時系列における co-integration と common trend

小　瀧　光　博

1. は じ め に

近年，時系列分析の分野では，非定常性に関する多くの研究結果が報告されている．それらの報告における統計学的意味での中心的論点は，非定常時系列下での推測においては，漸近的正規性を中心とした標準的推測論が適用できないという点であった．しかしながら，マクロ経済時系列が分析対象である場合には，定常性あるいは非定常性といった概念は，景気変動や経済理論の安定性という経済学的観点からも重大な意味をもってくる．Engle and Granger (1987) 及び Stock and Watson (1987) 等によって提唱され研究されてきた，co-integration 並びに common trend の概念は，上記の様なマクロ経済理論の安定性とか多変量時系列の定常性・非定常性に関わるものである．

本稿では，定数項をも考慮した場合における co-integration 及び common trend について分析する．定数項の有無が統計的推測論の観点からも経済的側面からもきわめて重大な意味をもってくることは，一変量時系列が分析対象である場合には，それぞれ West (1986), Nelson and Plosser (1982) によって指摘されている．しかしながら，co-integration や common trend に関する従来の諸研究における定数項の扱いは，不十分・不明瞭なものとなっている．すなわち，Engle and Granger (1987) や Stock and Watson (1987) では，定数項は存在しない，あるいは定数

項を無視してもよいという前提の下に分析がなされていた．また，King, Plosser, Stock and Watson (1987) では，定数項をも一応考慮したモデルが取り上げられているが，（定数項を考慮していない）Engle and Granger (1987), Stock and Watson (1987) の推測手法がそのまま何らの説明もなく用いられている．本稿の目的は，定数項の存在をも含めた co-integration 並びに common trend の概念・諸性質を検討することにある．

以下の諸節では，次の様な点が論じられる．すなわち，Engle and Granger (1987) は，co-integration と error correction representation とのきわめて明瞭な関連性を示したが，定数項の存在によってその様相が一変することが指摘される．また，co-integration 及び common trend の個数を検定するための新たな統計量を構築し，この統計量の帰無仮説の下での漸近分布が正規性に基くものであることとこの検定が consistent test になっていることを示す．さらに，この統計量の構築において必要となってくる，(Stock and Watson (1987) において提示されなかった）一階の VAR を fit させた時の OLS 推定量の固有値を取り上げ，co-integration や common trend との関連性について考察する．

2. Co-integration と common trend の概念

本稿においては，以後，次の様な N 次元多変量時系列が考察される．

$$
\begin{aligned}
(1-B)\underset{\sim}{z}_t &= \underset{\sim}{\mu} + C(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t \\
&= \underset{\sim}{\mu} + C(1)\underset{\sim}{\varepsilon}_t + (1-B)\underset{\sim}{v}_t \qquad (1) \\
&= D(1)\underset{\sim}{\xi}_t + (1-B)\underset{\sim}{v}_t
\end{aligned}
$$

ここで B は Lag-operator, すなわち，$B\underset{\sim}{z}_t = \underset{\sim}{z}_{t-1}$, $\underset{\sim}{\mu}$ は N 次元の定数ベクトル，$\underset{\sim}{\varepsilon}_t$ はゼロ平均・N次元単位行列である様な分散行列を持ち，且つ系列的に無相関な N 次元の系列である．さらに，

$$C(B) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j B^j,\ C(1) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} |C_k| < \infty$$

$$C_j : N \times N \quad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.)$$

$$\underset{\sim}{v}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ -\sum_{k=j+1}^{\infty} C_k \right\} \underset{\sim}{\varepsilon}_{t-k}$$

$$D(1) = [\underset{\sim}{\mu} \vdots C(1)],\ \underset{\sim}{\xi}_t = [1,\ \underset{\sim}{\varepsilon}'_t]'$$

$\{\underset{\sim}{z}_t\}$ は(1)によって生成される，観測可能な N 次元多変量時系列($\underset{\sim}{z}_1, \ldots, \underset{\sim}{z}_T$ が観測されたものとする．）となっているものとする．(1)より

$$\underset{\sim}{z}_t = t\underset{\sim}{\mu} + C(1)\left\{\sum_{j=1}^{t} \underset{\sim}{\varepsilon}_j\right\} + \underset{\sim}{w}_t \tag{2}$$
$$= D(1)\underset{\sim}{y}_t + \underset{\sim}{w}_t$$

ここで

$$\underset{\sim}{w}_t = \underset{\sim}{v}_t + \underset{\sim}{z}_0 - \underset{\sim}{v}_0,\ \underset{\sim}{y}_t = \sum_{j=1}^{t} \underset{\sim}{\xi}_j$$

本稿の以下のすべての箇所を通して，$\underset{\sim}{z}_0$ 及び $\underset{\sim}{v}_0$ は定常時系列になっている（従って，$\underset{\sim}{w}_t$も定常となっている）ことが前提にされているものとする．

Co-integration 並びに common trend は以下の様に(1)あるいは(2)における $D(1)$ の階数に従って定義される．

定義：(1)によって生成される $\underset{\sim}{z}_t$ について，$1 \leq \mathrm{rank}\, D(1) = m < N$ である時，$\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated であるといわれる．また，この時，$D(1)$は

$$D(1) = KM,\ \mathrm{rank}\, K = m \tag{3}$$

（ここで，K は $N \times m$ 行列，M は $m \times (N+1)$ 行列）と分解できるが，$M\underset{\sim}{y}_t$ の各要素をそれぞれ $\underset{\sim}{z}_t$ の common trend と呼ぶ．

