数学教育における数理的思考の広がりを図る研究

（課題番号　18530711）

平成18年度～平成20年度科学研究費補助金
（基盤研究(C)）

研究成果報告書

平成21年3月

研究代表者　今　岡　光　範
（広島大学大学院教育学研究科 教授）

はしがき

本報告書は，平成18年度から平成20年度に渡って，科学研究費補助金（基盤研究(C) 課題番号 18530711）を受けて行った「数学教育における数理的思考の広がりを図る研究」の成果を報告するものである。

課題名の中に「数理」という語を用いたが，この語の語源は戦前の「数理思想」からきているものと考えられる。その数理思想には，事物現象を数学的に捉え，考察し発展して，新しいものを創造するという，今日の数学的活動のねらいにもみられる精神が含まれていた。したがって，「数理」には，事象を数学化する過程や数学的考察を発展させる過程を大切にするという要素があると考えられる。それは，ちょうど，研究者が新しい問題を見出し発展させていく過程に似ていて，我々のこれまでの研究での葛藤を生かすことができる要素ではないかと考えた。

また，「数理」には，数学の道理という響きがある。研究の動機の中に，今日，学校数学などでの学びが，必ずしも，数学の道理のよさを味わうものにはなっていないのではないかということがあった。現代の情報化社会において，成果をより効率的に出すことが追及されるのは，ある程度は，やむをえないことかもしれない。数学に対しても，手っ取り早く対処する術を求める傾向がある。しかし，数学の本来のよさは，理論の明晰さや美しさ，正確な言語性，多義性，そして，演繹，帰納，類推，一般化などの推論の結晶体であるなど，人間の英知に深く関与しているものである。それは，数学の道理をじっくり学ぶことによって味わえるものであると考える。そのような面を数学教育の中で具現することが必要であるという思いから，課題名に「数理的思考の広がりを図る」という表現を用いた。

我々は，この科学研究費による研究を申請する際に，大きく二つのことに注目していた。一つは，戦時中に発行された中学校数学「第一類・第二類」の教科書である。もう一つは，生徒による数学の問題作りの活動である。本研究の研究計画はこの二つのことを軸にして設定した。

前者については，今日，これらの教科書に注目する人々が増えてきている。それは，この教科書の精神が，数理思想を教材構成や教材内容の中に具体化しようとするものであり，まさに今日の数学教育の改善を考える上で一つのお手本になるからである。これらの教科書は，決して，効率よく知識を与えようとはしない。「第一類」は代数，関数，統計の内容で構成されているが，例えば，教科書では「図表」と表現されている，関数のグラフを軸にして，具体的な事象と数学を結びつけようとしている。「第二類」は幾何の内容で構成されているが，例えば，角速度やリンク機構の数理のような理学・工学に実際に現れる内容を説明や問題に活用して，生徒の図形・空間感覚を育てようとしている。本研究では，これらの教科書を分析し，それを基にした今日的な教材の開発を試みた。本報告書のPartⅡ：第2章～第5章で，それらの考察のいくつ

かを提示する。

後者の生徒による数学の問題作りの活動について，本研究では，後期中等教育や教員養成課程の教育を対象にした研究を行った。問題設定の活動は，大正期の奈良附属小学校などでの実践や，オープンエンドアプローチの研究などでの優れた実績がある。米国など国外でも，問題設定は問題解決能力を強化するものであると位置づけられている。しかし，国内の多くの実践は，小学校もしくは中学校でのものが中心であり，高校や大学などでの実践はごく限られたものしか報告されていない。本研究では，その不足している研究を目的とした。

実際に，問題作りの活動は，高学年の生徒の数理的思考の広がりを図る上でも有効なものであるという仮説に基づき，高校生や将来の数学教員めざす大学生による問題作りを授業で実践し，作られた問題やアンケートの回答などを分析し，そのあり方を検討した。本報告書の第６章，第７章で，その考察のいくつかを提示する。

