Co-integration と非確率的トレンドを持つ多変量時系列体系における error correction 表現と最尤推定

小　瀧　光　博

1. は し が き

多変量時系列モデルによる計量経済学体系の定式化は，1970年代，マクロ経済変数を具現する計測モデルとしての一変量時系列モデルと伝統的な同次方程式モデルの双方を統合するものとして脚光を浴びた．そもそも伝統的な同次方程式モデルを動態化し，さらに外生変数の特定化を経済理論や先験情報に基いてではなく，Granger causality のテストを通して行なうとすれば，マクロ経済変数の体系は多変量自己回帰過程 (VAR process) によって生成されるものと考えられることになる．その結果，経済変数データの多変量自己回帰モデル (VAR model) への統計的適合と統計的推測が関心を集めることになる．といっても，モデルの次数の決定は AIC (Akaika's information criterion) 等の基準によって自動的に決められることになるし，モデルの係数パラメータのいかなる統計的推測も最小２乗推定量 (OLS) に基いてなされるので，伝統的な同時方程式モデルにおけるそれよりもはるかに簡便であり，また，定常性が仮定される限り漸近的正規性に基いた標準的推測理論が常に適用可能となっており，それ故理論上究明されなければならない問題はあまり存在しないということになる．

しかしながら，問題視されるべき数少ない事項として，定常性の仮定が指摘されなければならない．Nelson and Plosser (1982) に端を発した‘単

位根’のための数多くの実証研究を持ち出すまでもなく，時系列として観測される多くのマクロ経済変数がトレンドを持ち，時間とともに不安定的な動きを示すものであることは，古くから認められていたことである．すなわち，マクロ経済時系列の多くは定常過程に従っているとはいい難い．そこで，通常なされることは，一変量時系列の解析手順に従って，各系列を一つごとに階差をとったりタイム・トレンドに回帰させることによって得られる残差によって，系列の‘定常化操作’を行なうことであった．しかし，この様な定常時系列への変換は，果たして一変量時系列の場合と同等になし得るものなのか，あるいは，多変量時系列の場合そのことによって何らかの問題が生じ得るのではないかという素朴な疑問に対して何らの説明も見い出せないままに用いられてきた．勿論，一変量時系列の場合においても定常時系列への変換は，その変数の持っているある種の情報の損失を引き起こしていると思われるが，多変量時系列の場合には，一変量時系列と異なり単なるブラック・ボックスであってはならず，何らかの（経済）理論を盛り込むことがその使命の一つとされているので，むやみに情報損失を認めるわけにはいかず，また，仮りに認めるとしてもどの様な情報が失なわれるのかが明確にされる必要があるのである．いずれにしても，一変量・多変量を問わずこの定常性についての扱いが時系列分析の大きなネックとなっていた．

Engle and Granger (1987) によって提示され，以降多くの論文によって研究されてきた co-integration の概念は，時系列アプローチによる計量経済学体系の新たな構築と解釈をもたらした．すなわち，多変量時系列モデルにおける co-integration の存在は，モデルの統計的且つ経済学的解釈に関して様々な意味づけを可能とした．例えば，体系内の個々の一変量時系列が非定常であっても，これらの時系列の非定常性にある種の同質性が存在する場合，そのある種の一次結合においては，その様な非定常性が相殺されて定常時系列となり得る点が挙げられよう．この場合，各系列それぞれ個別に差分操作によって定常時系列への変換を行なえば，変化された多変量時系列モデルは，いわゆる‘過剰差分 (over-differencing)’の

状態となり，有意味な自己回帰モデルの表現は得られない．Engle and Granger (1987) は，この様に体系が co-integrate しているケースにおいては，多変量自己回帰モデルの体系は error correction モデルに変換されるべきであることを指摘する．この error correction モデルは，各系列の差分をとったものの自己回帰部分に，これらの各系列のレベルでのある種の一次結合が加えられているところに特徴があり，もしそのその一次結合の係数が既知であるならば，すべての観測値が定常時系列とみなされることになる．ところで，この一次結合の係数を構成する様なベクトルは co-integrating vector といわれ，それはある種の経済理論を表わすものと解釈される．すなわち，各々が非定常である一変量時系列のある種の一次結合が定常であるということは，その一次結合が表わす経済理論が統計的な意味で安定していることを意味づけるのである．

以上の様な co-integration による統計的・経済学的解釈に加えて，近年の非定常時系列や単位根に関する膨大な研究成果（主として，非定常時系列における推測の漸近理論）は，（定常時系列に変換することなく）非定常時系列そのものでの一応の統計解析と解釈を可能なものとした．Co-integration を持つ多変量時系列での統計的推測は，主として co-integrating vector の推定と co-integration の有無の検定，あるいはもっとより一般的に co-integrating rank の値に関する検定から構成されるが，これらに関する全んどすべての研究成果は，非定常時系列の推測の漸近的結果を踏まえたものである．例えば，Engle and Granger (1987), Stock (1987), Stock and Watson (1988) 及び Phillips and Ouliaris (1988) 等を見よ．

ところで，非定常時系列のための推測の漸近理論は，定常の場合と異なり,統一的・画一的なものではなくモデルごとに異なってくるものであり，モデルが複雑化する（次元や次数が大きくなる）につれて複雑なものとなりがちである．さらに，一般に，co-integrtion のための検定統計量の漸近分布等も未知パラメータに依存するものとなり，また，その点を克服しようとすると漸近理論からの乖離が大きくなってしまうという傾向が見ら

れる．Johansen (1988, 1991) によって確立された，error correction モデルでの co-integrating rank の値のための尤度比検定とその漸近的性質は，この様な問題点を克服し，さらに統一性・画一性をも指向するものと思われる．

定数項 (drift) や非確率的トレンドといった確定的な非定常性をもたらす要素が，統計的推測の観点からも経済的側面からも無視できないものであることは，一変量時系列が分析対象となっている場合には，West (1988), Nelson and Plosser (1982) 等によって論じられているが，多変量時系列においてそれらと co-integration との関連については，全んどの文献では限定的にしか扱われていない．小瀧（1988, 1989）によって指摘された様に，このケースでの co-integration の概念は非常に微妙なものとなり，確率的な意味での非定常性のみを除去する一次結合や確定的な意味での非定常性のみを取り除く一次結合，あるいは双方を同時に除く一次結合が存在し得ることになる．