Common trend の個数は $D(1)$の階数に等しくなっている．$D(1)$の階数を m とすれば，$\underset{\sim}{z}_t$ は m 個の common trend を持つということになる．また，$\underset{\sim}{z}_t$ が co-integrated している時，$r = N - m$ とすれば，

$$\nabla' D(1) = 0, \qquad \mathrm{rank}\, \nabla = r \tag{4}$$

である様な $r\times N$ 行列 ∇' が存在することになるが，この時(2)より

$$\nabla' \underset{\sim}{z}_t = \underset{\sim}{w}_t \tag{5}$$

が得られる．Co-integration は，マクロ経済理論（但し，それは複数個のマクロ経済変数間の線形制約として表現できるものとする.）のある意味での安定性に関わる概念である．すなわち，(5)より $\nabla' \underset{\sim}{z}_t$ は定常な系列となっているが，$\nabla' \underset{\sim}{z}_t = \underset{\sim}{0}$ をある種のマクロ経済理論としてみなすならば，(5)はそれがある意味で安定的であることを意味しているのである．つまり，ここでいうところの安定性は定常性の意味でとらえられている．

(1)において定数項が存在しない場合（$\underset{\sim}{\mu} = \underset{\sim}{0}$ の場合)，$D(1) \Rightarrow \tilde{C}(1)$ であることより co-integration 並びに common trend は，$C(1)$の階数に基いて定義することができる．(例えば，Engle and Granger (1987), Stock and Watson (1987)) しかしながら，非ゼロ定数項がある場合には（$\underset{\sim}{\mu} \neq \underset{\sim}{0}$ の場合)，co-integration を定義するに際して，上の定義の様に $D(1)$のランク落ちによって規定すべきなのか，それとも $C(1)$のランク落ちによって定義した方が望ましいのかという問題が一応生じてくる．Nelson and Plosser (1982) をはじめ単位根検定に関する多くの文献においては，ゼロ定数項が棄却されるマクロ経済時系列が数多く存在することが報告されているが，それらの文献では $\underset{\sim}{z}_t$ の各要素 z_{it} (i=1, ..., N) に対して，以下の様な設定がなされている．

$$(1-B) z_{it} = \mu_i + e_{it} \tag{6}$$

ここで e_{it} は平均ゼロ・有限分散を持つ定常時系列である．表現式(1)は，明らかに(6)の設定と整合的になっている．(6)の設定の下で Nelson and Plosser (1982) 等によって問題にされてきたことは，定常か非定常かという点よりもむしろ確定的な意味での非定常性 (deterministic nonstationarity) が支配的か確率的な意味での非定常性 (stochastic nonstationarity) の方が優勢かという点である．確定的な意味での非定常性は，ある場合には安定的なものとみなされ得るであろうし，この様な系列下での推測結果に関しても，漸近的正規性が成立することが示される (West(1986)). 明らかに，$C(1)$のランク落ちによる co-integration の定義は，安定性という概

念の中に確定的な意味での非定常性をも含めるものである．この様な $C(1)$ のランク落ちによる定義はそれなりに意味があるものと思われるが，本稿ではその様な co-integration の定義を採用しない．すなわち，King, Plosser, Stock and Watson (1987) 従って，経済理論の安定性を定常性でのみとらえることにする．

3. Co-integration と error correction representation

2節の(1)において導入された $N\times N$ 行列 $C(1)$ 及び $D(1)$ の階数について，以下の様に定める．

$$\text{rank}\, C(1)=n,\ \text{rank}\, D(1)=m,$$
$$s=N-n,\ r=N-m$$

$1\leq n\leq m\leq N$, さらに $m=n+1$ あるいは $m=n$ のいずれか一方が成立することを記しておく．また，m は(1)において生成される $\underset{\sim}{z}_t$ の common trend の数に相当し，$m=N$ ならば $\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated せず，$m<N$ ならば $\underset{\sim}{z}_t$ は co-integrated する．この時，次の定理が成立する．

定理 1 ：$\underset{\sim}{z}_t$ が(1)によって与えられた時，

(i) $n=m=N$ ならば

$$A_1(B)(1-B)\underset{\sim}{z}_t=d_1(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+\underset{\sim}{\eta}_1 \tag{7}$$

ここで

$$A_1(B)=\sum_{j=0}^{\infty}A_{1,j}B^j,\ A_{1,j}:N\times N\quad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$d_1(B)=\sum_{j=0}^{\infty}d_{1,j}B^j,\ d_{1,j}:1\times 1\quad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$\underset{\sim}{\eta}_1=\left\{\sum_{j=0}^{\infty}A_{1,j}\right\}\underset{\sim}{\mu}$$

(ii) $n=N-1,\ m=N$ ならば

$$A_2(B)(1-B)\underset{\sim}{z}_t=-\underset{\sim}{\gamma}x_{t-1}+d_2(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+t\underset{\sim}{\eta}_2+\underset{\sim}{p}_0-\underset{\sim}{q}_0 \tag{8}$$

ここで

$$A_2(B)=\tilde{A}(B)+A(1),\ A(B)=A(1)+(1-B)\tilde{A}(B)$$

$$A(B)=\sum_{j=0}^{\infty}A_jB^j,\ A_j:N\times N\quad(j=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

$$A(1)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j,\ \underset{\sim}{\eta}_2=A(B)\underset{\sim}{\mu}$$

$$d_2(B)=\sum_{j=0}^{\infty}d_{2,j}B^j,\ d_{2,j}:1\times 1\quad(j=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

$$\underset{\sim}{p}_t=A(B)\underset{\sim}{z}_t,\ \underset{\sim}{q}_t=d_2(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t$$

$$x_t=\underset{\sim}{\alpha}'\underset{\sim}{z}_t,\ \underset{\sim}{\gamma}:N\times 1,\ \underset{\sim}{\alpha}:N\times 1$$

(iii) $m<N$ ならば

$$A_3(B)(1-B)\underset{\sim}{z}_t=-\Gamma\underset{\sim}{x}_{t-1}+d_3(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+\left\{\sum_{j=0}^{s-1}t^j\right\}\{\underset{\sim}{p}_0-\underset{\sim}{q}_0\}\tag{9}$$

ここで

$$A_3(B)=\tilde{A}(B)+A(1),\ A(B)=A(1)+(1-B)\tilde{A}(B)$$

$$A(B)=\sum_{j=0}^{\infty}A_jB^j,\ A_j:N\times N\quad(j=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

$$A(1)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j,\ \underset{\sim}{x}_t=\nabla\underset{\sim}{z}_t,\ \nabla:s\times N,\ \Gamma:N\times s$$

$$d_3(B)=\sum_{j=0}^{\infty}d_{3,j}B^j,\ d_{3,j}:1\times 1\quad(j=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

$$\underset{\sim}{p}_t=A(B)\underset{\sim}{z}_t,\ \underset{\sim}{q}_t=d_3(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t$$

という様な表現が存在する.

