方を含む様な高次の AR モデルをとりあげた．

$$y_t=\sum_{j=1}^{P} a_j y_{t-j}+\varepsilon_t \tag{19}$$

ここで $\{\varepsilon_t\}$ は $E\varepsilon_t=0$, $E\varepsilon_t^2=\sigma^2$, $E|\varepsilon_t|^{\alpha+2}<\infty$ for some α 且つ系列的に独立な確率変数列である．AR 多項式 $a(\lambda)=1-\sum_{j=1}^{p} a_j\lambda^j$ の根についての Kawashima (1980) の想定は以下の様になっている．

$$a(\lambda)=d(\lambda)\cdot c(\lambda)$$

$$c(\lambda)=1-\sum_{j=1}^{q} c_j\lambda^j$$

$$d(\lambda)=(1-\lambda)^d$$

$c(\lambda)\neq 0$　for　$|\lambda|\leq 1$　($c(\lambda)$ の根はすべて定常根)

$$p=d+q$$

$$p-1\geq d\geq 1 \tag{20}$$

これは，ARIMA$(d,\ q,\ 0)$ モデルとして解釈することもできる．

y_t の $(y_{t-1}, \cdots y_{t-p})$ に対する OLS 推定，すなわち，$\underset{\sim}{a}=(a_1, \cdots, a_p)$ の OLS 推定量を $\hat{\underset{\sim}{a}}$ とする時，Kawashima (1980) は，

$$\sqrt{n}[\hat{\underset{\sim}{a}}-\underset{\sim}{a}] \xrightarrow{h} N(\underset{\sim}{0},\ \Omega)$$

$$\operatorname{rank} \underset{(PXP)}{\Omega}=q \tag{21}$$

であることを示した．すなわち，$\sqrt{n}[\hat{\underset{\sim}{a}}-\underset{\sim}{a}]$ は，$n\to\infty$ の時平均ゼロ且つ特異な分散行列をもつ退化正規分布に収束する．ここで n は観測値として与えられる y_t の個数．他方，Ahtola and Tiao (1987, b) の想定は以下の様である．

$$a(\lambda)=d(\lambda)\cdot c(\lambda)$$

$$d(\lambda)=1-\sum_{j=1}^{T} d_j\lambda^j$$

$$c(\lambda)=1-\sum_{j=1}^{q} c_j\lambda^j$$

$d(\lambda)\neq 0$　for　$|\lambda|>1$ and $|\lambda|<1$　($d(\lambda)$ の根はすべて単位円上)

$c(\lambda)\neq 0$　for　$|\lambda|\leq 1$　($c(\lambda)$ の根はすべて単位円外)

$$p=r+q$$

$$p-1\geq r\geq 1 \tag{22}$$

y_t の $(y_{t-1}, \cdots, y_{t-r})$ への OLS によって得られる残差を $\hat{e}_t$ とし，$\hat{e}_t$ の $(\hat{e}_{t-1}, \cdots, \hat{e}_{t-q})$ への OLS によって得られる係数パラメーターを $\hat{c}_1, \cdots, \hat{c}_q$ とする．その時，Ahtola and Tiao (1987, b) は，

3）以下では簡単化のために，$a_n \xrightarrow{h} a \sim N(0, \sigma^2)$ を $a_n \xrightarrow{h} N(0, \sigma^2)$ と記すことにする。

$$n(\hat{c}-c)\rightarrow N(0,\ Q) \quad \mathrm{rank}\ \underset{(q\times q)}{Q}=q \tag{23}$$

であることを示した．ここで $\hat{c}=(\hat{c}_1,\ \cdots,\ \hat{c}_q)$ 及び $c=(c_1,\cdots,\ c_q)$

本稿で取り扱われるモデルは以下の様なきわめて一般的な高次のベクトル自己回帰モデルである．

$$\underset{(k\times1)}{y_t}=\sum_{j=1}^{p}\underset{(k\times k)}{A_j}\ \underset{(k\times1)}{y_{t-j}}+\sum_{j=0}^{q}t^j\ \underset{(k\times1)}{u_j}+\underset{(k\times1)}{\varepsilon_t}\ ,\quad t=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{24}$$

ここで u_j は定数ベクトルであり，$\{\varepsilon_t\}$ は $E\varepsilon_t=0$, $E\varepsilon_t\varepsilon_t'=\Sigma$ 且つ系列的に独立に分布する k 次元確率ベクトル列とする．また，Σ は正定値 (positive-definite) とし，さらに $E|\varepsilon_{it}|^{\alpha+2}<\infty$ for some $\alpha>0$, i=1,…, k, を仮定する．但し $\varepsilon_t=(\varepsilon_{1t},\ \cdots,\ \varepsilon_{kt})$

また，次の様な仮定も付加する．

仮定(∈)[4] $y_i=c_j+D_js_j$ $j=-(p-1),\ \cdots,\ -1,\ 0$

ここで，c_j は定数ベクトル，D_j は定数行列，s_j は各要素が $O_p(1)$ である様な k 次元確率ベクトル．

(24)におけるベクトル AR 多項式の根には何らの制約も置かれない．観測値として $(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ が与えられた時，係数パラメーター行列 $A_1,\ \cdots,\ A_p$ の推測について考察する．(24)から

$$\begin{bmatrix} I_k & & & & \\ -A_1 & I_k & & 0 & \\ -A_2 & -A_1 & I_k & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ -A_p & -A_{p-1} & & -A_1 & I_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{t-p}\\ y_{t-p+1}\\ y_{t-p+2}\\ \vdots\\ \vdots\\ y_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & A_p & A_{p-1}\cdots\cdots & A_1\\ & & A_p\cdots\cdots & A_2\\ & & A_p\cdots & A_3\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & A_p\\ & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{t-2p-1}\\ y_{t-2p}\\ y_{t-2p+1}\\ \vdots\\ \vdots\\ y_{t-p-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{q}(t-p)^ju_j\\ \sum_{j=0}^{q}(t-p+1)^ju_j\\ \sum_{j=0}^{q}(t-p+2)^ju_j\\ \vdots\\ \vdots\\ \sum_{j=0}^{q}t^ju_j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{t-p}\\ \varepsilon_{t-p+1}\\ \varepsilon_{t-p+2}\\ \vdots\\ \vdots\\ \varepsilon_t\end{bmatrix} \tag{25}$$

さらに

$$\begin{bmatrix} y_{t-p}\\ y_{t-p+1}\\ y_{t-p+2}\\ \vdots\\ \vdots\\ y_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & B_p(0) & B_{p-1}(0)\cdots\cdots & B_1(0)\\ 0 & B_p(1) & B_{p-1}(1)\cdots\cdots & B_1(1)\\ 0 & B_p(2) & B_{p-1}(2)\cdots\cdots & B_1(2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & B_p(p) & B_{p-1}(p)\cdots\cdots & B_1(p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{t-2p-1}\\ y_{t-2p}\\ y_{t-2p+1}\\ \vdots\\ \vdots\\ y_{t-p-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{q}t^jw(0)_j\\ \sum_{j=0}^{q}t^jw(1)_j\\ \sum_{j=0}^{q}t^jw(2)_j\\ \vdots\\ \vdots\\ \sum_{j=0}^{q}t^jw(p)_j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{t-p}(0)\\ v_{t-p+1}(1)\\ v_{t-p+2}(2)\\ \vdots\\ \vdots\\ v_t(p)\end{bmatrix} \tag{26}$$