本稿の目的は，第１に，定数項や非確率的トレンドを考慮した場合の co-integration の概念を，error correction モデルを始めとして Engle and Granger (1987) において提示されている様々の形態の多変量時系列の表現で定式化することである．既に述べた様にこれは小瀧（1988, 1989）において一応の定式化がなされているが，本稿ではいわゆる‘２次トレンド’をも考慮した，より一般的な観点から小瀧（1988, 1989）の結果を拡張する．その結果，例えば，小瀧（1989, p. 54（15)式）において得られた, error correction モデルにおける非確率的トレンドの係数ベクトルが，実は co-integrating vector によるある種の制約に従っていること等が示されることになる．次に，体系を co-integration の関係にある２つのサブ・ベクトルに分割することによって，ある経済変数の外生性を決定するための，すなわちある経済変数が外生変数とみなされるか否かを判断するための，一つの新たな基準を提案する．また，この基準は Granger causality のテストによるものとは全く関連性がないことが指摘される．しかしながら，ある変数が‘内生的’であるかどうかを判断する基準とし

て用いられた場合，この基準は Granger causality のテストによるものと完全に同じ結論をもたらす．

本稿のもう一つの目的は，本稿で得られた，非確率的トレンドを考慮した error correction タイプのモデルの係数パラメータの推定方式を確立することである．前述の Johansen (1988) では制約つきの最尤推定量が扱われたのに対して，本稿では制約なしの最尤推定量を取り上げる．それが最小２乗推定量であるとも考えられることが指摘され，また，一部の係数パラメータを除いて，他の係数パラメータの推定値に対して，通常の収束速度での一致性と漸近正規性に基つく標準的漸近理論が適用可能となっていることが確立される．また，それら以外の係数パラメータについては，通常とは異なる率での一致性は示されるけれども，その漸近分布については正規分布であったりとか未確定であったりで，統一的な結果を得るのは困難であることが示唆される．さらに尤度比検定統計量との関連性についても言及する．

2.　Co-integration の概念と多変量時系列体系の表現

次の様な N 次元多変量時系列 $\underset{\sim}{y}_t$ を考察しよう．

$$(1-L)\underset{\sim}{y}_t=C(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+\underset{\sim}{\mu} \tag{1}$$

ここで L は，$L\underset{\sim}{y}_t=\underset{\sim}{y}_{t-1}$ となる様なラグ・オペレーターであり，$\underset{\sim}{\mu}$ は N 次元の定数ベクトル，また，

$$C(L)=I_N+\sum_{j=1}^{\infty}C_jL^j, \qquad C_j{:}N\times N,\ \ j=1,\ 2,\ \cdots,$$

さらに $\{\underset{\sim}{\varepsilon}_t\}$ は平均ゼロ，分散行列として $N\times N$ 正定値行列 Σ を持つ様な，系列的に独立・同一分布に従う N 次元確率変数の系列とする．我々は，(1)において

$$\underset{\sim}{y}_j=\underset{\sim}{\varepsilon}_j=\underset{\sim}{0},\ \ j=0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ \ \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j+1}^{\infty}|C_k|<\infty$$

を仮定することにする．$\underset{\sim}{y}_j=\underset{\sim}{\varepsilon}_j=\underset{\sim}{0}$ $(j=0,\ -1,\ -2,\ \cdots)$ という‘初期条件’

は，Stock and Watson (1987) においても採用された仮定である．また，各種推定量の漸近分布の導出のために，$\underset{\sim}{\varepsilon}_t=(\varepsilon_{1t}, \cdots, \varepsilon_{Nt})'$ において，ε_{st} $(s=1, \cdots, N)$ の何らかの高次（３次以上）モーメントの存在も仮定する．

(1)は，

$$(1-L)\underset{\sim}{y}_t=C(1)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+(1-L)\underset{\sim}{v}_t+\underset{\sim}{\mu}$$
$$=D(1)\underset{\sim}{\xi}_t+(1-L)\underset{\sim}{v}_t \tag{2}$$

と書くこともできる．ここで，$C(1)=I_N+\Sigma_{j=1}^{\infty}C_j$, $\underset{\sim}{v}_t=\Sigma_{j=0}^{\infty}\{-\Sigma_{k=j+1}^{\infty}C_R\}\underset{\sim}{\varepsilon}_{t-j}$, $D(1)=[\underset{\sim}{\mu}, C(1)]$, $\underset{\sim}{\xi}_t=[1, \underset{\sim}{\varepsilon}'_t]'$．(2)は，さらに，

$$\underset{\sim}{y}_t=C(L)/(1-L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+\underset{\sim}{\mu}/(1-L)$$
$$=C(1)\underset{\sim}{\varepsilon}_t/(1-L)+\underset{\sim}{\mu}/(1-L)+\underset{\sim}{v}_t$$
$$=C(1)\sum_{j=1}^{t}\underset{\sim}{\varepsilon}_j+t\underset{\sim}{\mu}+\underset{\sim}{v}_t \tag{3}$$

と書かれる．ここで，$C(1)\Sigma_{j=1}^{t}\underset{\sim}{\varepsilon}_j$ が $\underset{\sim}{y}_t$ の確率的トレンドとみなされることになりまた，$t\underset{\sim}{\mu}$ は $\underset{\sim}{y}_t$ の非確率的トレンドとして考察されることになる．

ところで，定数項が存在しない場合（$\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}$）の co-integration は，Engle and Granger (1987) 等多くの文献においてそうなされている様に，$C(1)$ の階数によって定義される．すなわち，rank $C(1)<N$ である時，$\underset{\sim}{y}_t$ は co-integrated であると定義されるのである．この場合には，(3)より明らかな様に，$\underset{\sim}{y}_t$ における非定常性は確率的な意味でのものだけ $(C(1)\Sigma_{j=1}^{t}\underset{\sim}{\varepsilon}_j)$ となる．しかしながら，定数項が存在する場合（$\underset{\sim}{\mu}\neq\underset{\sim}{0}$）には，確定的な意味での非定常系列（$t\underset{\sim}{\mu}$）も存在することになる．Nelson and Plosser (1982) 等，多くの実証研究より明らかな様に，経済時系列モデルの定式化においては定数項の存在（(1)における $\underset{\sim}{\mu}$）が考慮される必要がある．にもかかわらず，co-integration は扱っている多くの文献では，定数項の存在によって co-integration の定式化がどの様に影響されるかが明確に論じられなかった．

