多変量時系列モデルにおける co-integration の定式化と統計的推測

小　瀧　光　博

1. はしがき

経済理論の妥当性に関する統計的検証は，様々な観点から，また種々の方法によってなされてきたが，多変量時系列分析による検証を正当化するものとして，近年 co-integration という観念が，Engle and Granger (1987) 及び Granger and Weiss (1983) 等によって提唱された．これは，経済理論の安定性を，多変量時系列の定常性・非定常性という統計的安定性の観点から定式化するものである．

時系列データとして観測される多くの経済変数が非定常なものであること，またその1階の差分をとったものが定常となっているということは，経験的事実として多くの文献において指摘されている．（例えば，Nelson and Plosser (1982) 参照）ところが，この様な各経済変数の非定常性にある種の同質性や従属性が存在する場合，これらの経済変数のある一次結合をとったものは，その様な非定常性が相殺されて定常時系列となることがある．その時，ある種の経済理論が複数個の経済変数間のこの様な線形制約で表現されていると考えるならば，この一次結合の定常性はある意味では，その経済理論が統計的な意味で安定しているとみなすことができるであろう．この様なケースを，これらの経済変数が co-integrate している

として定義するのである．換言すると，co-integrate している状況においては，個々の一変量時系列それ自体の変動は不規則的・不安定的で相対的に大きくなっていく（すなわち，非定常的）のに対して，それらの時系列のある種の線形結合の変動は安定的且つ規則的（すなわち，定常的）になっているのである．

Co-integration に関する統計的推測は，主として，いわゆる co-integrating vector と呼ばれる定常系列となる様な一次結合を作る定数ベルトルの推定と co-integrate しているか否かの検定とに大別される．基本的には非定常時系列が扱われるので，漸近的正規性を中心とした標準的推測論は適用できないが，co-integration が取り上げられている場合におけるこの問題の様相は，一層複雑となっている．すなわち，co-integration が存在する場合，1 階の差分をとったものの系列が non-invertible な定常多変量時系列になっていることからわかる様に，単純な非定常多変量時系列ではないのである．ところで，co-integration の統計的推測については，この様な複雑性にもかかわらず理論・実証の両面において数多くの研究結果が報告されており，推測方法については一応確立されたものとみなすことができる．(co-integrating vector の推定については，Engle and Granger (1987) 及び Stock (1987), 検定については，Engle and Granger (1987), Stock and Watson (1987), Phillips and Ouliaris (1986, 1987) 及び Johansen (1988) 参照）しかしながら，co-integration の取り扱いには依然としてある種の不十分な点と不整合な点が存在している様に思われる．それは，非定常性のゆえに標準的推測論が適用できないということではなく，もっと基本的且つ本質的な事項であり，以下の 2 つの点に要約される．

(i) 何らかの有限次数の時系列モデルの設定

(ii) 定数項の存在（分析対象となっている各時系列データの 1 階の差分をとった系列の期待値がゼロでないケース）

後で明らかにされる様にこれらの 2 点は互いに関連している．

一般に時間領域表現による時系列分析においては，例えば ARMA（p,

q) の様に，未知パラメータが有限次元空間に含まれる様に何らかのモデル・スペシフィケーション（有限次数の時系列モデルの設定）が行なわれる．これは，いわゆる推定量の“収束の速度”の問題と密接にからみあっている．Co-integration に関する統計的推測に関しても，推定された co-integrating vector や検定統計量がパラメータの真の値に収束していく，また，漸近分布に収束していく速度が，ある程度望ましい水準（少なくとも標準的水準程度）であるためには，データが何らかの時系列モデルに従って生成されたものと仮定する必要がある．事実，co-integration の統計的推測を扱っている多くの文献においては，error correction representation (ECR) や多変量自己回帰モデル (VAR) の様な有限次数の時系列モデルが仮定されている．一方，有限次数の時系列を仮定しない，ノン・パラメトリックな co-integration の推測を論じた Phillips and Ouliaris (1987) において，“収束の速度”の水準が決して望ましいものではないことを見てとることができる．

Co-integration を扱っている多くの文献では，定数項はゼロと仮定されているかあるいは非ゼロの場合であってもその扱いはきわめて不十分・不明瞭なものであった．しかしながら，多くの経済時系列においてゼロ定数項が棄却されるということは，Nelson and Plosser (1982) 等において報告されている．小瀧（1988）は，定数項をも考慮した場合にも co-integration の定義を拡張し且つその場合における推測を論じた．小瀧（1988）において，Engle and Granger (1987) によって示された co-integration と ECR や VAR との関連性が，定数項の存在によって希薄になることが指摘された．このことは，ECR と VAR との対比による co-integration の定数（Engle and Granger (1987) p. 266 の 4 から 7 までの検定方式，さらには Johansen (1988) によって論じられた検定方式）が無効となるものであることを意味する．

本稿の目的は，定数項をも考慮されたある時系列モデルのもとで，co-integration の統計的推測を論じることにある．以下では，小瀧（1988）の結果を踏まえて，co-integration をめぐる(i)(ii)の様な問題点が論じられる

ことになる．さらに，ECR に替わる，どの様なケースをも含むより一般的な新たなモデルが提示され，そのモデルのもとで co-integration の推測手法が構築される．

