広島大学　学部・附属学校共同研究機構研究紀要
〈第37号　2009．3〉

算数学習における理解過程に関する研究（Ⅸ）

― 第４学年「面積」における数学的モデルの作成を中心に ―

礒部　年晃　　小山　正孝　　山口　武司　　榎野　　純
朝川　佳子
（協 力 者）　阿部　好貴　　真野　祐輔　　向井　慶子

１．目的と方法

本研究は，算数学習における子どもの理解過程を，理論的・実証的に解明しようとするものである。これまでの数学の理解過程に関する研究[1), 2)]によって，数学的概念や原理・法則などを理解するということは，本質的には，個々の子どもの心的活動であり，複雑で力動的な過程であるが，他方では，教室で行われる算数学習においては，子どもの理解過程はその子どもと教師，子ども同士の社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。そこで，本研究では，算数学習における理解過程を，これら個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて解明することを目的とする。

そのために，まず本研究の第１報[3)]では，理論的研究として，小山が構築した数学理解の２軸過程モデルについて，このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と，数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を，文献解釈的方法によって再検討した。そして，第２報[4)]では，その実証的研究として，「図形」領域の学習において，小学校第２学年の子どもが三角形や四角形の概念を学習する際の理解過程に焦点を当て，事前調査，授業実践，事後調査を通して，これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明した。また，第３報[5)]では，「量と測定」領域の授業実践を通して，小学校第５学年の子どもが台形の面積の求め方を学習する際の理解過程を実証的に明らかにしてきた。さらに，第４報[6)]では，「数と計算」領域の授業実践を通して，小学校第５学年の子どもが分数と小数，整数の包摂関係を学習する際の理解過程を実証的に解明してきた。そして，第５報[7)]では「量と測定」領域における理解過程について，第３学年「重さ」の概念形成を中心に解明してきた。第６報[8)]及び第７報では，「数と計算」領域において，第１学年「たしざん」「ひきざん」の概念形成について，きまりを見つけ活用していく際の理解過程に焦点を当て解明してきた。さらには，第８報において，小学校第４学年の子どもが「角」の概念を形成の過程を中心に解明してきた。

そこで，本第９報である本稿では，これまでの研究成果を基に，理解過程をより詳細にとらえるための方途として，児童の考えを数学的モデルに表現させ，それを解釈しあう場を設定して研究を進めていきたい。具体的には，小学校第４学年の児童が「面積」の学習において，複合図形を求積する際，適切な求積方法を如何に選択していくかについての理解過程を実証的に解明することを目的とする。

２．授業の計画

（１）計画の概要

【授業学年】　広島大学附属小学校　１部４年
（男子20名　女子19名　計39名）

①　単元名　面積

②　単元目標

○　広さを数値化する単位と測定のよさに気づき，測定する広さに応じて面積の単位を柔軟に使いこなしたり，測定する図形の形状に応じた測定方法を工夫することができる。

○　式から形を多様に構成したり，不定形の面積を近似的に見て求めたりすることができる。

○　長方形や正方形の面積を公式を用いて求めることができる。

○　面積の意味を理解し，面積の求め方や単位の関係がわかる。

③　指導計画（全11時間）

Toshiaki Isobe, Masataka Koyama, Takeshi Yamaguti, Jyun Eno, Yoshiko Asakawa, Yoshitaka Abe,Yuusuke Shinno,and Keiko Mukai: Research on the Process of Understanding in Elementary School Mathematics Learning（IX）－focusing on first graders' understanding of subtraction－

第１次　テトロミノでできる形と面積……………２
第２次　正方形と長方形の面積……………
４（本時４／４）
第３次　大きな面積の単位と使い方………………３
第４次　半分の面積をつくるには？………………２