一方，小瀧（1988，1989）は，(1)において必ずしも $\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}$ でないケースにおいて，$D(1)$ の階数による co-integration の定義を提案した．すなわち，$D(1)$ の階数を m と定義することにすると（rank $D(1)=m$），

$m<N$ の時 $\underset{\sim}{y}_t$ は co-integrated であるといわれる．さらに，小瀧（1988, 1989）はこの定義を採用した上で，(1)あるいは(3)から得られるはずの error correction モデルの表現が，様々な場合に応じて微妙に異なったものになることを示した．また，$\underset{\sim}{\mu}\neq\underset{\sim}{0}$ の場合でも，$C(1)$ の階数による定義もそれなりの意味を持っている（$D(1)$ の階数による定義の方が自然であるけれども…）ことが指摘された．

他方，Engle and Yoo (1987) では，$\underset{\sim}{\mu}\neq\underset{\sim}{0}$ ではあるが $\underset{\sim}{\mu}$ が $C(1)$ の列ベクトルによって張られる場合，すなわち，$\underset{\sim}{\mu}=C(1)\underset{\sim}{\gamma}$ となる様な $\underset{\sim}{\gamma}\neq\underset{\sim}{0}$ が存在する場合が論じられている．この場合には，常に $\operatorname{rank} D(1)=\operatorname{rank} C(1)$ であり，co-integration は $C(1)$ の階数によっても $D(1)$ の階数によっても同等に定義されることになる．しかしながら，Engle and Yoo (1987) は，$\underset{\sim}{\mu}=C(1)\underset{\sim}{\gamma}$ の意味については全く言及していない．この様な定式化をも含めて定数項を考慮した場合，どの様なモデルが定式化できるか，またそれはどの様な意味をもっているか，そこからどの様な表現が誘導できるかについては，本稿 4 節ないしはこの節の残りの部分において論じられる．

$1\leq\operatorname{rank} C(1)=n<N$ の時，Engle and Granger (1987) は $C(L)$ の余因子行列 $\operatorname{adj} C(L)$ と行列式 $\det C(L)$ に対して

$$\operatorname{adj} C(L)=(1-L)^{N-n-1}A(L),\quad A(L)=I_N+\sum_{j=1}^{\infty}A_jL^j$$

$$\det C(L)=(1-L)^{N-n}d(L),\quad d(L)=1+\sum_{j=1}^{\infty}d_jL^j$$

となる様な $N\times N$ 多項式行列 $A(L)$ と多項式 $d(L)$ が存在することを示した．$\bar{A}=\Sigma_{j=1}^{\infty}jA_j$ としよう．その時 $A(L)C(L)=(1-L)d(L)I_N$ 及び $A(L)\underset{\sim}{\mu}/(1-L)=A(1)t\underset{\sim}{\mu}+\bar{A}\underset{\sim}{\mu}$ であることを用いて，(3)の両辺に左側から $A(L)$ を乗ずると，

$$A(L)\underset{\sim}{y}_t=d(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+tA(1)\underset{\sim}{\mu}+\bar{A}\underset{\sim}{\mu} \tag{4}$$

が得られる．さらに

$$A(L)=(1-L)\Pi(L)+A(1)L$$

$$A(1)=\underset{(N\times r)}{\beta}\ \underset{(r\times N)}{\alpha'},\quad r=N-n,\quad \Pi(L)=I_N-\sum_{j=1}^{\infty}\Pi_j L^j$$

となる様な $\Pi(L)$, β,α が存在することが示されるので，(4)より

$$\Pi(L)(1-L)\underset{\sim}{y}_t+\beta\alpha'\underset{\sim}{y}_{t-1}=\mathrm{d}(\mathrm{L})\underset{\sim}{\varepsilon}_t+t\beta\alpha'\underset{\sim}{\mu}+\bar{A}\underset{\sim}{\mu} \tag{5}$$

が導出される.

3. Co-integrate している多変量時系列における変数の外生性と Granger causality

(2)および(3)における $C(1)$ の階数を n（すなわち，rank $C(1)=n$）そして $N-n$ を r と定義し，且つ $1\leq n<N$ と仮定する時，

$$\underset{(r\times N)}{\alpha'}\ \underset{(N\times N)}{C(1)}=\underset{(r\times N)}{0},\quad \mathrm{rank}\,\alpha=r \tag{6}$$

となる様な $r\times N$ 行列 α が存在する. $\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}$ のケースにおいて，α' の各行は co-integrating vector といわれる. Odaki (1989) の Lemma 1 より，y_{it} を $\underset{\sim}{y}_t$ の第i 要素（$i=1, \cdots, N$）とする時，co-integrate しない n 次元多変量時系列となる様な $(y_{j_1t}, \cdots, y_{j_nt})'$ を見い出すことができる. ここで，$\{j_1, \cdots, j_n\}$ は $\{1, 2, \cdots, N\}$ のある部分集合である. Odaki (1993) の Section 4 から明らかな様に，この時一般性を失うことなく，$\{j_1, \cdots, j_n\}=\{r+1, \cdots, N\}$ としてさしつかえない. すなわち，r 次元ベクトル $\underset{\sim}{x}_t$, n 次元ベクトル $\underset{\sim}{z}_t$ に対し

$$\underset{\sim}{y}_t=(\underset{\sim}{x}'_t, \underset{\sim}{z}'_t)'$$

と分割される時，$\underset{\sim}{z}_t$ が先ほどの $(y_{j_1t}, \cdots, y_{j_nt})'$ に対応するものとなる. この時，α の1つの候補として

$$\alpha'=[I_r \,\vdots\, -F] \tag{7}$$

というタイプのものを構成することができる. ここで，F は0でない $r\times n$ 行列である.