が得られる．

ここで

$$\begin{bmatrix} 0 & B_p(0) & B_{p-1}(0)\cdots\cdots & B_1(0)\\ 0 & B_p(1) & B_{p-1}(1)\cdots\cdots & B_1(1)\\ 0 & B_p(2) & B_{p-1}(2)\cdots\cdots & B_1(2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & B_p(p) & B_{p-1}(p)\cdots\cdots & B_1(p)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_k & & & & \\ -A_1 & I_k & & 0 & \\ -A_2 & -A_1 & I_k & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ -A_p & -A_{p-1} & \cdots & -A_1 & I_k \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & A_p & A_{p-1}\cdots\cdots & A_1\\ & & A_p\cdots\cdots & A_2\\ & & A_p\cdots & A_3\\ & & \ddots & \vdots\\ & 0 & & A_p\\ & & & 0\end{bmatrix} \tag{27}$$

4) この仮定は y_t が定常である場合，すなわち，VAR 多項式の根に非定常根が含まれない場合には不必要である．

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{q} t^j \underset{\sim}{w}(0)_j \\ \sum_{j=0}^{q} t^j \underset{\sim}{w}(1)_j \\ \sum_{j=0}^{q} t^j \underset{\sim}{w}(2)_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{q} t^j \underset{\sim}{w}(p)_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & & & & \\ -A_1 & I_k & & 0 & \\ -A_2 & -A_1 & I_k & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ -A_p & -A_{p-1} & \cdots\cdots & -A_1 & I_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{q} (t-p)^j \underset{\sim}{u}_j \\ \sum_{j=0}^{q} (t-p+1)^j \underset{\sim}{u}_j \\ \sum_{j=0}^{q} (t-p+2)^j \underset{\sim}{u}_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{q} t^j \underset{\sim}{u}_j \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_{t-p}(0) \\ \underset{\sim}{v}_{t-p+1}(1) \\ \underset{\sim}{v}_{t-p+2}(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{v}_t(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & & & & \\ -A_1 & I_k & & 0 & \\ -A_2 & -A_1 & I_k & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ -A_p & -A_{p-1} & \cdots\cdots & -A_1 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_{t-p} \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_{t-p+1} \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_{t-p+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_t \end{bmatrix} \tag{29}$$

(26)において以下の(i)(ii)(iii)が成立している．

(i) $\underset{\sim}{v}_{t-k}(p-k)$ は，$\underset{\sim}{\varepsilon}_{t-k}, \cdots, \underset{\sim}{\varepsilon}_{t-p}$ の線形結合で表される．$k=0, 1, \cdots, p$

(ii) $\underset{\sim}{y}_{t-k}-\underset{\sim}{v}_{t-k}(p-k)$ は，$\underset{\sim}{y}_{t-k}$ の $(\underset{\sim}{y}'_{t-p-1}, \cdots, \underset{\sim}{y}'_{t-2p}, 1, t, \cdots, t^q)$ への射影 (linear projection) となっている．$k=0, 1, \cdots, p$

(iii) $\underset{\sim}{v}_t(0)=\underset{\sim}{\varepsilon}_t$ 及び $B_j(0)=A_j$, $j=1, \cdots, p$

$\underset{\sim}{v}_{t-k}(p-k)$ の定義式(29)より

$$\underset{(k\times 1)}{\underset{\sim}{v}_t(p)} = \sum_{j=1}^{p} \underset{(k\times k)}{A_j} \underset{(k\times 1)}{\underset{\sim}{v}_{t-j}(p-j)} + \underset{(k\times 1)}{\underset{\sim}{\varepsilon}_t}, \quad t=1, 2, 3, \cdots \tag{30}$$

(26)－(30)の関係式は，観測値 $(\underset{\sim}{y}_1, \cdots, \underset{\sim}{y}_n)$ を用いて

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}'_{2p+1-j} \\ \\ \\ \underset{\sim}{y}'_{n-j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}'_p & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}'_1 & 1 & (2p+1) & \cdots\cdots & (2p+1)q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{y}'_{n-p-1} & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}'_{n-2p} & 1 & n & \cdots\cdots & nq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1(j)' \\ \vdots \\ \vdots \\ B_p(j)' \\ \underset{\sim}{w}(p-j)'_p \\ \underset{\sim}{w}(p-j)'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{w}(p-j)'_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_{2p+1-j}(p-j)' \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{v}_{n-j}(p-j)' \end{bmatrix} \quad j=1, \cdots, p \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}'_{2p+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{y}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}'_p & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}'_1 & 1 & (2p+1) & \cdots\cdots & (2p+1)^q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{y}'_{n-p-1} & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}'_{n-2p} & 1 & n & \cdots\cdots & n_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1(p)' \\ \vdots \\ \vdots \\ B_p(p)' \\ \underset{\sim}{w}(p)'_0 \\ \underset{\sim}{w}(p)'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{w}(p)'_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_{2p+1}(p)' \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{v}_n(p)' \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_{2p+1}(p)' \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{v}_n(p)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_{2p}(p-1)' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{v}_{p+1}(0)' \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{v}_{n-1}(p-1)' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{v}_{n-p}(0)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ A_p' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_{2p+1}' \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_n' \end{bmatrix} \qquad (33)$$

(31)は，さらに

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}_{2p}' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}_{p+1}' \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{y}_{n-1}' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}_{n-p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}_p' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}_1' & 1 & (2p+1) & \cdots\cdots & (2p+1)^q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{y}_{n-p-1}' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}_{n-2p}' & 1 & n & \cdots\cdots & n^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1(p-1)' & \cdots & B_1(0)' \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ B_p(p-1)' & \cdots & B_p(0)' \\ \underset{\sim}{w}(p-1)_0' & \cdots & \underset{\sim}{w}(0)_0' \\ \underset{\sim}{w}(p-1)_1' & \cdots & \underset{\sim}{w}(0)_1' \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{w}(p-1)_q' & \cdots & \underset{\sim}{w}(0)_q' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_{2p}(p-1)' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{v}_{p+1}(0)' \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{v}_{n-1}(p-1)' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{v}_{n-p}(0)' \end{bmatrix} \qquad (31)'$$

と書ける．(31)′ (32) (33)は簡単に

$$Y_{-1}=XB+V_{-1} \qquad (31)''$$

$$\underset{\sim}{y}=X\underset{\sim}{\beta}+\underset{\sim}{v} \qquad (32)''$$

$$\underset{\sim}{v}=V_{-1}\underset{\sim}{\alpha}+\underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (33)''$$

と書き表すことができる．ここで

$$Y_{-1}=\left[I_k\otimes \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}_{2p}' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}_{p+1}' \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{y}_{n-1}' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}_{n-p}' \end{bmatrix}\right], \quad V_{-1}=\left[I_k\otimes \begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_{2p}(p-1)' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{v}_{p+1}(0)' \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{v}_{n-1}(p-1)' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{v}_{n-p}(0)' \end{bmatrix}\right]$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix} B_1(p-1)' & \cdots\cdots & B_1(0)' \\ \vdots & & \vdots \\ B_p(p-1)' & \cdots\cdots & B_p(0)' \\ \underset{\sim}{w}(p-1)_0' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{w}(0)_0' \\ \underset{\sim}{w}(p-1)_1' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{w}(0)_1' \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{w}(p-1)_q' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{w}(0)_q' \end{bmatrix}$$

$$X=\left[I_k\otimes \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}_p' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}_1' & 1 & (2p+1) & \cdots\cdots & (2p+1)^q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{y}_{n-p-1}' & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}_{n-2p}' & 1 & n & \cdots\cdots & n^q \end{bmatrix}\right], \quad \underset{\sim}{y}=\mathrm{vec}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}_{2p+1}' \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{y}_n' \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\beta}=\mathrm{vec}\begin{bmatrix} B_1(p)' \\ \vdots \\ B_p(p)' \\ \underset{\sim}{w}(p)_0' \\ \underset{\sim}{w}(p)_1' \\ \vdots \\ \underset{\sim}{w}(p)_q' \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\alpha}=\mathrm{vec}\begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ A_p' \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{v}=\mathrm{vec}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_{2p+1}(p)' \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{v}_n(p)' \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\varepsilon}=\mathrm{vec}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_{2p+1}' \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_n' \end{bmatrix}$$