2. 定数項の存在と co-integration の概念

次の様な N 次元多変量時系列を考察しよう．

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{z}_t-\underset{\sim}{z}_{t-1}&=\underset{\sim}{u}+\sum_{j=0}^{\infty}C_j\underset{\sim}{\varepsilon}_{t-j}\\
&=\underset{\sim}{u}+C(1)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+\underset{\sim}{v}_t-\underset{\sim}{v}_{t-1}\\
&=D(1)\underset{\sim}{\xi}_t+\underset{\sim}{v}_t-\underset{\sim}{v}_{t-1} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで $\{\underset{\sim}{\varepsilon}_t\}$ は平均ゼロ，分散行列が単位行列となる様な，系列的に独立・同一分布に従う N 次元系列であり，また $\underset{\sim}{u}$ は N 次元の定数ベクトルである．さらに，

$$
C(1)=\sum_{j=0}^{\infty}C_j,\quad C_j:N\times N\quad (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)
$$

$$
\underset{\sim}{v}_t=\sum_{j=0}^{\infty}\left\{-\sum_{k=j+1}^{\infty}C_k\right\}\underset{\sim}{\varepsilon}_{t-j}
$$

$$
D(1)=[\underset{\sim}{u}\ \vdots\ C(1)],\ \underset{\sim}{\xi}_t=[1,\ \underset{\sim}{\varepsilon}'_t]'
$$

また，$\mathrm{rank}\,C_0=N$, $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j+1}^{\infty}|C_k|<\infty$ 及び $\underset{\sim}{z}_j=\underset{\sim}{\varepsilon}_j=\underset{\sim}{0}$ $(j=0,\ -1,\ -2,\ \cdots)$ を仮定することにする．$\underset{\sim}{z}_j=\underset{\sim}{\varepsilon}_j=\underset{\sim}{0}$ $(j=0,\ -1,\ -2,\ \cdots)$ という“初期条件”は Stock and Watson (1987) においても採用された仮定である．(1)に従って生成される $\{\underset{\sim}{z}_t\}$ は，観測可能な N 次元多変量時系列であるものとしよう．また，$\underset{\sim}{z}_1, \cdots, \underset{\sim}{z}_T$ が観測値として与えられているものとしよう．(1)は，

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{z}_t&=t\underset{\sim}{u}+C(1)\left\{\sum_{j=1}^{t}\underset{\sim}{\varepsilon}_j\right\}+\underset{\sim}{v}_t\\
&=D(1)\left\{\sum_{j=1}^{t}\underset{\sim}{\xi}_j\right\}+\underset{\sim}{v}_t \qquad (2)
\end{aligned}
$$

と書かれる．この時，co-integration は，小瀧（1988）に従うならば，

$D(1)$ の階級によって定義されることになる.

定義（小瀧（1988））：(1)によって生成される $\underset{\sim}{z}_t$ について，$1<\text{rank}\ D(1)=m<N$ である時，$\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated であるといわれる．また，$r=N-m$ は co-integrating rank と呼ばれる.

$\underset{\sim}{z}_t$ が co-integrating rank r で co-integrated している時

$$\nabla' D(1)=0, \quad \text{rank}\ \nabla=r \tag{3}$$

である様な $r\times N$ 行列 ∇' が存在することになるが，この時∇の各列ベルトルは co-integrated vector といわれる．明らかに r 個（co-integrating rank に等しい個数）の線形独立な co-integrated vector が存在する.

(2)及び(3)より

$$\nabla' \underset{\sim}{z}_t=\nabla' \underset{\sim}{v}_t \tag{4}$$

が得られる．すなわち，$\nabla' \underset{\sim}{z}_t$ は定常時系列となっているが，$\nabla' \underset{\sim}{z}_t=\underset{\sim}{0}$ をある種の経済理論（但し，それは複数個の経済変数間の線形制約として表現できるものに限られる…）とみなすならば，それが統計的な意味で安定的であることを意味しているのである.

ところで，(1)において定数項が存在しない場合（$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{0}$），co-integration は，Engle and Granger (1987) 等多くの文献においてそうなされている様に $C(1)$ の段階によって定義される．すなわち，$1\leq\text{rank}\ C(1)=n<N$ である時，$\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated であると定義されるのである．この場合には，(2)より明らかな様に $\underset{\sim}{z}_t$ における非定常性は確率的な意味でのものだけ $\left(C(1)\left\{\sum_{j=1}^{t}\underset{\sim}{\varepsilon}_j\right\}\right.$ の部分$\Big)$ となる．(1)において定数項が存在する場合（$\underset{\sim}{u}\neq\underset{\sim}{0}$）には，確定的な意味での非定常系列（$t\underset{\sim}{u}$）も含まれることになり，確率的意味での非定常系列 $\left(C(1)\left\{\sum_{j=1}^{t}\underset{\sim}{\varepsilon}_j\right\}\right)$ とともに $\underset{\sim}{z}_t$ の非定常性を形成している．小瀧（1988）による co-integration の定義では，確定的な意味での非定常性も確率的な意味での非定常性をも消去される様に co-inte-

groting vector が構成されることになっていたが，どちらか一方だけの非定常性を消去される様な一次結合も実はそれなりに意味を持っている．$t\underset{\sim}{u}$ の各要素の大きさは $O(t)$ になるのに対して $C(1)\left\{\sum_{j=1}^{t}\underset{\sim}{\varepsilon}_j\right\}$ のそれは $O_p(t^{1/2})$ であり，その意味では一次元においては，確定的な意味での非定常性の方が確率的な意味での非定常性よりも支配的なのである．$\underset{\sim}{u}\neq\underset{\sim}{0}$ である時，