（２）事前検討

①　教材分析

本単元は，面積の求積の基礎段階となる学習である。本単元にかかわって「量と測定」領域の先行学習として，第１学年「長さ」，第２学年「長さ（１），（２）」，第３学年「長さ」，「重さ」，「かさ」をあげることができる。上記の学習では，量は，基準を決めると，大きさを比較できるとともに，数値化してとらえることができることを理解することをねらいとしている。本単元「面積」においても，長さやかさ，重さと同じように，広さも単位面積を決めると，数値化できることを理解し，長方形や正方形などの基礎的な図形について求積ができるようにすることを主なねらいとしている。面積（広さ）については，第４学年ではじめて導入されるものである。本単元においても，基準となる単位を決め，その単位の個数として数値化できることをとおして面積についての理解を深めさせていきたい。また，本単元の学習は，既習の量の学習をもとに，対象を拡げていくものであり，既習をもとに学習していく算数科の学びの基礎・基本を育てる上から価値あるものであるといえる。

また，今回の実践的研究をとおして，理解した面積の求積方法を活用していく場が設定できるかどうか追究していきたい。なぜならば，理解したことをさらに高次の場で活用していくことで，子どもの理解はより深まっていくからである。

そこで，本実践研究においては，これまでに学習してきた面積についての理解を応用する場面として複合図形の面積の求積方法の妥当性を検討する場を設定する。この場においては，これまでに学習した面積の見方（間接測定）や図形の見方（分割した図形）を活用して求積方法を一般化する活動を展開したい。この求積方法の一般化の過程における，児童の理解過程を明らかにしていきたい。

②　児童の実態

これまでに子どもたちは，長さやかさ重さの学習をとおして，身の回りの具体的な事象から量に着眼すること（取り出すこと）や，取り出した量を比較・測定する技能については確実になってきている。しかしながら，この段階になると，機械的な計算（公式を用いた面積の求積）については確実になってきているが，面積を測定する意味が薄れてきていることは否めない。

このような子どもの実態を踏まえ，本実践研究では，面積の求積公式の意味と有用性を検討する場を仕組むことで，理解したことを対象に応じて柔軟に活用できる力を養っていきたい。

３．理解過程を重視した授業の構想

これらの事前検討を受けて，本研究実践では，第４学年「面積」の複合図形の求積場面を取り上げる。この場面は，小学校現場では，研究授業で取り上げられる場面が多く，数多くの実践がなされている。研究授業で，よく見られる授業展開とは次のとおりである。

（１）研究授業でよく見られる授業展開

複合図形の求積場面においては，Ｌ字型を学校の校舎や建造物に見立てて，求積に必要な長さを調べ，面積を求めていく授業が展開されている。複合図形の求積においては，下図のように，Ｌ字型を２つの長方形に分割したり，大きな長方形から小さな長方形をのぞいた広さと考えたりする活動が期待できる。つまり，２種類以上の多様な考え方があらかじめ保証されている教材なのである（下図参照）。

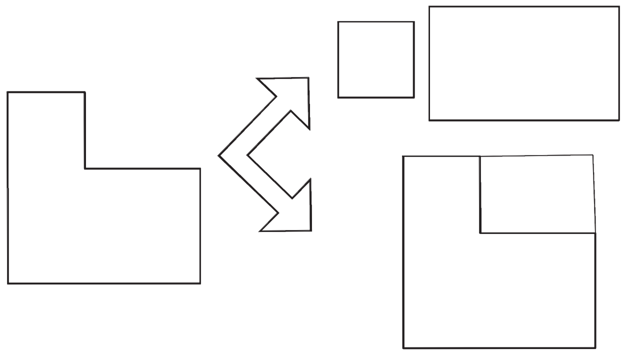


図１　複合図形の求積法略

子どもたちは，分割と補完の２つの見方で求積し，２つとも面積は同じになることを確かめることができる。多様な考え方が生み出すことのできる場面である。

（２）従来の授業展開の問題点として

先に述べた授業展開では，確かに多様な追究が生み出すことができる。しかしながら，多様な方法で求めたが，その後はどうなるのであろうか。本研究実践を展開するにあたって，多様な追究方法の発見で終わることを理解内容としての問題点として考えている。つまり，１単位時間をかけて，追究を工夫させるのだが，その後に，この補完や分割の考えを活用する場を設定し，発見した方法の実用性や一般性の検討は必要ないのだろうかという疑問を抱いているのである。