証明：(ii)のケースのみ証明する.(他のケースも同様の推論で示される.)

(1)より

$$[\mathrm{Adj}\ C(B)](1-B)\underset{\sim}{z}_t=[\det C(B)]\underset{\sim}{\varepsilon}_t+[\mathrm{Adj}\ C(B)]\underset{\sim}{\mu}\tag{10}$$

ここで $[\mathrm{Adj}\ C(B)]$ は $C(B)$ の余因子行列，また $[\det C(B)]$ は $C(B)$ の行列式を表すものとする. Engle and Granger (1987) の Lemma 1より，rank $C(1)=N-1$ であるので

$$[\det C(B)]=(1-B)d_2(B)\tag{11}$$

ここで

$$d_2(B)=\sum_{j=0}^{\infty} d_{2,j}B^j,\ d_{2,j}:(1\times 1)\quad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

また，$\underset{\sim}{\alpha}' C(1)=\underset{\sim}{0}'$ なる $\underset{\sim}{\alpha}\neq\underset{\sim}{0}$ が存在する．さらに，$A(B)=[\mathrm{Adj}\, C(B)]$ とした時，$A(B)C(B)=(1-B)d_2(B)$ より $A(1)C(1)=0$ であるので，

$$A(1)=\underset{\sim}{\gamma}\underset{\sim}{\alpha}' \tag{12}$$

ここで $\underset{\sim}{\gamma}$ はゼロベクトルではない N 次元ベクトル．(10)は

$$A(B)(1-B)\underset{\sim}{z}_t=(1-B)d_2(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+\underset{\sim}{\eta}_2 \tag{13}$$

ここで $\underset{\sim}{\eta}_2=A(B)\underset{\sim}{\mu}$, と書き換えられる．また，(11)及び(12)を用いて，

$$A(B)\underset{\sim}{z}_t=d_2(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t+t\underset{\sim}{\eta}_2+\underset{\sim}{p}_0-\underset{\sim}{q}_0 \tag{14}$$

ここで $\underset{\sim}{p}_t=A(B)\underset{\sim}{z}_t$ 及び $\underset{\sim}{q}_t=d_2(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t$, が得られる．さらに，

$$A(B)=A(1)+(1-B)\tilde{A}(B)=A_2(B)(1-B)+A(1)B \tag{15}$$

ここで $A_2(B)=\tilde{A}(B)+A(1)$，を用いれば(8)が得られる．　Q. E. D.

もし，$\underset{\sim}{p}_0=\underset{\sim}{q}_0$ が過程されるならば，ケース(iii)における(9)は，Engle and Granger (1987) が定義するところの $\underset{\sim}{z}_t$ の error correction representation（以後 ECR ということにする）そのものである．さらに，(i)(ii)(iii)のそれぞれのケースにおいて，$d_i(B)=1$ $(i=1, 2, 3)$ が仮定されたとしよう．Engle and Granger (1987) は，co-integration は多変量自己回帰モデル（vector autoregressive model, 以後 VAR ということにする）と ECR を対比させることによっても検出されることを示した．すなわち，$\underset{\sim}{z}_t$ が co-integarated する時，$\underset{\sim}{z}_t$ は ECR を持ち，そうでない時，(ECR における error correction term がゼロとなるので) $\underset{\sim}{z}_t$ は VAR によって表現される．上記の定理の表現式との関連で言うならば，$\underset{\sim}{z}_t$が co-integrated する場合の ECR は(9)であり，co-integrated しない場合の VAR は(7)に相当するということができる．Engle and Granger (1987) は，上記の様に，ECR と VAR とを対比させることによるやり方で co-integration を検定することも提唱している．Engle and Granger (1987) p. 266 の 4 から 7 までの検定方式がそれに相当するものである．しかしながら，(1)において定数項が存在する場合（$\underset{\sim}{\mu}\neq\underset{\sim}{0}$ の場合）には，$\underset{\sim}{z}_t$ が co-integrated しないケースとして，定理 1 の(i)だけでなく，(ii)も

存在するのである．(ii)における(8)は，明らかに $d_2(B)=1$ の仮定の下でも VAR にはなっていない．この様なケース(ii)の存在は，co-integration を検出したい時，ECR と VAR の対比だけでは不充分であることを示唆するものである．従って，Engle and Granger (1987) p. 266 の 4 から 7 までの検定方式も，定数項が存在する場合には甚だ不充分であるということが言える．以下のことから，Nelson and Plosser (1982) の様に，$\underset{\sim}{z}_t$ の各要素に対する表現式(6)において定数項 (drift) がゼロか否かの検定を (co-integration の検定に先だって) 行うことが重要なこととなってくることがわかる．

4. Co-integration 並びに common trend の個数の検出について

この節では，(1)によって生成される $\underset{\sim}{z}_t$ について，$\underset{\sim}{z}_t$ が co-integrated しているか否かを，また，$\underset{\sim}{z}_t$ の common trend の個数を（仮説検定という formal な形にこだわることなく）検出するための統計量について吟味する．まず，(1)あるいは(2)が，それぞれ以下の様に変換できる三つのケースがあることを示す．ここで m 及び r は3節において定義されているものとする．

(a) $\underset{\sim}{\mu}\neq\underset{\sim}{0}$ のケース：この時

$$G'\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0} \qquad \text{rank } G=N-1$$

となる様な $N\times(N-1)$ 行列 G が存在する．G と $\underset{\sim}{\mu}$ を用いて

$$F=[\underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\mu})^{-[1/2]} \vdots G(G'G)^{-[1/2]}]$$