本研究の当初の目的は，多くの部分で成果を得ることができたと考えている。しかし，今後の課題も残されている。その一つは，情報発信がまだ不十分であるということである。例えば，高校での問題作りの授業実践も，多くの教育現場に伝えているとはいえない。他にも，将来の数学教師をめざす大学生の教育において，本研究でのコンピュータを活用した問題作りの活動は一つの提案になりうるが，もっと一般的に，いかに数理的思考の広がりを図るかということの検討も課題として残されている。これらの課題も含めて，本研究でめざした課題をさらに発展させていきたいと考えている。

本研究において，研究代表者と研究分担者以外に，菅野栄光氏に多大な協力を仰いだ。氏には，メールのやりとりや小研究会に加わり，高校生による問題作りの授業を実践し，研究発表を行っていただいた。また，何人かの修士課程の院生に，本研究の趣旨を背景にもつ研究テーマに取り組んでもらった。また，学会発表や投稿論文について，いろいろな方々から，ご助言やご意見をいただき感謝している。本報告書では具体的な教材内容や実践活動に関する研究報告（PartⅡ）を中心に行うが，種々のご批判を期待したい。

2009年３月
研究代表者　　今岡　光範

研究組織と研究経費

[研究組織]

研究代表者　：　今岡　光範　　(IMAOKA, MITSUNORI)
広島大学・大学院教育学研究科・教授
研究者番号：20031817

研究分担者　：　平岡　賢治　　(HIRAOKA, KENJI)
長崎大学・教育学部・教授
研究者番号：10315210

研究分担者　：　下村　　哲　　(SHIMOMURA, TETSU)
広島大学・大学院教育学研究科・准教授
研究者番号：50294476

研究協力者　：　菅野 栄光　　(KANNO, EIKOH)
愛知県立半田高等学校・教諭

[研究経費]

	直接経費	間接経費	合 計
平成 18 年度	1,300,000 円	0 円	1,300,000 円
平成 19 年度	1,000,000 円	300,000 円	1,300,000 円
平成 20 年度	1,000,000 円	300,000 円	1,300,000 円
総　計	3,300,000 円	600,000 円	3,900,000 円

目　次

PART I　研究成果の概要

１．研究発表

（１）研究課題に関する論文

[1]　今岡光範，冨田真吾，西岡亮平：フレームの動きを取り入れた図形教材の考察－工学的な背景をもつ教材の発展性－，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，第12巻，227－235，2006年．(査読有)

[2]　下村哲，今岡光範，菅野栄光：高校生による数学の問題作り(Ⅱ)　－数列の問題作りを通して－，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，第12巻，215－225，2006年．(査読有)

[3]　今岡光範，速水誠：多角形の内角・外角の和に関する考察　－図形の組合せ的性質の視点から－，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，第13巻，215－223，2007年．(査読有)

[4]　下村哲，今岡光範：コンピュータを活用した数学の問題作り(Ⅳ)　－原題の設定の考察を中心として－，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，第13巻，225－234，2007年．(査読有)

[5]　菅野栄光，下村哲，今岡光範：高等学校における発展的な問題作りの授業　－大学入試問題を活用した取組み－，日本数学教育学会誌，第89巻7号，2－9，2007年．(査読有)

[6]　平岡賢治，今岡光範：近似性に関する考察　－数理的な広がりを図る教材の視点から－，第40回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，379－384，2007年．(査読有)

[7]　菅野栄光，下村哲，今岡光範：高等学校における問題作りを取り入れた微分法の演算指導　－機械的演習からの改善を目指して－，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，第14巻，111－117，2008年．(査読有)

[8]　下村哲，伊藤雅明：コンピュータを活用した数学的モデリング（Ⅱ）－感染症流行モデルを教材として－，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，第14巻，119－128，2008年．(査読有)

