非定常性に関する統計的諸問題と自己回帰モデルにおける係数の最小2乗推定

小　瀧　光　博

1. はしがき

時系列データとは，種々の現象が年とか四半期とか月とかいった一定単位時間ごとに観測されたデータを一つの系列にまとめたものであるが，経済時系列を含む時系列データの多くは，本質的に非定常的なパターンを持っている．なぜならば，時系列の定常性とは，ある意味では周期性とか安定性と同じニュアンスを持つ概念としてとらえることができるのであるが，経済現象をはじめとして多くの現象は，明らかに，不安定であったり，ある時点で突発的な意図されない変化が生じたり，あるいは一定の傾向で増大したり減少したりするものであるからである．例えば，一国の GNP とか消費支出とかの時系列データを図示してみるならば，明らかに，大体一定の傾向でもって時間とともに増大していく動きとその傾向のまわりでの若干の変動を読みとることができるであろう．この様に，多くのマクロ経済時系列データには，何らかの時間的傾向（しばしば“トレンド”と呼ばれる）並びにそのトレンドのまわりでの若干の変動が認められる．1920年頃，景気分析を中心にした時系列分析の経済学への応用が活発化した時，経済時系列データを，トレンド（傾向変動），循環変動，季節変動，不規則変動に分解する試みがなされた．つまり，トレンドのまわりの変動を，

さらに，循環変動，季節変動，不規則変動に分解するということである．このうち，循環変動の部分は定常的であり，その元のデータが内包している経済的情報の本質的部分に相当しているものと考えられ，元の時系列データからいかにこの循環変動の部分を抽出するかが，当時の経済時系列分析の基本的テーマになっていた．（例えば，溝口・浜田（1975）及び溝口・刈屋（1983）を参照せよ）

Box and Jenkins (1970) によって確立された，今現在主流となっている時系列分析法（Box-Jenkins 法）においても，観測された元の時系列データがそのまま分析されるのではなく，それからトレンド，季節変動，不規則変動をまず取り除いてから，分析にかけられたり，各種の時系列モデルに適合されたりするのである．それ故，多くの実証研究は，観測された時系列のトレンドの除去によって（季節変動や不規則変動の除去は，例えば，年次データの様に季節変動が存在しないものをはじめとして，その様な変動がほとんど認められない時系列データも数多く存在すること，また，これらの除去はかなり厄介で，その除去法にも統一的方法がなくケース・バイ・ケースでなされるものであること等から，別の問題として扱われることが多い）元の非定常時系列を定常時系列に変換することに基いてなされてきた．つまり，Box and Jenkins (1970) の方法とそれに基く実証研究では，非定常時系列の問題の回避に重点が置かれてきたのである．このことは，経済学的要請からくるものではなく，統計理論上の必要性からくるものであった．すなわち，非定常時系列については，一般に，定常時系列において成立していた漸近的正規性に基いた標準的漸近理論が適用できなくなるのである．Mann and Wald (1943) によって最初に示された様に，定常性が満たされる限り，高次のベクトル自己回帰モデルの様なかなり広範な時系列モデルに対して，その係数パラメータの最小２乗推定量（OLS 推定量）による推測に，漸近的正規性に基いた標準的漸近理論を適用することができるのである．すなわち，定常時系列に対しては，少なくともベクトル自己回帰モデルによって表現される様な定常時系列の下では，漸近的正規性に基いた統合的・画一的理論が成立するのである．

一方，非定常時系列のそのものに対する統計理論の確立への取り組みについては，まず，1階の一変量自己回帰モデル (AR(1)) における係数の OLS 推定量の漸近的性質が，White (1958, 1959) 及び Anderson (1959) 等によって研究された．それらの論文によると，OLS 推定量の漸近的性質は全く標準的ではなく，さらに異なる非定常性（すなわち，モデルの係数の値が1になるケース，あるいは1を越えるケース）に対して，異なる漸近的性質がもたらされる．これらの試みは，その後 Dickey (1977), Dickey and Fuller (1979, 1981) 及び Evans and Savin (1981, 1984) によって，1階の一変量自己回帰モデルの係数が1か否かの検定（単位根検定）のための係数の t-値(Dickey-Fuller 検定統計量)の確立分布並びにパワーに対する研究に継承・展開させられる．同時に，これらの論文では，単純な AR(1) モデルではなく，定数項（ドリフト）つきの AR(1) モデルでの係数パラメータの OLS 推定も考察され，理論的にはその後 West (1988) によって示されることになるが，このモデルでの OLS 推定量の漸近分布が（非定常時系列の下であるにもかかわらず）正規分布であることが見い出された．すなわち，ゼロでない定数項の存在によって，確定的な非定常性（確定的なトレンド）がもたらされることになり，それが確率的な非定常性（確率的なトレンド）を上回るがゆえに，漸近分布が正規分布になるのである．マクロ経済時系列がこの2つのうちいずれの非定常性によって支配されているかについての実証研究は，ある意味では単位根検定よりも経済的に本質的なものであるが，Nelson and Plosser (1982) によって，この2つの非定常性の分類とともにその様な実証研究が始めて本格的になされ，その後の多くの経済時系列による実証研究のための論文を通して，経済時系列を確率的非定常性によって説明されるものと確定的非定常性によって説明されるものとに分類することの重要性と，定常時系列への変換のやり方が確率的な非定常性と確定的なそれとで一義的にはなされていことが強調されてきた．非定常時系列に対する理論的且つ実証的論文は，その後も数多く書かれてきており，扱われる時系列モデルも AR(1) から次第に大型化・複雑化され，また仮定・条件がゆるめられる等の下で，

各種の漸近的・経験的結果が得られてきたが，それらを通して一様に見い出される点は，定常の場合の様な統合的且つ画一的な理論を組み立てることは難しく，特に OLS 推定量に固執するならばモデルごとに統計理論が存在するといっても過言ではないということである．

他方，Engle and Granger (1987) 等によって，多変量時系列における“Co-integration”という概念が導入された．一変量時系列において，非定常時系列から定常時系列への変換のやり方は，確率的な非定常性に対しては原系列の階差をとることによってなされ，確定的非定常性に対してはタイムトレンドへの最小2乗回帰による残差をとることによってなされるのが普通である．もっと一般んに，様々なパターンの非定常性が存在する高次の自己回帰モデルでは，複数回だけ階差をとったり，より低次の自己回帰モデルでの最小2乗回帰による残差をとることによってなされる．これらは，“integration”という概念に関連する操作である．“co-integration”は，非定常な多変量時系列間の同時的結びつけによって，一つの定常時系列が構成し得るということを意味する概念である．一変量ごとでは非定常な時系列であるにもかかわらず，それらを2つないしは複数個結びつけて作った系列（それらの時系列のある線形結合）が定常になることもあり得るであろう．その時，この多変量時系列は，co-integrated であると定義されるのである．換言すると，co-integrate している状況においては，個々の一変量時系列それ自体の変動は不安定的・非定常的であるのに対して，それらの時系列のある種の線形結合の変動は安定的・定常的になっているのである．これは，多くのマクロ経済時系列の非定常性にある種の同質性が存在し，時系列として観測されるマクロ経済変数の一つの線形結合によって，その様な非定常性が相殺されて定常的になり得ることを意味している．その時，ある種の経済理論が複数個の経済変数間のこの様な同時的な線形関係式で表現されていると考えるならば，この線形関係式が定常であるということは，ある意味ではその経済理論が統計的に安定しているということを意味するのである．

本稿の目的は，自己回帰モデルにおける非定常性に関する各種の問題，

すなわち，係数パラメータの推定，とりわけ OLS 推定量の漸近的性質，co-integration の定式化と検出等を，これまでまったく考慮されてこなかったいくつかの観点から考察することにある．以下の諸節において，その様な観点からの各種の統計的結果が論じられる．まず，explosive な根によってもたらされる非定常性に対しての分析を重点的に取り扱う．マクロ経済時系列の様にデータ数がそう多くない場合には，その非定常性が単位根によってもたらされているのか explosive な根によってもたらされているのかを識別するのは困難である．にもかかわらず，explosive な非定常時系列に対する考察は，White (1958, 1959), Anderson (1959) 等ごく少数の論文でしかなされてこなかった．本稿では，定数項（ドリフト）つきの AR(1) モデルで，explosive な根の存在する場合の OLS 推定量についての考察がなされる．また，単位根だけでなく，explosive な根に対しても co-integration の概念が定義できる様，co-integration の定義を拡張する．そして，その場合について，co-integration の有無を検証するための検定統計量として，小瀧（1988 b，1989）によって提示されたものの漸近的性質を調査する．また，単位根を持つ AR(1) の最小２乗推定が，ある意味で反転不能な１階の移動平均モデル (MA(1)) の最尤推定に対して双対的になっていることも示される．さらに，種々の単位根や explosive な根を複数個持つ様な高次の自己回帰モデルにおいて，係数の OLS 推定量の漸近的性質について論じる．この様な各種の非定常根を複数個含んだ様な自己回帰モデルに対する結果は，過去の論文では得られていなかった．本稿では，OLS 推定量の真のパラメータへの収束のスピードが，各種の非定常性のパターンに応じたものであることが示される．

