反転可能性，単位根，co-integration のための検定方式

小　瀧　光　博

1. はしがき

近年，非定常時系列の統計的分析が，計量経済学や時系列分析の分野における重要な研究テーマの一つとてっている．これまでにも，それに関しての数多くの結果が，様々な問題意識と形態の下で報告されてきており，その結果，非定常時系列の統計的性質がかなりの程度，明らかにされた．とりわけ，経済現象への応用を考えた場合，すなわち，経済時系列に焦点を合わせた場合，非定常時系列の統計的分析は，単位根検定，非確率的トレンドの統計的検出及び co-integration の定式化と推測というテーマに限定されることになる．この様な経済時系列の一つの特徴は，多変量ではなく一変量ごとに考察した時の各々の時系列が，正の実単位根を持っている，すなわち，生のデータ系列の1階の差分をとった系列が，定常過程になっているということである。単に，統計理論だけではなく，経済学的意味という面から，さらには現実の経済データへの応用という点から，様々な意味での貢献が数多くの論文によってなされてきたが，大部分の論文においては，生の‘加工’されない（非定常）系列そのものから構築された検定統計量とその性質を，論じたり応用したりするものであった．

元々，非定常時系列の種類は複雑多岐にわたっており，また，それらのための統計的推測理論も定常時系列の場合と異なり，非定常性の種類に応じて異なってくるのであるが，経済時系列の場合には，正の単位根一つという様に，ある意味で非定常性を一つに固定してしまうことを意味する．

しかしながら，たとえ非定常性のパターンが一つに限定されていたとしても，複数個の時系列を多変量システムとして考察するか一変量ごとに分析するかで，また，時系列に非ゼロ定数項があるか否かでその様相は，大きく異なったものとなるのである．実は，この点に関わってくる問題が，非確率的トレンドや co-integration の存在性なのである．個々に，一変量として考察された経済時系列で，非確率的トレンドの存在による統計的影響を分析し，且つ実際のデータを用いての検証を試みたのが，Nelson and Plosser (1982) である．一方，Engle and Granger (1987), Stock and Watson (1988) 及び Johansen (1988) 等は，複数個の時系列を多変量システムとして考察し，co-integration の概念の定式化と推測を論じた．また，小瀧（1988，1989，1993）は，非確率的トレンドの存在を考慮した場合の co-integration を定式化し，さらにその推測方式を確立した．

これらの論文ではあまり強調されなかったことだが，非確率的トレンドが存在しない場合の co-integration は，実は，問題となっている多変量時系列システムの各々の系列の一階の差分をとることによって得られた，定常な多変量時系列システムの反転不能性と同値な概念となっている．非確率的トレンドが存在している場合でも，co-integration を単に確率トレンドの部分だけを除去するものとして定義するのであれば，それはやはり反転不能性と同値になる．すなわち，co-integration のための統計的検定は，(差分をとることによって得られた多変量定常過程の）反転可能性（あるいは，反転不能性）の検定として考えることができる．また，その特殊ケースとして，一変量時系列での単位根検定は，その階差系列の反転可能性の検定（単位根があるという帰無仮説は，反転可能であるというものに取り替えられる）とみなされることになる．しかしながら，反転可能性のための‘望ましい’検定方式（あるいは，それを通しての co-integration や単位根のための検定方式）を思いつくのは，基礎となっている時系列が定常であるという利点があるにもかかわらずそう容易ではない．このことは，部分的には，反転不能な時系列に対する統計的解析が一般的にいって（非定常時系列の場合よりもはるかに）困難なものとなっているからかも

しれない．実際，‘検定’ではないが，反転不能時系列モデルでのパラメータの推定理論を確立するのは，最も単純なモデル（一階の移動平均過程）の下でさえ非常に困難となっている．例えば，小瀧（1992）を参照せよ．

他方，Phillips and Ouliaris (1988) による試みは，定常化された階差系列を用いての co-integration のための検定統計量の構築であった．そこでは，階差系列の（多変量の）スペクトル関数を推定し，それが周波数 0 の点で非特異となっているか否か（なっている場合が co-integration の存在が認められると判断する）の分析による方式が提唱された．すなわち，反転不能性のための検定を通しての co-integration の検定であった．しかしながら，この論文で提唱された検定方式は，とても‘望ましい’ものとはいえないものである．パワーの点ではとても貧弱であるし，帰無仮説の下での漸近分布も明らかにされていない．従って，定常化された系列を用いることのメリットがまるで活用されていないばかりか，生の非定常データ系列を用いての各種の検定方式に（様々の点で）とても及ばないものとなっている．

本稿の目的は，一変量並びに多変量時系列において，反転可能性のための一つの検定方式を確立することである．対象となる時系列は定常であり，無限次数あるいは有限次数の移動平均過程（MA 過程）で表わされるものを想定する．また，その反転不能性は過度の差分操作 (over-differencing) よってもたらされるものに限定する．すなわち，生のデータ系列は非定常的なものであるが，それを何回か差分することによって定常時系列に変換可能となるが，差分が過度にとられた時，変換された系列は定常ではあるが反転不能に陥ってしまう様な状況が想定されることになる．また，本稿では，一応，定常時系列における反転可能性の検定を分析対象するが，既に述べた様に対象となっている時系列が差分操作の結果得られたものとみなすのであれば，本稿でのアプローチは自動的に co-integration や単位根の検定つながることになる．

本稿で提案される検定方式の特徴は，検定統計量の帰無仮説の下での漸近分布がきわめて標準的なものとなっていることである．すなわち，それ

は正規分布から直接得られる分布（具体的には，t 分布とか F 分布等）となっている．また，帰無仮説の下で導出された漸近分布の形状は，それが対立仮説の下ではどの様になっていくのかを示唆してくれる．そのことは，この検定統計量による検定のパワーの評価につながるものである．対立仮説の下では，帰無仮説の下での分布が‘非心的’なものとなっていき，検定統計量のオーダーが $\sqrt{n}$ （ここで n は標本数とする）となることが示される．これらの結果は，本稿で提案された方式が，Phillips and Ouliaris (1988) によるものの欠陥（パワーが貧弱，帰無仮説の下での漸近分布不明）を克服し，定常化された系列を用いることのメリットが十分に活用されていることを意味するものと思われる．

2. 対象となる時系列並びに反転可能性と単位根ないしは co-integration との関連性

本稿では，一般に以下の様な p 次元の多変量定常過程 $\{y_t\}$ が分析対象となる．

$$y_t = u + \Phi_0 \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{j,n} \varepsilon_{t-j} \tag{1}$$

ここで u は p 次元の定数ベクトル，Φ_0, $\Phi_{j,n}$, $j \geqq 1$, は $p \times p$ の行列，そして $\{\varepsilon_t\}$ は

$$E\varepsilon_t = 0, \quad E\varepsilon_t\varepsilon_t' = I_p, \quad E\varepsilon_{it}^4 < \infty,$$

但し $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \cdots, \varepsilon_{pt})'$，である様な系列的に独立な p 次元確率変数である．また，ここで n は標本数を表わしており，我々は，今後 $\{y_t\}$ についての n 個の標本 $(y_1, \cdots, y_n)$ が得られた下で，それらから検定統計量を構築することになるであろう．(1)に関しては，さらに次の3つの仮定が置かれる．

仮定 I　$\det \Phi_0 \neq 0$

仮定 II　$\det \Phi_n(\lambda) \neq 0$, $\lambda = 1$ 以外の $|\lambda| \leqq 1$ なる任意の λ に対して

ここで $\Phi_n(\lambda) = \Phi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{j,n} \lambda^j$