$B=[I_k \otimes \Lambda]$

ここで I_k は k 次元単位行列を，$\otimes$はクロネッカー積をあらわしている．また，(24)は

$$Y=Z\Phi+\Psi \tag{34}$$

と書かれる．ここで

$$Y=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}'_{p+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{y}'_n \end{bmatrix}, \quad Z=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}'_p & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}'_1 & 1 & (2p+1) & \cdots\cdots & (2p+1)^q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{y}'_{n-p-1} & \cdots\cdots & \underset{\sim}{y}'_{n-2p} & 1 & n & \cdots\cdots & n^q \end{bmatrix}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix} A'_1 \\ \vdots \\ A'_p \\ \underset{\sim}{u}'_0 \\ \underset{\sim}{u}'_1 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{u}'_q \end{bmatrix}, \quad \Psi=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}'_{p+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\varepsilon}'_n \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{a}$ の推定量として，$\hat{\underset{\sim}{a}}=(Y_{-1}[I_{n'k}-X(X'X)^{-1}X']Y_{-1})^{-1}(Y_{-1}[I_{n'k}-X(X'X)^{-1}X']\underset{\sim}{y})$ について考察する．その時，次の補助定理が成立する．なお，ここで，$n'=n-2p$.

補助定理

(i) $\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\dfrac{1}{n}Y'_{-1}[I_{n'k}-X(X'X)^{-1}X']Y_{-1}$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\frac{1}{n}V'_{-1}V_{-1}=[I_k\otimes A^{-1}DA^{-1\prime}]$$

ここで，$D=[I_p\otimes\Sigma]$

$$n'=n-2p,\ A=\begin{bmatrix} I_k & -A_1 & \cdots\cdots & -A_{p-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ & 0 & I_k & -A_1 \\ & & & I_k \end{bmatrix}$$

(ii) $\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\left(\dfrac{1}{n}V'_{-1}[I_{n'k}-X(X'X)^{-1}X']\underset{\sim}{\varepsilon}-\dfrac{1}{n}V'_{-1}\underset{\sim}{\varepsilon}\right)=\underset{\sim}{0}$

(iii) $\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\{\sqrt{n}[\hat{\underset{\sim}{a}}-\underset{\sim}{a}]-\sqrt{n}[\tilde{\underset{\sim}{a}}-\underset{\sim}{a}]\}=\underset{\sim}{0}$

ここで $\tilde{\underset{\sim}{a}}=(V'_{-1}V_{-1})^{-1}V_{-1}\underset{\sim}{v}$

(iv) $\sqrt{n}(\hat{\underset{\sim}{a}}-\underset{\sim}{a})\xrightarrow{h}N(\underset{\sim}{0},\ [\Sigma\otimes A'D^{-1}A])$

(v) $\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\hat{\Sigma}=\Sigma$

ここで $\hat{\Sigma}=\dfrac{1}{n}Y'[I_{n''}-Z(Z'Z)^{-1}Z']Y$

$n''=n-p$

この補助定理を用いて

定理

(i) $\sqrt{n}(\hat{\underset{\sim}{a}}-\underset{\sim}{a})\xrightarrow{h}N(\underset{\sim}{0},\ [\Sigma\otimes A'D^{-1}A])$

ここでA及びDは上記の補助定理の中で定義されている．

(ii) H を $1 \leq \mathrm{rank}\, H = r \leq k^2 p$ である様な適当な行列とするとき

$$(H'[\hat{\Sigma}\otimes I_{kp}]\hat{K}^{-1})^{-1/2}(H'\hat{\underset{\sim}{a}} - H'\underset{\sim}{a}) \xrightarrow{h} N(\underset{\sim}{0},\ I_r)$$

ここで $\hat{K} = Y'_{-1}[I_{n'k} - X(X'X)^{-1}X']Y_{-1}$

この補助定理並びに定理の結果は以下の様に解釈できよう．明かな様に，$\tilde{\underset{\sim}{a}}$ は(30)において $\underset{\sim}{v}_t(p)$ を $(\underset{\sim}{v}_{t-1}(p-1)', \cdots, \underset{\sim}{v}_{t-p}(0)')$ に回帰させて得られた $\underset{\sim}{a}$ の OLS 推定量になっている．$(\underset{\sim}{v}_t(p), \underset{\sim}{v}_{t-1}(p-1), \cdots, \underset{\sim}{v}_{t-p}(0))$ の定義より明かな様に，それらは定常過程に従う系列であるから，$\sqrt{n}(\tilde{\underset{\sim}{a}} - \underset{\sim}{a})$ の漸近分布が平均 $\underset{\sim}{0}$，正則な分散行列を持つ正規分布となることは，ある意味で自明である．$\underset{\sim}{v}_t(p)$, $\underset{\sim}{v}_{t-1}(p-1), \cdots, \underset{\sim}{v}_{t-p}(0)$ は観測されない量であるので，それらの推定値として，(26)に従って $\underset{\sim}{y}_t, \underset{\sim}{y}_{t-1}, \cdots, \underset{\sim}{y}_{t-p}$ を $(\underset{\sim}{y}'_{t-p-1}, \cdots, \underset{\sim}{y}'_{t-2p}, 1, t, \cdots, t^q)$ に回帰させて得られる残差 $\hat{\underset{\sim}{v}}_t(p), \hat{\underset{\sim}{v}}_{t-1}(p-1), \cdots, \hat{\underset{\sim}{v}}_{t-p}(0)$ を用いる．すなわち，$\hat{\underset{\sim}{v}}_t(p)$ を $(\hat{\underset{\sim}{v}}_{t-1}(p-1), \cdots, \hat{\underset{\sim}{v}}_{t-p}(0))$ に回帰させて得られる OLS 推定量が $\hat{\underset{\sim}{a}}$ である．また，$\hat{\underset{\sim}{a}}$ は，$\underset{\sim}{y}_t$ を $(\underset{\sim}{y}'_{t-1}, \cdots, \underset{\sim}{y}'_{t-p}, 1, t, \cdots, t^q, \underset{\sim}{y}'_{t-p-1}, \cdots, \underset{\sim}{y}'_{t-2p})$ に回帰させて得られる OLS 推定量のうち，$\underset{\sim}{y}_{t-1}, \cdots, \underset{\sim}{y}_{t-p}$ の係数行列に対応した部分に等しくなっている．すなわち，

$$\begin{bmatrix}\hat{\underset{\sim}{b}}\\ \hat{\underset{\sim}{a}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Y_{-1} \\ Y'_{-1}X & Y'_{-1}Y_{-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}X'\underset{\sim}{y}\\ Y'_{-1}\underset{\sim}{y}\end{bmatrix} \tag{35}$$

さらに，定理(ii)は，$H'\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{g}$ なる帰無仮説を検定する場合の検定統計量として，$[H'[\hat{\Sigma}\otimes I_{kp}]\hat{K}^{-1}H]^{-1/2}[H'\hat{\underset{\sim}{a}} - \underset{\sim}{g}]$ あるいは $[\hat{\underset{\sim}{a}}'H - \underset{\sim}{g}'][H'[\hat{\Sigma}\otimes I_{kp}]\hat{K}^{-1}H]^{-1}[H'\hat{\underset{\sim}{a}} - \underset{\sim}{g}]$ を用いれば，通常の標準的漸近理論に基いた検定が実行できることを意味するものである．

2節並びに3節でみてきた様に，OLS に基く検定方式では状況によってその漸近分布は様々である．しかしながら，この節で提示された $\hat{\underset{\sim}{a}}$ に基く検定統計量では，確率的非定常であろうが確定的非定常が優勢であろうが，その漸近分布は常に正規分布である．