複合図形の求積において，児童に理解させたい学習内容は，多様な求積方法の発見にとどまらず，発見し

た求積方法を活用していくなかで，方法の意味と適用範囲を理解することではないかと考えるのである。また，活用していく中で，真に応用・転移可能な求積方法を意識できるのではないだろうか。

次の点に着目して授業づくりを行っていくことで，子どもの理解過程を大切にした授業づくりを行うことができると考える。

発見した方法を活用していくことから，方法の一般性を検討していく課題追究の場の工夫

4．第４学年「面積」における授業の実際と考察

（1）本時（第２次の４／４時）の実際と考察

〈本時の目標〉

- ○　複合図形の面積の求め方を分割・補完の考えからモデル化することができる。
- ○　２種類の複合図形の面積の求め方を他の図形にもあてはめることをとおして，求積方法の一般化を図ることができる。

〈本時の授業の流れ〉

［課題の意識化］

課題の意識化の段階では，まず，前時に追究した複合図形の面積の求め方を確認するために，求積に必要な長さは，どこであったのかを話し合った。次に，複合図形の面積を実際に求積し，分割と補完のどちらの方法を選択したのかを明らかにし，その理由を検討することから，課題意識を醸成していった。授業の実際は次のとおりである。

T　昨日は，このような（図２参照），Ｌ字型の図形の面積を求めました。

T　昨日，面積を求めるときに使った長さを確認してみましょう。いくつの長さを調べたら，面積を求めることができましたか。

C　４つあれば，面積を求めることができました。

C　アとカ，エとウです（方法①）。

C　まだあります。エとオ，アとイです（方法②）。

C　もう一つありました。カとオ，イとウです（方法③）。

C　①と②は同じやり方だけど，③は全然違う考え方でした。

T　それではこちら（方法③：補完の方法）をＡ，こちら（方法①，②：分割の方法）をＢとしたら，Ａの方法，Ｂの方法ってどんな名前がつきそうですか。

【数学的モデリング活動Ⅰ：追究方法のメタファ】

C　「**くぎり**」でもいいと思います。

C　それなら「**切り分け**」でもいいと思います。

T　それではＡは，どんな名前がつきそうですか。

C　「**付けたしひき法**」って名前がいいかな。

C　「**長方形ひく，長方形**」でもいいね。

C　「**たしひき法**」だとわかりやすいよ。だってＢは「**ひきたし法**」っていえるもん。

T　求め方に名前をつけることで，みんながすぐにイメージできますね。それでは，Ｌ字型の面積を求めるのに，Ａ，Ｂのどちらの方法を使ったのか教えてください。　**【調査①】**

【調査①】児童が選択した方法

Ａ（補完）の方法　7／39（18%）
Ｂ（分割）の方法　32／39（82%）

T　あれ，Ｂの方法を使った人がほとんどだね。どうしてかな。

C　Ａは使いにくいです。Ａは，いったん（面積を）ふやしてひくけど，Ｂは線をひいたら（分割するだけで）ひかなくてすむし，あとはたすだけです。ひき算とたし算をを比べたらたし算の方が間違いにくいからです。