(6) 及び(7)は，$\underset{\sim}{x}_t-F\underset{\sim}{z}_t$ が定常時系列になっていることを意味している.

すなわち，(3)の両辺に $[I_r \,\vdots\, -F]$ を乗ずると，

$$\underset{\sim}{x}_t - F\underset{\sim}{z}_t = t\gamma + \eta_t \tag{8}$$

が得られる。ここで，$\gamma = [I_r \,\vdots\, -F]\underset{\sim}{\mu}$ 及び $\eta_t = [\mathrm{I}_r \,\vdots\, -\mathrm{F}]\underset{\sim}{v}_t$. また，$B^{-1}\Gamma = F$ を満たす様な任意の $r\times r$ 正則行列Bと $r\times n$ 行列 Γ に対して，(8)より

$$B\underset{\sim}{x}_t - \Gamma\underset{\sim}{z}_t = tB\gamma + B\eta_t \tag{9}$$

がでてくる．伝統的な計量経済学の教義に従うならば，(8)及び(9)は，それぞれ同時連立方程式モデルの‘誘導形’と‘構造形’として解釈されることになる．B, Γ には，(8)に対して(9)が一対一対応する様に，‘識別条件’が経済学的観点から課されることになる．同時に，伝統的な計量経済学では，$\underset{\sim}{y}_t$ の‘内生変数’としての $\underset{\sim}{x}_t$ と‘外生変数’(‘政策変数’をはじめとする…）としての $\underset{\sim}{z}_t$ への分割も，経済(学)的意味に基いてなされる．

しかしながら，本稿で展開されてきた議論の下では，(8)及び(9)における $\underset{\sim}{x}_t$ と $\underset{\sim}{z}_t$ は，何ら経済(学)的根拠によることなく，co-integrate しない n 次元部分体系を見い出すことによって，機械的・統計的手続きによって構成されたものであった．すなわち，本稿において，$\underset{\sim}{z}_t$ という co-integrate していない n 次元の部分体系の検出という手続きにより，経済変数の‘外生性’の判定に関する一つの基準が与えられたことになるのである．

他方，1970年代以降，(多変量) 時系列分析のわく組みでの，変数の‘外生性’決定のための統計的基準が脚光を浴びることになった．Granger causality の概念とその検出法がそれである．その分析は，1980年代にはいるまでは，統計理論上の制約から，定常時系列や元の系列が非定常であっても階差を取ることによって定常系列に変換したものに対してなされてきたが，単位根や co-integration の統計的推測の議論も含め，近年の非定常時系列理論の発展は，元の系列での分析を実用的且つ意味のあるもの

としてきている．

(4)において，Granger causality の概念について考察しよう．$\underset{\sim}{y}_t=(\underset{\sim}{x}'_t, \underset{\sim}{z}'_t)'$ において，$\underset{\sim}{z}_t$ が Granger causality に基ついて外生的と判断されるのは，$\underset{\sim}{x}_t$ から$\underset{\sim}{z}_t$ への因果関係がない．すなわち，$\underset{\sim}{x}_t$ が $\underset{\sim}{z}_t$ を Granger cause しない時である．そのための必要十分条件は，

$$A(L)=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} r & n \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n \end{array} & \left[\begin{array}{c:c} A_{11}(L) & A_{12}(L) \\ \hdashline A_{21}(L) & A_{22}(L) \end{array}\right] \end{array}$$

と分割された時，$A_{21}(L)=0$ であることはよく知られている．同様に，(5)において

$$\Pi(L)=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} r & n \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n \end{array} & \left[\begin{array}{c:c} \Pi_{11}(L) & \Pi_{12}(L) \\ \hdashline \Pi_{21}(L) & \Pi_{22}(L) \end{array}\right] \end{array}, \quad \beta=\begin{array}{c|c} & r \\ \begin{array}{c} r \\ n \end{array} & \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hdashline \beta_2 \end{array}\right] \end{array}, \quad \alpha=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n \end{array} \\ r & [\mathrm{I_r} \quad -\mathrm{F}] \end{array}$$

とすると，その必要十分条件が $\Pi_{21}(L)=0$ 及び $\beta_2=0$ であることも容易に示すことができる．これらの条件は，先ほどの co-integrate していない部分体系の検出による変数の外生性の判定基準と Granger causality によるものとは，全く関連していないことを示すものである．

しかしながら，一方，rank $A(1)=$rank $\beta=$rank $\beta_1=r$ は，$\beta_1 F\neq 0$ を意味する．(5)において，$\underset{\sim}{z}_t$ が $\underset{\sim}{x}_t$ を Granger cause しないための必要十分条件は $\Pi_{12}(L)=0$ 及び $\beta_1\mathrm{F}=0$ であるので，そのことは，$\underset{\sim}{z}_t$ が $\underset{\sim}{x}_t$ を Granger cause している．すなわち，$\underset{\sim}{z}_t$ から$\underset{\sim}{x}_t$ への因果関係があることを意味している．そして，それは，$\underset{\sim}{x}_t$ が‘内生的’であるということが，先ほどの co-integrate していない部分体系の検出による基準によっても Granger causality に基つく基準によっても同等に，定式化されることを意味するものである．

4. Co-integration と非確率的トレンドがある場合の Wold 表現と error correction 表現

(5)において，$d(L)=1$ 及び $\Pi(L)$ が有限次数，すなわち，$\Pi(L)=I_N$

$-\Sigma_{j=1}^{p-1}\Pi_j L^j$, さらに, $\beta\alpha'\underset{\sim}{\mu}=0$ ならば, その時(5)は, Engle and Granger (1987) によって一般化された error correction モデルそのものとなる.