2.　次数１の自己回帰モデルにおける非定常性と係数の推定問題

この節では以下の様な，必ずしもゼロでない定数項（ドリフト）を持つ１階のスカラー自己回帰モデル (AR(1)) を考察しよう．

$$y_t = ay_{t-1} + u + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d.(0,\ \sigma^2) \tag{1}$$

ここで $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$ は，ε_t が系列的に平均0，分散 σ^2 の独立同一分布に従うことを意味し，また u は必ずしもゼロでない定数とする．さらに，ここでは，$a>0$, $y_0=0$, $E\varepsilon_t^4<\infty$ を仮定する．(1)から

$$y_t=\left(\sum_{j=0}^{t-1} a^j\right)u+\sum_{j=0}^{t-1} a^j\varepsilon_{t-j} \tag{2}$$

が導出される．いま観測値 $(y_1, \cdots, y_n)$ が与えられているものとしよう．その時，まず，(1)の定数項がゼロ $(u=0)$ の場合を考察しよう．$y_t;t=2, \cdots, n$ を $y_{t-1};t=2, \cdots, n$ に回帰させることによって得られる a の OLS 推定量 $\hat{a}$ は，

$$\hat{a}=\left(\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2\right)^{-1}\left(\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}y_t\right)$$

として得られる．(1)より，さらに

$$\hat{a}-a=\left(\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2\right)^{-1}\left(\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}\varepsilon_t\right)$$

が得られる．$a<1$ であれば，(1)によって生成される y_t は定常的になる．その時，$\hat{a}$ の漸近的性質は標準的であり，すなわち $\sqrt{n}(\hat{a}-a)$ の漸近分布は正規分布である．そのことは，Mann and Wald (1943) の特殊ケースになっていることから明らかである．また，$a\geq 1$ である時，y_t は非定常な時系列となる．$a=1$ の時，(1)によって表わされる AR(1) モデルは単位根を持つといわれ，$a>1$ の時，(1)は explosive な根を持つといわれる．単位根を持つ時，$n(\hat{a}-a)$ の漸近分布は，その確率密度関数は陽に表わすことはできないけれども $(\int_0^1 W(s)^2ds)^{-1}\frac{1}{2}(\chi^2(1)-1)$ の様な確率変数の分布に等しくなることが White (1958, 1959), Anderson (1959) 及び Evans and Savin (1981, 1984) 等によって示されている．ここで $W(.)$ は $[0, 1]$ における標準的なウィナー過程，$\chi^2(1)$ は自由度1のカイ2乗分布する確率変数である．また，explosive な根を持つ時，ε_t についてさらに正規分布することを仮定すると，$[a^2-1]^{-1}a^n(\hat{a}-a)$ の漸近分布が Cauchy 分布になることが示される．(例えば，White (1958, 1959), Anderson (1959))．これらの結果から，a の OLS 推定量 $\hat{a}$ は，$a<1$ で

y_t が定常的である時 $n^{-1/2}$ のスピードで a に収束し，$a=1$ で(1)が単位根を持つ時 n^{-1} のスピードで a に収束し，さらに，$a>1$ で(1)が explosive な根を持つ時，a^{-n} のスピードで a に収束することになる．

次に(1)が非ゼロ定数項 ($u\neq 0$) を持つ場合を考察しよう．$y_t;t=2, \cdots, n$ を $(y_{t-1}, 1);t=2, \cdots, n$ に回帰させることによって得られる (a, u) の OLS 推定量は以下の様に与えられる．

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 & \sum_{t=2}^{n} y_{t-1} \\ \\ \sum_{t=2}^{n} y_{t-1} & \sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^{n} y_t \\ \\ \sum_{t=2}^{n} y_{t-1}y_t \end{bmatrix}$$

(1)よりさらに

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \\ \hat{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u \\ \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 & \sum_{t=2}^{n} y_{t-1} \\ \\ \sum_{t=2}^{n} y_{t-1} & \sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \\ \\ \sum_{t=2}^{n} y_{t-1}\varepsilon_t \end{bmatrix}$$

$a<1$ の時，(1)が定常的であり，$\sqrt{n}(\hat{u}-u, \hat{a}-a)'$ が漸近的に正規分布に従うことは，極めて標準的な結果 (Mann and Wald (1943)) である．また，(1)が単位根を持つ時，すなわち $a=1$ の時には，(2)は

$$y_t = tu + \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j} \qquad (2)'$$

となり，確定的な非定常成分 tu のオーダーが確率的な非定常成分 $\sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j}$ のオーダーを上回るがゆえに，$(n^{1/2}(\hat{u}-u), n^{3/2}(\hat{a}-a))'$ の漸近分布は，平均 $(0, 0)'$，分散 $\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & u/2 \\ u/2 & u^2/3 \end{bmatrix}$ の正規分布となる．(West (1988))．一方，(1)が explosive な根を持つ時，すなわち $a>1$ の時には，y_t の中に含まれる確率的な非定常成分のオーダーと確定的な非定常成分のオーダーとは等しくなる．すなわち，(2)の第 2 項については $\sum_{j=0}^{t-1} a^j\varepsilon_{t-j}=O_p(a^t)$ であり，(2)の第 1 項については $\left(\sum_{j=0}^{t-1} a^j\right)u=0(a^t)$ となっている．また，(1)より

$$\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}=\sum_{t=2}^{n}\sum_{j=0}^{t-1}a^j\varepsilon_{t-1-j}+u\sum_{t=2}^{n}\left(\sum_{j=0}^{t-1}a^j\right) \tag{3}$$

$$\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2=u^2\sum_{t=2}^{n}\left(\sum_{j=0}^{t-1}a^j\right)^2+\sum_{t=2}^{n}\left(\sum_{j=0}^{t-1}a^j\varepsilon_{t-j}\right)^2+2u\sum_{t=2}^{n}\left(\sum_{j=0}^{t-1}a^i\right)\left(\sum_{j=0}^{t-1}a^j\varepsilon_{t-j}\right) \tag{4}$$

$$\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}\varepsilon_t=u\sum_{t=2}^{n}\left(\sum_{j=0}^{t-1}a^j\right)\varepsilon_t+\sum_{t=2}^{n}\left(\sum_{j=0}^{t-1}a^j\varepsilon_{t-1-j}\right)\varepsilon_t \tag{5}$$

がただちに得られ，さらに(3)及び(5)の右辺のどの項のオーダーも a^n に等しく，また，(4)の右辺のどの項のオーダーも a^{2n} に等しくなっていることが容易に示される．このことは，(1)が単位根を持つケースと異なって，(3)，(4)，(5)においては，確定的な非定常な部分と確率的な非定常な部分のオーダーが等しくなっていることを意味するものである．また，$\hat{u}-u=O_p(n^{-1/2})$，$\hat{a}-a=O_p(a^{-n})$ であることの証明も容易である．

3.　次数１の移動平均モデルにおける係数の最尤推定との双対性

１階の移動平均モデル (MA(1))

$$y_t=\varepsilon_t-a\varepsilon_{t-1},\quad \varepsilon_t\sim i.i.n.(0,\ \sigma^2) \tag{6}$$

を考察しよう．ここで $\varepsilon_t\sim i.i.n.(0,\ \sigma^2)$は，$\varepsilon_t$ が系列的に平均０，分散 σ^2 の独立な正規分布に従うことを意味する．さらに，ここでは，$\varepsilon_0=0$ および $1\geq a>0$ を仮定する．$a=1$ の時，(6)は反転不能といわれ，y_t は無限次数の自己回帰表現が不可能となる．また，$a<1$ の時，(6)は反転可能といわれ，y_t は無限次数の自己回帰表現が可能となる．観測値として $(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ が与えられた時，(6)は

$$\underset{\sim}{y}(n)=A(n)\underset{\sim}{\varepsilon}(n) \tag{7}$$

あるいは

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(n)=A(n)^{-1}\underset{\sim}{y}(n) \tag{7$'$}$$

と表わすことができる．ここで

$$\underset{\sim}{y}(n)=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad A(n)=\begin{bmatrix} 1 & & & O \\ -a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ O & & -a & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\varepsilon}(n)=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$n\times 1$ $\qquad$ $n\times n$ $\qquad$ $n\times 1$