[9]　菅野栄光，下村哲，今岡光範：高校生による発展的な問題作り　－コンピュータを活用した方程式の学習－，第41回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，99－104，2008年．(査読有)

[10] 今岡光範：ベクトルの外積に関する考察　－その概念の広がりと教材性に関して－，広島大学大学院教育学研究科紀要，第二部，第 57 号，19－28，2009 年．(査読無)

（２）研究課題に関する学会発表

[1] 西岡亮平，今岡光範，冨田真吾：フレームの動きを取り入れた図形教材の考察－工学的な背景をもつ教材の発展性－，全国数学教育学，熊本大学，2006 年 1 月．

[2] 下村哲，今岡光範：コンピュータを活用した数学の問題作り(IV)，全国数学教育学会，広島大学，2006 年 6 月．

[3] 速水誠，今岡光範：多角形の内角・外角の和に関する考察　－図形の組合せ的性質の視点から－，全国数学教育学会，奈良市，2007 年 1 月．

[4] 下村哲，伊藤雅明：コンピュータを活用した数学的モデリング（II）－感染症流行モデルを教材として－，全国数学教育学会，広島大学，2007 年 6 月．

[5] 平岡賢治，今岡光範：近似性に関する考察　－数理的な広がりを図る教材の視点から－，第 40 回数学教育論文発表会，東京理科大学，2007 年 11 月．

[6] 菅野栄光，下村哲，今岡光範：高等学校における問題作りを取り入れた微分法の演算指導　－機械的演習からの改善を目指して－，全国数学教育学会，鳥取市，2008 年 1 月．

[7] 菅野栄光，下村哲，今岡光範：高校生による発展的な問題作り　－コンピュータを活用した方程式の学習－，第 41 回数学教育論文発表会，筑波大学，2008 年 11 月．

[8] 下村哲，今岡光範：コンピュータを活用した数学の問題作り(V)，全国数学教育学会，姫路市，2009 年 1 月．

[9] 津島久美，今岡光範：空間の格子の教材化に関する考察　－空間図形教材の工夫の視点から－，全国数学教育学会，姫路市，2009 年 1 月．

[10] 今岡光範，高田功：On some formulas of the lattice figures，日本数学会中国四国支部例会，高松市，2009 年 1 月

（3）図書

[1] 今岡光範，坂本隆則，寺垣内政一，丸尾修：教員のための数学 I，
代数・幾何，培風館，2007 年.

[2] 池畠良，景山三平，下村哲：教員のための数学 II，解析・統計・コンピュータ，
培風館，2007 年.

（4）研究代表者，研究分担者のその他の論文

M. Imaoka: Extendibility of negative vector bundles over the complex projective spaces, Hiroshima Mathematical Journal, Vol.36, 49－60, 2006.

M. Imaoka, H. Yamasaki: Stably extendibility of the tangent bundles over lens spaces, Hiroshima Mathematical Journal, Vol.36, 339－351, 2006.

M. Imaoka: Hypersurface representation and the image of the double S^3－transfer, Geometry and Topology Monographs, Vol.10, 187－193, 2007.

M. Imaoka, H. Yamasaki: Stably extendibile tangent bundles over lens spaces, Topology and its Applications, Vol.154, 3145－3155, 2007.

M. Imaoka, T. Yamashita: On the points at different distances from all lattice points, Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications, Vol.1, 389－400, 2008.

K. Hiraoka, Y. Miyauchi ： A framework for creating or analyzing Japanese lessons from the view point of mathematical activities: A fraction lessons, Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.3, 33-40, 2007.

平岡賢治，宮内香織：算数的活動の視点から見た複式授業における「わたり」の考察
―サイエンス・パートナーシップ・プロジェクトにおける取り組みから―，
長崎大学教育学部紀要教科教育，Ｎo. ４７, 1-12, 2007.

平岡賢治，宮内香織：創造性を育む授業力向上のための支援プログラム―離島における算数指導の改善を目指して―，平成 18 年度 SPP(教員研修)実施報告書，2007.