5. 単位根の検定への応用

この節では，以下の様な二つの単純モデルにおいて，前節で提示された推定量 $\hat{\underset{\sim}{a}}$ に基く検定統計量と通常の OLS 推定量に基く検定統計量(t 値)とを，単位根の検定に適用した場合の標本分布並びにパワーについて比較検討する．

$$\begin{aligned} &y_t = ay_{t-1} + \varepsilon_t,\quad t=1, 2, \cdots \\ &y_0 = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &y_t = 2a\cos\lambda y_{t-1} - a^2 y_{t-2} + \varepsilon_t,\quad t=1, 2, \cdots \\ &y_{-1} = y_0 = 0 \\ &2\cos\lambda = 1.8 \quad (\lambda \text{ をその様に定める}) \end{aligned} \tag{37}$$

ここで，$E\varepsilon_t = 0$, $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2$，また，$\{\varepsilon_t\}$ は，2節の仮定(i)(ii)を満たすものとする．さらに $a>0$ とする．

検定すべき帰無仮説は $a=1$ である．[5] 観測値として $(y_1, \cdots, y_n)$ が与えられたものとしよう．(36)において，前節で提示した推定量 $\hat{\underset{\sim}{a}}$ に基く検定統計量を $\hat{b}_1$, *OLS* 推定量に基く検定統計量を $\hat{b}_2$ と記すことにすれば，

$$\hat{b}_1 = (\hat{\sigma}^2)^{-1/2}[\underset{\sim}{y}'_{-1}M\underset{\sim}{y}_{-1}]^{-1/2}(\hat{a}_1 - 1) \tag{38}$$

$$\hat{b}_2 = (\hat{\sigma}_2)^{-1/2}[\underset{\sim}{y}'_{-1}\underset{\sim}{y}_{-1}]^{1/2}(\hat{a}_2 - 1) \tag{39}$$

5）モデル(37)では，$a=1$ は，複素単位根についての検定になっている．

ここで $\underset{\sim}{\bar{y}}=\begin{bmatrix} y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{\bar{y}}_{-1}=\begin{bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{\bar{y}}_{-2}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-2} \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{y}=\begin{bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{y}_{-1}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$

$$M=I_{n'}-\underset{\sim}{\bar{y}}_{-2}(\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-2}\underset{\sim}{\bar{y}}_{-2})^{-1}\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-2} \qquad n'=n-2$$

$$\hat{d}_1=[\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-1}M\underset{\sim}{\bar{y}}_{-1}]^{-1}[\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-1}M\underset{\sim}{\bar{y}}]$$

$$\hat{d}_2=[\underset{\sim}{y}'_{-1}\underset{\sim}{y}_{-1}]^{-1}[\underset{\sim}{y}'_{-1}\underset{\sim}{y}]$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{\mathrm{n}}\underset{\sim}{y}'[I_{n-1}-\underset{\sim}{y}_{-1}(\underset{\sim}{y}'_{-1}\underset{\sim}{y}_{-1})^{-1}\underset{\sim}{y}'_{-1}]\underset{\sim}{y}$$

(37)において，前節で提示した推定量 $\underset{\sim}{\hat{a}}$ に基く検定統計量を $\hat{c}_1$, OLS 推定量に基く検定統計量を $\hat{c}_2$ と記すことにすれば,

$$\hat{c}_1=(\hat{\sigma}^2)^{-1/2}[\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}'_{-2}L\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}_{-2}]^{1/2}[\hat{f}_1-1] \tag{40}$$

$$\hat{c}_2=(\hat{\sigma}^2)^{-1/2}[\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-2}N\underset{\sim}{\bar{y}}_{-2}]^{1/2}[\hat{f}_2-1] \tag{41}$$

ここで $\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}=\begin{bmatrix} y_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}_{-2}=\begin{bmatrix} y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-2} \end{bmatrix}$, $\bar{\bar{X}}=\begin{bmatrix} y_4 & y_2 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & y_{n-3} & y_{n-4} \end{bmatrix}$, $\bar{X}=\begin{bmatrix} y_2 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & y_{n-2} \end{bmatrix}$

$n''=n-4,\quad L=[I_{n''}-\bar{\bar{X}}(\bar{\bar{X}}'\bar{\bar{X}})^{-1}\bar{\bar{X}}'],$

$$N=[I_{n'}-\underset{\sim}{\bar{y}}_{-1}(\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-1}\underset{\sim}{\bar{y}}_{-1})^{-1}\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-1}]$$

$$\hat{f}_1=[\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}'_{-2}L\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}_{-2}]^{-1}[\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}_{-2}L\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}]$$

$$\hat{f}_2=[\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-2}N\underset{\sim}{\bar{y}}_{-2}]^{-1}[\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-2}N\underset{\sim}{\bar{y}}]$$

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{1}{n}\underset{\sim}{\bar{y}}'[I_{n'}-\bar{X}(\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}']\underset{\sim}{\bar{y}}$$

$a=1$ の時の $\hat{b}_1$ 及び $\hat{c}_1$ の漸近分布は，前節の結果から明かな様に正規分布である．また，$a=1$ の時の $\hat{b}_2$ の漸近分布は，2 節の(5)で与えられ，Dickey (1977) によって数表化されている．$\hat{c}_2$ の漸近分布についても Ahtola and Tiao (1987, a) で与えられている．

これらの検定統計量のパワーについては，$[\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-1}M\underset{\sim}{\bar{y}}_{-1}]^{1/2}$, $[\underset{\sim}{y}'_{-1}\underset{\sim}{y}_{-1}]^{1/2}$, $[\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}'_{-2}L\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}_{-2}]^{1/2}$, $[\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-2}N\underset{\sim}{\bar{y}}_{-2}]^{1/2}$ が決定的なものとなっている．

$$[\underset{\sim}{y}'_{-1}\underset{\sim}{y}_{-1}]^{1/2}\geqq[\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-1}M\underset{\sim}{\bar{y}}_{-1}]^{1/2} \tag{42}$$

$$[\underset{\sim}{\bar{y}}'_{-2}N\underset{\sim}{\bar{y}}_{-2}]^{1/2}\geqq[\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}'_{-2}L\underset{\sim}{\bar{\bar{y}}}_{-2}]^{1/2} \tag{43}$$

であるから，OLS 推定量に基いて構築された $\hat{b}_2$ や $\hat{c}_2$ の方が 4 節で提示された推定量 $\underset{\sim}{\hat{a}}$ に基く $\hat{b}_1$ や $\hat{c}_1$ よりもパワーが高くなっている．また，n の order で評価された各統計量のパワーは，

$$\hat{b}_1=O_p(n^{1/2}) \qquad a\neq 1 \text{ の時} \tag{44}$$

$$\hat{c}_1=O_p(n^{1/2}) \qquad a\neq 1 \text{ の時} \tag{45}$$

$$\hat{b}_2=\begin{cases} O_p(n^{1/2}) & a<1 \text{ の時} \\ O_p(a^n) & \mathrm{a}>1 \text{ の時} \end{cases} \tag{46}$$

$$\hat{c}_2=\begin{cases}O_p(n^{1/2}) & a<1 \text{ の時}\\ O_p(a^n) & \mathrm{a}>1 \text{ の時}\end{cases} \tag{47}$$

(46) (47)は，Tiao and Tsay (1983) の結果を用いて，モデル(36) (37)においてそれぞれ，$a<1$ ならば $\underset{\sim}{y}'_{-1}\underset{\sim}{y}_{-1}=O_p(n)$, $\bar{\underset{\sim}{y}}'_{-2}N\bar{\underset{\sim}{y}}_{-2}=O_p(n)$