を構成する．F は明らかに直交行列である，すなわち $F'F=I_N$. その時，

$$[\overset{1}{z_{1t}} \vdots \overset{N-1}{\underset{\sim}{z}'_{2t}}]'=F'\underset{\sim}{z}_t \tag{16}$$

と定義すると，(1)より

$$z_{1t}-z_{1t-1}=\theta+e_{1t} \tag{17}$$

$$\underset{\sim}{z}_{2t}-\underset{\sim}{z}_{2t-1}=\underset{\sim}{e}_{2t}$$

ここで

$$\theta = (\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\mu})^{-[1/2]}\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\mu},\ [e_{1t} : \underset{\sim}{e}'_{2t}]' = F'\left\{\sum_{j=0}^{\infty} C_j \underset{\sim}{\varepsilon}_{t-j}\right\}$$

また，(2)より

$$z_{1t} = t\theta + \underset{\sim}{b}(1)'\left\{\sum_{j=1}^{t} \underset{\sim}{\varepsilon}_j\right\} + w_{1t} \qquad (18)$$

$$\underset{\sim}{z}_{2t} = B(1)\left\{\sum_{j=1}^{t} \underset{\sim}{\varepsilon}_j\right\} + \underset{\sim}{w}_{2t}$$

ここで

$$[\underset{\sim}{b}(1) : B(1)']' = F'C(1)$$

$$[w_{1t} : \underset{\sim}{w}'_{2t}]' = F'\underset{\sim}{w}_t$$

(b) $m<N$ のケース：この時

$K'H=0$, rank $K=m$

$H'D(1)=0$, rank $H=r$

$K'D(1)$ のすべての行ベクトルはゼロベクトルでない

を満足する様な $N\times m$ 行列 K 及び $N\times r$ 行列 H が存在する．この様な K と H を用いて

$$R = [K(K'K)^{-[1/2]} : H(H'H)^{-[1/2]}]'$$

とすると，明らかに，R は直交行列となっている．その時

$$[\overset{m}{\underset{\sim}{y}'_t} : \overset{r}{\underset{\sim}{x}'_t}]' = R'\underset{\sim}{z}_t \qquad (19)$$

と定義すると，(1)より

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{y}_t - \underset{\sim}{y}_{t-1} &= \underset{\sim}{\gamma} + F(1)\underset{\sim}{\varepsilon}_t + \underset{\sim}{v}_{1t} - \underset{\sim}{v}_{1t-1} \qquad (20)\\ &= \underset{\sim}{\gamma} + \underset{\sim}{u}_{1t}\end{aligned}$$

ここで

$$\underset{\sim}{\gamma} = (K'K)^{-[1/2]}K'\underset{\sim}{\mu},\ F(1) = (K'K)^{-[1/2]}K'C(1)$$

$$\underset{\sim}{u}_{1t} = F(1)\underset{\sim}{\varepsilon}_{1t} + \underset{\sim}{v}_{1t} - \underset{\sim}{v}_{1t-1}$$

(2)より

$$\underset{\sim}{y}_t = t\underset{\sim}{\gamma} + F(1)\left\{\sum_{j=1}^{t} \underset{\sim}{\varepsilon}_j\right\} + \bar{\underset{\sim}{w}}_{1t} \qquad (21)$$

$$\underset{\sim}{x}_t = \bar{\underset{\sim}{w}}_{2t}$$

ここで

$$[\underset{\sim}{\bar{w}}'_{1t} \overset{m}{} : \underset{\sim}{\bar{w}}'_{2t} \overset{r}{}]' = R' \underset{\sim}{w}_t$$

(c) $m<N$ 且つ $\underset{\sim}{\mu} \neq \underset{\sim}{0}$ のケース（このケースは(a)と(b)との共通部分となっている．）：(19)において

$$P' \underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{0} \qquad \operatorname{rank} P = m-1$$

となる様な $m \times (m-1)$ 行列 P が存在する．P と $\underset{\sim}{\gamma}$ を用いて

$$Q = [\underset{\sim}{\gamma}(\underset{\sim}{\gamma}' \underset{\sim}{\gamma})^{-[1/2]} : P(P'P)^{-[1/2]}]$$

を，さらには

$$\Gamma = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & r \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ r \end{array} & \left[\begin{array}{c:c} Q & 0 \\ \hdashline 0 & I_r \end{array}\right] \end{array}$$

を構成する．ここで Γ は直交行列となっている．その時，(21)の $\underset{\sim}{y}_t$ に対して

$$[\overset{1}{y_{1t}} : \overset{m-1}{\underset{\sim}{y}'_{2t}}]' = Q' \underset{\sim}{y}_t \tag{22}$$

と定義すると，(21)の第一式より

$$y_{1t} = t\psi + \underset{\sim}{f}(1)' \left\{ \sum_{j=1}^{t} \underset{\sim}{\varepsilon}_j \right\} + \xi_{1t} \tag{23}$$

$$\underset{\sim}{y}_{2t} = F_2(1) \left\{ \sum_{j=1}^{t} \underset{\sim}{\varepsilon}_j \right\} + \underset{\sim}{\xi}_{2t}$$

ここで

$$\psi = (\underset{\sim}{\gamma}' \underset{\sim}{\gamma})^{-[1/2]} \underset{\sim}{\gamma}' \underset{\sim}{\gamma}, \; [\xi_{1t} : \underset{\sim}{\xi}'_{2t}]' = Q' \underset{\sim}{w}_{1t}$$

$$[\underset{\sim}{f}(1) : F_2(1)'] = Q' F(1)$$

また，(20)より

$$y_{1t} - y_{1t-1} = \psi + s_{1t} \tag{24}$$

$$\underset{\sim}{y}_{2t} - \underset{\sim}{y}_{2t-1} = \underset{\sim}{s}_{2t}$$