このうち, $d(L)=1$ 並びに $\Pi(L)$ を有限次数とする仮定は, 時系列モデルの定式化においてごく普通になされるものである. $\beta\alpha'\underset{\sim}{\mu}=0$ の意味について考察しよう. $\beta\alpha'\underset{\sim}{\mu}=0$ は $\alpha'\underset{\sim}{\mu}=0$ と同値であるが, もし $\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}$ でなければ, このことは $A(L)$ と $C(L)$ の定義より, $\underset{\sim}{\mu}$ が $C(1)$ の列ベクトルによって張られる. すなわち, $\underset{\sim}{\mu}=C(1)\underset{\sim}{\gamma}$ となる様な $\underset{\sim}{\gamma}\neq\underset{\sim}{0}$ が存在しなければならないことを意味する. すなわち, Engle and Yoo (1987) が扱ったケースがこれに相当する. このケースでは, (1)は

$$(1-L)\underset{\sim}{y}_t=C(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+C(1)\underset{\sim}{\gamma} \qquad (1)'$$

と書かれ, また, (5)は

$$\Pi(L)(1-L)\underset{\sim}{y}_t+\beta\alpha'\underset{\sim}{y}_{t-1}=d(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+\underset{\sim}{\gamma}_2 \qquad (5)'$$

と書かれることになる. ここで $\underset{\sim}{\gamma}_2=\bar{A}\underset{\sim}{\mu}=\bar{A}C(1)\underset{\sim}{\gamma}$.

$\underset{\sim}{\mu}$ が何らの制約に従っていることが事前にわかっていると想定することはあまり自然なことではなく, 通常 $\underset{\sim}{\mu}=C(1)\underset{\sim}{\gamma}$ の様な制約には従っていない（たとえ従っているとしても, そのことは事前にはわからない）という具合に想定されることになる. 従って, (1)あるいは(3)の $\underset{\sim}{\mu}$ が事前に何らの制約にも従っていない場合の error correction モデルは, (5)の様な非確率的トレンドをも考慮したものが想定されなければならないことになる. ところで, この場合, (1)あるいは(3)の $\underset{\sim}{\mu}$ は何らの制約にも従っていないけれども, (5)の非確率的トレンドの係数ベクトルはある制約に従っていることに注意する必要がある. すなわち, その係数ベクトルは $A(1)=\beta\alpha'$ の列ベクトルによって張られている.

(5)において, 非確率的トレンドの係数ベクトルが何らの制約にも従っていないケース

$$\Pi(L)(1-L)\underset{\sim}{y}_t+\beta\alpha'\underset{\sim}{y}_{t-1}=d(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+t\underset{\sim}{\gamma}_1+\underset{\sim}{\gamma}_2 \qquad (5)''$$

あるいは

$$A(L)y_t=d(L)\varepsilon_t+t\gamma_1+\gamma_2 \tag{4)''}$$

を考察しよう．ここで，γ_1 及び γ_2 は N 次元ベクトル．$F(L)=C(L)/d(L)$ と定義しよう．再び $C(L)A(L)=(1-L)d(L)I_N$ 及び $F(L)t\gamma_1=F(1)t\gamma_1+\bar{F}\gamma_1$，ここで $\bar{F}=\Sigma_{j=1}^{\infty}jF_j$ 及び $F(L)=I_N+\Sigma_{j=1}^{\infty}F_jL^j$，を用いて，(4)″の両辺に左側から $F(L)$ を乗じると

$$(1-L)y_t=C(L)\varepsilon_t+tF(1)\gamma_1+(\bar{F}\gamma_1+F(1)\gamma_2) \tag{1)''}$$

あるいは

$$y_t=C(L)/(1-L)\varepsilon_t+tF(1)\gamma_1/(1-L)+(\bar{F}\gamma_1+F(1)\gamma_2)/(1-L) \tag{3)''}$$

が得られる．これは，y_t が2次の非確率的トレンドを有する可能性までをも考慮したものとなっている．しかしながら，2次のトレンドの係数ベクトルは，$F(1)$ の列ベクトルで張られるという制約に従うことになっている．(1)″あるいは(3)″において，2次のトレンドの係数ベクトルが何らの制約にも従っていないケース

$$(1-L)y_t=C(L)\varepsilon_t+t\gamma_3+\gamma_4 \tag{1)'''}$$

あるいは

$$y_t=C(L)/(1-L)\varepsilon_t+t\gamma_3/(1-L)+\gamma_4/(1-L) \tag{3)'''}$$

を考察しよう．ここで，γ_3 及び γ_4 は N 次元ベクトル．(3)‴の両辺に $A(L)$ を乗ずることによって，

$$A(L)y_t=d(L)\varepsilon_t+tA(L)\gamma_3/(1-L)+A(L)\gamma_4/(1-L) \tag{4)'''}$$

あるいは

$$\Pi(L)(1-L)y_t+\beta\alpha' y_{t-1}=d(L)\varepsilon_t+t^2\beta\alpha'\eta_1+t\eta_2+\eta_3 \tag{5)'''}$$

の様な（何らの制約にも従っていない）N 次元定数ベクトル $\underset{\sim}{\eta}_1$, $\underset{\sim}{\eta}_2$, $\underset{\sim}{\eta}_3$ の存在を示すことができる．すなわち，(5)‴は2次トレンドまでをも考慮した（但し，2次のトレンドの係数ベクトルは制約つきのものとなっているが…）error correction モデルの様な表現となっている．

以上論じてきた様に，(1)，(1)′，(1)″，(1)‴の様な Wold 表現と(5)，(5)′，(5)″，(5)‴ の様な error correction モデルのタイプの表現とは，表現をより一般化していく際に，きわめて密接にしかし微妙に関連しあっていき，一方を一般化すれば，他方も一般化されるが同時に，他方の一部のパラメータが制約されるという事態を引き起こしている．Wold 表現については(1)′，(1)，(1)″，(1)‴の順に，同様に error correction タイプのモデルについては(5)′，(5)，(5)″，(5)‴の順で，$\underset{\sim}{y}_t$ のためのより一般的なモデルとなっている．係数ベクトルの一部が制約づけられているか否かという問題は，それらの推測に非常に多大の影響を与えることになる．