K. Hiraoka, Y. Miyauchi: Analyzing a multiplication lesson in Japan using a ALMA framework, Proceedings of the 32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.1, p.270, 2008.

平岡賢治, 宮内香織：複式教育の算数科授業創りにおける「算数・数学的活動の視点に立った授業理解の枠組み」の活用, 研究論文集－教育系・文系の九州地区国立大学間連携論文集－ 1(1), 2008.

T. Futamura, Y. Mizuta, T. Shimomura: Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent on metric spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Vol.31, 495－522, 2006.

Y. Mizuta, T. Shimomura: Vanishing exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, Illinois J. Math. Vol.51, 1039－1060, 2007.

T. Futamura, T. Shimomura: Lindelof theorems for monotone Sobolev functions with variable exponent, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Vol.84, 25－28, 2008.

Y. Mizuta, T. Shimomura: Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, J. Math. Soc. Japan, Vol.60, 583－602, 2008.

Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura: Sobolev's inequalities and vanishing integrability for Riesz potentials of functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, J. Math. Anal. Appl. Vol.345, 70－85, 2008.

２．研究計画と研究成果の説明

（１）当初の計画

平成 14 年度の高校数学の教育課程実施状況調査などから，高校生の，問題設定を読み取る力や自らの思考を表現する記述力の弱さが見られる。その改善には，型通りの訓練だけではなく，高校生の数理的思考の広がりを図る教育が大切であると考える。そして，教育学部で数学教育に携わる者として，学校の数学教員をめざす大学生に，自らの思考を発展させる力を育てることが，そのような改善につながるものと考える。そこで，現今の後期中等教育や高等教育での数学教育において，高校生や大学生の数理的思考の広がりを図る教育を具体化することが必要であるという視点に立ち，本研究では，次の①～④の課題を教科教育の研究として行い，その成果を発表することを目的とする。

① 1943～1944 年に出された中等学校数学の第一類・第二類の教科書は，数理的思考の育成を強く意識して編纂されており，その内容構成は今日のものと大きく異なる。それらの教科書では，社会で用いられる事物の機能や動きなどを有効に用いて，学ぶ者に生き生きとしたイメージを与えながら，数理的思考の広がりを図ろうとしている。この教科書を，教科内容と教科指導の両面から分析し，生徒の数理的思考の広がりにつながる要素を抽出し，今日的な視点でその優れた構成を活かす教材の開発を行う。

② 高校数学で数理的思考の広がりを図る教育を考えるとき，①のようなカリキュラム考察と共に，現今の学習指導要領の目標に掲げられている数学的活動の趣旨を生かすことが考えられる。しかし，高校数学に関して，数理的思考の広がりを視野においた数学的活動のあり方は，十分に研究されているとはいえない。そこで，研究分担者（平岡）は，高校でのその主旨を取り入れた授業を行い，その分析を通してそのような活動のあり方を検討する。また，教育学部での教科専門の数学に関しても，数学教員をめざす学生の数理的思考を発展させるのに有意義な教科内容の研究は十分とはいえない。そこで，研究代表者と研究分担者（下村）は，そのような教科内容のあり方を検討し，大学の他の数学教員の協力を要請して，大学生や現職の数学教員向けのテキストを編纂しその有効性を調べる。

③ 数学教員をめざす学生を対象に，自らの数理的思考を発展させる目的で，学生によるコンピュータを活用した「数学の問題作り」を実践する。そして，その活動におけるコンピュータの役割，課題の適切な設定とその与え方，作られた問題の評価と有効な活用方法，その活動が数学の教員養成において果たす意義などを調べる。また，高校の数学教員の協力を要請し，共同研究として，高校生の「数学の問題作り」を実践し，その方法や課題を分析する。そして，その活動が，高校生の数理的