C　Ａはたしてひいて，Ｂはくぎってやって，後はたすだけだから，計算が簡単です。

T　ということは，Ｂの方がやりやすい方法なのかな。

C　でも，上の方がやりやすい場合もあるかもしれない。

T　それでは，今日の研究は，どんな課題で考えますか。

C　「Ａがいい場合を考えよう。」です。

C　「Ａには，いいところはないのかを考えよう。」だったらおもしろそうです。

T　それでは，今日の研究は「Ａが使いやすい図形やＢが使いにくい図形はあるのか？」で研究してみま

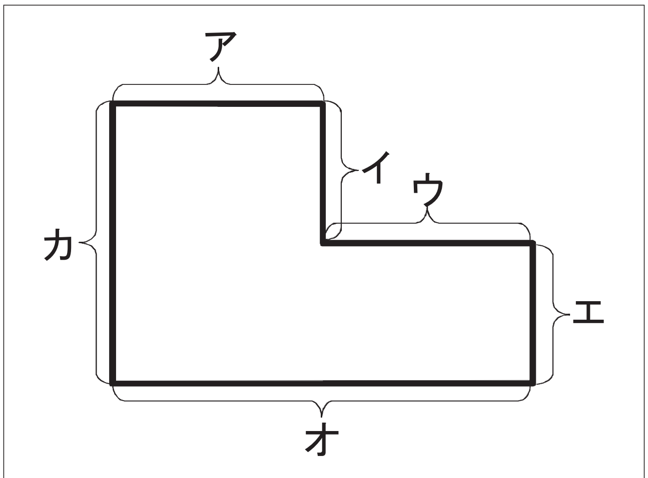


図２　提示した複合図形（Ｌ字型）

しょう。

［操作化］

この段階は，A：補完，B：分割の方法の両方を様々な複合図形の求積に活用して，どんな図形の求積にも活用できる方法はどちらかを一般化して考える段階である。授業展開の実際は次のとおりである。

T　こんどは，この図形の面積を求めてみます（図３参照）。

C　これは，Aの方がいいかもしれないよ。

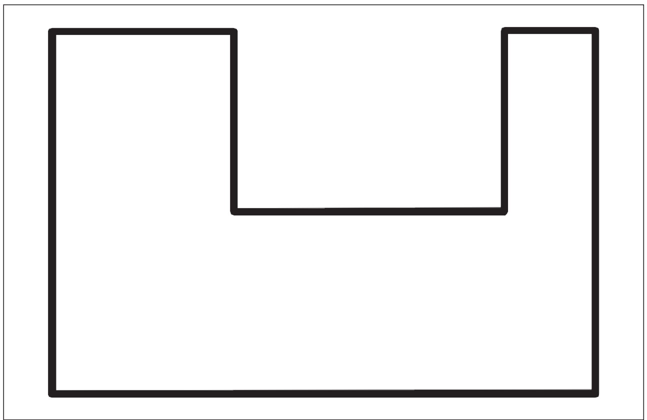


図３　操作化の段階で提示した複合図形①

T　あれ，さっきまでは，絶対にBがいいと言っていたのに，「Aがいい」ってつぶやきが聞こえてきたよ。それでは，Aがいいか，Bがいいか，どちらでもいいかをみんなに聞いてみましょう。　**【調査②】**