5. 係数パラメータの制約なしの最尤推定と最小2乗推定

(5)″において $d(L)=1$ 及び$\Pi(L)=I_N-\Sigma_{j=1}^{p-1}\Pi_j L^j$（これは，(4)″において $A(L)=I_N-\Sigma_{j=1}^{p}A_j L^p$ を意味する）を仮定すると

$$\Delta \underset{\sim}{y}_t=\sum_{j=1}^{p-1}\Pi_j\Delta \underset{\sim}{y}_{t-j}-\beta\alpha'\underset{\sim}{y}_{t-1}+t\underset{\sim}{\gamma}_1+\underset{\sim}{\gamma}_2+\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{10}$$

が得られる．ここで $\Delta\underset{\sim}{y}_t=\underset{\sim}{y}_t-\underset{\sim}{y}_{t-1}$. また，(10)と Johansen (1988) の分析の基本となっている表現式(但し，そこでは $\underset{\sim}{\gamma}_1=\underset{\sim}{\gamma}_2=\underset{\sim}{0}$ が仮定されている)

$$\Delta \underset{\sim}{y}_t=\sum_{j=1}^{p-1}\Gamma_j\Delta \underset{\sim}{y}_{t-j}+\Gamma\underset{\sim}{y}_{t-p}+t\underset{\sim}{\gamma}_1+\underset{\sim}{\gamma}_2+\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{11}$$

とは同値である．ここで $\Gamma=-\beta\alpha'$ 及び $\Gamma_j=\Pi_j+\Gamma$, $j=1, \cdots, p-1$. 今，$(\underset{\sim}{y}_1, \cdots, \underset{\sim}{y}_T)$ が観測値として与えられた時，(11)におけるパラメータ（Γ_1, $\cdots$, F_{p-1}, Γ, $\underset{\sim}{\gamma}_1$）の推測について考察しよう．$\Gamma=-\beta\alpha'$ という制約を考慮しない時，これらのパラメータは最小2乗法によって推定できる．

$\bar{T}=T-p$ とし，さらに

$$y=\begin{bmatrix}\Delta y'_{p+1}\\ \vdots \\ \Delta y'_T\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}\Delta y'_p, & \cdots\cdots, & \Delta y'_2\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta y'_{T-1}, & \cdots\cdots, & \Delta y'_{T-p-1}\end{bmatrix}, y_{-1}=\begin{bmatrix}y'_1\\ \vdots \\ y'_{T-p}\end{bmatrix},$$

$(\bar{T}\times N)$　　$(\bar{T}\times(p-1)N)$　　$(\bar{T}\times N)$

$$1_{\bar{T}}=\begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix},\quad \tilde{L}=\begin{bmatrix}p+1\\ \vdots \\ T\end{bmatrix},\quad \varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon'_{p+1}\\ \vdots \\ \varepsilon'_T\end{bmatrix},\quad Z=\begin{bmatrix}y_{-1}, & Y, & 1_{\bar{T}}\end{bmatrix},$$

$(\bar{T}\times 1)$　　$(\bar{T}\times 1)$　　$(\bar{T}\times N)$　　$(\bar{T}\times(PN+1))$

$$V=[Y,\ 1_{\bar{T}},\ \tilde{L}],\quad W=[y_{-1},\ 1_{\bar{T}},\ \tilde{L}],\quad \Omega=\begin{bmatrix}\Gamma'\\ \hline \zeta'_1\\ \hline \zeta'_2\end{bmatrix},$$

$(\bar{T}\times\{(p-1)N+2\})$　　$(\bar{T}\times(N+2))$　　$((N+2)\times N)$

$$\Phi=\begin{bmatrix}\Gamma'(p-1)\\ \hline \zeta'_1\\ \hline \zeta'_2\end{bmatrix},\quad \Psi=\begin{bmatrix}\Gamma'\\ \hline \Gamma'(p-1)\\ \hline \zeta'_2\end{bmatrix},\quad \Gamma'(p-1)=\begin{bmatrix}\Gamma'_1\\ \vdots \\ \Gamma'_{p-1}\end{bmatrix}$$

$(\{(p-1)N+2\}\times N)$　　$(\{pN+1\}\times N)$　　$((p-1)N\times N)$

と置くと，(11)は，

$$y=Y\Gamma'(p-1)+W\Omega+\varepsilon \tag{12}$$

あるいは

$$y=y_{-1}\Gamma'+V\Phi+\varepsilon \tag{12)'}$$

あるいは

$$y=\tilde{L}\zeta'_1+Z\Psi+\varepsilon \tag{12)''}$$

と書ける．$\Gamma'(p-1)$，Γ'，ζ'_1 の最小 2 乗推定量をそれぞれ $\hat{\Gamma}'(\mathrm{p}-1)$，$\hat{\Gamma}'$，$\hat{\zeta}'_1$ とすると，

$$\hat{\Gamma}'(p+1)=[Y'[I_{\bar{T}}-W(W'W)^{-1}W']Y]^{-1}\cdot$$
$$[Y'[I_{\bar{T}}-W(W'W)^{-1}W']y] \tag{13}$$

$$\hat{\Gamma}' = [y'_{-1}[I_T - V(V'V)^{-1}V']y_{-1}]^{-1} \cdot [y'_{-1}[I_T - V(V'V)^{-1}V']y] \quad (14)$$

$$\hat{\gamma}'_1 = [\underset{\sim}{\tilde{L}}'[I_T - Z(Z'Z)^{-1}Z']\underset{\sim}{\tilde{L}}]^{-1}[\underset{\sim}{\tilde{L}}'[I_T - Z(Z'Z)^{-1}Z']y] \quad (15)$$

であることが容易に示される．また，これらの最小２乗推定量は，$\underset{\sim}{\varepsilon}_t$ の正規性が仮定された時，制約なしの最尤推定量になっていることも明らかである．

$$D_1 = \left[\begin{array}{c:c:c} T^{-1}I_n & & O \\ \hdashline & T^{-\frac{1}{2}}I_{r+1} & \\ \hdashline O & & T^{-\frac{3}{2}} \end{array}\right], \quad D_2 = \left[\begin{array}{c:c} T^{-\frac{1}{2}}I_{(p-1)N+1} & \underset{\sim}{O} \\ \hdashline & \\ \hdashline \underset{\sim}{O}' & T^{-\frac{3}{2}} \end{array}\right],$$