その時，$(y_1, \cdots, y_n)$ の対数尤度は，

$$\log L=-(n/2)\log 2\pi-(n/2)\log\sigma^2-(1/2\sigma^2)\underset{\sim}{y}(n)'B(n)'^{-1}B(n)^{-1}\underset{\sim}{y}(n) \tag{8}$$

ここで

$$B(n)=\begin{bmatrix} 1 & & & O \\ -b & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ O & & -b & 1 \end{bmatrix}$$

$n\times n$

また b は $1\geq b>0$ を満たす任意の実数値をとり得るものとする．$\log L$ を最大にする様な b の値は，

$$M(b)=\sum_{t=1}^{n-1}(y_{t+1}+by_t+\cdots+b^ty_1)^2/n \tag{9}$$

を最小にする様な b の値と同時となることは明らかである．この様な b の値を $\hat{a}$ と定義しよう．すなわち，

$$M(\hat{a})=\min_{b\in[1,\,0)} M(b)$$

(9)の y_t に $\varepsilon_t-a\varepsilon_{t-1}$ を代入することによって

$$M(b)=\sum_{t=1}^{n-1}\varepsilon_{t+1}^2/n+2(b-a)\left\{\sum_{t=1}^{n-1}\varepsilon_{t+1}(\varepsilon_t+b\varepsilon_{t-1}+\cdots+b^{t-1}\varepsilon_1)/n\right\}$$
$$+(b-a)^2\left\{\sum_{t=1}^{n-1}(\varepsilon_t+b\varepsilon_{t-1}+\cdots+b^{t-1}\varepsilon_1)^2/n\right\} \tag{10}$$

が得られる．

一方，2節の $u=0$ の場合の(1)における $a=0$ の最小2乗推定と最小2乗推定量 $\hat{a}$ について考察しよう．明らかに $\hat{a}$ は

$$S(b)=\sum_{t=1}^{n-1}(y_{t+1}-by_t)^2/n \tag{11}$$

を最小にする様な b の値として定義される．(11)の y_t に，$u=0$ の場合の(2)の右辺を代入することによって

$$S(b)=\sum_{t=1}^{n-1}\varepsilon_{t+1}^2/n-2(b-a)\left\{\sum_{t=1}^{n-1}\varepsilon_{t+1}(\varepsilon_t+a\varepsilon_{t-1}+\cdots+a^{t-1}\varepsilon_1)/n\right\}$$

$$+(b-a)^2\left\{\sum_{t=1}^{n-1}(\varepsilon_t+a\varepsilon_{t-1}+\cdots+a^{t-1}\varepsilon_1)^2/n\right\} \tag{12}$$

が得られる．(10)と(12)はある意味では双対的とみなすことができるであろう．勿論，(12)は b に関して単純な２次関数となっており，最適な b，すなわち $\hat{a}$ の導出も評価も簡単になされ得るのに対して，(10)は b に関して非常に複雑な関数となっており，十分大きな n に対しても(12)の様な単純な２次関数として近似することはできないであろう．それ故，最適な b，すなわち $\hat{a}$ の導出や評価は非常に厄介なものになっている．にもかかわらず，(6)において $a=1$ である時の $\hat{a}$ の近似的性質は，(11)の最小化によって導出される $\hat{a}$ のそれとの密接な関連性が期待できるものと思われる．

4.　様々な非定常根を持つ高次の自己回帰モデルにおける非定常性のパターンと係数の推定

必らずしも定数項が０ではない p 次の（スカラー）自己回帰モデル

$$y_t=\sum_{j=1}^{p}a_j y_{t-j}+u+\varepsilon_t,\quad \varepsilon_t\sim i.i.d.(0,\ \sigma^2) \tag{13}$$

を考察しよう．ここで $\varepsilon_t\sim i.i.d.(0,\ \sigma^2)$ は，２節において定義されている．また u は必ずしもゼロではない定数とする．さらに，$y_{-j}=0,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1$ 及び $E\varepsilon_t^4<\infty$ を仮定する．(13)から

$$y_t=\left(\sum_{j=0}^{t-1}C_j\right)u+\sum_{j=0}^{t-1}C_j\varepsilon_{t-j} \tag{14}$$

が導出される．ここで $C_0=1$ また $C_j,\ j=0,\ 1,\ \cdots$ は，任意の λ に対して

$$\left(1-\sum_{j=1}^{p} a_j\lambda^j\right)\left(1+\sum_{j=1}^{\infty} C_j\lambda^j\right)=1$$

が満たされている様に定義する．(13)，あるいは(14)によって生成される y_t が定常か非定常かは，(13)の特性方程式

$$1-\sum_{j=1}^{p} a_j\lambda^j=0 \qquad (15)$$

の根に依存する．すなわち，(15)におけるすべての λ について $|\lambda|>1$ ならば，y_t は定常であり，もし少なくとも1つの λ に対して $|\lambda|\leq 1$ ならば y_t は非定常である．$|\lambda|=1$ なる λ は，単位根と呼ばれ，$|\lambda|<1$ なる λ は，explosive な根と呼ばれる．また，$|\lambda|\leq 1$ なる λ は，まとめて非定常根ともいわれる．明らかに，非定常な自己回帰モデルといっても，その非定常性には色々なパターンがある．例えば，(13)によって生成される y_t は，(15)において1ないしは－1といった実単位根を持つ様な非定常時系列かもしれないし，$e^{i\lambda}$ および $e^{-i\lambda}$ の様な複素単位根かもしれない．さらには，その非定常性は，0.5とか $0.5e^{i\lambda}$ 及び $0.5e^{-i\lambda}$ の様な explosive な根によって発揮されるかもしれない．また，(15)における単位根や explosive な根が1つだけとは限らないであろう．すなわち，y_t は，ある1つの単位根や explosive な根を重根として持つ場合，異なる単位根や explosive な根を複数個持つこともあり得るであろう．$1-\sum_{j=1}^{p} a_j\lambda^j$ を以下の様に置こう．

$$a(\lambda)=1-\sum_{j=1}^{p} a_j\lambda^j$$

さらに，$a(\lambda)$ は，$|\lambda|>1$ なる(15)の根から成る多項式と(15)の非定常根だけを集めた多項式の積によって以下の様に表わされる．

$$a(\lambda)=V(\lambda)U(\lambda)$$

ここで $V(\lambda)=1+\sum_{j=1}^{p-r} v_j\lambda^j$，$V(\lambda)=1+\sum_{j=1}^{r} u_j\lambda^j$，また，$V(\lambda)=0$ なる λ は，すべて $|\lambda|>1$ なるものとし，$U(\lambda)=0$ なる λ は，すべて $|\lambda|\leq 1$ となるものとする．その時

$$V(\lambda)=\prod_{j=1}^{p-r}(1-\lambda_{r+j}\lambda)$$

$$U(\lambda)=\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j\lambda)$$

と表現できる．ここで，λ_j, $j=1, \cdots, r, r+1, \cdots, p$ は実数または複素数であり，$V(\lambda)$ 及び $U(\lambda)$ についての定義から，$|\lambda_j|\geq 1$, $j=1, \cdots, r$ 並びに $|\lambda_{r+j}|<1$, $j=1, \cdots, p-r$ が成立していなければならない．また，λ_j^{-1}, $j=1, \cdots, r, r+1, \cdots, p$ が(15)の根になっている．我々は，$p>r\geq 1$ すなわち，(15)に $|\lambda|>1$ なる根と $|\lambda|\leq 1$ なる根がともに少なくとも１つ以上存在するケースを考察する．

(13)を以下の様に書き直そう．

$$y_t=\underset{\sim}{x}_{t-1}'\underset{\sim}{\alpha}+u+\varepsilon_t \tag{16}$$

ここで $\underset{\sim}{x}_{t-1}=(y_{t-1}, \cdots, y_{t-p})'$, $\underset{\sim}{\alpha}=(a_1, \cdots, a_p)'$．いま観測値として $(y_1, \cdots, y_n)$ が与えられているものとしよう．我々の目的は，(16)において，y_t, $t=p+1, \cdots, n$ を $(y_{t-1}, \cdots, y_{t-p}, 1)$, $t=p+1, \cdots, n$ に回帰させることによって得られる OLS 推定量のうち $\underset{\sim}{\alpha}$ に対応する部分の漸近的性質について，あるいは(16)において $u=0$ が仮定され且つそのことが既知である時，y_t, $t=p+1, \cdots, n$ を $\underset{\sim}{x}_{t-1}$, $t=p+1, \cdots, n$ に回帰させることによって得られる $\underset{\sim}{\alpha}$ の OLS 推定量の漸近的性質についての調査をすることにある．前者の OLS 推定量を $\hat{\underset{\sim}{\alpha}}$, 後者のそれを $\tilde{\underset{\sim}{\alpha}}$ と書くことにすると，それらは，