仮定Ⅲ　$|\Phi_0|+\sum_{j=1}^{\infty}j^{1/2}|\Phi_{j,n}|<\infty$，任意の n（あるいは $n\to\infty$）に対して

(1)の表現は，無限次数の多変量移動平均過程（MA 過程）の形態をとっており、また、Wold 表現とみなすこともできる．また，ある正整数 q に対して，$j\geqq q$ なるすべての j について $\Phi_{j,n}=0$ である時，(1)は有限次数（q 次の）MA 過程となる．なお，(1)において $\Phi_{j,n}$ が標本数 n に依存していることの意味は，単に帰無仮説に非常に‘近い’状態の対立仮説の下での統計的性質が考慮される‘局所’検定の効果を調べるための便宜的なものに過ぎず，‘局所’対立仮説以外の状態の下では $\Phi_{j,n}=\Phi_j$ とみなしてかまわない．

さて，上記の3つの仮定の意味について考察してみよう．MA 過程や Wold 表現における誤差項は，ε_t というよりも $\Phi_0\varepsilon_t$ の方がふさわしいと思われるが，仮定Ⅰは単にこの p 次元の誤差項が p 次元の非退化確率変数（非特異な $p\times p$ 分散行列）であることを意味するきわめて自然なものである．仮定Ⅱは，(1)がもし反転不能状態となっているのであれば，それは1つのタイプのもののみに限定されることを意味している．一般に，$|\lambda|=1$ となる様な λ について，$\det\Phi_n(\lambda)=0$ となる時(1)は反転不能といわれる．すなわち，その時 $1/\det\Phi_n(\lambda)$ はその様な λ に対して展開できなくなり，そのことは(1)から‘意味のある’自己回帰表現（AR 表現）を得ることが可能でなくなることを意味する．この仮定は，その様な反転不能を引き起こす（$|\lambda|=1$ となる）λ を，$\lambda=1$ のみに限定するものである．そのことの背景には，(1)における y_t は必ずしも生のデータ系列ではなく，元々それは非定常なものであり，それを（何回か）差分することによって得られたものが y_t であり，従って反転不能性は単に差分操作の取り過ぎによってのみ起こり得るであろうという（現実の経済時系列データに立脚した）認識がある．特に，$p=1$ の時，すなわち，y_t が一変量時系列である時，この仮定は差分の取り過ぎの状態を端的に示すことになる．
仮定Ⅲは，y_t が定常且つエルゴード的，すなわち，分散行列が有界であるために要請されるものである．y_t のエルゴード性は，$(y_1,\cdots,y_n)$ から

作られる統計量の‘有意味な’漸近的性質を確立するために是非とも必要なものである．

ところで，(1)は

$$y_t - u = \Phi_n(1)\varepsilon_t + v_{t,n} - v_{t-1,n} \tag{2}$$

と書ける．ただし，ここで $\Phi_n(1) = \Phi_0 + \Sigma_{j=1}^{\infty}\Phi_{j,n}$，また，$v_{t,n} = \Sigma_{k=0}^{\infty}\{-\Sigma_{j=k+1}^{\infty}\Phi_{j,n}\}\varepsilon_{t-k}$．$\{y_t\}$ の反転不能性は，(2)の $\Phi_n(1)$ の階数が p よりも小さくなる，すなわち，$\mathrm{rank}\,\Phi_n(1) \equiv r$ とすると $r<p$，ということによっても定義されることになる．この時，

$$A'\Phi_n(1) = 0, \quad \mathrm{rank}\,A = p - r \equiv s$$

となる様な $s \times p$ 行列 A' が存在することになり

$$A'y_t = A'v_{t,n} - A'v_{t-1,n} \tag{3}$$

が導出されることになる．すなわち，$A'y_t$ のどの要素も反転不能となっている．もし，生のデータ系列が y_t ではなく，

$$Z_t - Z_{t-1} = y_t \tag{4}$$

である様な Z_t である（すなわち，y_t は生のデータ系列の１階の差分を取ることによって得られたもの）とし，さらに，$A'u=0$ 並びに $r \geqq 1$ であるならば，A' の各行はいわゆる co-integrating vector を表わしていることになり，$A'Z_t$ は定常過程となる．つまり，y_t の反転不能性，すなわち，$\Phi_n(1)$ の階数が p を下回っているということは，Z_t が co-integrate している（多変量）システムであることを意味するものである．また，$r=0$ は $\Phi_n(1)=0$ と同値であり，それは

$$y_t = v_{t,n} - v_{t-1,n} \tag{3$'$}$$

を意味し，y_t のどの要素も反転不能であり，それ故，Z_t のどの要素も定常過程であることが示される．そのことは，また，Z_t の差分をとって y_t

を作り出すことが無用の行為であるばかりかかえって困難な意味を生じさせる（無用の差分操作によって反転不能性がもたらされたゆえに）ことを意味する．とりわけ，y_t が一変量である時（$p=1$ の時）には，（$\Phi_n(1)$ の階数が p を下回るケースは，$r=0$，すなわち，$\Phi_n(1)=0$ 以外には存在しないという意味で）こういった困難性が端的に顕在化してくる．明らかな様に，$p=1$ のケースでは，y_t の反転不能性は Z_t の定常性（すなわち，単位根を持たない）と同値である．つまり，Z_t が単位根を持っているということは，y_t が反転可能でなければならない，すなわち，$\Phi_n(1)\neq 0$ を意味する．

この節を終えるにあたって，仮定Ⅲの持つ意味として，y_t や(2)における $v_{t,n}$ の分散が有界となることを保障するものであることに触れておく．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\left(|\Phi_0|+\sum_{j=1}^{\infty}j^{1/2}|\Phi_{j,n}|\right)\left(|\Phi_0|+\sum_{j=1}^{\infty}j^{1/2}|\Phi_{j,n}|\right)'\\
&=|\Phi_0||\Phi_0'|+\sum_{j=1}^{\infty}j|\Phi_{j,n}||\Phi_{j,n}'|+|\Phi_0|\left\{\sum_{j=1}^{\infty}j^{1/2}|\Phi_{j,n}'|\right\}+\left\{\sum_{j=1}^{\infty}j^{1/2}|\Phi_{j,n}|\right\}\\
&\quad|\Phi_0'|+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}j^{1/2}h^{1/2}|\Phi_{j,n}||\Phi_{h,n}'|\\
&\equiv M_n
\end{aligned}
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
&E\{\Phi_n(1)\varepsilon_t\varepsilon_t'\Phi_n(1)'\}\\
&=\left(\Phi_0+\sum_{j=1}^{\infty}\Phi_{j,n}\right)\left(\Phi_0+\sum_{j=1}^{\infty}\Phi_{j,n}\right)'<M_n\\
&Ev_{t,n}v_{t,n}'=Ev_{t-1,n}v_{t-1,n}'\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\min\{j,\ k\}\Phi_{j,n}\Phi_{k,n}'<M_n
\end{aligned}
$$

であることが示されることになる．

3. 反転可能性のための望ましい検定総計量の導出をめぐって

(1)によって生成される $\{y_t\}$ について，n 個の標本 $(y_1,\cdots,y_n)$ が得ら

れた下で，y_t の反転可能性のための検定について考察しよう．今，検定のための帰無仮説を

$$H_0 : \det \Phi_n(1) \equiv \alpha_n \neq 0 \quad 及び \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n \equiv \alpha \neq 0$$