$a>1$ ならば $\underset{\sim}{y}'_{-1}\underset{\sim}{y}_{-1}=O_p(a^{2n})$, $\bar{\underset{\sim}{y}}'_{-2}N\bar{\underset{\sim}{y}}_{-2}=O_p(a^{2n})$ であることから出てくる．$\hat{b}_1$ 並びに $\hat{c}_1$ のパワーは，(44) (45)から明かな様に，きわめて標準的な水準となっている．一方，$\hat{b}_2$ 並びに $\hat{c}_2$ のパワーは，explosive case $(a>1)$ で著しく高くなっている．

以上の諸結果は小標本の場合でも概ね認められる．標本数 n が50，100，繰り返しの数50000回での，正規乱数に基く（ε_t が正規分布する場合）モンテカルロ実験による計算結果を掲載しておく．Fig. 1 から Fig. 8 では，帰無仮説 $a=1$ の下での $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ の経験分布と標準正規分布の密度関数が，各々プロットされている．各統計量のパワーについての結果は，表においてまとめられている．

前節の結果から，$a=1$ の時，$\hat{d}_1-1=O_p(n^{-1/2})$, $\hat{f}_1-1=O_p(n^{-1/2})$ であるので，$q>2r>0$ である様な任

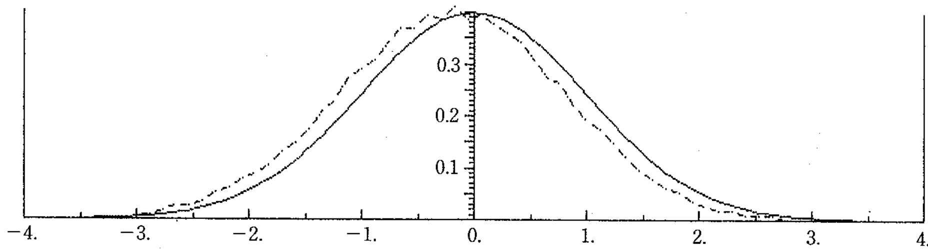

Fig. 1. Estimated density of $\hat{b}_1$ for $a=1$ and $n=50$ ………………
Standard normal density ………………………………

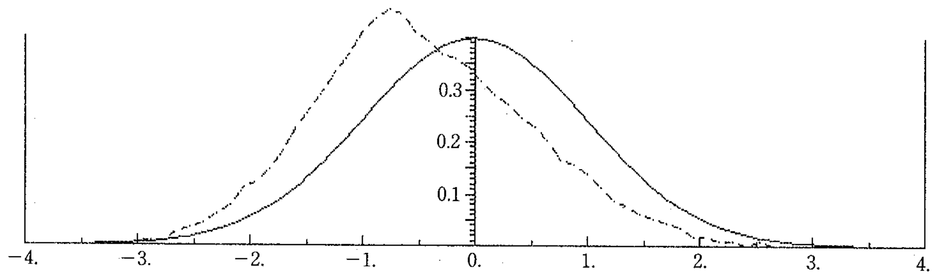

Fig. 2. Estimated density of $\hat{b}_2$ for $a=1$ and $n=50$ ………………
Standard normal density ………………………………

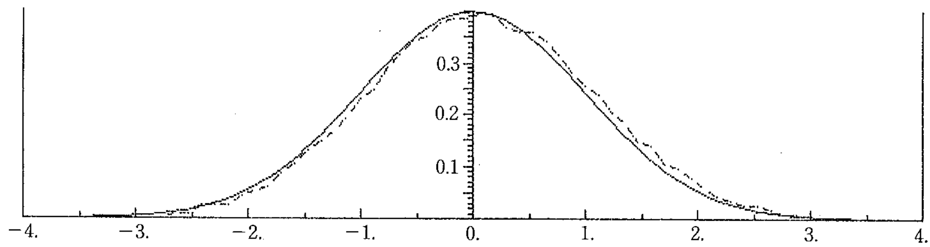

Fig. 3. Estimated density of $\hat{c}_1$ for $a=1$ and $n=50$ ………………
Standard normal density ………………………………

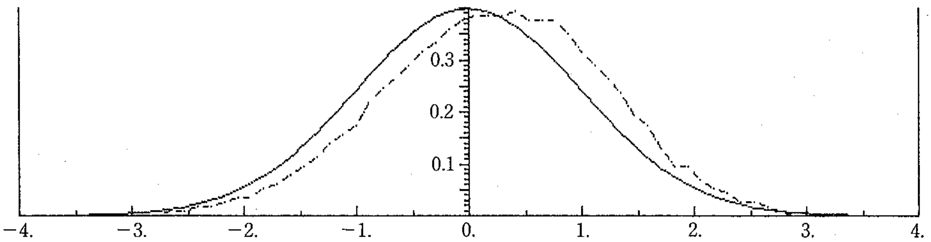

Fig. 4. Estimated density of $\hat{c}_2$ for $a=1$ and $n=50$ ················
Standard normal density ································

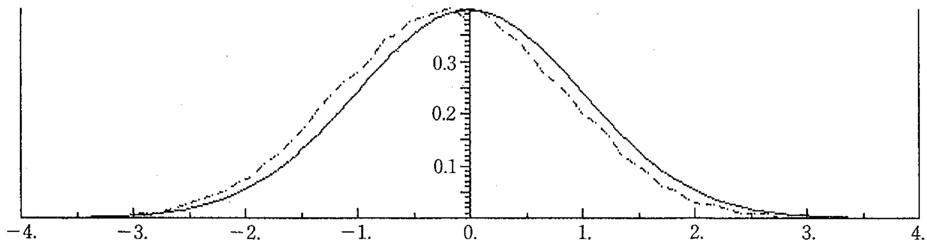

Fig. 5. Estimated density of $\hat{b}_1$ for $a=1$ and $n=100$ ·············
Standard normal density ································

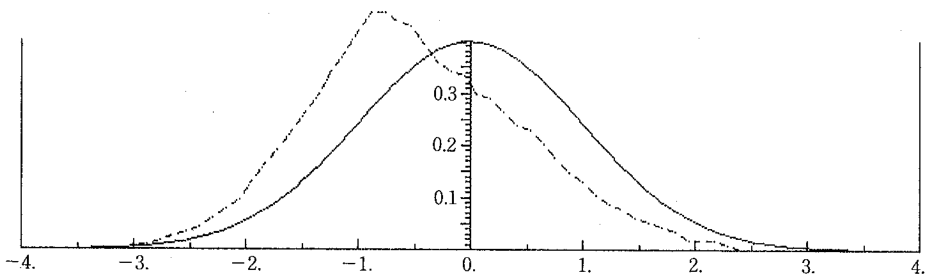

Fig. 6. Estimated density of $\hat{b}_2$ for $a=1$ and $n=100$ ·············
Standard normal density ································

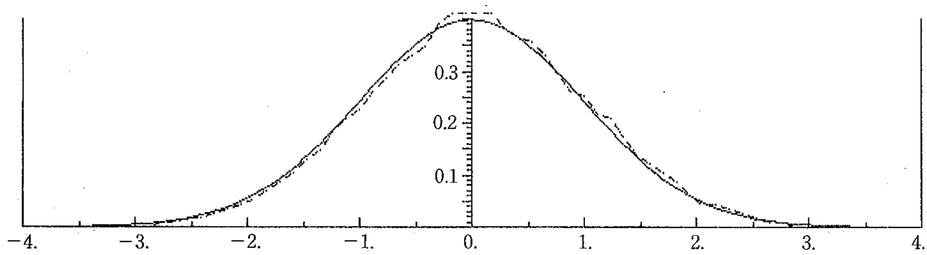

Fig. 7. Estimated density of $\hat{c}_1$ for $a=1$ and $n=100$ ·············
Standard normal density ································

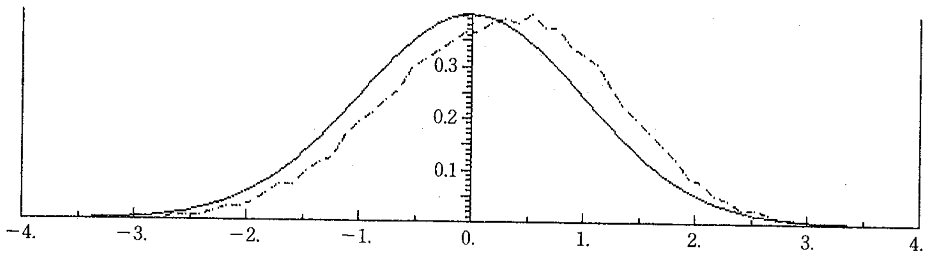

Fig. 8. Estimated density of $\hat{c}_2$ for $a=1$ and $n=100$ ....
Standard normal density ....