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}}=\left[\sum_{t=p+1}^{n}(\underset{\sim}{x}_{t-1}-\bar{\underset{\sim}{x}})(\underset{\sim}{x}_{t-1}-\bar{\underset{\sim}{x}})'\right]\left[\sum_{t=p+1}^{n}(\underset{\sim}{x}_{t-1}-\bar{\underset{\sim}{x}})(y_t-\bar{y})\right] \tag{17}$$

$$\tilde{\underset{\sim}{\alpha}}=\left[\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{x}_{t-1}\underset{\sim}{x}_{t-1}'\right]^{-1}\left[\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{x}_{t-1}y_t\right] \tag{18}$$

と表現できる．ここで $\bar{\underset{\sim}{x}}=\sum_{t=p+1}^{n}x_{t-1}/(n-p)$, $\bar{y}=\sum_{t=p+1}^{n}y_t/(n-p)$．(16)を考慮すると，(17)から

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}}-\underset{\sim}{\alpha}=\left[\sum_{t=p+1}^{n}(\underset{\sim}{x}_{t-1}-\bar{\underset{\sim}{x}})(\underset{\sim}{x}_{t-1}-\bar{\underset{\sim}{x}})'\right]^{-1}\left[\sum_{t=p+1}^{n}(\underset{\sim}{x}_{t-1}-\bar{\underset{\sim}{x}})(\varepsilon_t-\bar{\varepsilon})\right] \quad (19)$$

が導出される．ここで $\bar{\varepsilon}=\sum_{t=p+1}^{n}\varepsilon_t/(n-p)$．また，同様に，$u=0$ が仮定された下での(16)から，(18)は，

$$\tilde{\underset{\sim}{\alpha}}-\underset{\sim}{\alpha}=\left[\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{x}_{t-1}\underset{\sim}{x}_{t-1}'\right]^{-1}\left[\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{x}_{t-1}\varepsilon_t\right] \quad (20)$$

と変換される．まず，$u=0$ が仮定された下で，$U(\lambda)=\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j\lambda)$ における λ_j, $j=1,\cdots,r$ が，すべて実数で且つ

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_r|\ (\geq 1)$$

となっているケースでの $\tilde{\underset{\sim}{\alpha}}$ について考察しよう．$a_i(j)$, $i=1,\ \cdots,\ j-1$, $j=2,\ \cdots,\ r,\ r+1$ 及び $y_t(j)$, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ r,\ r+1$ を以定の様に定義する．

$$\prod_{i=1}^{j-1}(1-\lambda_i\lambda)=1+a_1(j)\lambda+\cdots+a_{j-1}(j)\lambda^{j-1},\quad j=2,\ \cdots,\ r$$

$$\prod_{i=1}^{r}(1-\lambda_i\lambda)=U(\lambda)=1+a_1(r+1)\lambda+\cdots+a_r(r+1)\lambda^r$$

$$y_t(1)=y_t$$

$$y_t(j)=[1+a_1(j)L+\cdots+a_{j-1}(j)L^{j-1}]y_t,\quad j=2,\ \cdots,\ r$$

$$y_t(r+1)=U(L)y_t=[1+a_1(r+1)L+\cdots+a_r(r+1)L^r]y_t$$

ここで，L はラグ・オペレーターであり，$Ly_t=y_{t-1}$ と作用するものとする．(14)と $y_t(j)$ の定義から

$$y_t(j)=O_p(\iota_t(j)),\quad j=1,\ \cdots,\ r,\ t=1,\ \cdots,\ n$$

$$y_t(r+1)=O_p(1),\quad t=1,\ \cdots,\ n$$

であることは容易に示される．ここで $\iota_t(j)=\left\{\sum_{j=0}^{t-1}|\lambda_j|^i\right\}^{\frac{1}{2}}$．さらに，

$$\sum_{t=p+1}^{n}y_{t-i}(j)^2=O_p(\iota_n(j)^2),\quad j=1,\ \cdots,\ r,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ p$$

$$\sum_{t=p+1}^{n}y_{t-i}(r+1)^2=O_p(n),\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ p$$

$$\sum_{t=p+1}^{n} y_{t-i}(j)\varepsilon_t = O_p(\iota_n(j)),\quad i=1,\ \cdots,\ p,\ j=1,\ \cdots,\ r$$

$$\sum_{t=p+1}^{n} y_{t-i}(r+1)\varepsilon_t = O_p(n^{1/2}),\quad i=1,\ \cdots,\ p$$

であることも同様にして示される．$R(1)'$ 及び D_n を

$$R(1)' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & a_1(2) & & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & a_1(r) & \cdots & a_{r-1}(r) \end{bmatrix},\qquad D_n = \begin{bmatrix} \iota_n(1)^2 & & O \\ & \iota_n(2)^2 & \\ O & \ddots & \\ & & \iota_n(r)^2 \end{bmatrix}$$

$$(r\times r) \qquad\qquad\qquad\qquad (r\times r)$$

と定義しよう．さらに，R' 及び C_n を

$$R' = \begin{array}{c} \\ r \\ \\ p-r \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & p-r \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:cccc} & R(1)' & & & & O & & \\ \hdashline 1 & a_1(r+1) & \cdots & a_r(r+1) & & & & \\ O & 1 & a_1(r+1) & \cdots & a_r(r+1) & & O & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ O & & & 1 & a_1(r+1) & \cdots & a_r(r+1) & \end{array}\right] \end{array},$$

$$(p\times p)$$

$$C_n = \begin{array}{c} \\ r \\ p-r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & p-r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} D_n & O \\ \hdashline O & nI_{p-r} \end{array}\right] \end{array}$$

$$(p\times p)$$

として定義する．その時，

$$R'x_{t-1} = (y_{t-1}(1),\ \cdots,\ y_{t-1}(r),\ y_{t-1}(r+1),\ \cdots,\ y_{t-(p-r)}(r+1))'$$

が成立する．また，$y_t(j)$ のオーダーと C_n の定義より，$C_n^{-\frac{1}{2}}R'\sum_{t=p+1}^{n}x_{t-1}\varepsilon_t$ のオーダーが1であり，$C_n^{-\frac{1}{2}}R'\sum_{t=p+1}^{n}x_{t-1}x_{t-1}'RC_n^{-\frac{1}{2}}$ のオーダーが1で且つ確率1でもって正則であることが示される．(20)は

$$\tilde{\alpha}-\alpha=RC_n^{-\frac{1}{2}}\left[C_n^{-\frac{1}{2}}R'\sum_{t=p+1}^{n}x_{t-1}x_{t-1}'RC_n^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\left[C_n^{-\frac{1}{2}}R'\sum_{t=p+1}^{n}x_{t-1}\varepsilon_t\right] \quad (21)$$

と書かれるので，$\tilde{\alpha}$ の α に対する収束の速度は $RC_n^{-\frac{1}{2}}$ によって評価されることになる．R 及び C_n の定義より，$\tilde{\alpha}-\alpha=O_p(n^{-1/2})$ であることは明らかである．

より一般の非定常根から作られる様な $U(\lambda)$ に対しても，上記の様な R' 及び C_n を容易に構成することができる．$\lambda(i)$, $i=1, 2, \cdots, s$ を

$$\lambda(1)>\lambda(2)>\cdots>\lambda(s)\geq 1$$

となる様な適当な正整数としよう．$\lambda(j)$ に絶対値が等しくなる様な(15)の根の個数を $m(j)$ としよう．その時，どの様な非定常根を持つ(13)に対しても，$\lambda(j)=|\lambda_{k+M(j)}|$ とできることに注意せよ．ここで $M(j)=\sum_{i=1}^{j-1}m(i)$, $k=1, \cdots, m(j)$, $j=1, 2, \cdots, s$ 及び $\sum_{j=1}^{s}m(j)=r$. また，ここで，