と表わすことにする．これは，$\{y_t\}$ が反転可能である状態を帰無仮説としていることを意味するものである．そうすると，対立仮説としては，$\{y_t\}$ の反転不能状態を定式化するものが採用されることになり，

$$H_1 : \det \Phi_n(1) = 0$$

また，帰無仮説の近傍というべき‘局所的’対立仮説は，

$$K_1 : \det \Phi_n(1) \equiv \alpha_n \neq 0 \quad 及び \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

と表わされることになる．

それでは，上記の仮説 H_0 を検定するために，どの様な統計量を考案し，利用するのが望ましいのであろうか？　一般に，望ましい検定方式とは，高いパワーを持つものと解釈されるであろう．それは，多分 H_0 の状態と H_1 や K_1 の状態で，大きくその性質が異なったものとなってくる様な統計量が検定に用いられた時実現するであろう．また，検定が行なわれる際には，当然その有意点の値がわかっていなければならない．そのことは，検定に用いられる統計量の，帰無仮説の下での確率分布が明らかにされているということであるが，実際には時系列分析においては，標本数 n が大きくない時の統計量の性質はほとんどの場合解明できないものであるので，それは n が大きい時の漸近的な確率分布ということになるであろう．その意味からいくと，パワーについても漸近的なパワーを評価の対象とすればよいであろう．つまり，望ましい検定方式とは，H_0 の下での漸近分布が知られていて，且つそれが H_1 や K_1 の下では大きく異なったものとなってくる様な統計量を，検定に用いることによって達成されるであろう．そうすると，その様な統計量を見い出すことが要請されることになる．

ところで，上記の要請を満足する様な統計量を論じようとすると，一般

的なケースではあまりに複雑になり過ぎてその本質的意味が見失なわれがちになることが多々ある．そこで，さしあたり，(2)において，$p=1$, $u=0$, $v_{t,n}=v_t$ とした特殊ケース

$$y_t=\phi(1)\varepsilon_t+v_t-v_{t-1} \tag{2$'$}$$

を考察しよう．ただし，(2)での $\Phi_n(1)$ はここでは $\phi(1)$ と表わされている．今，ある正整数 q に対して，

$$y_n(q)=n^{-q-1/2}\sum_{t=2}^{n}t^q y_t$$

という統計量の性質について論じよう．(2)$'$より

$$\begin{aligned}y_n(q)&=\phi(1)n^{-q-1/2}\sum_{t=2}^{n}t^q\varepsilon_t+n^{-q-1/2}\Big\{n^q v_n+\sum_{t=2}^{n-1}t^q v_t-\sum_{t=2}^{n-1}\\&\qquad(t+1)^q v_t-2^q v_1\Big\}\\&=\phi(1)n^{-q-1/2}\sum_{t=2}^{n}t^q\varepsilon_t+l_n\end{aligned}$$

ここで $l_n=n^{-1/2}v_n-n^{-1/2}n^{-1}\Big\{\Sigma_{t=2}^{n-1}[q(t/n)^{q-1}+O(t^{q-2}/n^{q-1})]v_t\Big\}-n^{-q-1/2}2^q v_1$

また，$(t+1)^q=t^q+qt^{q-1}+O(t^{q-2})$ であることを記しておこう．任意の t に対して

$$q(t/n)^{q-1}+O(t^{q-2}/n^{q-1})\leqq M$$

となる様なある正数 M が存在することより，$l_n=O_p(n^{-1/2})$ であることがわかる．すなわち，この統計量の H_0 の下での漸近分布は，$\phi(1)n^{-q-1/2}\Sigma_{t=2}^{n}t^q\varepsilon_t$ のそれであり，また，H_1 の下では（$\phi(1)=0$ となっていることより）この統計量は $O_p(n^{-1/2})$ であり，n の増加とともに0に収束していく．

それでは，$\phi(1)n^{-q-1/2}\Sigma_{t=2}^{n}t^q\varepsilon_t$ の漸近分布はどの様なものとなるであろうか？　単にこのことについてだけではなく，本稿における主要な結果を導出するために，我々は次の3つの補題を用意する必要がある．

補題1.　(1)において定式化されている ε_t に対して，次の様な量を定義しよう．

$$Z_n=\sum_{t=2}^{n}s_t'\varepsilon_t/\left\{\sum_{t=2}^{n}s_t's_t\right\}^{1/2}$$

ここで，$s_t=\sum_{j=0}^{r}a_j(t/n)^j$，また，$a_j, j=0, 1, \cdots, r$，は，$0<a'a<\infty$ を満たす様な任意の p 次元定数ベクトル．ただし，$a=(a_0', a_1', \cdots, a_r')$．そき時，$Z_n$ は漸近的に標準正規分布に従う．

証明： Liapounov の中心極限定理（例えば，Fuller (1976) p. 199, Theorem 5.3.2 を見よ）を適用する．$e_t=s_t'\varepsilon_t$, $u_t=Ee_t$, $\sigma_t^2=E\{(e_t-u_t)^2\}$ 及び $V_n=\Sigma_{t=1}^{n}\sigma_t^2$ と置こう．

その時

$$\begin{aligned}
u_t &=Es_t'\varepsilon_t=0\\
\sigma_t^2 &=E(s_t'\varepsilon_t)^2=s_t's_t\\
V_n &=\sum_{t=1}^{n}s_t's_t\\
&=\sum_{t=2}^{n}\left\{\sum_{j=0}^{r}a_j'(t/n)^j\right\}\left\{\sum_{i=0}^{r}a_i(t/n)^i\right\}\\
&=\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=1}^{r}a_j'a_i\left\{\sum_{t=2}^{\infty}t^{j+i}/n^{j+i}\right\}\\
&=a'[K_n\otimes \mathrm{I_p}]\mathrm{a}
\end{aligned}$$

ここで $[K_n\otimes \mathrm{I_p}]$ は，K_n と I_p のクロネッカー積を表わしている．また，$(r+1)\times(r+1)$ 行列 K_n は

$$K_n=\begin{pmatrix}
\Sigma_{t=2}^{n}1 & \Sigma_{t=2}^{n}(t/n) & \cdots\Sigma_{t=2}^{n}(t/n)^r\\
\Sigma_{t=2}^{n}(t/n) & \Sigma_{t=2}^{n}(t/n)^2 & \cdots\Sigma_{t=2}^{n}(t/n)^{r+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\Sigma_{t=2}^{n}(t/n)^r & \Sigma_{t=2}^{2}(t/n)^{r+1} & \cdots\Sigma_{t=2}^{n}(t/n)^{2r}
\end{pmatrix}$$

と書かれる．さらに $s_1=0$ と置かれている．明らかに

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}K_n = K \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots 1/(r+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots 1/(r+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots \\ 1/(r+1) & 1/(r+2) & \cdots 1/(2r+1) \end{pmatrix}$$

であることより，

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}V_n = a'\,[K \otimes \mathrm{I_p}]\mathrm{a} < \infty$$

よって $V_n = O(n)$

次にいわゆる Liapounov Condition が満たされていること（例えば，前述の Fuller (1976) の Theorem 5.3.2 において $\delta=2$ とする時）を確かめる．