な思考の広がりにどのように寄与するのかを調べる。

④　数理的思考の広がりを図る他の方法も検討する。特に，数学的モデルの活用は，高校数学にも有効であると考えられるが，その内容や指導に関して考察する。また，高等専門学校での技術者養成における数学に関して，数理的思考の広がりの必要性についても考察する。

（２）研究成果の説明

以下，（１）の①～④，及び，「１．研究発表」にある論文[1]～[10]，学会発表[1]～[10]，図書[1]，[2]の番号をそのまま用いる。

[計画①に関して]

平成 18 年 6 月，「高校での数理的思考の広がりを図る数学教育」という題目で，長崎県高校教育研究会数学部会で講演をした。そのとき，本研究の趣旨にある内容を中心にして話した。そのときの話の内容の一部を，本研究の基調報告として，PartⅡ第 1 章で記載する。

研究代表者は，第二類の教科書を分析し，工学的な応用面を生かす数学の教材を考察し，「フレーム」の動きの表現ということを中心にして，論文[1]を公表した。これに関係する内容を本報告書の PartⅡ第 2 章で紹介する。

研究代表者と研究分担者(平岡)は，第一類の教科書を分析し，「図表」と呼ばれている関数のグラフが具体的な事象と数学とを結びつける軸として使われていることに注目し，その面を近似性に生かした教材の開発を行い，日本数学教育学会の論文発表会で研究発表した(論文[5])。実際に，近似性に関係する授業実践も行った。これに関係する内容を本報告書の PartⅡ第 3 章で紹介する。

研究代表者は，数理的思考の広がりを図る上で，小・中・高校及び大学での数学教育をつなぐ教材の開発が必要であると考え，多角形の内角・外角に関する性質に注目し，その教材性を学会発表[2]で行い，論文[3]で公表した。これに関係する内容を本報告書の PartⅡ第 5 章で紹介する。

その他，研究代表者は，離散数学の教材性の一つとして，指導院生と共に「格子」の教材性を調べ，空間格子の組合せ的性質を用いた教材の開発を学会発表[8]で行った。その内容の論文は現在投稿中である。さらに，ディック経路という格子図形とも関係する離散性質に注目し，その題材に関する学会発表[10]を行った。また，数学の応用面で重要なベクトルの外積の性質に注目し，その平面版として，高校まででも理解できる「垂直ベクトル」という概念を用いた教材の開発を論文[10]で行った。

計画①に関しては，さらに実践を通して教材の有効性を調べていくことが今後の課題である。

[計画②に関して]

研究代表者と研究分担者(下村)は，図書[1]，図書[2]であげたテキストの執筆を行い，数理的思考の広がりを図る教材を盛り込んだ。このテキストは，数学教員に求められる数学の核となる内容を端的にまとめることで，数学教師の数学観の育成に貢献しようとするものである。研究代表者の担当部分は図書[1]の第Ⅰ部 3 章と第Ⅲ部 7 章，8 章であり，授業実践を生かして行列・行列式，ユークリッド幾何，解析幾何の内容に関することを書き上げた。研究分担者(下村)の担当部分は図書[2]の第Ⅲ部であり，コンピュータを用いた数学の問題作りや数学的モデルという，計画③にも関係する内容を書き上げた。これらのテキストを実際に授業で用いており，授業評価において受講生には好評である。また，何人かの現職の高校教師からも好評をいただいた。

研究分担者(平岡)は，計画①の成果で述べた「近似性」に関する授業を実践し，質問用紙などを用いて生徒の近似性に関する理解度などを調べた。

しかし，数理的思考を図る数学的活動をテーマにした授業実践に関しては，当初計画していた程には遂行できなかった。この点は今後の課題として残された。本報告書 PartⅡ第 4 章で，これに関連する記事を載せる。

[計画③に関して]