【調査②】児童が選択した方法

A（補完）の方法　27／39（69％）
B（分割）の方法　9／39（23％）
判断がつかない　　3／39（８％）

T　先生は，もう一つ準備したんだけど。見てもらっていいですか（図４参照）。

C　「ドーナッツ」みたいな形だね。

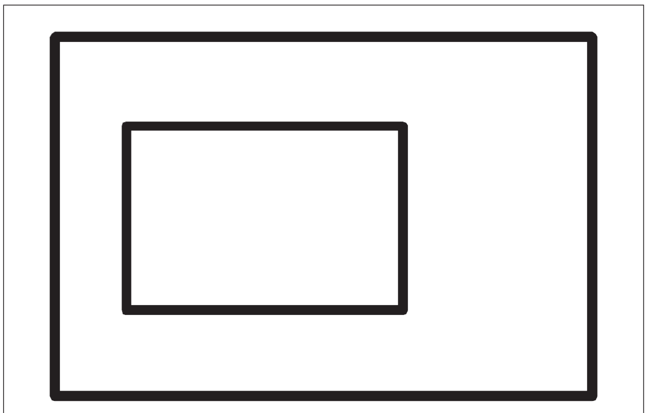


図４　操作化の段階で提示した複合図形②

C　これは，絶対にAの方だよ。

T　この図形は，Aがいいか，Bがいいか，どちらでもいいかを聞いてみましょう。　**【調査③】**

【調査③】児童が選択した方法

A（補完）の方法　27／39（69.0％）
B（分割）の方法　6／39（15.5％）
判断がつかない　　6／39（15.5％）

T　それでは，自分が選択した方法で解いてみましょう。**【数学的モデリング活動Ⅱ：追究方法の式化】**

［協定化］

この段階は，「コの字型」，「ドーナッツ型」の面積を求め方を話し合い，補完と分割の２つの求積方法の一般性を検討する段階である。授業展開の実際は次のとおりである。

T　それでは，まず，「コの字型」の面積の求め方を発表してもらいます。

【数学的モデル（式）の検討】

【M児の求積方法と説明：A補完型】

求積方法（式）	説明
4×6＝24	まず，コの字型を大きな長方形と考えると，4×6で24㎠です。
2×3＝6。	本当は，長方形じゃなくてへこんでいるから，その部分の面積は，2×3で６㎠です。
24－6＝18	最後に，うまっていると考えた長方形から，へこんでいる部分をひくと，18㎠になります。

【N児の求積方法と説明：B分割型】

求積方法（式）	説明
	最初に，コの字型を縦に３つに分けます。
4×2＝8	そうすると，一番左の面積は，4×2で８㎠です。
2×3＝6	真ん中の長方形は，2×3で６㎠です。
1×4＝4	右の長方形は，1×4で４㎠です。
8＋6＋4＝18	この３つをあわせると，18㎠です。

T　みんなの意見を聞いてみましょう。

C　Bは面倒くさそう。Aは３つの式だけど，Bは４つの式で答えがでる。

C　計算が４つだし，Bは３つをたさないといけないから大変です。Aは二つの数字（二口の計算）でで

きます。

C　そんなことないよ。Bの計算は，とっても簡単だよ。8+6+4も簡単にできるよ。

C　それはAも同じことで，式の長さをくらべたらAの方が短いから，やっぱりAの方が簡単だよ。

T　みなさんは，どちらの方法がいいかと考える理由は，「式の数」と「計算の簡単さ」の２つの理由があるみたいですね。それでは，「ドーナッツ型」はどうかな。

C　先生，私は，最初Bだと思っていたのだけど，形を分けていくうちに，Aの方がいいかなと思って，方法を変えました。

T　最初の予想（調査③）と変わった人がいるみたいだね。それでは，「ドーナッツ型」をA，Bどちらで求めたかもう一度聞いてみましょう。　**【調査④】**

【調査④】児童が選択した方法

A（補完）の方法　35／39（90%）
B（分割）の方法　４／39（10%）

T　35人もAの方法で解決したのですね。

C　先生，私はBでやったんだけど，とっても大変でした。だって，6×1＝6。4－1＝3。3×1＝3。6－3＝3。3×1＝3。3×2＝6。最後に6＋3＋3＋6＝18。こんなにたくさんの式が出てきたから，やってるうちに，Aのうめてひくと簡単にできそうだと思いました。

C　私はBからAに変えたんだけど，どこで区切っていいのか（分割していいのか）分からなくなってきました。「L字型」だったら簡単だったけど，「ドーナッツ型」は，区切り方が大変になりました。

C　もしかしたら，Aのやり方の方が，いいかもしれない。

T　どうしてですか。

C　だって，いろんな形をやってみたけど，何個も分けなくていいし，計算はいつも３つの式でできるからです。

C　付け加えます。今日の形は，たまたまだったかもしれないけど，全部，大きな長方形から小さな長方形をとった形だから，Aの方法はやり方が一緒でできるからです。

T　なるほど，新しい視点として，「同じ方法でできる」が見つかりましたね。

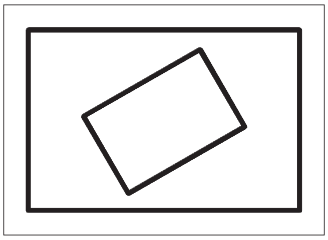
〈本時の授業の考察〉

本時では，複合図形の求積における，分割と補完の２つの方法を，求積の時にどちらの方法を選択するのかを考えさせることを通して，一般性（適応範囲の広さ）という観点を創出することを目的に展開した。その際，２つの求積方法のイメージを具体化するための言語化（メタファ）と，求積方法を活用する際の式化という２つの数学的モデルを作成する場を位置づけ，理解過程を詳細に分析することを試みた。