$(N+2) \times (N+2)$ $\quad\quad$ $\{(p-1)N+2\} \times \{(p-1)N+2\}$

$$D_3 = \left[\begin{array}{c:c:c} T^{-1}I_n & & O \\ \hdashline & T^{-\frac{1}{2}}I_{r+(p-1)N} & \\ \hdashline O & & T^{-\frac{3}{2}} \end{array}\right], \quad D_4 = \left[\begin{array}{c:c:c} T^{-1}I_n & & O \\ \hdashline & T^{-\frac{1}{2}}I_r & \\ \hdashline O & & T^{-\frac{3}{2}} \end{array}\right]$$

$\{PN+1\} \times \{PN+1\}$ $\quad\quad$ $N \times N$

とすると，$D_1W'WD_1$, $D_1W'Y$, $D_2V'VD_2$, $D_2V'y_{-1}D_4$, $D_3Z'ZD_3$, $D_3Z'\underset{\sim}{\tilde{L}}T^{-1}$ のいかなる要素も $O_p(1)$ であることが，Odaki (1993) の Theorem 2 の証明で用いられた方法と同様にして示すことができる．その時，(12) (12)′ (12)″の関係式を用いて

$$T^{\frac{1}{2}}\{\hat{\Gamma}'(p-1) - \Gamma'(p-1)\} = [T^{-1}Y'Y - T^{-1}Y'WD_1(D_1W'WD_1)^{-1}D_1WY]^{-1} \cdot [T^{-\frac{1}{2}}Y'\varepsilon - T^{-\frac{1}{2}}Y'WD_1(D_1W'WD_1)^{-1}D_1W'\varepsilon] \quad (16)$$

$$D_4^{-1}\{\hat{\Gamma}' - \Gamma'\} = [D_4y'_{-1}y_{-1}D_4 - D_4y'_{-1}VD_2(D_2V'VD_2)^{-1}D_2V'y_{-1}D_4]^{-1} \cdot [D_4y'_{-1}\varepsilon - D_4y'_{-1}VD_2(D_2V'VD_2)^{-1}D_2V'\varepsilon] \quad (17)$$

$$T^{\frac{3}{2}}(\hat{\gamma}_1'-\gamma_1')=[T^{-3}\tilde{L}'\tilde{L}-T^{-1}\cdot T^{-1}\tilde{L}'ZD_3(D_3Z'ZD_3)^{-1}D_3Z'\tilde{L}T^{-1}]^{-1}\cdot[T^{-3/2}\tilde{L}'\varepsilon-T^{-\frac{1}{2}}\cdot T^{-1}L'ZD_3(D_3Z'ZD_3)^{-1}D_3Z'\varepsilon] \quad (18)$$

が成立することが示される．それ故，$\hat{\Gamma}'(p-1)$ 及び $\hat{\gamma}_1'$ については

$$T^{\frac{1}{2}}\{\hat{\Gamma}'(p-1)-\Gamma'(p-1)\}=[T^{-1}Y'Y]^{-1}[T^{-\frac{1}{2}}Y'\varepsilon]+O_p(T^{-\frac{1}{2}}) \quad (19)$$

$$T^{\frac{3}{2}}\{\hat{\gamma}_1'-\gamma_1'\}=[T^{-3}\tilde{L}'\tilde{L}]^{-1}[T^{-\frac{3}{2}}\tilde{L}'\varepsilon]+O_p(T^{-\frac{1}{2}}) \quad (20)$$

であることも示される．$\varepsilon=[e_1, \cdots, e_N]$，$\hat{\Gamma}'(p-1)=[\hat{\gamma}_1(p-1), \cdots, \hat{\gamma}_N(p-1)]$，$\Gamma'(p-1)=[\gamma_1(p-1), \cdots, \gamma_N(p-1)]$ 及び $y(t)=[\Delta y_{t-1}', \cdots, \Delta y_{t-p+1}']'$ とすると，(19)は

$$T^{\frac{1}{2}}\{\hat{\gamma}_j(p-1)-\gamma_j(p-1)\}=[T^{-1}YY]^{-1}[T^{-1/2}Y'e_j]+O_p(T^{-\frac{1}{2}}) \quad (21)$$

，$j=1, \cdots, N$ を意味する．Σ の第 j 対角要素を σ_{jj} とし，$Ey(t)y'(t)=R(p-1)$ とすると，(21)より $T^{\frac{1}{2}}\{\hat{\gamma}_j(p-1)-\gamma_j(p-1)\}$ が漸近的に平均 0，分散 $\sigma_{jj}R(p-1)$ の正規分布に従うことが確立されることになる．また，(20)は，$T^{\frac{3}{2}}\{\hat{\gamma}_1'-\gamma_1'\}$ が漸近的に平均 0，分散 3Σ の正規分布に従うことを意味している．

一方，小瀧（1989）の中で用いられた議論により，$D_4^{-1}\{\hat{\Gamma}'-\Gamma'\}$ の各列ベクトルが退化しないある確率分布に収束することを見てとることができる．この論文の(17)で与えられる B_T は，本稿の(15)で与えられた $\hat{\Gamma}$ ときわめて密接にかかわっているものであること，それ故，$D_4^{-1}\{\hat{\Gamma}'-\Gamma'\}$ の確率分布を定式化することは，漸近的にも非常に困難なものであることが記されなければならない．

$D_4^{-1}\{\hat{\Gamma}'-\Gamma'\}$ の漸近的性質を調査しようとする時，その要素そのものよりもそれらの固有値の方が扱いやすくなっていることは，Johansen (1988), 小瀧(1989)の議論より明らかである．$\hat{\Gamma}'$ 及び Γ' の固有値を $\hat{\lambda}_i$, λ_i, $i=1, \cdots, N$ と記すことにし，さらに，$|\hat{\lambda}_1|\geq|\hat{\lambda}_2|\geq\cdots\geq|\hat{\lambda}_N|$ 及び $|\lambda_1$