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n}\int |e_t - u_t|^4 dF_t(e_t) &= \sum_{t=1}^{n} E(s_t'\varepsilon_t)^4 \\ &= \sum_{t=1}^{n} E\left(\sum_{i=1}^{p} s_{it}\varepsilon_{it}\right)^4 \\ &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{p}\sum_{i_2=1}^{p}\sum_{i_3=1}^{p}\sum_{i_4=1}^{p} s_{i_1t}s_{i_2t}s_{i_3t}s_{i_4t}E(\varepsilon_{i_1t}\varepsilon_{i_2t}\varepsilon_{i_3t}\varepsilon_{i_4t}) \\ &\leqq \gamma\sum_{t=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{p}\sum_{i_2=1}^{p}\sum_{i_3=1}^{p}\sum_{i_4=1}^{p} s_{i_1t}s_{i_2t}s_{i_3t}s_{i_4t} \\ &= \gamma\sum_{t=1}^{n}(s_t's_t)^2 \\ &= \gamma\sum_{t=2}^{n}\left(\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} a_i'a_j[t/n]^{i+j}\right)^2 \end{aligned}$$

ここで $F_t(e_t)$ は e_t の分布関数，γ は（$\gamma<\infty$ となる）ある正数，また，$s_t = (s_{1t}, \cdots, s_{pt})'$.

$$\sum_{t=2}^{n}(t/n)^m = O(n),\ \text{任意の正整数}\ m\ \text{に対して}$$

であることに注意すれば，

$$\sum_{t=1}^{n}\int |e_t - u_t|^4 dF_t(e_t) = O(n)$$

であるこは明らかである．また，$V_n^2 = O(n^2)$ であることにも注意すると

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{t=1}^{n}\int|e_t-u_t|^4dF_t(e_t)\right\}\Big/V_n^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{t=1}^{n}E(s_t'\varepsilon_t)^4\right\}\Big/\left(\sum_{t=1}^{n}s_t's_t\right)^2=0$$

であることが直ちに示されるので, Liapounov Condition が成立すること，それ故，Liapounov の中心極限定理が適用できることが確立されたことになる.

Q. E. D.

補題2.　補題1と同じ ε_t と s_t に対して，$n^{-1/2}\Sigma_{t=2}^{n}s_t'\varepsilon_t$ は漸近的に平均0分散 $a'[K\otimes\mathrm{I_p}]\mathrm{a}$ の正規分布に従う．ここで，a は s_t の定義の中で用いられている.

証明：上の補題1と Fuller (1976) p. 198～199 Corollary 5.2.6.1 を適用する.

$$x_n=\left\{n^{-1}\sum_{t=2}^{n}s_t's_t\right\}^{1/2}$$

とすると，我々は補題1において，

$$Z_n\xrightarrow{\mathcal{L}}Z,\quad Z\sim N(0,\ 1)$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n^2=a'[K\otimes\mathrm{I_p}]\mathrm{a}$$

となることを示した．$b=\{a'[K\otimes\mathrm{I_p}]\mathrm{a}\}^{1/2}$ とすると，Fuller (1976) Corollary 5.2.6.1(ii) の結果より

$$n^{1/2}\sum_{t=2}^{n}s_t\varepsilon_t=x_nZ_n\xrightarrow{\mathcal{L}}bZ$$

が得られる．$bZ\sim N(0,\ b'b)$ であることは明らかであるので，この補題の結論が示されたことになる．なお，$Z_n\xrightarrow{\mathcal{L}}Z$ は，Z_n の確率分布が漸近的に Z に収束していくことを意味するものとする.

Q. E. D.

補助3.　補題1と同じ ε_t に対して，$(r+1)p$ 次元確率変数

$$f_n=\left(n^{-1/2}\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t',\ n^{-3/2}\sum_{t=2}^{n}t\varepsilon_t',\ \cdots,\ n^{-r-1/2}\sum_{t=2}^{n}t^r\varepsilon_t'\right)'$$

を定義すると，f_n は漸近的に平均0，分散［$K\otimes \mathrm{I_p}$］の多変量正規分布に従う

証明：$n^{-1/2}\sum_{t=2}^{n}s_t'\varepsilon_t$

$$=n^{-1/2}\sum_{t=2}^{n}\left(\sum_{j=0}^{r}a_j'(t/n)^j\right)\varepsilon_t$$

$$=\sum_{j=0}^{r}n^{-1/2-j}\sum_{t=2}^{n}a_j'\varepsilon_t$$

$$=a'f_n$$

であることに注意すると，補題2と Fuller (1976) p. 200 Theorem 5.3.3 並びに Lemma 2 より明らかである．ここで，s_t, a_j, a は補題1において与えられたものであり，a については $0<a'a<\infty$ である様な任意の $(r+1)p$ 次元定数ベクトルとみなされている．

Q.E.D.

上の補題3より，$\phi(1)n^{-q-1/2}\Sigma_{t=2}^{n}t^q\varepsilon_t$ の，換言すると，H_0 の下での $y_n(q)$ の漸近分布は平均0，分散 $\phi^2(1)/(2q+1)$ の正規分布であることがわかる。また，$r\neq q$ なる正整数 r に対して，$(y_n(q),\ y_n(r))'$ の同時分布は，漸近的に平均0で分散行列が

$$\phi^2(1)\begin{bmatrix}1/(2q+1) & 1/(q+r+1)\\ 1/(q+r+1) & 1/(2r+1)\end{bmatrix}$$

となる様な正規分布であることがたやすく確かめられる．

ところで，$y_n(q)$ とか $y_n(r)$ そのものは明らかに検定統計量足り得ない．なぜならば，それらの漸近分布の形状は（正規分布として）知られていても未知パラメータ $\phi(1)$ に依存するものとなっているからである．しかし

ながら，$(y_n(q), y_n(r))'$ の漸近分布は，これらの統計量を用いての‘望ましい’検定統計量の構築の仕方を，ある程度示唆してくれる．すなわち，$y_n(q)$ と $y_n(r)$ のある1次結合は，多分 $y_n(q)$ か $y_n(r)$ のいずれかと漸近的に独立に正規分布する様なものであろうし，それらを適当に組み合せるならば，漸近的に t 分布する様な統計量が構築できるものと思われる．

4.　一変量時系列のための反転可能性検定

この節では，3節の(2)′（すなわち，(2)において $p=1,\ u=0,\ v_{t,n}=v_t$）を想定して分析を行う．3節で定義された $r \neq q$ なる $y_n(q)$ と $y_n(r)$ について，まず，$y_n(q)-y_n(r)$ の統計的性質について考察しよう．(2)′より

$$\begin{aligned}
&y_n(q)-y_n(r)\\
&=\phi(1)\left\{n^{-q-1/2}\sum_{t=2}^{n}t^q\varepsilon_t-n^{-r-1/2}\sum_{t=2}^{n}t^r\varepsilon_t\right\}-n^{-1}\cdot n^{-(q-1)-1/2}\sum_{t=2}^{n-1}\\
&\quad\{qt^{q-1}+O(t^{q-2})\}v_t-n^{-q-1/2}v_1 2^q+n^{-1}\cdot n^{-(r-1)-1/2}\sum_{t=2}^{n-1}\\
&\quad\{rt^{r-1}+O(t^{r-2})\}v_t+n^{-r-1/2}v_1 2^r
\end{aligned}$$

$n^{-1/2}\Sigma_{t=2}^{n-1}(t/n)^r=O(1)$，任意の正整数 r に対して，であることに注意すると，

$$y_n(q)-y_n(r)=\phi(1)\varepsilon_n(q,\ r)+O_p(n^{-1}) \tag{5}$$

であることが示される．ただし，$\varepsilon_n(q,\ r)=n^{-q-1/2}\Sigma_{t=2}^{n}t^q\varepsilon_t-n^{-r-1/2}\Sigma_{t=2}^{n}t^r\varepsilon_t$．また，任意の正整数 m に対して，$\varepsilon_n(m)=n^{-m-1/2}\Sigma_{t=2}^{n}t^m\varepsilon_t$ と置くことにする．我々は3節において

$$y_n(m)=\phi(1)\varepsilon_n(m)+O_p(n^{-1/2}) \tag{6}$$

であることを示した．補題3（あるいは補題2）より，互いに異なる正整数 $m,\ q,\ r$ に対して，

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_n(m)\\ \varepsilon_n(q,\ r)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_n(m)\\ \varepsilon_n(q)\\ \varepsilon_n(r)\end{pmatrix}$$