$$A'\underset{\sim}{u}=0, \quad \operatorname{rank} A=N-1 \tag{5}$$

である様な $\overline{N-1}\times N$ 行列 A' が存在することになるが，この時 $\underset{\sim}{z}_t$ の各要素の大きさは $O_p(t)$ であるのに対し，$A'\underset{\sim}{z}_t$ のそれは $O_p(t^{1/2})$ となっている．このことは $\underset{\sim}{z}_t$ が co-integrated であるか否かにかかわらず（$D(1)$ の階数が N より小か否かにかかわらず）成立する．そして(5)における A の各列ベクトルは co-integrating vector として誤って推定される恐れもあるのである．次の例を考察しよう．

$$\begin{aligned} z_{1t}&=tu_1+\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_{1j}+0.5\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_{2j}+0.5\varepsilon_{2t} \\ z_{2t}&=tu_2+\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_{2j}+0.5\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_{1j}+0.5\varepsilon_{1t} \end{aligned} \tag{6}$$

ここで(6)は(2)の特殊ケース（$N=2$ のケース）であり，$u_1\neq 0$ 及び $u_2\neq 0$ としよう．(6)における $C(1)$ は $\begin{bmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}$ であり full-rank となっている（従って $D(1)$ の階級も 2 である）から，z_{1t} と z_{2t} は co-integrated しない．ところで，2 変量時系列モデルにおいて，定数項が考慮されていない場合，co-integrating vector の推定は "co-integrating regression" として知られる z_{1t} の z_{2t} への回帰（あるいは z_{2t} の z_{1t} への回帰）によってなされる．この回帰 (OLS) による推定値は $O_p(T^{-1})$ の一致性を持ち，さらにその決定係数 R^2 も 1 へ $O_p(T^{-1})$ のスピードで収束していく．(Engle and Granger (1987), Stock (1987) 及び Phillips and Ouliaris (1987)) 一方，co-integrated していない 2 変量時系列モデルにおける 2 つの変数間の同時点での回帰（z_{1t} の z_{2t} への回帰，あるいは z_{2t} の z_{1t} への回帰は，"spurious regression" として知られる．この場合，回帰によ

る推定値は極限において特定分布に従い（一致性は持たない），R^2 も非退化な極限分布を持つ．（Phillips (1986) 参照）．(6)の様な非ゼロ定数項を持つ時系列モデルにおいて，定数項の存在を無視して z_{1t} を z_{2t} へ回帰させて得られる OLS 推定量の性質を吟味してみよう．明らかに

$$\sum_{t=1}^{T} z_{1t} z_{2t} = u_1 u_2 \sum_{t=1}^{T} t^2 + O_p(T^{\frac{5}{2}})$$

$$\sum_{t=1}^{T} z_{2t}^2 = u_2^2 \sum_{t=1}^{T} t^2 + O_p(T^{\frac{5}{2}}) \qquad (7)$$

が成立している．これより

$$\sum_{t=1}^{T} z_{1t} z_{2t} / T^3 = \frac{u_1 u_2}{3} + O_p(T^{-\frac{1}{2}})$$

$$\sum_{t=1}^{T} z_{2t}^2 / T^3 = \frac{u_2^2}{3} + O_p(T^{-\frac{1}{2}}) \qquad (8)$$

が得られるから，OLS 推定量 $\left(\sum_{t=1}^{T} z_{2t}^2\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T} z_{1t} z_{2t}\right)$ は u_1/u_2 へ $O_p(T^{-\frac{1}{2}})$ のスピードで収束していき，さらに，$\sum_{t=1}^{T} z_{1t}^2 / T^3 = \frac{u_1^2}{3} + O_p(T^{-\frac{1}{2}})$ であることを考慮すると，R^2 も1への一致性を持っている．そのことは，co-integration が存在しない(6)のモデルにおいて，z_{1t} の z_{2t} への回帰は明らかに “spurious” なものであるにもかかわらず，OLS 推定量の漸近的性質については，co-integrating regression と同様な結果がもたらされることを意味する．すなわち，定数項を見落とすというミス・スペシフィケーションのゆえに，co-integration が存在しないにもかかわらず，$\left[1, \ -\frac{u_1}{u_2}\right]$ が co-integrating vector として採用されてしまうことを示唆しているのである．

他方，$C(1)$ のランク落ち，すなわち確率的な意味での非定常性だけを消去される様な一次結合もそれなりの意味を持つと思われる．$C(1)$ のランク落ちは，$z_t - z_{t-1}$ が non-invertible であることを意味する．また，確率的な意味での非定常性が消去され確定的な意味での非定常性のみ残存している系列は，その非定常性が確定している（確率的変動をしない）という意味では安定的なものとみなされるかもしれない．本稿では，小瀧

(1988) による co-integration の定義を採用することにするが，上で論じてきた様に $t\underset{\sim}{u}$ や $C(1)\left\{\sum_{j=1}^{t}\underset{\sim}{\varepsilon}_j\right\}$ だけを単独に消去する様な一次結合も分析される必要があると思われる．以下の節では，その様な一次結合の推定あるいはその様な一次結合が存在するか否かの検定（明らかに，$t\underset{\sim}{u}$ については，$\underset{\sim}{u}\neq\underset{\sim}{0}$ である限り，常に $\bar{A}'\underset{\sim}{u}=0$ 及び rank $\bar{A}=N-1$ である様な $\overline{N-1}\times N$ 行列 $\bar{A}'$ が存在する）をも含めて，co-integration に関する推測が論じられることになる．