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_r|\ (\geq 1)$$

が仮定されているものとする．例えば，$U(\lambda)=0$ なる λ が全て異なれば，λ_j^{-1} を $U(\lambda)=0$ の異なる根とする時，$s=r$, $m(j)=1$, $\lambda(j)=|\lambda_j|$, $j=1, \cdots, r$, とみなすことができる．また，$U(\lambda)=(1-3\lambda)^2(1-\lambda)^3(1+\lambda)^4$ である時，$r=9$, $s=2$, $m(1)=2$, $m(2)=7$, $\lambda(1)=3$, $\lambda(2)=1$ となっている．$U(\lambda)=0$ の根が全て異なっているケースと同様に，$a_i(j)$, $i=1, \cdots, j-1$, $j=2, \cdots, T, r+1$ を以下の様に定める．もし，λ_1 が実根であるならば，$a_1(2)=\lambda_1$ とする．もし，λ_1 が複素根であるならば，$a_1(2)=0$ と置く．さらに，$\lambda_2=\bar{\lambda}_1$($\bar{\lambda}_1$ は λ_1 の共役根とする）とみなすことにし，

$$(1-\lambda_1L)(1-\lambda_2L)=1+a_1(3)L+a_2(3)L^2$$

を満たす様に，$a_1(3)$ 及び $a_2(3)$ は決められるものとする．また，λ_j, $j=2, \cdots, r$ が実根であるならば，

$$\prod_{k=2}^{j}(1-\lambda_kL)=1+a_1(j+1)L+\cdots+a_j(j+1)L^j$$

が満たされる様に，$a_1(j+1)$, $\cdots$, $a_j(j+1)$ は決められるものとする．もし，λ_j, $j=2, \cdots, r$ が複素根であるならば，$\lambda_{j+1}=\bar{\lambda}_j$($\bar{\lambda}_j$ は λ_j の共役根とする）とみなすことにし，

$$a_i(j+1)=a_i(j),\quad i=1,\ \cdots,\ j-1,\qquad a_j(i+1)=0$$

と置き，

$$\prod_{k=1}^{j+1}(1-\lambda_k L)=1+a_1(j+2)L+\cdots+a_{j+1}(j+2)L^{j+1}$$

が満たされる様に，$a_1(j+2),\ \cdots,\ a_{j+1}(j+2)$ が決められるものとする．この様にして定義された，$a_i(j),\ i=1,\ \cdots,\ j-1,\ j=2,\ \cdots,\ r,\ r+1$ に対して，$U(\lambda)=0$ なる λ が全て異なっているケースと同じ様に，$y_t(j)$，$R(1)'$，D_n，R'，C_n を構築することができる．その時，$\iota_t(j)$ だけは以下の様な定義と取り換える必要がある．

$$\iota_t(k+M(j))=\left\{\sum_{i=0}^{t-1} i^{m(j)-k}\lambda(j)^i\right\}^{\frac{1}{2}},\quad k=1,\ \cdots,\ m(j)$$

$\tilde{\alpha}$ の α に対する収束の速度がこの様にして築かれた $RC_n^{-\frac{1}{2}}$ によって評価され，それ故 $\tilde{\alpha}-\alpha=O_p(n^{-1/2})$ であることも同様にして示される．

以上の結果は，非ゼロ定数項が存在するケース（$u\neq 0$ のケース）の $\hat{\alpha}$ の漸近的性質に対する結果へ，容易に拡張される．$u=0$ のケースと同様に $\lambda(i),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$ を定める．$\lambda(s)>1$ の場合には，$u=0$ のケースにおいて定義された，R'，C_n 等がそのまま採用される．一方，$\lambda(s)=1$ の場合には，$u=0$ のケースにおける $\iota_t(k+M(s))=\left\{\sum_{i=0}^{t-1} i^{m(s)-k}\right\}^{1/2},\ k=1,\ \cdots,$ $m(s)$ が，このケースでは，$\iota_t(k+M(s))=\left\{t\sum_{i=0}^{t-1} i^{m(s)-k}\right\}^{1/2},\ k=1,\ \cdots,\ m(s)$ と修正されることになる．すなわち，R' はそのままで，C_n の一部の対角成分の定義だけを修正すればよい．その時，(19)より(21)に対応する様な表現を得ることによって，$\hat{\alpha}$ の α に対する収束の速度が $RC_n^{-\frac{1}{2}}$ によって評価され，$\hat{\alpha}-\alpha=O_p(n^{-1/2})$ であることが，$u=0$ のケースと同様にして示される．

5. ベクトル自己回帰モデルと co-integration

以下の様な p 次のベクトル自己回帰モデル

$$\underset{(k\times 1)}{\underset{\sim}{y}_t} = \sum_{j=1}^{p} \underset{(k\times k)}{A_j} \underset{(k\times 1)}{\underset{\sim}{y}_{t-j}} + \underset{(k\times 1)}{\underset{\sim}{u}} + \underset{(k\times 1)}{\underset{\sim}{\varepsilon}_t},$$

$$\underset{(k\times 1)}{\underset{\sim}{\varepsilon}_t} \sim i.i.d.\ (\underset{(k\times 1)}{\underset{\sim}{0}}, \underset{(k\times k)}{\Sigma}), \tag{22}$$

を考察しよう．ここで A_j は $k\times k$ 係数行列，$\underset{\sim}{u}$ は k 次元定数ベクトル．さらに，ここでは，$\underset{\sim}{y}_{-j}=\underset{\sim}{0}$, $j=0, 1, \cdots, p-1$ 及び $E\varepsilon_{it}^4<\infty$, $i=1, \cdots, k$ が仮定される，ここで $\underset{\sim}{\varepsilon}_t=(\varepsilon_{1t}, \cdots, \varepsilon_{kt})'$．(22)によって生成される $\underset{\sim}{y}_t$ が定常か非定常かは，(22)の特性方程式

$$\det A(\lambda) \equiv \left| I_k - \sum_{j=1}^{p} A_j \lambda^j \right| = 0 \tag{23}$$

の根に依存する．ここで $A(\lambda)=I_k-\sum_{j=1}^{p}A_j\lambda^j$. また，$\det A(\lambda)$ は λ についての pk 次の多項式となっていることに注意せよ．(23)におけるすべての λ について，$|\lambda|>1$ ならば $\underset{\sim}{y}_t$ は定常であり，もし少なくとも 1 つの λ について，$|\lambda|\leq 1$ ならば $\underset{\sim}{y}_t$ は非定常である．$|\lambda|=1$ なる λ は，単位根と呼ばれ，$|\lambda|<1$ なる λ は，explosive な根と呼ばれる．また，$|\lambda|\leq 1$ なる λ は，まとめて非定常根ともいわれる．

ベクトル自己回帰モデルは，統計学的にも経済学的にも，スカラーの自己回帰モデルとは比較にならないくらい，十分意味のあるものと考えられている．例えば，$\underset{\sim}{y}_t$ が(22)によって生成される時，その個々の成分 y_{it}, ここで $\underset{\sim}{y}_t=(y_{1t}, \cdots, y_{kt})'$, は ARMA$(pk, pk-p)$ (AR 部分と MA 部分の次数がそれぞれ $pk, pk-p$ である様な ARMA モデル）としても表わされることが示される．すなわち，(22)は

$$A(L)\underset{\sim}{y}_t=\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{\varepsilon}_t, \tag{22$'$}$$

ここで L はラグ・オペレーターであり，$L\underset{\sim}{y}_t=\underset{\sim}{y}_{t-1}$ と作用するものとする，とも表わされるが，それは，さらに

$$\det A(L)\underset{\sim}{y}_t=\underset{\sim}{w}+\operatorname{adj} A(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{24}$$

に誘導される．ここで $\underset{\sim}{w}=\operatorname{adj} A(L)\underset{\sim}{u}$, また $\operatorname{adj} A(L)$ は $A(L)$ の余因子行列である．$\det A(L)$ が L についての pk 次多項式，$\operatorname{adj} A(L)$ が L に

ついての $pk-p$ 次の多項式行列になっていることは容易に確認されるので，各 i について y_{it} が ARMA$(pk, pk-p)$ であることは明らかである．

一方，(22)は，各 y_{it} の間の同時的な関係（それらはある場合には経済理論とみなされ得るであろう）についても考察し得る様なモデルなっている．Engle and Granger (1987) は，$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{0}$ の場合において co-integration という概念を定義した．以下において，小瀧（1988 b，1989）に従って，$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{0}$ の場合並びに $\underset{\sim}{u}\neq\underset{\sim}{0}$ の場合それぞれについて，(22)によって生成される $\underset{\sim}{y}_t$ のための co-integration の定義を紹介する．$A(L)$ について次の様に設定しよう．

$$A(L)=(1-L)H(L)$$

ここで $H(L)=I_k-\sum_{j=1}^{p-1}H_jL^j$，また，$\det H(\lambda)=0$ なるすべての λ について，$|\lambda|>1$ となることを仮定する．その時，(22)′より

$$(1-L)\underset{\sim}{y}_t=\underset{\sim}{v}+C(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{25}$$

が得られる．ここで，$\underset{\sim}{v}=C(L)\underset{\sim}{u}$，また，$C(L)=H(L)^{-1}$．さらに，(25)より

$$(1-L)\underset{\sim}{y}_t=\underset{\sim}{v}+C(1)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+(1-L)C^*(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{26}$$