ここで

$$[s_{1t} : \underset{\sim}{s}'_{2t}]' = Q' \underset{\sim}{u}_{1t}$$

(1)によって生成される $\underset{\sim}{z}_t$（観測値として $\underset{\sim}{z}_1, \ldots, \underset{\sim}{z}_T$ が与えられているものとする）に関して，co-integration の存在並びに common trend の数を検出するための統計量として，次の様な量の固有値を観察しよう．

$$A_T=\left\{\sum_{t=2}^{T}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{z}'_{t-1}\right\}^{-1}\left\{\sum_{t=2}^{T}\underset{\sim}{z}_{t-1}\underset{\sim}{z}'_{t}\right\} \tag{25}$$

ここで A_T は first-order の VAR を適合させた時の（係数行列の）OLS 推定量になっている．また，$\underset{\sim}{z}_1$, …, $\underset{\sim}{z}_T$ に依存する任意の N 次正則行列 R_T に対して，$R_T^{-1}A_TR_T$ の固有値は A_T の固有値に等しくなっている．(そのことは，両者の Jordan canonical form が等しくなっていることに由来する．）以上論じてきたことを用いると，A_T の固有値に関する次の様な漸近的結果を得ることができる．

定理 2：(1)によって生成される $\underset{\sim}{z}_t$ から構成された，(25)で与えられている統計量 A_T の固有値 $\lambda_{i,T}$ ($i=1, 2, \ldots, N$) について

$$\lambda_{i,T}=1+O_p(T^{-1}) \quad \text{for} \quad i=1, \ldots, m \tag{26}$$

$$\lambda_{i,T}=\bar{\lambda}_i+O_p(T^{-[1/2]}),\ |\bar{\lambda}_i|<1 \quad \text{for} \quad i=m+1, \ldots, N$$

但し $m=N$ のケースでは

$$\lambda_{i,T}=1+O_p(T^{-1}) \quad \text{for} \quad i=1, \ldots, N$$

ここで m は(1)における $D(1)$ の階数，また，これらの固有値は，$|\lambda_{1,T}|\geq|\lambda_{2,T}|\geq\ldots\geq|\lambda_{N,T}|$ の様に ordering されているものとする．

証明：ケース(c)の場合についてのみ証明する．（ケース(a)(b)あるいは $m=N$ 且つ $\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}$ のケースについても同様にして示される．）R_T を次の様に定義しよう．

$$R_T=R\Gamma D_T \tag{27}$$

ここで R 及び Γ は(b)(c)の statements の中で与えられている，さらに

$$D_T=\begin{array}{c} \\ 1 \\ m-1 \\ r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & m-1 & r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} T^{-[2/3]} & \underset{\sim}{0}' & \underset{\sim}{0}' \\ \hline \underset{\sim}{0} & T^{-1}I_{m-1} & 0 \\ \hline \underset{\sim}{0} & 0 & T^{-[1/2]}I_r \end{array}\right] \end{array}$$

その時

$$R_T^{-1}A_TR_T=\begin{array}{c} \\ m \\ r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]^{-1} \end{array}\quad\begin{array}{c} \\ m \\ r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right] \end{array} \tag{28}$$

ここで

$$A_{11}=\begin{array}{c|c|c} & 1 & m-1 \\ 1 & \left[\begin{array}{c} T^{-3}\sum_{t=2}^{T}y_{1t-1}^{2} \\ \hline T^{-[2/5]}\sum_{t=2}^{T}\underset{\sim}{y}_{2t-1}y_{1t-1} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} T^{-[2/5]}\sum_{t=2}^{T}y_{1t-1}\underset{\sim}{y}'_{2t-1} \\ \hline T^{-2}\sum_{t=2}^{T}\underset{\sim}{y}_{2t-1}\underset{\sim}{y}'_{2t-1} \end{array}\right] \\ m-1 & & \end{array}$$

$$C_{11}=\begin{array}{c|c|c} & 1 & m-1 \\ 1 & \left[\begin{array}{c} T^{-3}\sum_{t=2}^{T}y_{1t-1}y_{1t} \\ \hline T^{-[2/5]}\sum_{t=2}^{T}\underset{\sim}{y}_{2t-1}y_{1t} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} T^{-[2/5]}\sum_{t=2}^{T}y_{1t-1}\underset{\sim}{y}'_{2t} \\ \hline T^{-2}\sum_{t=2}^{T}\underset{\sim}{y}_{2t-1}\underset{\sim}{y}'_{2t} \end{array}\right] \\ m-1 & & \end{array},$$

$$A_{22}=T^{-1}\sum_{t=2}^{T}\underset{\sim}{x}_{t-1}\underset{\sim}{x}'_{t-1},\quad C_{22}=T^{-1}\sum_{t=2}^{T}\underset{\sim}{x}_{t-1}\underset{\sim}{x}'_{t},$$

$$A_{21}=A'_{12}=O_p(T^{-[1/2]}),\quad C_{12}=O_p(T^{-[1/2]}),\quad C_{21}=O_p(T^{-[1/2]})$$

(23)を用いて，(28)で定義された部分行列の order を評価することによって

$$R_T^{-1}A_TR_T=\begin{array}{c} \\ m \\ r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1}C_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22}^{-1}C_{22} \end{array}\right] \end{array}+\begin{array}{c} \\ m \\ r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} O_p(T^{-1}) & O_p(T^{-[1/2]}) \\ \hline O_p(T^{-[1/2]}) & O_p(T^{-1}) \end{array}\right] \end{array} \tag{29}$$

(29)より $R_T^{-1}A_TR_T$ の（すなわち，A_T の）Jordan canonical form Λ_T を形成するための N 次正則行列 S_T については，

$$S_T=\begin{array}{c} \\ m \\ r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} S_{1,T} & 0 \\ \hline 0 & S_{2,T} \end{array}\right] \end{array} \tag{30}$$

とすることができる．さらに

$$A_{11}^{-1}C_{11}=I_m+O_p(T^{-1}) \tag{31}$$

が得られる．その時，$S_{1,T}=I_m+O_p(T^{-1})$ とすれば，I_m は，$A_{11}^{-1}C_{11}$ の

Jordan canonical form の probability limit である．

また，$A_{22}^{-1}C_{22}$ の固有値の probability limit の絶対値が 1 より小であることは，$\underset{\sim}{x}_t$ の定常性より自明である． Q. E. D.