研究代表者と研究分担者(下村)は，高校生による問題作りの授業実践について菅野氏の研究協力を仰ぎ，充実した研究ができた。高校生の場合に大学受験の問題は避けて通れないことを直視し，大学入試問題を取り入れた問題作りの方法を論文[5]で提案した。この論文は，日本数学教育学会誌に掲載されたもので，編集委員会の方々から好評をいただいた。それ以外に，いろいろな方法での問題設定活動を考案し，実際に実践し，その結果を分析して学会発表[6]や学会発表[7]を行い，論文[7]や論文[9]にまとめ公表した。この報告書の PartⅡ第 6 章でその実際を紹介する。

もう一つの課題である，将来の数学教師をめざす大学生による数学の問題作りの活動については，研究分担者（下村）が，コンピュータを活用した問題設定の授業実践を行い，研究代表者と協議を重ねて，成果を学会発表[3]や学会発表[8]で行い，発表[3]の内容を論文[4]で公表した。発表[8]の内容の論文は，現在投稿中である。これに関係する内容を本報告書の PartⅡ第 7 章で紹介する。

これらの問題設定は，外国でもある程度注目されている。本研究の成果を国外の研究者にも伝え，その有効性を検証することが課題として残されている。

[計画④に関して]

研究分担者(下村)は，数学的モデリングの教材性を学会発表[4]で行い，論文[9]で公表した。研究代表者及び研究分担者は，本研究の背景とも考えられる，それぞれの専門分野における研究も続けた。その業績は，「1．研究発表」(4)の「その他の論文」でいくつか紹介している。それらの業績は，直接この研究課題に即しているとはいえ

ないが，研究者自らが数理的思考を広げることで，本研究の幅を広げることに貢献していると考える。

以上，研究成果の概略とする。

次頁以降のPartⅡでは，本研究で行った具体的な考察内容をいくつか報告する。

PART Ⅱ　研究報告

第１章　基調報告

数理的思考の広がりを図る数学教育について

今岡　光範（広島大学大学院教育学研究科）

はじめに

2006 年 6 月に，筆者は長崎県高校教育研究会数学部会で本研究の課題に関係する内容を講演した。そのときの話の内容は次のようであった。

１．はじめに：自己紹介
２．「数理」について：第一類・二類の教科書
３．教育調査：高校数学の結果から
４．数理的思考の広がりを図る工夫の事例

本研究課題「数理的思考の広がりを図る数学教育」の基調を語るのにちょうどよいと考え，本章でその講演の内容のいくつかを紹介する。臨場感をだすため，「です」「ます」調でかき，使用したパワーポイント画面数枚のコピーを挿入する。

１．自己紹介

ずっと教育学部で教鞭をとってきましたので，教育学部の教員として，学問としての数学の研究だけでは十分ではないと思うようになってきました。そこで，十数年前から，幾何の教育を中心にして，数学教育にも積極的に取り組むことにしました。広島大学では，そのような教科の専門性と教育面との融合を図る研究を「教科内容学」と言っています。ですから，私は教科内容学を研究していることになりますが，実際には，数学と数学教育の双方に首をつっこむことになり，「二足のわらじを履く」という苦しみがあります。

数学で研究論文を書くためには，単に既知の理論を習得するだけではだめで，実験的な計算をして新しい結果の予想をたてたり，問題を一般化したり，解けそうな形に問題を設定し直したり，実にいろいろなことをします。そのような活動は，数学教育でも共通するものです。そういう面を通して，数学教育に少しでも貢献できたらと思って続けています。そういうことで，大学での数学教育に携わる者として，恥をしのんで，話をさせていただくことにしました。