が導出される．ここで $C(1)=\sum_{j=0}^{\infty}C_j$，$C^*(L)=\sum_{j=0}^{\infty}\left[(-1)\sum_{l=j+1}^{\infty}C_l\right]L^j$，また，$C(L)=\sum_{j=0}^{\infty}C_j$，$C_0=I_k$，さらに $\underset{\sim}{\varepsilon}_{-j}=\underset{\sim}{0}$, $j\geq 0$ を仮定する．$D(1)=[\underset{\sim}{v}\,\vdots\,C(1)]$ としよう．

定義：(25)によって生成される $\underset{\sim}{y}_t$ について，$1\leq \operatorname{rank} D(1)<k$ である時，$\underset{\sim}{y}_t$ は co-integrated であるといわれ，$\operatorname{rank} D(1)=k$ である時，$\underset{\sim}{y}_t$ は co-integrated していないといわれる．

$\underset{\sim}{y}_t$ が co-integrated である時，すなわち，$\operatorname{rank} D(1)<k$ の時，$\underset{\sim}{\alpha}'D(1)=\underset{\sim}{0}'$ なる k 次元ベクトル $\underset{\sim}{\alpha}\neq\underset{\sim}{0}$ が存在することになるので，(26)より $\underset{\sim}{\alpha}'\underset{\sim}{y}_t$ は定常となる．すなわち，$\underset{\sim}{\alpha}'\underset{\sim}{y}_t=0$ をある種のマクロ経済理論としてみなすならば，$\underset{\sim}{\alpha}'\underset{\sim}{y}_t$ が定常であるということはそれがある意味で安定的であることを意味するものである．$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{0}$ のケースにおいては，$D(1)\Rightarrow C(1)$ とすることができる．すなわち，co-integration は $C(1)$ の階数

によって定義される．rank $C(1)=m<k$ である時，Engle and Granger (1987) の Lemma 1 より，$\det C(L)=(1-L)^{k-m}d(L)$ 及び $\mathrm{adj}\, C(L)=(1-L)^{k-m-1}F(L)$ である様な L の無限次数の関数 $d(L)$，関数行列 $F(L)$ が存在することになるので，(25)は

$$F(L)\underset{\sim}{y}_t=t\xi+d(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{27}$$

が得られる．ここで $\xi=F(L)\underset{\sim}{v}$．また，$\det A(L)=(1-L)^k \det H(L)$ 及び $\mathrm{adj}\, A(L)=(1-L)^{k-1}\mathrm{adj}\, H(L)$ であることより，(24)は

$$(1-L)\det H(L)\underset{\sim}{y}_t=(1-L)^{1-k}\underset{\sim}{w}+\mathrm{adj}\, H(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{28}$$

$C(L)=H(L)^{-1}=[1/det\, H(L)]\mathrm{adj}\, H(L)$ であることより，(28)の両辺を $\det H(L)$ で割ると，それは(25)でなければならない．$K(L)=\mathrm{adj}\, H(L)$ と置くと，(28)より

$$(1-L)\det H(L)\underset{\sim}{y}_t=(1-L)^{1-k}\underset{\sim}{w}+K(1)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+(1-L)K^*(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{29}$$

が導出される．ここで $K(1)=\sum_{j=0}^{p(k-1)}K_j$, $K^*(L)=\sum_{j=0}^{p(k-1)-1}\left[(-1)\sum_{l=j+1}^{p(k-1)}K_l\right]L^j$,

また，$K(L)=\sum_{j=0}^{p(k-1)}K_j$, $K_0=I_k$ とする．rank $K(1)=$rank $C(1)$

及び rank$[\underset{\sim}{u}\,\vdots\,K(1)]=$rank $D(1)$ であることは明らかである．従って，我々は，$C(1)$ や $D(1)$ の替わりに $K(1)$ や $[\underset{\sim}{u}\,\vdots\,K(1)]$ の階数によって co-integration の有無を見い出すことができる．

6. Explosive な根のための co-integration の定義の拡張とその推測

前節の(22)あるいは(22)′において，$A(L)$ が次の様に設定されているものとしよう．

$$A(L)=(1-\lambda_0 L)H(L)$$

ここで λ は実数であり $|\lambda_0|>1$ となるものとする，また，$\det H(\lambda)=0$ を満たすすべての λ について，$|\lambda|>1$ なることを仮定する．その時，(22)′から

$$(1-\lambda_0 L)\underset{\sim}{y}_t=\underset{\sim}{v}+C(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{30}$$

が導出される．ここで，$\underset{\sim}{v}=C(L)\underset{\sim}{u}$，また，$C(L)=H(L)^{-1}$．さらに，(30)より

$$(1-\lambda_0 L)\underset{\sim}{y}_t=\underset{\sim}{v}+C(\lambda_0^{-1})\underset{\sim}{\varepsilon}_t+(1-\lambda_0 L)C_0^*(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{31}$$

が得られる．ここで $C(\lambda_0^{-1})=\sum_{l=0}^{\infty}C_l\lambda_0^{-l}$，$C_0^*(L)=\sum_{j=0}^{\infty}\left[(-1)\sum_{l=j+1}^{\infty}C_l\lambda_0^{-l}\right]\lambda_0^j L^j$，

また，$C(L)=\sum_{j=0}^{\infty}C_jL^j$，$C_0=I_k$．(31)は，$C(L)=\sum_{j=0}^{\infty}C_jL^j$ であることと $C(\lambda_0^{-1})+(1-\lambda_0 L)C_0^*(L)=\left(\sum_{l=0}^{\infty}C_l\lambda_0^{-1}\right)+(-1)\left(\sum_{l=1}^{\infty}C_l\lambda_0^{-l}\right)+\left(\sum_{l=1}^{\infty}C_l\lambda_0^{-l+1}\right)L+(-1)\left(\sum_{l=2}^{\infty}C_l\lambda_0^{-l}\right)\lambda_0 L+\left(\sum_{l=2}^{\infty}C_l\lambda_0^{-l+2}\right)L^2+(-1)\left(\sum_{l=3}^{\infty}C_l\lambda_0^{-l}\right)\lambda_0^2L^2+\cdots$ であることを考慮すれば，ただちに得られる．$D(\lambda_0^{-1})=[\underset{\sim}{v}\,\vdots\,C(\lambda_0^{-1})]$ とすると，explosive な根のための co-integration も，前節の単位根のための co-integration と同じ様に，$D(\lambda_0^{-1})$ の階数によって定義されることになる．すなわち，(30)によって生成される $\underset{\sim}{y}_t$ について，$1\leq\text{rank}\,D(\lambda_0^{-1})<k$ であるならば，$\underset{\sim}{y}_t$ は co-integrated であるといわれ，$\text{rank}\,D(\lambda_0^{-1})=k$ である時，$\underset{\sim}{y}_t$ は co-integrated していないといわれる．$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{0}$ のケースにおいては，$D(\lambda_0^{-1})\Rightarrow(\lambda_0^{-1})$ とみなせばよく，すなわち，co-integration は $C(\lambda_0^{-1})$ の階数によって定義される．また，$\det A(L)=(1-\lambda_0 L)^k\det H(L)$ 及び $\text{adj}\,A(L)=(1-\lambda_0 L)^{k-1}\,\text{adj}\,H(L)$ であることより，(24)は

$$(1-\lambda_0 L)\det H(L)\underset{\sim}{y}_t=(1-\lambda_0 L)^{1-k}\underset{\sim}{w}+\text{adj}\,H(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{32}$$

となる．$C(L)=H(L)^{-1}=[1/\det H(L)]\text{adj}\,H(L)$ であることより，(32)の両辺を $\det H(L)$ で割ると，それは(30)にほかならない．$K(L)=\text{adj}\,H(L)$ と置くと，(32)から

$$(1-\lambda_0 L)\det H(L)\underset{\sim}{y}_t=(1-\lambda_0 L)^{1-k}\underset{\sim}{w}+K(\lambda_0^{-1})\underset{\sim}{\varepsilon}_t+(1-\lambda_0 L)K_0^*(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{33}$$

が導出される．ここで $K(\lambda_0^{-1})=\sum_{j=0}^{p(k-1)}K_j\lambda_0^{-j}$，$K_0^*(L)=\sum_{j=0}^{p(k-1)-1}\Big[(-1)$