$|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_N|$ の様に，絶対値の順位がつけられているものとしよう．その時，小瀧（1989）の中でなされた議論を用いて，

$$\lambda_i=1,\quad i=1,\ \cdots,\ r$$
$$|\lambda_i|<1,\quad i=r+1,\ \cdots,\ N$$
$$\hat{\lambda}_i-\lambda_i=O_p(T^{-1}),\quad i=1,\ \cdots,\ r$$
$$\hat{\lambda}_i-\lambda_i=O_p(T^{-\frac{1}{2}}),\quad i=r+1,\ \cdots,\ N$$

であることが示される．

ところで，ε_t の正規性が仮定された時の（y_1, …, y_T）の尤度関数を L とすると

$$L^{-2/T}=\det(S_{00})\prod_{i=1}^{N}(1-\hat{\lambda}_i) \tag{22}$$

ここで $S_{00}=y'[I_T-V(V'V)^{-1}V']y/T$. さらに，$\Gamma=-\beta\alpha'$ という制約を考慮した下での尤度関数を $L(\Gamma=-\beta\alpha')$ とすると

$$L(\Gamma=-\beta\alpha')^{-2/T}=\det(S_{00})\prod_{i=1}^{r}(1-\hat{\lambda}_i) \tag{23}$$

であることが Johansen (1988) の議論を用いて示される．その時，$\Gamma=-\beta\alpha'$ という帰無仮説をテストするための尤度比検定統計量 $-21_n(Q)$ は，

$$-21n(Q)=21nL/L(\Gamma=-\beta\alpha')$$
$$=-T\sum_{i=r+1}^{N}1n(1-\hat{\lambda}_i) \tag{24}$$

となり，Johansen (1988) の Theorem 3 の(18)式で与えられる様な漸近分布に従うことが示される．

6. まとめ

本稿では，co-integration の概念に関する様々な計量経済学上の問題と統計的推測が，非確率的なトレンドの存在ということに重点を置きつつ論じられてきた．4 節において考察された様に，非確率的トレンドの存在は，レベルの変数の多変量時系列の error correction モデルへの変換に際し

て，細心の注意が必要であることを意味する．すなわち，error correction モデルでのトレンドの係数ベクトルは，$A(1)$ の列ベクトルによって張られるものになっていることが示される．さらに，そのトレンドの係数ベクトルがその様な制約に必らずしも従わず，R^N 空間（N 次元実ベクトル空間）の任意のベクトルであり得るならば，y_t は非確率的なトレンドとして，‘1次トレンド’だけでなく‘2次トレンド’も含んでいるかもしれないことが指摘された．非確率的トレンドについて，‘1次トレンド’だけでなく，2次やもっと高次のものまで含めてある種のスプライン関数的なものを想定しようとするのは，きわめて自然なことと思われる．

3節において提示された変数の外生性を判定するための基準は，結局のところ，多変量時系列体系における common trends に相当するものを外生変数とみなそうとするものである．その場合，common trends に相当する部分が，それ以外の部分を Granger cause していることは容易に示されたが，そのことは，この基準と Granger causality の検定による変数の‘内生性’の判定基準が同じ結論をもたらすことを意味するものであった．

本稿の5節で扱われた推定方式は，2節で提示された error correction モデルでの，何らの制約をも考慮しない最尤推定に基づくものであった．これは，そもそも定数項やトレンドが考慮されないケースでの Johansen (1988) の，$\Gamma=-\beta\alpha'$ という制約の下での最尤推定量とは異なったものとなっている．$A(1)=\beta\alpha'$ 及び $r\leq N-1$ という制約を課さない下での係数パラメータの最尤推定量は，最小2乗推定量そのものであること，また，一部の係数パラメータを除いて，かなりの部分の係数パラメータの推定量には，通常の収束速度（$T^{-1/2}$）での一致性と漸近的正規性という標準的漸近理論が適用し得ることが確立された．それ以外の係数パラメータについては，トレンドの係数ベクトル $\hat{\gamma}_1$ は $T^{-3/2}$ という収束速度を持つが漸近的に正規分布することが示されたし，また，$\hat{\Gamma}$ については，その固有値の漸近的性質を考察することによって，尤度比検定統計量や Johansen (1988) の theoren 3 の(18)式との関連性が指摘された．

以上論じてきた様に，本稿の中で論じ且つ確立された結果は，統計理論の上でもまた実用面でも多くの意味づけを与えるものと思われる．

参 考 文 献

Campbell, J. Y., and R. J. Shiller, (1988), Interpreting cointegrated models, Journal of Economic Dynamics and Control, 12, 505-522.

Engle, R. F., and C. W. J. Granger, (1987), co-integration and error correction: representation, estimation, and testing, Econometrica, 55, 251-276.

Engle, R. F., and B. S. Yoo, (1987), Forecasting and testing in co-integrated systems, Journal of Econometrics, 35, 143-159.

Johansen, S., (1988), Statistical analysis of cointegration vectors, Journal of Economic Dynamics and Control, 12, 231-254.

Johansen, S., (1991), Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in gaussian vector autoregressive models, Econometrica, 59, 1551-1580.

Nelson, C. R., and C. I. Plosser, (1982), Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidences and implications, Journal of Monetary Economics, 10, 139-162.

小瀧光博，(1988)，時系列における co-integration と common trend, 広島大学経済論叢，12巻，2号，59-77.

Odaki, M., (1989), On a statistical criterion for detecting cointegration and common trends in the vector time series, The Hiroshima Economic Studies, 10, 141-154.

小瀧光博，(1989)，多変量時系列モデルにおける co-integration の定式化と統計的推測，広島大学経済論叢，13巻，1号，45-62.

Odaki, M., (1993), On some transformations for achieving stationarity and invertibility in cointegrated systems, The Hiroshima Economic Review, 16, No. 4, 89-103.

Phillips, P. C. B., and S. Ouliaris, (1988), Testing for cointegration using principal components methods, Journal of Economic Dynamics and Control, 12, 1-26.

Stock, J. H., (1987), Asymptotic properties of least squares estimates of cointegration vectors, Econometrica, 55, 1035-1056.

Stock, J. H., and M. W. Watson, (1988), Testing for common trends, Journal of the American Statistical Association, 83, 1097-1107.

West, K. D., (1988), Asymptotic normality, when regressors have a unit root, Econometrica, 56, 1397-1418.