3. Co-integrated された多変量時系列モデル

2節の(1)において導入された $N\times N$ 行列 $C(1)$ 及び $N\times\overline{N+1}$ 行列 $D(1)$ の階数について，以下の様に定めよう．

$$\operatorname{rank} C(1)=n,\quad \operatorname{rank} D(1)=m$$

また，整数 s 及び r を $s=N-n$, $r=N-m$ の様に定めよう．その時，$1\leq n\leq m\leq N$, また，$m=n+1$ あるいは $m=n$ のいずれか一方が成立している．r は co-integrating rank に相当し，$m=N$ ならば(1)における $\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated せず，$m<N$ ならば $\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated する．また，$n<N$ ならば確率的な意味での非定常系列 $C(1)\left\{\sum_{j=1}^{t}\underset{\sim}{\varepsilon}_j\right\}$ を消去する一次結合を形成することができる．その様な一次結合は，s 個の線形独立な N 次元定数ベクトルによって作られる．

$\underset{\sim}{z}_t$ が(1)によって与えられる時，小瀧 (1988) の定理1に従えば次の様な表現を導出することができる．

$$A(B)(1-B)\underset{\sim}{z}_t=d(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+t\underset{\sim}{\eta}(n,\ m)-A(1)\underset{\sim}{z}_{t-1} \qquad (9)$$

ここで，$A(B)=[\operatorname{Adj} C(B)]/(1-B)^{s-1}$, $d(B)=[\det C(B)]/(1-B)^{s}$, $A(B)=\sum_{j=0}^{\infty}A_jB^j$, $A(1)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j$, $C(B)=\sum_{j=0}^{\infty}C_jB^j$, B は Lag-operator, すなわち，$B\underset{\sim}{z}_t=\underset{\sim}{z}_{t-1}$, また $[\operatorname{Adj} C(B)]$ は $C(B)$ の余因子行列，$[\det C(B)]$ は $C(B)$ の行列式を表わしている．さらに $\underset{\sim}{\eta}(n,\ m)$ は以下の様に定められ

た N 次元定数ベクトルである．

$$\underset{\sim}{\eta}(n,\ m)=A(B)(1-B)^{|2N-(n+m)-1|}\underset{\sim}{u} \tag{10}$$

$(1-B)^0=1$，$(1-B)^k\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{0}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 及び $A(B)\underset{\sim}{u}=A(1)\underset{\sim}{u}$ であることに注意すれば，$\underset{\sim}{\eta}(n,\ m)$ は次の様にも定めることができる．

$$\underset{\sim}{\eta}(n,\ m)=\begin{cases}\underset{\sim}{\eta}\cdots\cdots N=m \text{ 及び } N-1=n \text{ のケース}\\ \underset{\sim}{0}\cdots\cdots \text{その他のケース}\end{cases} \tag{10$'$}$$

ここで $\underset{\sim}{\eta}=A(1)\underset{\sim}{u}$．また，rank $A(1)=s$（小瀧（1988），Engle and Granger (1987) を見よ）であるので，$N=n$（それは $N=m=n$ をも意味する）のケースでは $A(1)=0$ となる．$A(1)$ 及び $\underset{\sim}{\eta}(n,\ m)$ に注意を払うならば，(9)は $n,\ m$ の値に応じた，以下の様な三つのケースに表現できることがわかる．

(i)　$n=m=N$ のケース（$\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated していない）

$$A(B)(1-B)\underset{\sim}{z}_t=d(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{11}$$

(ii)　$n=N-1,\ m=N$ のケース（$\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated していない）

$$A(B)(1-B)\underset{\sim}{z}_t=d(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+t\underset{\sim}{\eta}-A(1)\underset{\sim}{z}_{t-1} \tag{12}$$

(iii)　$m<N$ のケース（$\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated している）

$$A(B)(1-B)\underset{\sim}{z}_t=d(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t-A(1)\underset{\sim}{z}_{t-1} \tag{13}$$

(9)が有限次数の時系列モデルになっているためには（あるいは(11)，(12)，(13)がそれぞれ有限次数の時系列モデルであるためには）$A(B)$ 及び $d(B)$ が finite order でなければならない．すなわち，

$$A(B)=\sum_{j=0}^{p}A_jB^j$$

$$d(B)=\sum_{j=0}^{q}d_jB^j \tag{14}$$

でなければならない，このためには，$C(B)$ の各要素が finite でなければならない（$(1-\lambda B)^{-1}$ である様なものが含まれてはならない）であろう．さらに，そのことは(3)を満足する様な $r\times N$ 行列 ∇' に対して，$\nabla' z_t = \nabla' v_t$ が finite order の MA process として表わされることを意味する．また，それは ∇z_t が finite order の AR process (VAR process) として表わすことはできないことを意味するから，(14)の様な仮定を置くことは Engle and Granger (1987) において提示された，いわゆる Dickey-Fuller テストや Augmented Dickey-Fuller テストの正当性を失わせることにもなっているのである．この意味で，finite order の ECR に基く テストである Engle and Granger (1987) p. 266 の 4 から 7 までの検定方式と $\nabla' z_t$ が finite order の AR になっていることに基いている Dickey-Fuller タイプの 2 及 3 の検定方式とは，互いに両立し得ない前提条件にその根拠を置いているといえるであろう．