表

n	Test	Value of a					
		.80	.90	.95	1.02	1.05	1.1
50	$\hat{b}_1$	0.242	0.089	0.049	0.032	0.047	0.093
	$\hat{b}_2$	0.593	0.193	0.079	0.204	0.694	0.962
	$\hat{c}_1$	0.264	0.096	0.051	0.031	0.046	0.084
	$\hat{c}_2$	0.952	0.501	0.166	0.298	0.885	0.998
100	$\hat{b}_1$	0.4767	0.1548	0.068	0.037	0.069	0.1672
	$\hat{b}_2$	0.9873	0.5677	0.186	0.561	0.967	0.99964
	$\hat{c}_1$	0.498	0.165	0.072	0.037	0.101	0.081
	$\hat{c}_2$	1.00	0.97	0.525	0.778	0.999	1.00

Monte Carlo Power of Two-Sided. Size .05 Tests of $a=1$

意の整数 q, r について,

$$n^r(\hat{d}_1-1)^q=O_p(n^{-\frac{q}{2}+r}) \tag{48}$$

$$n^r(\hat{f}_1-1)^q=O_p(n^{-\frac{q}{2}+r}) \tag{49}$$

が得られる. また, $a\fallingdotseq 1$ の時,

$$n^r(\hat{d}_1-1)^q=O_p(n^r) \tag{50}$$

$$n^r(\hat{f}_1-1)^q=O_p(n^r) \tag{51}$$

(36) (37)における $a=1$ の検定統計量として, それぞれ次の様なものを考える.

$$\hat{b}=\hat{b}_1+n^r(\hat{d}_1-1)^q \tag{52}$$

$$\hat{c}=\hat{c}_1+n^r(\hat{f}_1-1)^q \tag{53}$$

q, r を $q-2r$, r の値が非常に大きくなる様に選んだ時, $\hat{b}$ 及び $\hat{c}$ は, それぞれ帰無仮説 $a=1$ の下で漸近的に正規分布し, 且つ対立仮説 $a\fallingdotseq 1$ の下でも非常にパワーを高くすることができる.

6. ま と め

以上の各節で考察してきた様に, 非定常自己回帰モデルでの OLS 推定は, ある意味で非常に不安定なものとなっている. それは, 単にその漸近分布が標準的でない (正規分布でない) という点だけではなく, 状況次第で (例えば, 定数項の有無等) その漸近分布が大きく変動してしまうということからきている.

OLS に代わるものとして本稿 4 節で提示した推測方式は, 非定常性に対してきわめてロバストである. すなわち, どの様な非定常自己回帰モデルの下でも, その漸近的性質は常に標準的なものになっている.

2節，あるいは，5節で指摘されてきた様に，非定常自己回帰モデルでの OLS 推定量は，標準水準よりも収束の速度が速く，単位根検定におけるパワーもきわめて高いものになっていた．その点からの比較では，常に標準水準の一致性並びにパワーしか持っていない，本稿4節で提示した推定量よりも望ましいものであるかもしれない．しかしながら，パワーについては，5節で論じた様なやり方で改善することができたのであったし，また，非定常自己回帰モデルでの OLS 推定量の有効性もまだ確立されていないのである．

7. 補助定理並びに定理の証明

最初に，補助定理並びに定理の証明に必要な次の補題から述べる．

補題

ある正定数 c 以上の全ての整数に対して定義されている確率変数列 $\{b_n\}$ に対して，

(i) $Pr[b_n \geq 0]=1$

(ii) b_n の確率密度関数は連続である．

(iii) $0<Eb_n=b<\infty$

の3条件が成立するならば，その時，

(A) $b_n>0$ with probability one

(B) $b_n=O_p(1)$

証明

(ii)から $\{b_n=0\}$ となる確率は測度0でなければならない．そのことと(i)より，ただちに(A)がでてくる．(B)についても，もし $b_n=O_p(f_n)$ 及び $\lim_{n\to\infty} f_n=\infty$ であるならば，(i)を考慮すると(iii)が満たされなくなることより明かである． Q. E. D.

補助定理の証明

(i) (31)′より

$$\frac{1}{n}Y'_{-1}[I_{n'k}-X(X'X)^{-1}X']Y_{-1}=\frac{1}{n}V'_{-1}V_{-1}-\frac{1}{n}V'_{-1}X(X'X)^{-1}X'V_{-1} \tag{54}$$

また，

$$V'_{-1}X(X'X)^{-1}X'V_{-1}=V'_{-1}X(EX'X)^{-1/2}[(EX'X)^{-1/2}X'X(EX'X)^{-1/2}]^{-1}(EX'X)^{-1/2}X'V_{-1} \tag{55}$$

任意の $\underset{\sim}{\alpha}\in R^{mk}$ 及び $\underset{\sim}{\beta}\in R^{k^2p}$ （ここで $m=kp+q+1$）に対して，

もし $0<\underset{\sim}{\alpha}'\underset{\sim}{\alpha}<\infty$ 及び $0<\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{\beta}<\infty$ であるならば，

$$\underset{\sim}{\alpha}'(EX'X)^{-1/2}X'X(EX'X)^{-1/2}\underset{\sim}{\alpha}>0 \quad \text{with probability one} \tag{56}$$

$$\underset{\sim}{\alpha}'(EX'X)^{-1/2}X'X(EX'X)^{-1/2}\underset{\sim}{\alpha}=O_p(1) \tag{57}$$

$$\underset{\sim}{\beta}'V'_{-1}X(EX'X)^{-1/2}\underset{\sim}{\alpha}=O_p(1) \tag{58}$$

となることが示される時，(55)の各要素も $O_p(1)$ であることが確立されたことになる．

$\underset{\sim}{\alpha}'(EX'X)^{-1/2}X'X(EX'X)^{-1/2}\underset{\sim}{\alpha}$ がこの節の補題の条件(i)(ii)(iii)を満足することは明らかである．よって，(56) (57)は補題よりでてくる．また，(58)については

$$|\underset{\sim}{\beta}'V'_{-1}X(EX'X)^{-1/2}\underset{\sim}{\alpha}|/|\underset{\sim}{\alpha}'\underset{\sim}{\alpha}|\leqq\underset{\sim}{\beta}'V'_{-1}X(EX'X)^{-1}X'V_{-1}\underset{\sim}{\beta} \tag{59}$$

より，$\underset{\sim}{\beta}'V'_{-1}X(EX'X)^{-1}X'V_{-1}\underset{\sim}{\beta}$ が補題の条件(i)(ii)(iii)を満たしていることが示されるならば充分である．補題の条件(i)(ii)が満たされていることは明らかであるので(iii)についてのみ示すことにする．

$$\underset{(mk\times n'k)}{X'}\underset{(n'k\times k^2p)}{V_{-1}}\underset{(k^2p\times 1)}{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{d}}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{\underset{\sim}{d}}_k \end{bmatrix} \tag{60}$$