上の定理は，$\lambda_{i,T}$ が co-integration 並びに common trend の個数を検出するための指標として用い得るだけの妥当性（少なくとも大標本において）を持っていることを意味している．

5. Co-integration 並びに common trend のための検定統計量

Co-integration の有無，あるいはより一般に，common trend の個数の検定問題を考察する．Common trend の個数の true value, すなわち，(1) における $D(1)$ の階数の true value を m_0 としよう．また，前節における A_T の固有値 $\lambda_{i,T}$ $(i=1, \ldots, N)$ は，絶対値の大きさの順に次の様に並べられているものとしよう．

$$|\lambda_{1,T}| \geq |\lambda_{2,T}| \geq \ldots. \geq |\lambda_{N,T}|$$

また，$\lambda_{i,T}$ の probability limit $\bar{\lambda}_i (i=1, \ldots, N)$ も，同様に並べられるものとする，すなわち

$$|\bar{\lambda}_1| \geq |\bar{\lambda}_2| \geq \ldots\ldots \geq |\bar{\lambda}_N|$$

この時，(1)において以下の様な帰無仮説が設定される．

H_0：$\bar{\lambda}_m=1$ 少なくとも m 個の common trend が存在する$\leftrightarrow$ $\tilde{m} \leq m_0$

また，対立仮説は以下の様になる．

H_1：$|\bar{\lambda}_m|<1$ 高々 m-1 個の common trend しか存在しない$\leftrightarrow$ $\tilde{m} > m_0$

Co-integration の有無についての検定は，上記の common trend の個数の検定の special case（$m=N$ のケース）である．

検定統計量を構成する前に，次の様な仮定を置く．

仮定(i) $\underset{\sim}{\varepsilon}_t \sim$ i. i. d. (serially) $(\underset{\sim}{0}, I_N)$

仮定(ii) rank $C_0=N$

仮定(iii) 帰無仮説の下で，(1)は

$$\underset{\sim}{z}_t=\underset{\sim}{z}_{t-1}+\sum_{j=1}^{p}A_j(\underset{\sim}{z}_{t-j}-\underset{\sim}{z}_{t-j-1})+\underset{\sim}{\alpha}+C_0\underset{\sim}{\varepsilon}_t \tag{32}$$

と書かれる．

ここで

$$\underset{\sim}{\alpha}=\left[I_N-\sum_{j=1}^{p}A_j\right]\underset{\sim}{\mu}$$

明らかに，仮定(iii)は，$m_0=N$ を想定している．従って，仮定(iii)の下での H_0 の検定は，co-integration の有無についての検定（$m=N$ のケース）に限定されることになる．さらに，この仮定は，3 節の定理 1 の(ii) $n=N-1$, $m_0=N$（n は $C(1)$の階数，m_0 は $D(1)$の階数）のケースを排除するものである．すなわち，この仮定によって，帰無仮説 H_0 の下での (1)は，3 節の定理 1(i)（$m_0=n=N$）のケースのみに限定されていることになる．

観測値 $\{\underset{\sim}{z}_1, \ldots, \underset{\sim}{z}_T\}$ を用いて，(1)及び(32)は

$$Z=Z_{-1}+\underset{\sim}{1}_{T-1}\underset{\sim}{\mu}'+F \tag{33}$$

$$Z=Z_{-1}+XL+U \tag{34}$$

と書ける．ここで，

$$Z=[\underset{\sim}{z}_2, \ldots, \underset{\sim}{z}_T]', \quad Z_{-1}=[\underset{\sim}{z}_1, \ldots, \underset{\sim}{z}_{T-1}]', \quad F=[\underset{\sim}{e}_2, \ldots, \underset{\sim}{e}_T]',$$

$$\underset{\sim}{e}_t=C(B)\underset{\sim}{\varepsilon}_t, \quad U=[C_0\underset{\sim}{\varepsilon}_{p+2}, \ldots, C_0\underset{\sim}{\varepsilon}_T]',$$

$$Z=[\underset{\sim}{z}_{p+2}, \ldots, \underset{\sim}{z}_T]', \quad Z_{-1}=[\underset{\sim}{z}_{p+1}, \ldots, \underset{\sim}{z}_{T-1}]',$$

$$L=[A_1, \ldots, A_p, \underset{\sim}{\alpha}]', \quad \underset{\sim}{1}_{T-1}=(1, \ldots, 1)',$$

$$X=[\underset{\sim}{x}_{p+1}, \ldots, \underset{\sim}{x}_{T-1}]', \quad \underset{\sim}{x}_t=[\underset{\sim}{z}'_t-\underset{\sim}{z}'_{t-1}, \ldots, \underset{\sim}{z}'_{t-p+1}-\underset{\sim}{z}'_{t-p}]'$$

また，以下の様な記号を導入しよう．

$$\underset{\sim}{\xi}_t=[t^{h1}, \ldots, t^{hN}]' \quad \Phi_{-1}=[\underset{\sim}{\xi}_1, \ldots, \underset{\sim}{\xi}_{T-1}]' \quad \Psi_{-1}=[\underset{\sim}{\xi}_{p+1}, \ldots, \underset{\sim}{\xi}_{T-1}]'$$

ここで $h1, \ldots, hN$ は，互いに異なる 1 より大なる整数とする．

また，4 節で考察された A_T の固有値 $\lambda_{m,T}$ に基いて作られる次の様な統計量も導入することにする．

$$\hat{\nu}_{m,T}=\{T^{m^*}[M(|\lambda_{m,T}|-1)]^{m^*+k^*}+1\}^{-1} \tag{35}$$

ここで $h^*=\max\{h1, ..., hN\}$, そして m^*, k^* は, $m^*, k^*\geq h^*$ である様な正整数とする. また, M は適当な正整数 (例えば, $M=2$ etc.) とする. 定理 2 から, この統計量に関して次のことが成立する.