(14)において，さらに $d(B)=1$ と仮定しよう．C_0^{-1} が存在すること（従って A_0^{-1} が存在すること）に注意すれば，結局，次の様な時系列モデルにおける推測を考察すればよいことがわかる．

$$z_t=[I_N-A]z_{t-1}+\sum_{j=1}^{p}H_j[z_{t-j}-z_{t-j-1}]+t\gamma+e_t \tag{15}$$

ここで $e_t=A_0^{-1}\varepsilon_t$. (15)において $\gamma\neq 0$ か $A=0$ であるならば z_t は co-integrated していない．逆に，$\gamma=0$ 且つ $A\neq 0$ の時 z_t は co-integrated している．また，A の s 個の線形独立な行ベクトルは，確率的な意味での非定常系列 $C(1)\left\{\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_j\right\}$ を消去する．しかしながら，co-integrating rank r は(15)には直接的には現れていない．Co-integrating rank r を反映している様なパラメータは，(15)には明示されていない．次節では co-integrating rank を検出するための統計量や A の推定，さらには co-integrating rank の値に関する検定（co-integration の有無についての検定は，この検定の特殊ケースと考えることができる.）について論じる．

4. co-integration の統計的推測

小瀧（1988）においては，co-integration の有無ないしは co-integrating rank の値を検出するために次の様な量の固有値が採用された．

$$A_T=\left\{\sum_{t=2}^{T} z_{t-1}z_{t-1}'\right\}^{-1}\left\{\sum_{t=2}^{T} z_{t-1}z_t'\right\} \tag{16}$$

A_T は first-order の VAR を適合させた時の（系列行列の）OLS 推定量である．本稿では(15)に従って次の様な量を考察しよう．

$$B_T=\left\{\sum_{t=p+2}^{T} z_{t-1}z_{t-1}'-\left(\sum_{t=p+2}^{T} z_{t-1}x_{t-1}'\right)\left(\sum_{t=p+2}^{T} x_{t-1}x_{t-1}'\right)^{-1}\left(\sum_{t=p+2}^{T} x_{t-1}z_{t-1}'\right)\right\}^{-1}$$
$$\left\{\sum_{t=p+2}^{T} z_{t-1}z_t'-\left(\sum_{t=p+2}^{T} z_{t-1}x_{t-1}'\right)\left(\sum_{t=p+2}^{T} x_{t-1}x_{t-1}'\right)^{-1}\left(\sum_{t=p+2}^{T} x_{t-1}z_t'\right)\right\} \tag{17}$$

ここで $x_{t-1}=(t,\ z_{t-1}'-z_{t-2}',\ \cdots,\ z_{t-p}'-z_{t-p-1}')'$．$B_T$ は z_t を $(z_{t-1}',\ x_{t-1}')'$ に回帰させた時の z_{t-1} の係数行列の推定量に相当している．観測値 $\{z_1,\ \cdots,\ z_T\}$ を用いて，(15)は

$$Z=Z_{-1}[I_N-A']+XL+U \tag{18}$$

と書ける．ここで

$$\begin{aligned} Z &=[z_{p+2},\ \cdots,\ z_T]', & Z_{-1}&=[z_{p+1},\ \cdots,\ z_{T-1}]' \\ X &=[x_{p+1},\ \cdots,\ x_{T-1}]', & L &=[\gamma,\ H_1,\ \cdots,\ H_p]' \\ U &=[e_{p+2},\ \cdots,\ e_T]' \end{aligned}$$

(18)から(17)は

$$B_T=\{Z_{-1}'M_2Z_{-1}\}^{-1}\{Z_{-1}'M_2Z\} \tag{19}$$

とも書かれる．ここで $M_2=I_{T-p-1}-X(X'X)^{-1}X'$．

B_T の固有値の漸近的性質について吟味しよう．(11)（12）(13)より明らかな様に，(15)において $\gamma\neq 0$ なるケースは，$n=N-1$ 及び $m=N$ のケースであり rank $A=1$ でなければならない．

(a) $n=N-1$ 及び $m=N$ のケース（$\underset{\sim}{\gamma}\neq\underset{\sim}{0}$ なるケース）

$$G'\underset{\sim}{\gamma}=\underset{\sim}{0} \quad \mathrm{rank}\, G=N-1$$

となる様な $N\times(N-1)$ 行列 G が存在する．

$$\begin{aligned} z_{1t} &= (\underset{\sim}{\gamma}'\underset{\sim}{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\underset{\sim}{\gamma}'\underset{\sim}{z}_t \\ \underset{\sim}{z}_{2t} &= (G'G)^{-\frac{1}{2}}G'\underset{\sim}{z}_t \end{aligned} \tag{20}$$

と定義すると，(15)より次の表現が得られる．

$$\begin{aligned} z_{1t} &= z_{1t-1}-\underset{\sim}{a}'_1\underset{\sim}{z}_{t-1}+\sum_{j=1}^{p}\underset{\sim}{h}'_{1j}[\underset{\sim}{z}_{t-j}-\underset{\sim}{z}_{t-j-1}]+e_{1t}+t\eta \\ \underset{\sim}{z}_{2t} &= \underset{\sim}{z}_{2t-1}-A_2\underset{\sim}{z}_{t-1}+\sum_{j=1}^{p}H_{2j}[\underset{\sim}{z}_{t-j}-\underset{\sim}{z}_{t-j-1}]+\underset{\sim}{e}_{2t} \end{aligned} \tag{21}$$