$\sum_{l=j+1}^{p(k-1)} K_l\lambda_0^{-l}\Big]\lambda_0^j L^j$, また，$K(L)=\sum_{j=0}^{p(k-1)} K_j$, $K_0=I_k$ とする．$\operatorname{rank} K(\lambda_0^{-1})$ $=\operatorname{rank} C(\lambda_0^{-1})$ 及び $\operatorname{rank}[\underset{\sim}{u} \vdots K(\lambda_0^{-1})]=\operatorname{rank} D(\lambda_0^{-1})$ であることは明らかであるので，我々は，$C(\lambda_0^{-1})$ や $D(\lambda_0^{-1})$ の替わりに，$K(\lambda_0^{-1})$ や $[\underset{\sim}{u} \vdots K(\lambda_0^{-1})]$ の階数によって co-integration の有無が見い出される．一方，(22)より

$$\underset{\sim}{y}_t=\left(\sum_{j=1}^{p} A_j\lambda_0^{-j+1}\right)\underset{\sim}{y}_{t-1}+\sum_{j=1}^{p-1}\left[(-1)\sum_{l=j+1}^{p} A_l\lambda_0^{-l+1}\right]\lambda_0^{j-1}(\underset{\sim}{y}_{t-j}-\lambda_0\underset{\sim}{y}_{t-j-1})$$
$$+\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{34}$$

が得られる．明らかに，$1\leq\operatorname{rank}\left(\sum_{j=1}^{p} A_j\lambda_0^{-j+1}\right)<k$ であるならば，$\underset{\sim}{y}_t$ は co-integrated しており，$\operatorname{rank}\left(\sum_{j=1}^{p} A_j\lambda_0^{-j+1}\right)=k$ である時，$\underset{\sim}{y}_t$ は co-integrated していない．$\bar{A}_0(\lambda_0^{-1})=\sum_{j=1}^{p} A_j\lambda_0^{-j+1}$ と置くことにしよう．

いま観測値として $(\underset{\sim}{y}_1, \cdots, \underset{\sim}{y}_n)$ が利用可能であるとしよう．小瀧（1988 b）においては，co-integration の有無を検出するために次の様な量の固有値が採用された．

$$\hat{A}_n=\left[\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}'\right]^{-1}\left[\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{y}_t'\right] \tag{35}$$

$\hat{A}_n$ は，次数1のベクトル自己回帰モデルを適合させた時の，係数行列の OLS 推定量となっている．また，小瀧（1989）では，次の様な量の固有値が考察された．

$$\hat{B}_n=\left[\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}'-\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{z}_{t-1}'\right)Z_n^{-1}\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}'\right)\right]^{-1}\left[\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\right.$$
$$\left.\underset{\sim}{y}_t'-\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{z}_{t-1}'\right)Z_n^{-1}\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{y}_t'\right)\right] \tag{36}$$

ここで $Z_n=\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{z}_{t-1}'$, また，$\hat{B}_n$ は，(34)において $\underset{\sim}{y}_t$, $t=p+1, \cdots, n$ を $(\underset{\sim}{y}_{t-1}', \underset{\sim}{z}_{t-1}')'$, $t=p+1, \cdots, n$ に回帰させることによって得られる係数行列の OLS 推定量のうち，$\underset{\sim}{y}_{t-1}$ の係数行列である $\bar{A}_0(\lambda_0^{-1})$ に対応する

部分に相当している，$\underset{\sim}{z}_{t-1}=(\underset{\sim}{y}'_{t-1}-\underset{\sim}{y}'_{t-2},\ \cdots,\ \underset{\sim}{y}'_{t-p+1}-\underset{\sim}{y}'_{t-p},\ 1)'$.
$\text{rank}[\underset{\sim}{u} \vdots K(\lambda_0^{-1})]=\text{rank}\, D(\lambda_0^{-1})=\text{rank}\, \bar{A}_0(\lambda_0^{-1})=r<k$ である時，

$$H'[\underset{\sim}{u} \vdots K(\lambda_0^{-1})]=H' D(\lambda_0^{-1})=H' \bar{A}_0(\lambda_0^{-1})=0$$

$$\text{rank}\, H'=k-r\equiv m$$

$$\text{rank}[K \vdots H]=k$$

である様な $k\times r$ 行列 K 及び $k\times m$ 行列 H が存在する．この時，明らかに

$$K'[\underset{\sim}{u} \vdots K(\lambda_0^{-1})]\neq 0$$

$$K' D(\lambda_0^{-1})\neq 0$$

$$K' \bar{A}_0(\lambda_0^{-1}\neq 0$$

が成立していなければならない．いま

$$\underset{\sim}{y}_t(1)=K'\underset{\sim}{y}_t$$

$$\underset{\sim}{y}_t(2)=H'\underset{\sim}{y}_t$$

の様に r 次元ベルトル $\underset{\sim}{y}_t(1)$ 及び m 次元ベクトル $\underset{\sim}{y}_t(2)$ を定義しよう．4 節と同じ様な議論によって，

$$\underset{\sim}{y}_t(1)=O_p(\imath_t(0))$$

$$\underset{\sim}{y}_t(2)=O_p(1)$$

であることが示される．ここで $\imath_t(O)=\left\{\sum_{i=0}^{t-1}|\lambda_0|^i\right\}^{1/2}$．さらに，

$$\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(1)\underset{\sim}{y}_{t-1}(1)'=O_p(\imath_n(0)^2)$$

$$\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(2)\underset{\sim}{y}_{t-2}(2)'=O_p(n)$$

$$\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(1)\underset{\sim}{e}'_t=O_p(\imath_n(0))$$

$$\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(2)\underset{\sim}{e}'_t=O_p(n)$$

であることも示される．ここで $\underset{\sim}{e}_t=\underset{\sim}{v}+C(L)\underset{\sim}{\varepsilon}_t$. また，

$$\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(1)\underset{\sim}{y}_{t-1}(1)'-\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(1)\underset{\sim}{z}_{t-1}'\right)Z_n^{-1}\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}(1)'\right)=O_p(\iota_n(0)^2)$$

$$\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(2)\underset{\sim}{y}_{t-1}(2)'-\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(2)\underset{\sim}{z}_{t-1}'\right)Z_n^{-1}\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}(2)'\right)=O_p(n)$$

$$\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(1)\underset{\sim}{\varepsilon}_t'-\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(1)\underset{\sim}{z}_{t-1}'\right)Z_n^{-1}\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{\varepsilon}_t'\right)=O_p(\iota_n(0))$$

$$\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(2)\underset{\sim}{\varepsilon}_t'-\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}(2)\underset{\sim}{z}_{t-1}'\right)Z_n^{-1}\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{\varepsilon}_t'\right)=O_p(n^{1/2})$$

であることも同様にして示される．(30)及び(34)を考慮すると，(35)及び(36)はそれぞれ

$$\hat{A}_n-\lambda_0 I_k=\left[\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}'\right]^{-1}\left[\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{e}_t'\right] \tag{37}$$

$$\hat{B}_n-\bar{A}_0(\lambda_0^{-1})=\left[\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}'-\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{z}_{t-1}'\right)Z_n^{-1}\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}'\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{\varepsilon}_t'-\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{z}_{t-1}'\right)Z_n^{-1}\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{\varepsilon}_t'\right)\right] \tag{38}$$

と変換される．R' 及び C_n を

$$\underset{(k\times k)}{R'=\left[\begin{array}{c}K'\\ \hdashline H'\end{array}\right]};\qquad \underset{(k\times k)}{C_n=\left[\begin{array}{c:c}\iota_n(0)^2 I_r & O\\ \hdashline O & nI_m\end{array}\right]}$$

として定義しよう．その時，(37)及び(38)はそれぞれ

$$\hat{A}_n-\lambda_0 I_k=RC_n^{-\frac{1}{2}}\left[C_n^{-\frac{1}{2}}R'\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}'RC_n^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\left[C_n^{-\frac{1}{2}}R'\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{e}_t'\right] \tag{39}$$

$$\hat{B}_n-\bar{A}_0(\lambda_0^{-1})=RC_n^{-\frac{1}{2}}\left[C_n^{-\frac{1}{2}}R'\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}RC_n^{-1/2}-C_n^{-1/2}R'\right.$$
$$\left.\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{z}_{t-1}'\right)Z_n^{-1}\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}'\right)RC_n^{-1/2}\right]^{-1}$$

$$\left[C_n^{-\frac{1}{2}}R'\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{\varepsilon}_t'-C_n^{-1/2}R'\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{z}_{t-1}'\right)z_n^{-1}\right.$$

$$\left.\left(\sum_{t=p+1}^{n}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{\varepsilon}_t'\right)\right] \tag{40}$$

と書かれる．また，$D_n(1)$ 及び $D_n(2)$ を

$$D_n(1)=\left[\begin{array}{c|c}\iota_n(0)^2I_r & O\\ \hline O & I_m\end{array}\right],\quad D_n(2)=\left[\begin{array}{c|c}\iota_n(0)^2I_r & O\\ \hline 0 & n^2I_m\end{array}\right]$$