であることに注意すれば，$(\varepsilon_n(m),\ \varepsilon_n(q,\ r))$ は漸近的に平均０，分散行列が

$$\begin{pmatrix}1/(2m+1) & 1/(m+q+1)-1/(m+r+1)\\ 1/(m+q+1)-1/(m+r+1) & 1/(2q+1)+1/(2r+1)-2/(q+r+1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1/(2m+1) & (r-q)/(m+q+1)(m+r+1)\\ (r-q)/(m+q+1)(m+r+1) & 2(r-q)^2/(2q+1)(2r+1)(q+r+1)\end{pmatrix}$$

となる正規分布に従うことが示される．平均０，分散行列

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$$

となる様な正規分布に従う（２次元）確率変数 $(l_1,\ l_2)'$ に対して，$(l_1-(\sigma_{12}/\sigma_{22})l_2,\ l_2)'$ は平均０，分散行列

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}-\sigma_{12}^2/\sigma_{22} & 0\\ 0 & \sigma_{22}\end{pmatrix}$$

となる正規分布に従う．すなわち，$l_1-(\sigma_{12}/\sigma_{22})l_2$ と l_2 は独立に正規分布する確率変数となっている．その議論に従えば，$\varepsilon_n(m)-l(m,\ q,\ r)\varepsilon_n(q,\ r)$ と $\varepsilon_n(q,\ r)$ も統計的に独立且つ正規分布に従う確率変数となっている．ここで，$l(m,\ q,\ r)=\{1/(m+q+1)-1(m+r+1)\}\ /\ \{1/(2\mathrm{q}+1)+1/(2\mathrm{r}+1)-2/(\mathrm{q}+\mathrm{r}+1)\}$．すなわち，$(\varepsilon_n(m)-l(m,\ q,\ r)\varepsilon_n(q,\ r),\ \varepsilon_n(q,\ r))'$ は漸近的に平均０，分散行列

$$\Gamma=\begin{pmatrix}1/(2m+1)-\{1/(m+q+1)-1/(m+r+1)\}l(m,q,r) & 0\\ 0 & 1/(2q+1)+1/(2r+1)-2/(q+r+1)\end{pmatrix}$$

の正規分布に従う．また，

$$y_n(m)-l(m,q,r)\{y_n(q)-y_n(r)\}=\phi(1)\{\varepsilon_n(m)-l(m,q,r)\varepsilon_n(q,r)\}+O_p(n^{-1/2}) \tag{7}$$

及び(5)は，$(y_n(m)-l(m,\ q,\ r)\{y_n(q)-y_n(r)\},\ y_n(q)-y_n(r))'$ が漸近的に平均０，分散行列 $\phi^2(1)\ \Gamma$ の正規分布に従うことを意味する．ただし，

それはあくまで $\phi(1) \neq 0$, すなわち H_0 の下でのみ意味を成すものである．

$\gamma_{11}=1/(2m+1)-\{1/(m+q+1)-1/(m+r+1)\}l(m,\ q,\ r)$ 及び $\gamma_{22}=1/(2q+1)+1/(2r+1)-2/(q+r+1)$ としよう．

$[y_n(m)-l(m,\ q,\ r)\{y_n(q)-y_n(r)\}]/\gamma_{11}^{1/2}\phi(1)$ と $\{y_n(q)-y_n(r)\}/\gamma_{22}^{1/2}\phi(1)$ は，漸近的に互いに独立に標準正規分布に従うことを念頭に置いて，次の様な統計量 $\hat{s}_1$ を定義する．

$$\hat{s}_1=\frac{[y_n(m)-l(m,q,r)\{y_n(q)-y_n(r)\}]/\gamma_{11}^{1/2}}{\{y_n(q)-y_n(r)\}/\gamma_{22}^{1/2}}$$
$$=\frac{[y_n(m)-l(m,q,r)\{y_n(q)-y_n(r)\}]/\gamma_{11}^{1/2}\phi(1)}{\{y_n(q)-y_n(r)\}/\gamma_{22}^{1/2}\phi(1)} \tag{8}$$

(8) の第2番目の等式の右辺において，$H_0{:}\phi(1) \neq 0$ の下で，その分子と分母は漸近的に互いに独立に標準正規分布に従う量である．その時，つまり，H_0 の下で，$\hat{s}_1$ は漸近的に Cauchy 分布に従うことが示される．それについては，例えば，Hogg and Craig (1978) p. 142 4.22 あるいは Kendall and Stuart (1958) p. 268 Example 11.21 を見よ．また，H_1 の下では，(5)及び(7)より，$\hat{s}_1$ （を構成する分数）の分子は $O_p(n^{-1/2})$ であり，また分母の方は $O_p(n^{-1})$ であることより，$\hat{s}_1=O_p(n^{1/2})$ であることが示される．

また，$\hat{s}_1$ に関連して，以下の様な統計量 $\hat{s}_2$ も定義する

$$\hat{s}_2=\frac{[y_n(m)-l(m,q,r)\{y_n(q)-y_n(r)\}]/\gamma_{11}^{1/2}}{[\{y_n(q)-y_n(r)\}^2/\gamma_{22}]1/2}$$
$$=\frac{[y_n(m)-l(m,q,r)\{y_n(q)-y_n(r)\}]/\gamma_{11}^{1/2}\phi(1)}{[\{y_n(q)-y_n(r)\}^2/\gamma_{22}\phi^2(1)]^{1/2}} \tag{9}$$

ここで，H_0 の下で，$[y_n(m)-l(m,\ q,\ r)\{y_n(q)-y_n(r)\}]/\gamma_{11}^{1/2}\phi(1)$ は漸近的に標準正規分布に従い，また，$\{y_n(q)-y_n(r)\}^2/\gamma_{22}\phi^2(1)$ は漸近的に自由度1のカイ2乗分布に従い，さらに，これらは漸近的に独立である．それ故に，H_0 の下で，$\hat{s}_2$ は漸近的に自由度1の t 分布に従うことが示され

る．例えば，Hogg and Craig (1978) p. 143〜145. また，H_1 の下では，(5)及び(7)より，$\hat{s}_1$ の場合と同様にして，$\hat{s}_2=O_p(n^{1/2})$ であることが示される．

以上の結果は，$\hat{s}_1$ や $\hat{s}_2$ が検定に用いられた時，それは十分に‘望ましい’性質を持っていることを示すものである．すなわち，H_0 の下での漸近分布はわかっており，漸近的な意味での有意点は容易に計算できる．また，H_1 の下ではこれらの統計量は $O_p(n^{1/2})$ となり，それは，これらの統計量に基く検定が標準的な程度のパワーを持った consistent 検定になっていることを意味するものである．

5. 多変量時系列のための反転可能性検定

観測値 $(y_1, \cdots, y_n)$ についてのベクトル・行列表現によって，(2)は

$$\underset{(n\times p)}{Y} = \underset{(n\times 1)}{1_n}\ \underset{(1\times p)}{u'} + \underset{(n\times p)}{E}\ \underset{(p\times p)}{\Phi_n(1)'} + \underset{(n\times p)}{V} - \underset{(n\times p)}{V_{-1}} \tag{10}$$