ここで，$\underset{\sim}{a}'_1=(\underset{\sim}{\gamma}'\underset{\sim}{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\underset{\sim}{\gamma}'A$, $\underset{\sim}{h}'_{1j}=(\underset{\sim}{\gamma}'\underset{\sim}{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\underset{\sim}{\gamma}'H_j$ $(j=1, \cdots, p)$, $e_{1t}=(\underset{\sim}{\gamma}'\underset{\sim}{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\underset{\sim}{\gamma}'\underset{\sim}{e}_t$, $\eta=(\underset{\sim}{\gamma}'\underset{\sim}{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\underset{\sim}{\gamma}'\underset{\sim}{\gamma}$, $A_2=(G'G)^{-\frac{1}{2}}G'A$, $H_{2j}=(G'G)^{-\frac{1}{2}}G'H_j$ $(j=1, \cdots, p)$, $\underset{\sim}{e}_{2t}=(G'G)^{-\frac{1}{2}}G'\underset{\sim}{e}_t$. $\underset{\sim}{z}_{2t}$ では確定的意味での非定常性は除去されている．また，$\underset{\sim}{a}'_1\underset{\sim}{z}_{t-1}$ においては，確率的な意味での非定常性が除去されている（そのことは，$\underset{\sim}{a}'_1\underset{\sim}{z}_{t-1}=-(z_{1t}-z_{1t-1})+\sum_{j=1}^{p}\underset{\sim}{h}'_{1j}[\underset{\sim}{z}_{t-j}-\underset{\sim}{z}_{t-j-1}]+e_{1t}+t\eta$ から明らかである）．

(b) $m<N$ のケース（このケースでは $\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated し，且つ $\underset{\sim}{\gamma}=\underset{\sim}{0}$ となっている）

rank $A=s$（(9)あるいは(11)（12）（13)を見よ）より，

$$\begin{aligned} K'A=0, &\quad \mathrm{rank}\, K=n \\ K'H=0, &\quad \mathrm{rank}\, H=s \end{aligned}$$

を満足する様な $N\times n$ 行列 K と $N\times s$ 行列 H が存在する．その時,

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{y}_t &= (H'H)^{-\frac{1}{2}}H'\underset{\sim}{z}_t \\ \underset{\sim}{w}_t &= (K'K)^{-\frac{1}{2}}K'\underset{\sim}{z}_t \end{aligned} \tag{22}$$

と定義すると，(15)より次のような表現が得られる．

$$y_t=y_{t-1}-\Gamma z_{t-1}+\sum_{j=1}^{p}K_{1j}[z_{t-j}-z_{t-j-1}]+e_{3t}$$

$$w_t=w_{t-1}+\sum_{j=1}^{p}K_{2j}[z_{t-j}-z_{t-j-1}]+e_{4t} \tag{23}$$

ここで $\Gamma=(H'H)^{-\frac{1}{2}}H'A$, $K_{1j}=(H'H)^{-\frac{1}{2}}H'H_j$ $(j=1, \cdots, p)$, $e_{3t}=(H'H)^{-\frac{1}{2}}H'e_t$, $K_{2j}=(K'K)^{-\frac{1}{2}}K'H_j$ $(j=1, \cdots, p)$, $e_{4t}=(K'K)^{-\frac{1}{2}}K'e_t$. 明らかに Γz_{t-1} は定常時系列でなければならず，Γ は co-integrating vector を形成している．また，w_t は co-integrated しない (Johansen (1988) 参照).
$n=m=N$ のケースにおいては，(15)は以下の様に表現される．

$$z_t=z_{t-1}+\sum_{j=1}^{p}H_j[z_{t-j}-z_{t-j-1}]+e_t \tag{24}$$

(24)は VAR になっていることに注意すべきである．$z_1, \cdots, z_T$ に依存する任意の N 次正則行列 R_T に対して，$R_T^{-1}B_TR_T$ の固有値は B_T の固有値に等しくなっているので，z_t を $R_T'z_t$ に変換して考えることが可能である．この様な R_T は(b)のケースでは，

$$[\overset{s}{H(H'H)^{-\frac{1}{2}}} \vdots \overset{n}{K(K'K)^{-\frac{1}{2}}}]\begin{array}{c} \\ s \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} s & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} T^{-\frac{1}{2}}I_s & 0 \\ \hdashline 0 & T^{-1}I_n \end{array}\right] \end{array}$$

の様に定められ，また(a)のケースでは

$$[\overset{1}{\gamma(\gamma'\gamma)^{-\frac{1}{2}}} \vdots \overset{N-1}{G(G'G)^{-\frac{1}{2}}}]\begin{array}{c} \\ 1 \\ N-1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & N-1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} T^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ \hdashline 0 & T^{-1}I_{N-1} \end{array}\right] \end{array}$$

の様に定められる．また，$n=m=N$ のケースでは $R_T=T^{-1}I_N$ と定められる．小瀧 (1988) の定理 2 と同様の推論によって，B_T の固有値 $\lambda_{i,T}$ $(i=1, 2, \cdots, N)$ について以下の様な漸近的性質が得られる．

$$\lambda_{i,T}=1+O_p(T^{-1}) \qquad i=1, \cdots, m$$

$$\lambda_{i,T}=\bar{\lambda}_i+O_p(T^{-1/2}), \quad |\bar{\lambda}_i|<1, \quad i=m+1, \cdots, N \tag{25}$$