ここで，$\underset{(m\times 1)}{\hat{\underset{\sim}{d}}_{k'}} = \begin{bmatrix} \sum_{t=2p+1}^{n} \underset{\sim}{y}_{t-p-1}\left[\sum_{j=1}^{p} \underset{\sim}{v}_{t-j}(p-j)'\underset{\sim}{\beta}_j^{(k')}\right] \\ \vdots \\ \sum_{t=2p+1}^{n} \underset{\sim}{y}_{t-2p}\left[\sum_{j=1}^{p} \underset{\sim}{v}_{t-j}(p-j)'\underset{\sim}{\beta}_j^{(k')}\right] \\ \sum_{t=2p+1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{p} \underset{\sim}{v}_{t-j}(p-j)'\underset{\sim}{\beta}_j^{(k')}\right] \\ \sum_{t=2p+1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{p} \underset{\sim}{v}_{t-j}(p-j)'\underset{\sim}{\beta}_j^{(k')}\right]t \\ \vdots \\ \sum_{t=2p+1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{p} \underset{\sim}{v}_{t-j}(p-j)'\underset{\sim}{\beta}_j^{(k')}\right]t^q \end{bmatrix}$，$\underset{(k^2p\times 1)}{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\beta}^{(1)} \\ \underset{\sim}{\beta}^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\beta}^{(k)} \end{bmatrix}$，$\underset{(kp\times 1)}{\underset{\sim}{\beta}^{(k')}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\beta}_1^{(k')} \\ \underset{\sim}{\beta}_2^{(k')} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\beta}_p^{(k')} \end{bmatrix}$ とする．

$k'=1,\ 2,\ \cdots,\ k$

その時，

$$E\hat{\underset{\sim}{d}}_i\hat{\underset{\sim}{d}}_j' = E\omega(i,\ j)\cdot \underset{(m\times m)}{EZ'Z},\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ k \tag{61}$$

ここで，$\omega(i,\ j) = \sum_{l=1}^{p}\sum_{h=1}^{p} \underset{\sim}{\beta}_l^{(i)'}\underset{\sim}{v}_{t-l}(p-l)\underset{\sim}{v}_{t-h}(p-h)'\underset{\sim}{\beta}_h^{(j)}$

また，Z は(34)において定義されている．(61)は

$$EX'V_{-1}\underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{\beta}'V'_{-1}X$$

$$=E\begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{d}}_1\hat{\underset{\sim}{d}}_1' \cdots\cdots \hat{\underset{\sim}{d}}_1\hat{\underset{\sim}{d}}_k' \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \hat{\underset{\sim}{d}}_k\hat{\underset{\sim}{d}}_1' \cdots\cdots \hat{\underset{\sim}{d}}_k\hat{\underset{\sim}{d}}_k' \end{bmatrix}$$

$$=[\Omega\otimes EZ'Z] \tag{62}$$

ここで $\underset{(k\times k)}{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega(1,\ 1)\cdots\cdots\omega(k,\ 1) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \omega(k,\ 1)\cdots\cdots\omega(k,\ k) \end{bmatrix}$

また，$X=[I_k\otimes Z]$ より

$$(EX'X)^{-1}=[I_k\otimes(EZ'Z)^{-1}] \tag{63}$$

(62) (63)より

$$E\underset{\sim}{\beta}'V'_{-1}X(EX'X)^{-1}X'V_{-1}\underset{\sim}{\beta}$$
$$=\mathrm{tr}(EX'X)^{-1}(EX'V_{-1}\underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{\beta}'V'_{-1}X)=\mathrm{tr}[\Omega\otimes I_m]$$
$$=m\ \mathrm{tr}\,\Omega \tag{64}$$

となるので，$\underset{\sim}{\beta}'V'_{-1}X(EX'X)^{-1}X'V_{-1}\underset{\sim}{\beta}$ は補題の条件(iii)を満たしている．

以上のことより

$$\frac{1}{n}Y'_{-1}[I_{n'k}-X(X'X)^{-1}X']Y_{-1}=\frac{1}{n}V'_{-1}V_{-1}+O_p(n^{-1}) \tag{65}$$

$$\underset{(n'k\times k^2p)}{V_{-1}}=[I_k\otimes\begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}_{2p}(p-1)' & \cdots\cdots \underset{\sim}{y}_{p+1}(0)' \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \underset{\sim}{y}_{n-1}(p-1)' & \cdots\cdots \underset{\sim}{y}_{n-p}(0)' \end{bmatrix}]=[I_k\otimes\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}'_{2p} & \cdots\cdots \underset{\sim}{\varepsilon}'_{p+1} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \underset{\sim}{\varepsilon}'_{n-1} & \cdots\cdots \underset{\sim}{\varepsilon}'_{n-p} \end{bmatrix}A^{-1'}]\text{より}$$

$$\frac{1}{n}V'_{-1}V_{-1}=[I_k\otimes A^{-1}\begin{bmatrix} n^{-1}\sum_{t=2p+1}^{n}\underset{\sim}{\varepsilon}_{t-1}\underset{\sim}{\varepsilon}'_{t-1} & \cdots\cdots n^{-1}\sum_{t=2p+1}^{n}\underset{\sim}{\varepsilon}_{t-1}\underset{\sim}{\varepsilon}'_{t-p} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ n^{-1}\sum_{t=2p+1}^{n}\underset{\sim}{\varepsilon}_{t-p}\underset{\sim}{\varepsilon}'_{t-1} & \cdots\cdots n^{-1}\sum_{t=2p+1}^{n}\underset{\sim}{\varepsilon}_{t-p}\underset{\sim}{\varepsilon}'_{t-p} \end{bmatrix}A^{-1'}] \tag{66}$$

が得られる．

(66)及び $\operatorname*{plim}_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{t=2p+1}^{n}\underset{\sim}{\varepsilon}_{t-i}\underset{\sim}{\varepsilon}'_{t-j}=\delta_{ij}\Sigma,\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ p$

（ここで δ_{ij} はクロネッカー・デルタである；$\delta_{ij}=1$ for $i=j$, $\delta_{ij}=0$ for $i\neq j$)
であることより

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}V'_{-1}V_{-1}=[I_k\otimes A^{-1}DA^{-1'}] \tag{67}$$

(65) (67)より(i)についての結果が示された．

(ii)

$$V'_{-1}X(X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{\varepsilon}=V'_{-1}X(EX'X)^{-1/2}[(EX'X)^{-1/2}X'X(EX'X)^{-1/2}]^{-1}(EX'X)^{-1/2}X'\underset{\sim}{\varepsilon} \tag{68}$$

の各要素が $O_p(1)$ であることが示されれば充分であるが，そのことは(i)と同様にしてこの節の補題を適用して証明される．

(iii) (31)″ (32)″ (33)″より

$$\begin{aligned}\sqrt{n}[\hat{\underset{\sim}{a}}-\underset{\sim}{a}]&=\sqrt{n}\{[Y'_{-1}[I_{n'k}-X(X'X)^{-1}X']Y_{-1}]^{-1}Y'_{-1}[I_{n'k}-X(X'X)^{-1}X']\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{a}\}\\&=\sqrt{n}\{[V'_{-1}[I_{n'k}-X(X'X)^{-1}X']V_{-1}]^{-1}V'_{-1}[I_{n'k}-X(X'X)^{-1}X']\underset{\sim}{v}-\underset{\sim}{a}\}\\&=[n^{-1}V'_{-1}V_{-1}-n^{-1}V'_{-1}X(X'X)^{-1}X'V_{-1}]^{-1}[n^{-1/2}V'_{-1}\underset{\sim}{\varepsilon}-n^{-1/2}V'_{-1}X(X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{\varepsilon}]\end{aligned} \tag{69}$$