と書ける．ここで，1_n はすべての要素が1である様な n 次元（定数）ベクトル，$Y=(y_1, \cdots, y_n)'$, $E=(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)'$, $V=(v_{1,n}, \cdots, v_{n,n})'$, そして $V_{-1}=(v_{0,n}, \cdots, v_{n-1,n})'$. さらに，任意の非負整数 q に対して，次の様な n 次元定数ベクトルを定義しよう．

$$l(q)=(1^q, \cdots, n^q)'$$

今，ある正整数 q に対して

$$Y_n(q)=n^{-q-1/2}h(q)^{-1/2}Y'[I_n-1_n(1_n'1_n)^{-1}1_n']l(q)$$

という統計量の性質について論じよう．ただし，ここで $h(q)=q^2/(2q+1)(q+1)^2$. この $Y_n(q)$ は，3節で，(2)の特殊ケースであるところの(2)′において定義された $y_n(q)$ を，u が必らずしも0でない場合をも考慮して，一般の(2)のために拡張したものと解釈されるかもしれない．

$Y_n(q)$ が p 次元ベクトルであることにも注意する必要があろう．(10)より

$$Y_n(q)=\Phi_n(1)[h(q)^{-1/2}n^{-1/2}\{n^{-q}E'l(q)-E'l_n\cdot n^{-q}(1_n'1_n)^{-1}1_n'$$
$$l(q)\}]+h(q)^{-1/2}[n^{-q-1/2}\{V'l(q)-V_{-1}'l(q)\}-n^{-1/2}\{V'l_n$$
$$-V_{-1}'1_n\}n^{-q}(1_n'1_n)^{-1}1_n'l(q)$$

であることが示される．また，

$$1_n'l(q)=\sum_{t=1}^{n}t^q=n^{q+1}/(q+1)+O(n^q)$$

$$n^{-q}(1_n'1_n)^{-1}1_n'l(q)=n^{-q-1}\sum_{t=1}^{n}t^q=1/(q+1)+O(n^{-1})$$

$$E'l(q)=\sum_{t=1}^{n}t^q\varepsilon_t,\quad E'1_n=\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t$$

$$V'l(q)=\sum_{t=1}^{n}t^qv_{t,n}=n^qv_{n,n}+\sum_{t=1}^{n-1}t^qv_{t,n}$$

$$V_{-1}'l(q)=\sum_{t=1}^{n}t^qv_{t-1,n}=\sum_{t=1}^{n-1}(t+1)^qv_{t,n}+v_{0,n}$$

であることに注意し，さらに，

$$\begin{aligned}n^{-q-1/2}\{V'l(q)-V_{-1}'l(q)\}&=n^{-q-1/2}\Big\{n^qv_{n,n}+(-1)\sum_{t=1}^{n-1}[(t+1)^q-t^q]\\&\qquad v_{t,n}-v_{0,n}\Big\}\\&=n^{-1/2}v_{n,n}-n^{-1}\Big\{qn^{-(q-1)-1/2}\sum_{t=1}^{n-1}t^{q-1}v_{t,n}\\&\qquad+n^{-(q-1)-1/2}\sum_{t=1}^{n-1}O(t^{q-2})v_{t,n}\Big\}-n^{-q-1/2}v_{0,n}\\&=O_p(n^{-1/2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n^{-1/2}\{V'1_n-V_{-1}'1_n\}&=n^{-1/2}\{v_{n,n}-v_{0,n}\}\\&=O_p(n^{-1/2})\end{aligned}$$

であることが示されるので，

$$Y_n(q)=\Phi_n(1)h(q)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\{(t/n)^q-1/(q+1)\}\varepsilon_t/n^{1/2}+O_p(n^{-1/2})$$

であることが確立される．$Y_n(q)$ は

$$Y_n(q)=n^{-q-1/2}h(q)^{-1/2}\left\{\sum_{t=1}^{n}t^q y_t-\left(\sum_{t=1}^{n}t^q/n\right)\left(\sum_{t=1}^{n}y_t\right)\right\}$$

と書けることに注意せよ．また，$E_n(q)=h(q)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\{(t/n)^q-1/(q+1)\}\varepsilon_t/n^{1/2}$ と置くと

$$Y_n(q)=\Phi_n(1)E_n(q)+O_p(n^{-1/2}) \tag{11}$$

という関係が得られる．本稿の補題2と3より，$E_n(q)$ は漸近的に0，分散行列が I_p となる様な（p 次元）正規分布に従う確率変数であることが示される．ここで

$$h_n(q)=n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\{(t/n)^q-1/(q+1)\}^2$$

とすると，

$$\begin{aligned}h_n(q)&=n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\{(t/n)^{2q}+1/(q+1)^2-2(t/n)^q(1/(q+1))\}\\&=\frac{1}{2q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}-\frac{2}{(q+1)^2}+O(n^{-1})\\&=q^2/(2q+1)(q+1)^2+O(n^{-1})\\&=h(q)+O(n^{-1})\end{aligned}$$

$$E\left\{n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}[(t/n)^q-1/(q+1)]\varepsilon_t\right\}\left\{n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}[(t/n)^q-1/(q+1)]\varepsilon_t\right\}'$$
$$=h_n(q)I_p$$

であることに注意せよ．

次に，$q\neq r$ なる正整数 q と r に対して，以下の様な統計量 $Y_n(q,\ r)$ の性質について考察しよう．

$$Y_n(q,\ r)=h(q,\ r)^{-1/2}h(q)^{1/2}Y_n(q)-h(q,\ r)^{-1/2}h(r)^{1/2}Y_n(r)$$

ここで $h(q,\ r)=h(q)+h(r)-2k(q,\ r)$，また $k(q,\ r)=qr/(q+r+1)(q+1)(r+1)$．この $Y_n(q,\ r)$ も，4節で論じられた $y_n(q)-y_n(r)$ の，一般的ケースへの拡張と解釈できるであろう．$E_n(q,\ r)$ を

$$E_n(q,\ r)=h(q,\ r)^{-1/2}h(q)^{1/2}E_n(q)-h(q,\ r)^{-1/2}h(r)^{1/2}E_n(r)$$
$$=h(q,\ r)^{-1/2}n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\{(t/n)^q-1/(q+1)-(t/n)^r+1/(r+1)\}\varepsilon_t$$

と定義しよう．その時，$Y_n(q)$ 並びに $Y_n(r)$ の定義と(11)より

$$Y_n(q,\ r)=\Phi_n(1)E_n(q,\ r)+n^{-1/2}h(q,\ r)^{-1/2}\Bigg[\Bigg\{\sum_{t=1}^{n}\Bigg[(t/n)^q-\left(n^{-q-1}\sum_{s=1}^{n}s^q\right)\Bigg](v_{t,n}-v_{t-1,n})\Bigg\}-\Bigg\{\sum_{t=1}^{n}\Bigg[(t/n)^r-\left(n^{-r-1}\sum_{s=1}^{n}s^r\right)\Bigg](v_{t,n}-v_{t-1,n})\Bigg\}\Bigg]$$