また，$m=N$ のケースでは

$$\lambda_{i,T}=1+O_p(T^{-1}) \qquad i=1,\ \cdots,\ N$$

但し，B_T の固有値は，$|\lambda_{1,T}|\geq|\lambda_{2,T}|\geq\cdots\geq|\lambda_{N,T}|$ の様に ordering されているものとする．小瀧（1988）の定理2より明らかな様に，B_T の固有値の極限値は A_T のそれに等しくなっている．しかしながら，A_T と異なり，B_T はそれ自身常に I_N-A' へ確率収束することが容易に示される．
(18)及び(19)より

$$B_T-(I_N-A')=\{Z'_{-1}M_2Z_{-1}\}^{-1}\{Z'_{-1}M_2U\} \tag{26}$$

あるいは(15)及(17)より

$$\begin{aligned}B_T-(I_N-A')=&\left\{\sum_{t=p+2}^{T}z_{t-1}z'_{t-1}-\left(\sum_{t=p+2}^{T}z_{t-1}x'_{t-1}\right)\right.\\&\left.\left(\sum_{t=p+2}^{T}x_{t-1}x'_{t-1}\right)^{-1}\left(\sum_{t=p+2}^{T}x_{t-1}z'_{t-1}\right)\right\}^{-1}\\&\left\{\sum_{t=p+2}^{T}z_{t-1}e'_t-\left(\sum_{t=p+2}^{T}z_{t-1}x'_{t-1}\right)\right.\\&\left.\left(\sum_{t=p+2}^{T}x_{t-1}x'_{t-1}\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{t=p+2}^{T}x_{t-1}e'_t\right)\right.\end{aligned} \tag{27}$$

が得られる．さらに(1)(2)(15)より以下の結果が得られる．

$$\begin{aligned}E\left(\sum_{t=p+2}^{T}z_{it-1}e_{jt}\right)^2&=\sigma_{jj}^2E\left(\sum_{t=p+2}^{T}z_{it-1}^2\right)\\E\left(\sum_{t=p+2}^{T}x_{i,t-1}e_{jt}\right)^2&=\sigma_{jj}^2E\left(\sum_{t=p+2}^{T}x_{i,t-1}^2\right)\end{aligned} \tag{28}$$

ここで $E(e_{jt}^2)=\sigma_{jj}^2$, $e_t=(e_{1t},\ \cdots,\ e_{Nt})'$, $z_t=(z_{1t},\ \cdots,\ z_{Nt})'$, $x_t=(x_{1,t},\ \cdots,\ x_{PN,t},\ x_{PH+1,t})$．(28)からただちに $\operatorname*{plim}_{T\to\infty}B_T=I_N-A'$ がでてくる．また，同様にして H_j や γ の OLS 推定量の一致性も証明することができる．

次に，co-integration の有無，あるいはより一般に co-integrating rank の値の検定問題について考察しよう．この検定は，(15)において $\gamma=0$ が成立するか否かの検定あるいは A の階数についての検定を組み合わせ

て行うことも可能である．その場合，B_T の様な I_N-A や γ についての OLS 推定量が検定統計量を構築するための基礎となるが，しかしながらその様な検定統計量はむしろ確率的な意味での非定常性のみの除去や確定的な意味での非定常性だけを除去することに関しての検定に向けられた方がよい様に思われる．ここでは B_T の固有値 $\lambda_{i,T}$ $(i=1, \cdots, N)$ に基いた検定方式について紹介する．(1)における $D(1)$ の階数の true value を m_0 としよう．また，$\lambda_{i,T}$ $(i=1, \cdots, N)$ の probability limit $\bar{\lambda}_i$ $(i=1, \cdots, N)$ が，絶対値の大きさの順に次の様に並べられているものとしよう．

$$|\bar{\lambda}_1| \geq |\bar{\lambda}_2| \geq \cdots \geq |\bar{\lambda}_N|$$

この時，(1)において以下の様な帰無仮説が設定される．

$$H_0 : \bar{\lambda}_m = 1 \text{ 少なくとも } D(1) \text{ の階数は } m \leftrightarrow m_0 \geq m$$

また，対立仮説は以下の様になる．

$$H_1 : |\bar{\lambda}_m| < |\cdots \text{ 高々 } D(1) \text{ の階数は } m-1 \leftrightarrow m_0 \leq m-1$$

Co-integration の有無についての検定は，上記の検定の special case ($m=N$ のケース) である．

検定統計量を構築する前に，以下の様な記号を導入しよう．

$$\beta_t = [t^{h_1}, \cdots, t^{h_N}]', \quad \Psi_{-1} = [\beta_{p+1}, \cdots, \beta_{T-1}]'$$

ここで $h_1, \cdots, h_N$ は，互いに異なる1より大なる整数とする．また，$\lambda_{m,T}$ に基いて作られる次の様な統計量も導入しよう．

$$\hat{\nu}_{m,\mathrm{T}} = \{\mathrm{T}^{\mathrm{m}*}[\mathrm{M}(|\lambda_{\mathrm{m},\mathrm{T}}|-1)]^{\mathrm{m}*+\mathrm{k}*} + 1\}^{-1} \tag{29}$$

ここで $h^* = \max\{h_1, \cdots, h_N\}$，そして m^*, k^* は，$m^*, k^* \geq h^*$ である様な正整数とする．また，M は適当な正整数とする．(25)よりこの統計量に関して次のことが成立する．