また，(33)″より

$$\sqrt{n}[\tilde{\underset{\sim}{a}}-\underset{\sim}{a}]=[n^{-1}V'_{-1}V_{-1}]^{-1}[n^{-1/2}V'_{-1}\underset{\sim}{\varepsilon}] \tag{70}$$

(i)(ii)の証明の中で得られた結果より明らかな様に $V'_{-1}X(X'X)^{-1}X'V_{-1}$ 及び $V'_{-1}X(X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{\varepsilon}$ の各要素は $O_p(1)$ であることより(iii)についての結果が得られる．

(iv) (i)と(iii)の(70)から，

$$n^{-1/2}V'_{-1}\underset{\sim}{\varepsilon}\xrightarrow{h}N(\underset{\sim}{0},\ [\Sigma\otimes A^{-1}DA^{-1'}]) \tag{71}$$

であることを示せば充分である．

$$n^{-1/2}V'_{-1}\underset{\sim}{\varepsilon}=F^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\underset{\sim}{f}}_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \hat{\underset{\sim}{f}}_k\end{bmatrix} \tag{72}$$

ここで $F=(I_k\otimes A)$,

$$\underset{(kp\times 1)}{\hat{f}_j}=\begin{bmatrix} n^{-1/2}\sum_{t=2p+1}^{n}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{jt} \\ \vdots \\ \vdots \\ n^{-1/2}\sum_{t=2p+1}^{n}\varepsilon_{t-p}\varepsilon_{jt} \end{bmatrix},\quad j=1,\ \cdots,\ k,$$

$$\varepsilon_t'=(\varepsilon_{1t},\ \cdots,\ \varepsilon_{kt})$$

$\{\varepsilon_t\}$ についての仮定から

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{f}_k \end{bmatrix} \xrightarrow{h} N(0,\ [\Sigma\otimes D]) \tag{73}$$

であることは容易に示される．(71)は(72)と(73)からただちに得られる．

(v)　(34)より

$$\hat{\Sigma}=\frac{1}{n}Y'[I_{n''}-Z(Z'Z)^{-1})Z']Y$$

$$=\frac{1}{n}\Psi'\Psi-\frac{1}{n}\Psi'Z(Z'Z)^{-1}Z'\Psi \tag{74}$$

また，

$$\frac{1}{n}\Psi'\Psi=\frac{1}{n}\sum_{t=p+1}^{n}\varepsilon_t\varepsilon_t' \tag{75}$$

(i)と同様にして $\Psi'Z(Z'Z)^{-1}Z'\Psi$ の各要素が $O_p(1)$ であることが示され，また，$\underset{n\to\infty}{\mathrm{plim}}\frac{1}{n}\sum_{t=p+1}^{n}\varepsilon_t\varepsilon_t'=\Sigma$ であることも容易に示される．従って，(v)についての結果が得られる．　Q. E. D.

定理の証明

(i)　補助定理(iii)(iv)からただちにでてくる．

(ii)　定理(i)より

$$\sqrt{n}[H'\hat{a}-H'a]\xrightarrow{h}N(0,\ H'[\Sigma\otimes A'D^{-1}A]H)$$

また，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}[H'[\hat{\Sigma}\otimes I_{kp}]\hat{K}^{-1}H]^{-1/2}=[nH'[\hat{\Sigma}\otimes I_{kp}]\hat{K}^{-1}H]^{-1/2}$$

$$=[H'[\hat{\Sigma}\otimes I_{kp}][n^{-1}\hat{K}]^{-1}H]^{-1/2}$$

であること，

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{plim}}[\hat{\Sigma}\otimes I_{kp}]=[\Sigma\otimes I_{kp}]$$

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{plim}}[n^{-1}\hat{K}]^{-1}=[I_k\otimes A'D^{-1}A]$$

よって $\underset{n\to\infty}{\mathrm{plim}}[\hat{\Sigma}\otimes I_{kp}][n^{-1}\hat{K}]^{-1}=[\Sigma\otimes A'D^{-1}A]$ であることなどから明らか．　Q. E. D.

参　考　文　献

Ahtola, J. and G. C. Tiao, (1987, a), Distributions of least squares estimators autoregressive parameters for a process with complex roots on the unit circle, Journal of the Time Series Analysis, Vol. 8, No. 1 1–14.

Ahtola, J. and G. C. Tiao, (1987, b), A note on asymptotic inference in autoregressive models with roots on the

Anderson, T. W., (1959), On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 30, 676-687.

Dickey, D. A., (1977), Estimation and hypothesis testing in nonstationary time series, Unpublished Ph. D. thesis, Iowa State University.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller, (1979), Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, Journal of the American Statistical Association, Vol. 74, 427-431.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller, (1981), Likelihood ratio statistics for autoregresive time series with a unit root, Econometrica, Vol. 49, No. 4, 1057-1072.

Evans, G. B. A. and N. E. Savin, (1981), Testing for unit roots: 1, Econometrica, Vol. 49, No. 3, 753-779.

Evans, G. B. A. and N. E. Savin, (1984), Testing for unit roots: 2, Econometrica, Vol. 52, No. 5, 1241-1269.

Fuller, W. A., (1976), Introduction to Satistical Time Series, Wiley, New York.

Fuller, W. A., (1985), Nonstationary autoregressive time series, in Handbook of Statistics (Time Series in the Time Domain), Vol. 5, ed. by E. J. Hannan etc., North-Holland, 1-23.

Kawashima, H., (1980), Parameter estimation of autoregressive integrated processes by least squares, The Annals of Statistics, Vol. 8, No. 2, 423-435.

Lai, T. L. and D. Siegmund, (1983), Fixed accuracy estimation of an autoregressive parameter, The Annals of Statistics, Vol. 11, No. 2, 478-485.

Nelson, C. R. and C. I. Plosser, (1982), Trends and random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications, Journal of Monetary Economics, Vol. 10, No. 2, 139-162.

Phillips, P. C. B., (1987), Time series regression with a unit root, Econometrica, Vol. 55, No. 2, 277-301.

Phillips, P. C. B. and P. Perron, (1986), Testing for unit root in time series regression, Cowles Foundation Discussion Paper.

Phillips, P. C. B. and S. N. Durlauf, (1986), Multiple time series with integrated variables, Review of Ecomomics Studies, Vol. 55, 473-496.

Phillips, P. C. B. and S. Ouliaris, (1987), Testing for cointegration using principal components methods, Cowles Foundation Discussion Paper.

Satchell, S. E., (1984), Approxiation to the finite sample distribution for nonstable first order stochastic difference equations, Econometrica, Vol. 52, No.,5, 1271-1289.

Solo, V., (1984), The order of differencing in ARIMA moles, Journal of the American Statistical Association, Vol. 79, No. 385, 916-921.

Tiao, G. C. and R. S. Tsay, (1983), Consistency properties of least squares estimates of autoregessive parameters in ARMA models, The Annals of Statistics, Vol. 11, No. 3, 856-871.

Tsay, R. S., (1984), Order selection in nonstationary autoregressive models, The Annals of Statistics, Vol. 12, No. 4, 1425-1433.

Tsay, R. S., and G. C. Tiao, (1984), Consistent estimates of autogressive parameters and extended autocorrelation function for stationary and nonstationary ARIMA models, Journal of the American Statistical Association, Vol. 79, No. 385, 84-96.

West, K. D., (1986), Asymptotic normality, when regressors have a unit, root, Discussion Papers in Economics Woodrow Wilson School, Princeton University, No. 110.

White, J. S., (1958), The limiting distribution of the serial correlation in the explosive case, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 29, 1188-1197.

White, J. S., (1959), The limiting distribution of the serial correlation in the explosive case, II, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 30, 831-834.