さらに，任意の正整数 m に対して

$$n^{-m-1}\sum_{s=1}^{n}s^m=1/(m+1)+O(n^{-1})$$

$$(t+1)^m-t^m=mt^{m-1}+O(t^{m-2})$$

$$\sum_{t=1}^{n}(t/n)^m(v_{t,n}-v_{t-1,n})=\sum_{t=1}^{n}(t/n)^m v_{t,n}-\sum_{t=0}^{n-1}[(t+1)/n]^m v_{t,n}$$
$$=v_{n,n}-n^{-1}n^{-(m-1)}\left\{m\sum_{t=1}^{n-1}t^{m-1}v_{t,n}+\sum_{t=1}^{n-1}O(t^{m-2})v_{t,n}\right\}-n^{-m}v_{0,0}$$
$$=v_{n,n}+O_p(n^{-1/2})$$

$$\sum_{t=1}^{n}(v_{t,n}-v_{t-1,n})=v_{n,n}-v_{0,0}$$

となることに注意すれば

$$Y_n(q,\ r)=\Phi_n(1)E_n(q,\ r)+n^{-1/2}h(q,\ r)^{-1/2}(1/(r+1)-1/(q+1))(v_{n,n}-v_{0,0})+O_p(n^{-1}) \tag{12}$$

すなわち，

$$Y_n(q,\ r)=\Phi_n(1)E_n(q,\ r)+O_p(n^{-1/2}) \tag{12$'$}$$

であることが示される．本稿の補題2と3より，$E_n(q,\ r)$ は漸近的に0，分散行列が I_p となる様な（p 次元）正規分布に従う確率変数であることも証明される．また，

$$k_n(q,\ r)=n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\{(t/n)^q-1/(q+1)\}\{(t/n)^r-1/(r+1)\}$$

$$h_n(q,\ r)=h_n(q)+h_n(r)-2k_n(q,\ r)$$

とすると，$h_n(q)$ の場合と同様にして

$$k_n(q,\ r)=k(q,\ r)+O(n^{-1})$$
$$h_n(q,\ r)=h(q,\ r)+O(n^{-1})$$

さらには

$$E\Big\{n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}[(t/n)^q-1/(q+1)-(t/n)^r-1(r+1)]\varepsilon_t\Big\}\Big\{n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}$$
$$[(t/n)^q-1(q+1)-(t/n)^r-1/(r+1)]\varepsilon_t\Big\}'$$
$$=h_n(q,\ r)I_p$$

であることが示される．

今，新たに，すべての正整数 $q_1,\ q_2,\ r_1,\ r_2$ に対して

$$\begin{aligned}k_n(q_1,\ r_1;q_2,\ r_2)&=k_n(q_1,\ q_2)+k_n(r_1,\ r_2)-k_n(r_1,\ q_2)-k_n(q_1,\ r_2)\\&=k_n(q_2,\ r_2;q_1,\ r_1)\end{aligned}$$

なる様な記号を導入しよう．もし $q_1=q_2$ 及び $r_1=r_2$ ならば $k_n(q_1,\ q_2)=h_n(q_1)$，及び $k_n(r_1,\ r_2)=h_n(r_1)$ であるので，$k_n(q_1,\ r_1;q_2,\ r_2)=h_n(q_1,\ r_1)$ が成立することに注意せよ．また，同様に，すべての正整数 $q_1,\ q_2,\ r_1,\ r_2$ に対して

$$\begin{aligned}k(q_1,\ r_1;q_2,\ r_2)&=k(q_1,\ q_2)+k(r_1,\ r_2)-k(r_1,\ q_2)-k(q_1,\ r_2)\\&=k(q_2,\ r_2;q_1,\ r_1)\end{aligned}$$

とすると，

$$k_n(q_1,\ r_1;q_2,\ r_2)=k(q_1,\ r_1;q_2,\ r_2)+O(n^{-1})$$

が示される．次に，すべての正整数 $q_0,\ q_1,\ r_1$ に対して

$$k_n(q_0;q_1,\ r_1)=k_n(q_0,\ q_1)-k(q_0,\ r_1)$$

$$k(q_0;q_1,\ r_1)=k(q_0,\ q_1)-k(q_0,\ r_1)$$

と定義する．明らかに，

$$k_n(q_0;q_1,\ r_1)=k(q_0;q_1,\ r_1)+O(n^{-1})$$

である．以上において定義された $k_n(q_1,\ r_1;q_2,\ r_2)$, $k(q_1,\ r_1;q_2,\ r_2)$, $k_n(q_0;q_1,\ r_1)$ 及び $k(q_0;q_1,\ r_1)$ 等を用いて，すべての $i, j=1, \cdots, m$ に対して（ここで $m\geqq p$ とする）

$$\sigma_{0i,n}=k_n(q_0;q_i,\ r_i)/\{h_n(q_0)h_n(q_i,\ r_i)\}^{1/2}$$

$$\sigma_{0i}=k(q_0;q_i,\ r_i)/\{h(q_0)h(q_i,\ r_i)\}^{1/2}$$

$$\sigma_{ii}=1$$

$$\sigma_{ij,n}=k_n(q_i,\ r_i;q_j,\ r_j)/\{h_n(q_i,\ r_i)h_n(q_j,\ r_j)\}^{1/2}$$

$$=\sigma_{ji,n}$$

$$\sigma_{ij}=k(q_i,\ r_i;q_j,\ r_j)/\{h(q_i,\ r_i)h(q_j,\ r_j)\}^{1/2}$$

$$=\sigma_{ji}$$

さらには，$m\times m$ 行列 $\Sigma(m)$，$(m+1)\times(m+1)$ 行列 Σ 及び m 次元ベクトル $\sigma(m)$ を

$$\Sigma(m)=\begin{pmatrix}\sigma_{11}\cdots\sigma_{1m}\\ \vdots \qquad \vdots\\ \sigma_{m1}\cdots\sigma_{mm}\end{pmatrix} \qquad \sigma(m)=\begin{pmatrix}\sigma_{01}\\ \sigma_{02}\\ \vdots\\ \sigma_{0m}\end{pmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & \sigma(m)'\\ \sigma(m) & \Sigma(m)\end{pmatrix}$$

と定義すると，互いに異なる正整数 q_0, q_i, r_i, q_j, r_j（ここで $i\neq j,\ i, j\geqq 1$）に対して

$$E\{E_n(q_0)E_n(q_i,\ r_i)'\}=\sigma_{0i,n}I_p$$

$$E\{E_n(q_i,\ r_i)E_n(q_j,\ r_j)'\}=\sigma_{ij,n}I_p$$

であることが示される．それ故，$(mp+p)\times 1$ 次元ベクトル f_n を

$$f_n=(E_n(q_0)',\ E_n(q_1,\ r_1)',\ \cdots,\ E_n(q_m,\ r_m)')'$$

と定めると，補題２及び３より，f_n は漸近的に平均０，分散行列 $[\Sigma\otimes \mathrm{I_p}]$ の $(mp+p)$ 次元正規分布に従うことが示されることになる．今，$(m+1)$

$\times(m+1)$ 行列 L を以下の様に定めよう．

$$L=\begin{pmatrix}\{1-\sigma(m)'\Sigma(m)^{-1}\sigma(m)\}^{-1/2} & -\sigma(m)'\Sigma(m)^{-1}\{1-\sigma(m)'\Sigma(m)^{-1}\sigma(m)\}^{-1/2} \\ 0 & U(m)^{-1}\end{pmatrix}$$