$(R\times R)$

と定めると，(39)は

$$\hat{A}_n-\lambda_0I_k=RD_n(1)^{-1/2}\left[C_n^{-1/2}R'\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{y}_{t-1}'RC_n^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

$$\left[D_n(2)^{-1/2}R'\sum_{t=2}^{n}\underset{\sim}{y}_{t-1}\underset{\sim}{e}_t'\right] \tag{41}$$

とも書かれる．$R'\underset{\sim}{y}_{t-1}=(\underset{\sim}{y}_{t-1}(1)', \underset{\sim}{y}_{t-1}(2)')'$ であることより，$C_n^{1/2}R^{-1}$〔$\hat{B}_n-\bar{A}_0(\lambda_0^{-1})$〕及び $D_n(1)^{1/2}R^{-1}$〔$\hat{A}_n-\lambda_0I_k$〕がオーダー１で且つ非退化となることが示される．$C_n^{1/2}R^{-1}$〔$\hat{B}_n-\bar{A}_0(\lambda_0^{-1})$〕の平均は漸近的にゼロであることが示されるので，$\hat{B}_n$ の $\bar{A}_0(\lambda_0^{-1})$ に対する収束の速度は $RC_n^{-1/2}$ によって評価され，それ故，R 及び C_n の定義より，$\hat{B}_n-\bar{A}_0(\lambda_0^{-1})=O_p(n^{-1/2})$ であることがでてくる．$\underset{\sim}{y}_t$ が co-integrated しない時，すなわち，rank$[\underset{\sim}{u} \mid K(\lambda_0^{-1})]=$rank $D(\lambda_0^{-1})=$rank $\bar{A}_0(\lambda_0^{-1})=k$ の時には，H' は定義できないので，$R'=I_k$, $C_n=\iota_n(0)^2I_k$ とする．その時，$\hat{B}_n-\bar{A}_0(\lambda_0^{-1})=O_p(\iota_n(0)^{-1})$ であることが示される．一方，$\underset{\sim}{y}_t$ が co-integrated である時の $D_n(1)^{1/2}R^{-1}$〔$\hat{A}_n-\lambda_0I_k$〕の平均は，漸近的にもゼロではないので，$\hat{A}_n$ は λ_0I_k には収束しない．$\underset{\sim}{y}_t$ が co-integrated しない時には，$R'=I_k$, $C_n=\iota_n(0)^2I_k$ とすると，$\hat{A}_n-\lambda_0I_k=O_p(\iota_n(0)^{-1})$ であることが示される．

7.　まとめ並びに今後の課題

本稿では，非定常性に関する様々なパターンとそれらによって生じてくる各種の統計的諸問題を論じるために，スカラー並びにベクトル自己回帰

モデルが取り扱われた．第1に，過去の文献においてほとんど考慮されてこなかった，explosive な根によってもたらされる確率的・確定的非定常性のパターンを意識しつつ，必ずしも定数項がゼロではない次数1の自己回帰モデルにおける OLS 推定とベクトル自己回帰モデルにおける co-integration の問題が考察されてきた．非定常性がモデルの特性方程式の explosive な根によってもたらされている時には，それが単位根によってもたらされている時と異なって，確率的な非定常性と確定的非定常性のオーダーが等しくなっていることが示された．また，explosive な根による co-integration の定義並びに統計的検証は，単位根による co-integration のそれらからまったくパラレルに拡張できることが論じられた．同時に，本稿では，（ゼロ定数項を持つ）次数1のスカラー自己回帰モデルにおける係数の OLS 推定が，（ゼロ定数項を持つ）次数1のスカラー移動平均モデルにおける係数の最尤 (ML) 推定とある意味で双対になっていることを示した．特に，その自己回帰モデルとその移動平均モデルの係数が1になる時，すなわち，自己回帰モデルは単位根によって確率的に非定常なものとなり，また，移動平均モデルは反転不能となる時，それらの双対関係が際立ってくることが強調された．さらに，本稿では，単位根や explosive な根を複数個持つ様な高次の（スカラー）自己回帰モデルにおける OLS 推定量の漸近的性質が論じられた．OLS 推定量の真の係数パラメータへの収束のスピードは，各種の非定常性のパターンを結合したものになっていたことが示された．

今後の課題としては，4節の(13)の様なスカラー自己回帰モデルではなく，5節の(22)の様な，最も一般的な非定常の高次ベクトル自己回帰モデルにおいて，種々の非定常性のパターンとそれらに応じた OLS 推定量の漸近的性質が論じられる必要があるであろう．また，(23)が種々の explosive な根や単位根を持つ時，co-integration（あるいはそれと同様な概念）がどの様に定義され，どの様に統計的に検証されることが可能かも研究されていなければならないであろう．

参 考 文 献

Ahtola, J. and G. C. Tiao, (1987), Distributions of leost squares estimators autoregressie parameters for a process with complex roots on the unit circle, Journal of the Time Series Analysis, Vol. 8, No. 1, 1-14.

Anderson, T. W., (1959), On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic differene equation, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 30, 676-687.

Box, G. C. and G. Jenkins, (1970), Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day.

Dickey, D. A., (1977), Estimation and hypothesis testing in nonstationary time series, Unpublished Ph. D. thesis, Iowa State University.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller, (1979), Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, Journal of the American Statistical Association, Vol. 74, 427-431.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller, (1981), Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root, Econometrica, Vol. 49, No. 4, 1057-1072.

Engle, R. F. and C. W. J. Granger, (1987), Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing, Econometrica, Vol. 55, No. 2, 251-276.

Evans, G. B. A. and N. E. Savin, (1981), Testing for unit roots: 1, Econometrica, Vol. 49, No. 3, 753-779.

Evans, G. B. A. and N. E. Savin, (1984), Testing for unit roots: 2, Econometrica, Vol. 52, No. 5, 1241-1269.

Fuller, W. A., (1985), Nonstationary autoregressive time series, in Handbook of Statistics (Time Series in the Time Domain), Vol. 5, ed. by E. J. Hannan etc., North-Holland, 1-23.

Granger, C. W. J. and P. Newbold, (1975), Forecasting Economic Time Series, Academic Press.

Harvey, A. C., (1985), Trends and cycles in macroeconomic time series, Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 3, 216-227.

Harvey, A. C. and P. H. J. Todd, (1983), Forecasting economic time series with structural and Box-Jenkins models: A case study, Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 1, 299-307.

King, R. G., C. I. Plosser, J. H. Stock, and M. W. Watson, (1987), Stochastic trends and economic fluctuations, NBER Working Paper #2229.

Mann, H. B. and A. Wald, (1943), On the statistical treatment of linear relationships, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 14, 217-226.

溝口敏行・浜田文雄, (1975), 経済時系列の分析, 勁草書房.

溝口敏行・刈屋武昭, (1983), 経済時系列分析入門, 日本経済新聞社.

Nelson, C. R., (1988), Spurious trend and cycle in the state space decomposition of a time series with a unit root, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 12, 475-488.

Nelson, C. R. and C. I. Plosser, (1982), Trends and random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications, Journal of Monetary, Economics, Vol. 10, No. 2, 139-162.

小瀧光博, (1988 a), 自己回帰モデルにおける非定常性と推測, 広島大学年報経済学, 9巻, 77—96.

小瀧光博, (1988 b), 時系列における co-integration と common trend, 広島大学経済論叢, 12巻, 2号, 59-77.

小瀧光博, (1989), 多変量時系列モデルにおける co-integration の定式化と統計的推測, 広島大学経済論叢, 13巻, 1号, 45-62.

Phillips, P. C. B., (1986), Understanding spurious regressions in econometrics, Journal of Econometrics, Vol. 33, 311-340.

Phillips, P. C. B., (1987), Time series regression with a unit root, Econometrica, Vol. 55, No. 2, 277-301.

Phillips, P. C. B. and S. N. Durlaub, (1986), Mutiple time series with integrated variables, Review of Economic Studies, Vol. 55, 473-496.

Phillips, P. C. B. and P. Perron, (1988), Testing for a unit root in time series regression, Biometrika, Vol. 75, 335-346.

Satchell, S. E., (1984), Approximation to the finie sample distribution for nonstable first order stochastic difference equations, Econometrica, Vol. 52, No. 5, 1271-1289.

Solo, V., (1984), The order of differencing in ARIMA models, Journal of the American Statistical Association, Vol. 79, 916-921.

Tiao, G. C. and R. S. Tsay, (1983), Consistency properties of least squares estimates of autoregressive parameters in ARMA models, The Annals of Statistics, Vol. 11, No. 3, 856-871.

West, K. D., (1988), Asymptotic normality, when regressors have a unit root, Econometrica, Vol. 56, 1397-1418.

White, J. S., (1958), The limiting distribution of the serial correlation in the explosive case, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 29, 1188-1197.

White, J. S., (1959), The limiting distribution of the serial correlation in the explosive case, II, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 30, 831–834.