H_0 の下で　$\hat{\nu}_{m,T}=1+O_p(T^{-k*})$

H_1 の下で　$\hat{\nu}_{m,T}=O_p(T^{-m*})$

これらの量を用いて,H_0 を検定するための統計量は次の様に表わされる.

$$\hat{s}_T(\hat{\nu}_{m,T})=\mathrm{tr}\, Z_T^{-1}\{\hat{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})-I_N\}\{\Psi'_{-1}M_2\Psi_{-1}\}\{\hat{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})-I_N\}' \quad (30)$$

ここで，$\hat{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})=\{(Z_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Psi_{-1})'M_2(Z_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Psi_{-1})\}^{-1}\{(Z_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Psi_{-1})'M_2(Z+\nu_{m,T}\Psi_{-1})\}$

また $Z_T^{-1}=\left[\sum_{t=p+2}^{T}\hat{e}_t\hat{e}'_t/T\right]^{-1}$，ここで $\hat{e}_t$ は(15)における OLS の残差を表わしている．(30)で与えられる検定統計量は，A_T の固有値の代わりに B_T のそれを用いた点を除けば，小瀧（1988）の(41)で与えられた検定統計量と全く同じものである．(30)で与えられる $\hat{s}_T(\hat{\nu}_{m,T})$ が，帰無仮説 H_0 の下で漸近的に自由度 N^2 の chi-square 分布に従うこと，またこの検定が consistent なものになっていることは，小瀧（1988）の定理 3 と同様なやり方で示すことができる．

ここで提示された検定方式は，小瀧（1988）における検定方式の問題点（漸近分布への収束のスピードが遅いこと，ある場合には正当性を失ってしまう様な検定統計量に関して）を一応克服したものであるといえるであろう．

5. ま　と　め

本稿では，co-integration の概念規定並びに推測に関して過去の文献において考慮されてこなかった諸問題を中心にして考察してきた．2 節で論じられた様に，経済時系列が分析対象となっている場合，経験的事実に基いて定数項の存在を無視することはできない．そして，非ゼロ定数項が存在する場合，非定常性を消去させて，各々の一変量時系列よりも相対的に“安定”なものとみなすことができ得る様な一次結合のタイプは三種類存在した．非ゼロ定数項があるケースでは，確率的意味での非定常性に加えて，確定的意味での非定常性も存在することになり，確定的意味での非定

常性のみを消去させる場合，または確率的意味での非定常性のみが除去される場合，さらには両方の非定常性を同時に消去させる様な場合のそれぞれが独自の統計的意味を持っていることが指摘された．本稿では小瀧（1988）に従って両方の非定常性を消去させる場合を co-integration として定義することにしたが，非ゼロ定数項を持つ2変量時系列モデルにおいては spurious regression と co-integrating regression が識別できなくなってしまうといった，定数項の存在のゆえに生ずる確定的意味での非定常性の影響も例証された．

定数項が存在する場合には，co-integration と ECR との関連性が希薄になることが小瀧（1988）によって示されたが，本稿ではその結果に基いて，どの様なケースにも対応する（ECR に替わる）新たな多変量時系列モデル(15)を提示した．また，Dickey-Fuller テストや Augmented Dickey-Fuller テストを正当化するものである有限次数の時系列モデルについても言及した．本稿の(15)の様なモデルや ECR と Dickey-Fuller タイプテストが依っている有限次数時系列モデルとは，互いに相入れない前提条件のもとでのみ存立することが指摘された．

本稿4節において取り上げられた推測は，基本的には(15)の OLS 推定に基くものである．(15)の OLS 推定量の一致性は容易に示され，その結果を基礎として確率的な意味での（あるいは確定的な意味での）非定常性のみを単独に除去できるか否か等の検定統計量を構築することへの可能性が示唆された．Co-integration の検定に関しては，本稿で論じられた統計量は，用いられている固有値が別のものである点を除けば小瀧（1988）で与えられたものと全く同じである．小滝（1988）で与えられたものと同様に，この検定統計量の漸近的性質が得られることが指摘されたが，漸近分布への収束のスピードの点等で，本稿で論じられた検定統計量は小瀧（1988）におけるそれの“欠陥”を克服したものであるということができた．

参 考 文 献

King, R. G., C. I. Plosser, J. H. Stock, and M. W. Watson, (1987), Stochastic trend and economic fluctuations, NBER Working Paper #2229.

Engle, R. F. and C. W. J. Granger, (1987), Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing, Econometrica, Vol. 55, No. 2, 251-276.

Johansen, S., (1988), Statistical analysis of cointegration vectors, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 12, 231-254.

Nelson, C. R. and C. I. Plosser, (1982), Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidences and implications, Journal of Monetary Economics, Vol. 10, No. 2, 139-162.

小瀧光博，(1988)，時系列における co-integration と common trend, 広島大学経済論叢，12巻，2号，59-77.

Phillips, P. C. B., (1986), Understanding spurious regressions in econometrics, Journal of Econometrics, Vol. 33, 311-340.

Phillips, P. C. B. and S. Ouliaris, (1986), Testing for cointegration, Cowles Foundation Discussion Paaper No. 809.

Phillips, P. C. B. and S. Ouliaris, (1987), Asymptotic properties of residual based tests for cointegration, Cowles Foundation Discussion Paper No. 847.

Stock, J. H., (1987), Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors, Econometrica, Vol. 55, No. 5, 1035-1056.

Stock, J. H. and M. W. Watson, (1987), Testing for common trends, Discussion Paper No. 1222, Harvard Institute of Economic Research.