H_0 の下で $\hat{\nu}_{m,T}=1+O_p(T^{-k^*})$

H_1 の下で $\hat{\nu}_{m,T}=O_p(T^{-m^*})$

さらに, この統計量及び上で与えられた notations を用いて, (33)及び(34)からそれぞれ

$$M_1\{[Z+\hat{\nu}_{m,T}\Phi_{-1}]-[Z_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Phi_{-1}]\}=M_1F \tag{36}$$

$$M_2\{[\tilde{Z}+\hat{\nu}_{m,T}\Psi_{-1}]-[\tilde{Z}_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Psi_{-1}]\}=M_2U \tag{37}$$

ここで

$$M_1=[I_{T-1}-\underset{\sim}{1}_{T-1}(\underset{\sim}{1}'_{T-1}\underset{\sim}{1}_{T-1})^{-1}\underset{\sim}{1}'_{T-1}]$$

$$M_2=[I_{T-1}-X(X'X)^{-1}X']$$

が得られる. (36)(37)との関連において, (35)で与えられた統計量の関数となっている次の様な二つの統計量も与えておく.

$$\tilde{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})=\{[Z_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Phi_{-1}]'M_1[Z_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Phi_{-1}]\}^{-1}$$
$$\{[Z_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Phi_{-1}]'M_1[Z+\hat{\nu}_{m,T}\Phi_{-1}]\} \tag{38}$$

$$\hat{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})=\{[\tilde{Z}_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Psi_{-1}]'M_2[\tilde{Z}_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Psi_{-1}]\}^{-1}$$
$$\{[\tilde{Z}_{-1}+\hat{\nu}_{m,T}\Psi_{-1}]'M_2[\tilde{Z}+\hat{\nu}_{m,T}\Psi_{-1}]\} \tag{39}$$

(38)(39)は, それぞれ(36)(37)に基く OLS 推定量とみなすことができる. その時, H_0 を検定するための統計量として, (38)(39)の統計量の関数となっている様な次の様な二つのものを考察しよう.

$$\tilde{s}_T(\hat{\nu}_{m,T})=\{\mathrm{vec}[C_T\{\tilde{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})-I_N\}]\}'\{[I_N\otimes\{C_T^{-1}\Phi'^{-1}M_1\Phi_{-1}C_T^{-1}\}]$$
$$\hat{R}_T^{-[1/2]}[I_N\otimes\{C_T^{-1}\Phi'_{-1}M_1\Phi_{-1}C_T^{-1}\}]^2\hat{R}_T^{-[1/2]}[I_N\otimes$$
$$\{C_T^{-1}\Phi'_{-1}M_1\Phi_{-1}C_T^{-1}\}]\}\{\mathrm{vec}[C_T\{\tilde{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})-I_N\}]\} \tag{40}$$

$$\hat{s}_T(\hat{\nu}_{m,T})=\mathrm{tr}\,\hat{Z}_T^{-1}\{\hat{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})-I_N\}\{\Psi'_{-2}M_2\Psi_{-1}\}\{\hat{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})-I_N\} \tag{41}$$

ここで vec A は行列 A をベクトル化したものであり, ⊗は Kronecker product を表すものとする.

$$C_T=\begin{bmatrix} T^{h(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T^{h(N)} \end{bmatrix} : (N\times N)$$

$$h(i)=(2hi+1)/2 \qquad (i=1,\ ...,\ N)$$

$$(i=1,\ ...,\ N)$$

$$\hat{Z}_T=T^{-1}\{Z'[I_{T-p-1}-Y(Y'Y)^{-1}Y']Z\}$$

$$Y=[Z_{-1} \vdots X]$$

$$\hat{R}_T=\begin{bmatrix} \hat{R}_{11} \cdots\cdots \hat{R}_{1N} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \hat{R}_{N1} \cdots\cdots \hat{R}_{NN} \end{bmatrix} : (N^2\times N^2)$$

$$\hat{R}_{ij}=\begin{bmatrix} \hat{R}_{ij,\,11} \cdots\cdots \hat{R}_{ij,\,1N} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \hat{R}_{ij,\,N1} \cdots\cdots \hat{R}_{ij,\,NN} \end{bmatrix} : (N\times N) \qquad (i,\ j=1,\ ...,\ N)$$

$$\hat{R}_{ij,\,pq}=\left\{\sum_{t=1}^{T-1} t^{hp+hq}/T^{hp+hq+1}\right\}\hat{R}_{ij}(0)+\sum_{k=1}^{K_T}\left\{\sum_{t=1}^{T-1-k}[t^{hp}(t+k)^{hq} + t^{hq}(t+k)^{hp}]/T^{hp+hq+1}\right\}\hat{R}_{ij}(k) \quad (p,\ q=1,\ ...,\ N)\ (i,\ j=1,\ ...,\ N)$$

$$\hat{R}_{ij}(k)=T^{-1}\sum_{t=1}^{T-K_T}\hat{e}_{it}\hat{e}_{jt+k} \quad (i,\ j=1,\ ...,\ N; k=0,\ 1,\ ....,\ K_T)$$

また，正整数 K_T は $K_T\to\infty$, $K_T/T^{1/2}\to 0$ を満足する様に選ばれるものとする．さらに，$\hat{e}_{it}$ は(33)において z_{it} を $(z_{it-1},\ 1)$ に回帰させた時の残差とする．

これらの検定統計量の漸近的結果をまとめものが以下の定理である．

定理 3：(1)によって生成された z_t に関して $\{z_1,\ ...,\ z_T\}$ が観測された時, (41)で与えられている帰無仮説 H_0 を検定するための統計量 $\hat{s}_T(\hat{v}_{m,\,T})$, $\tilde{s}_T(\hat{v}_{m,\,T})$ に関して，次の様な結果が成立する．

(a) 仮定(i)(ii)(iii)が与えられているものとしよう．帰無仮説 H_0 の下で $\hat{s}_T(\hat{v}_{m,\,T})$ の漸近分布は自由度 N^2 の chi-square となる．また $\hat{s}_T(\hat{v}_{m,\,T})$ に基く検定は consistent になっている．