ここで $m\times m$ 行列 $U(m)$ は，$\Sigma(m)=U(m)U(m)'$ を満たす下三角行列として定められているものとする．その時，

$$L\Sigma L'=I_{m+1}$$

が成立することになるので，

$$b_n=[L\otimes \mathrm{I_p}]\mathrm{f_n}$$

という量は，漸近的に平均 0，分散行列 $[I_{m+1}\otimes \mathrm{I_p}]=\mathrm{I_{mp+p}}$ の正規分布に従うものとなる．g_n と a_n を

$$g_n=(Y_n(q_0)',\ Y_n(q_1,\ r_1)',\ \cdots,\ Y_n(q_m,\ r_n)')'$$

$$a_n=[L\otimes \mathrm{I_p}]\mathrm{g_n}$$

と定義すると，(11)と(12)より

$$g_n=[I_{m+1}\otimes \Phi_{\mathrm{n}}(1)]\mathrm{f_n}+\mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-1/2})$$

$$\begin{aligned}a_n&=[L\otimes \mathrm{I_p}][\mathrm{I_{m+1}}\otimes \Phi_{\mathrm{n}}(1)]\mathrm{f_n}+\mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-1/2})\\&=[\mathrm{L}\otimes \Phi_{\mathrm{n}}(1)]\mathrm{f_n}+\mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-1/2})\\&=[\mathrm{I_{m+1}}\otimes \Phi_{\mathrm{n}}(1)][\mathrm{L}\otimes \mathrm{I_p}]\mathrm{f_n}+\mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-1/2})\\&=[\mathrm{I_{m+1}}\otimes \Phi_{\mathrm{n}}(1)]\mathrm{b_n}+\mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-1/2})\end{aligned}$$

がでてくる．すなわち，統計量 a_n は，漸近的に平均 0，分散行列 $[I_{m+1}\otimes\Phi(1)\Phi(1)']$ の正規分布に従うことが示される．ただし，それはあくまで H_0 の下でのみ意味を成すものである．a_n を $m+1$ 個の p 次元サブベクトルに分割すれば

$$a_n=(a_{0,n}',\ a_{1,n}',\ \cdots,\ a_{m,n}')'$$

において，任意の $j(m\geqq j\geqq 0)$ について $a_{j,n}$ は p 次元ベクトルとならなければならない．明らかに，$a_{0,n},\ a_{1,n},\ \cdots,\ a_{m,n}$ は，H_0 の下で，漸近的に互いに独立であり，且つそれぞれ漸近的に平均 0，分散行列 $\Phi(1)\Phi(1)'$ の正規分布に従う（p 次元）確率変数である．H_0，すなわち，$\Phi(1)$ が非特異であるならば，

$$a_n(1)=a_{0,n}'[\Phi(1)\Phi(1)']^{-1}a_{0,n}$$

$$A_n(2)=\sum_{j=1}^{m}a_{j,n}a_{j,n}'$$

と定義すると，$a_n(1)$ は漸近的に自由度 p のカイ2乗分布に従い，$A_n(2)$ は漸近的に $W_p(m, \Phi(1)\Phi(1)')$ というタイプの（p 次元）Wishart 分布に従う（例えば，Muirhead (1982) p. 85 を見よ）ことが示され，さらに，それらは漸近的に独立であることより，以下で定義される統計量 $\hat{s}_n$

$$\hat{s}_n=(m-p+1)/p\{a_n(1)'A_n(2)^{-1}a_n(1)\}$$

$$=\{a_n(1)'[\Phi(1)\Phi(1)']^{-1}a_n(1)/p\}\bigg/\left\{\frac{a_n(1)'[\Phi(1)\Phi(1)']^{-1}a_n(1)}{a_n(1)'A_n(2)^{-1}a_n(1)}\right\}\bigg/$$

$$(\mathrm{m}-\mathrm{p}+1)$$

は，H_0 の下で漸近的に $F_{p,m-p+1}$ というタイプの F 分布に従うことが確立される．このことは，例えば，Muirhead (1982) p. 96 Theorem 3.2.12 を用いれば，容易に証明できるものであることを記しておく．では，H_1 や K_1 の下では $\hat{s}_n$ は漸近的にどの様な性質を持ってくるであろうか？詳細は省略するが，4節で用いられた議論を適用すれば，H_1 の下で

$$\hat{s}_n=O_p(n^{1/2})$$

であることが示される．すなわち，$\hat{s}_n$ を検定統計量として採用する時，それは十分に‘望ましい’性質を持っていることが意味されることになる．

6. まとめ

本稿では，一変量並びに多変量の両方を考慮した，定常時系列の反転可能性のための一つの検定方式が提示され，その統計的性質が論じられてきた．本稿第2節で論じた様に，‘望ましい’検定方式を考案するために，まず何よりも，反転可能か否かによってその性質が著しく異なってくる様な統計量を見いだすことが要請される．この様な反転可能性を‘際立たせる’統計量による検定は，非常に高いパワーを持つことが期待される．他方，

検定が‘望ましい’ものであるためには，高いパワーとともにその有意点が容易に見いだせるものである必要がある．検定に用いられる統計量の帰無仮説の下での確率分布（少なくとも漸近分布）が明らかにされるならば，この要請は（少なくとも漸近的には）満たされることになる．

本稿における検定方式では，定常時系列を用いることのメリットと過度の差分操作によってもたらされる反転不能状態の特性が十分に活用されたものとなっており，その漸近的な性質も標準的なものであった．すなわち，具体的には，その漸近分布は t 分布あるいは F 分布となっており，また，対立仮説の下での検定統計量のオーダーは $\sqrt{n}$ （n は標本数）となることが示された．

本稿の検定方式は，一応定常時系列における反転可能性のためのものという形態で表示されているが，その定常時系列が生のデータ系列の差分をとることによってもたらされたものとみなすならば，単位根や cointegration のための検定にもなり得るのである．そして，Phillips and Ourialis (1988) によって提示されたものより‘望ましい’ものとなっている．

しかしながら，本稿における結果は，あくまで漸近的且つ理論的なものである．小標本の下で，上記の漸近的結果がどの程度認められるかを見いだすためには，いくつかの小規模の時系列モデルに対してのモンテカルロ実験等による調査が必要であろうし，また，この様な調査を通して，現実の経済データを用いて実証分析を行う際にも，上記の漸近的結果がどの程度信頼できるものなのかある程度見通せるであろう．以上の様な意味において，今後の課題として，何らかのモンテカルロ実験によって本稿の結果を確かめる必要があるであろう．

参 考 文 献

Engle, R. F., and C. W. J. Granger, (1987), Co-integration and error corrections: representation, estimation, and testing, Econometrica, 55, 251-276.

Fuller, W. A., (1976), Introduction to Statistical Time Series, John Wiley and sons, New York.

Hogg, R. V., and A. T. Craig, (1978), Introduction to Mathematical Statistics (4th ed.), Mecmillan, New York.

Johansen, S., (1988), Statistical analysis of cointegration vectors, Journal of Economic Dynamics and Control, 12, 231-254.

Kendall, M. G., and A. Stuart, (1958), The Advanced Theory of Statistics (1st ed.) Vol. 1, Charles, Griffin.

Muirhead, R. J., (1982), Aspect of Multivariate Statistical Theory, John Wiley and sons, New York.

Nelson, C. R., and C. I. Plosser, (1982), Trends and random walks in macroeconomic time series; some evidences and implications, Journal of Monetary Economics, 10, 139-162.

小瀧光博，(1988)，時系列における co-integration と common trend, 広島大学経済論叢，12巻，2号，59-77.

小瀧光博，(1989)，多変量時系列モデルにおける co-integration の定式化と統計的推測，広島大学経済論叢，13巻，1号，45-62.

小瀧光博，(1993)，Co-integration と非確率的トレンドを持つ多変量時系列体系における error correction 表現と最尤推定，広島大学経済論叢，17巻，1号，209-227.

Phillips, P. C. B., and S. Ouliaris, (1988), Testing for cointegration using principal componebts methods, Journal of Economic Dynamics and Control, 12, 1-26.

Stock, J. H., and M. W. Watson, (1988), Testing for common trends, Journal of the American Statistical Association, 83, 1097-1107.