まず，課題の意識化の段階では，「**わける**」，「**切り分け**」，「**付けたしひき法**」，「**長方形ひく長方形**」，といったネーミングがなされた。これは，求積方法を図形操作の観点から具体化してものである。このネーミングによって，「コの字型」では，92%の児童が，「ドーナッツ型」では，84.5%の児童が実際の求積の前に，具体的な解決の見通しを持つことができている。このことから，求積イメージを具体化するための言語化は有効に機能したといえよう。

次に課題追究の場（操作化，協定化）においては，「コの字型」と「ドーナッツ型」の２つの複合図形の面積を求め，選択した方法を検討することが行われた。児童は，方法選択の理由として「コの字型」の場合は，「式の数」と「計算の容易さ」の２つの観点から検討していた。「ドーナッツ型」の場合には，それに加えて「同じ方法でできること」が新たな観点として生まれた。本時では提示しなかったが，次時に下のような複合図形を提示すると，「同じ方法でできること」が方法として活用する際の重要な観点をさらに強化することができた。

これは，複合図形の求積方法を一般性の観点から検討した姿であり，方法についての理解を深めている姿であるといえる。



以上のことから，発見した方法を活用していくことから，方法の一般性を検討していく課題追究の場は，分割，補完の２つの方法の意味と適用範囲を明らかにするとともに，図形を「同じ方法」という視点からみる上で有効であったと考えられる。

５．結　　論

本稿では，第４学年の「量と測定」領域の学習において，小学校第４学年の児童が，求積方法に関するモデルをつくり，モデルを活用していく中で，方法の一般性を理解していく過程を実証的に解明することを目的とした。子どもの理解過程を重視した算数科授業を構成するため，発見した方法を活用していくことから，方法の一般性を検討していく課題追究の場を工夫した。具体的には，対象に応じて分割と補完の方法を選

択させて追究させる場と追究結果の妥当性を検討する場の位置づけの有効性が明らかになってきている。

本事例研究からも，本研究の第２報～第８報の事例研究と同様に，算数学習において個人的構成と社会的構成の両方の活動が行われてはじめて，教室における個々の子どもや子どもたちの理解が深化しうるということが示唆される。

本研究ではこれまでに，小学校算数科における単元に焦点化して，算数学習における理解過程に関する実証的研究を行ってきた。さらに多くの数の抽出児の継続的な観察記録をとり，子どもの理解過程を実証的に解明することが課題である。

参考文献

１）小山正孝（1997）「数学学習と理解過程」，日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』，産業図書，pp.135－149.

２）Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* Vol.5, pp.21－33.

３）小山正孝，中原忠男，武内恒夫，赤井利行，宮本泰司，脇坂郁文（2000）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅰ）―数学理解の２軸過程モデルの理論的再検討―」，『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』，第28号，pp.117－123.

４）礒部年晃，小山正孝，中原忠男，赤井利行，中村武司（2002）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅱ）―第２学年における三角形と四角形の概念を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第30号，pp.89－98.

５）赤井利行，小山正孝，中原忠男，中村武司，礒部年晃（2003）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅲ）―第５学年における「台形の面積の求め方」を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第31号，pp.115－122.

６）礒部年晃，小山正孝，中原忠男，赤井利行，片桐毅（2004）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅳ）―第５学年における「分数と小数，整数の包摂関係」を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第32号，pp.181－188.

７）片桐毅，小山正孝，中原忠男，赤井利行，礒部年晃（2005）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅴ）―第３学年における「重さ」の概念形成を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第33号，pp.217－223.

８）礒部年晃，小山正孝，中原忠男，赤井利行，今村孝子（2006）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅵ）―第１学年における「くり下がりのあるひき算の式」の概念形成を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第34号，pp.327－332.

９）今村孝子，小山正孝，中原忠男，礒部年晃，榎野純（2007）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅶ）―第１学年「繰り上がりのあるたし算」における計算の意味理解を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第35号，pp.135－142.

10）榎野純，小山正孝，岩崎秀樹，礒部年晃，今村貴子（2008）「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅷ）―第４学年における「角」の概念形成を中心に―」，広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第36号，pp.135－142.