(b) 検定(i)(ii)が与えられているものとしよう．帰無仮説 H_0 の下で，$\tilde{s}_T(\hat{\nu}_{m,T})$ の漸近分布は自由度 N^2 の chi-square となる．また，$\tilde{s}_T(\hat{\nu}_{m,T})$ に基く検定は consistent になっている．

証明：帰無仮説 H_0 の下で，(35)(36)(37)より

$$\mathrm{vec}\{S_1^{-1}B_1\}=[I_N\otimes S_1^{-1}]\mathrm{vec}(B_1) \tag{42}$$

$$\mathrm{vec}\{S_2^{-1}B_2\}=[I_N\otimes S_2^{-1}]\mathrm{vec}(B_2) \tag{43}$$

この時

$$S_1^{-1}B_1=\{C_T^{-1}\Phi'_{-1}M_1\Phi_{-1}C_T^{-1}\}^{-1}\{C_T^{-1}\Phi'_{-1}M_1F\}$$

$$S_2^{-1}B_2=\{C_T^{-1}\Psi_{-1}M_2\Psi_{-1}C_T^{-1}\}^{-1}\{C_T^{-1}\Psi'_{-1}M_2U\}$$

と置くと，

$$C_T\{\tilde{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})-I_N\}=\{C_T^{-1}\Phi'_{-1}M_1\Phi_{-1}C_T^{-1}\}^{-1}\{C_T^{-1}\Phi'_{-1}M_1F\}+O_P(T^{-1}) \tag{44}$$

$$C_T\{\hat{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})-I_N\}=\{C_T^{-1}\Psi'_{-1}M_2\Psi_{-1}C_T^{-1}\}^{-1}\{C_T^{-1}\Psi'_{-1}M_2U\}+O_P(T^{-1}) \tag{45}$$

$$\mathrm{vec}(B_2)\to N(\underset{\sim}{0},\ [\Sigma\otimes W]),\qquad \Sigma=C_0C'_0,\quad W=\lim_{T\to\infty}S_2$$

$$\mathrm{vec}(B_1)\to N(\underset{\sim}{0},\ R),\qquad R=\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\hat{R}_T$$

は明らかなので，帰無仮説の下での(a)(b)に関する結果が得られる．

対立仮説 $H_1{:}N\geq m>m_0$ の下で，(35)及びそれに関連した結果から，

$$\tilde{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})=R\{R'Z'_{-1}M_1Z_{-1}R\}^{-1}\{R'Z'_{-1}M_1ZR\}R^{-1}+O_p(T^{-[1/2]}) \tag{46}$$

$$\hat{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})=R\{R'Z_{-1}M_2Z_{-1}R\}^{-1}\{R'Z'_{-1}M_2ZR\}R^{-1}+O_p(T^{-[1/2]}) \tag{47}$$

が得られる．ここで R は4節のケース(b)の中で定義されているものとする．(46)(47)及び4節のケース(b)の中で論じてきたことから，明らかに $\tilde{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})$ 及び $\hat{S}_T(\hat{\nu}_{m,T})$ は I_N に確率収束しない．そのことから，これらの検定が consistent になっていることは明らかである．　Q. E. D.

検定統計量(40)は(41)に比べて K_T の存在のゆえに，帰無仮説の下での漸近分布への収束のスピードは遅くなっている．しかしながら，(41)は3節の定理1の(ii)の様なケースに対しては，妥当性を失ってしまうのである．

6. まとめ

本稿では，過去の文献においてあまり考慮されてこなかった定数項の存在を意識しつつ，co-integration 並びに common trend の問題について考察してきた．3節の定理1で明らかにされた様に，定数項が存在する場合には，co-integration が存在しないケースの中に，VAR ではない様なモデルも含まれることになる．そして，そのことは，co-integration の有無は VAR と ECR との対比だけでは判定できないものであることを意味した．さらには，Engle and Granger (1987) p. 266 で与えられた4から7までの検定方式は，co-integration の検定として不充分なものであることもわかった．4節で提示された統計量は，一階の VAR を fit させた時の係数行列の OLS 推定量の固有値であった．定理2においてまとめられたこの統計量の極限値の性質は，定数項が存在する場合も含めて，この統計量を co-integration の有無や common trend の個数を（仮説検定という formal な形にとらわれることなく）決めるための一つの指標として用いても良い（それだけの妥当性を持っている）ことを意味するものであった．この統計量は，Stock and Watson (1987) で提示された固有値統計量とは異なって，directly に observe された値を用いて計算でき，unknown parameters に何ら依存しない．5節では，4節の固有値統計量を用いて formal な意味での検定統計量が構築された．この検定統計量の漸近的性質は，過去の文献で提示されてきた検定統計量のそれがモデルないしはケースによって変動するものであったのに対して，定理3で示された様に，漸近的正規性に基いたきわめて標準的・一般的なものであった．この検定統計量の小標本での性質やパワーについては，特定化されたモデルに対してのモンテカルロ実験に依らなければならないと思われる．

参 考 文 献

King, R. G., C. I. Plosser, J. H. Stock, and M. W. Watson, (1987), Stochastic trends and economic fluctuations, NBER Working Paper #2229.

Engle, R. F. and C. W. J. Granger, (1987), Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing, Econometrica, Vol. 55, No. 2, 251-276.

Nelson, C. R. and C. I. Plosser, (1982), Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidences and implications, Journal of Monetary Economics, Vol. 10, No. 2, 139-162.

Phillips, P. C. B. and S. N. Durlauf, (1986), Multiple time series with integrated variables, Review of Economics Studies, Vol. 55, 473-496.

Stock, J. H. and M. W. Watson, (1987), Testing for common trends, Discussion Paper No. 1222, Harvard Institute of Economic Research.

West, K. D., (1986), Asymptotic normality, when regressors have a unit root, Discussion Papers in Economics Woodrow Wilson School, Princeton University, No. 110.