２．「高校数学での数理的思考の広がりを図る」ということについて

(1)　題目について

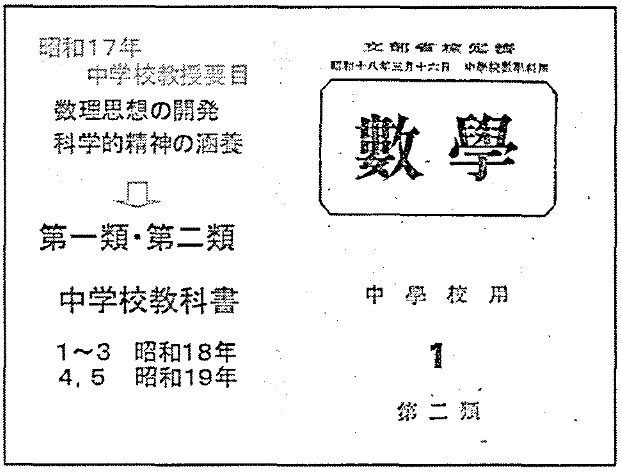
題目の中にある「数理」というのは，「数や空間の法則」とか「数学の道理」と言った意味ですので，「数理的思考」というのは，「数学的に考える」という言い方とほぼ同じです。ですから，「数理的思考の広がりを図る」というのは，「数学的な考えを豊かにする」というようにも表現できると思います。なぜ「数理」ということにしたかについて，少し話し

たいと思います。

(2) 第1類，第2類の教科書について

戦時中の昭和 17 年に，それまでの中学校の数学教育の改善運動を受けて，理数科の根本的な革新を求めた中学校教授要目が出されました。

そこでは,「数理思想の開発」とか「科学的精神の涵養」ということが説かれ，数理的思考を高めることが目標として掲げられました。これは，今日の数学教育での,「生きる力」としての「確かな学力」を培うという目標と大変近いものがあります。

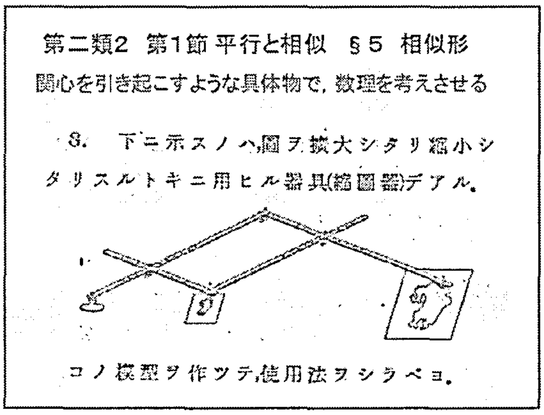


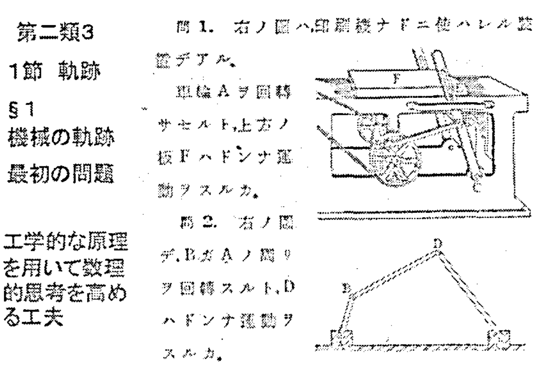
その教授要目に沿って，昭和 18 年に中学校の「第一類」・「第二類」という教科書が作られました。「第一類」は数量や関数の内容,「第二類」は図形の内容を主としていますが，これらの教科書には，それまでの教科書にない斬新な教授方針が含まれていて，次のような特徴があります。

1． それまでの代数，幾何という分科的に孤立して教えていた内容を，統合して扱うようにし，また，解析幾何や微分積分などの，当時，新しい内容を組み込んだ。
2． まず，具体的な現象や事物を取り上げ，その中の数理を考えさせながら，次第に論理的なものに発展させ，最後に統合的なものにする。
3． 問題を積み重ねて，生徒が実測や作業などを通して考え，自分で数理を見出すようにする。

例えば，次のような内容があります。

・ 「第二類２，第１節 平行と相似，§５相似形」にある問題（下左図）です。「縮図器のしくみを調べよ」となっていますが，それは，その原理を数理的に表すことを求めていると思います。



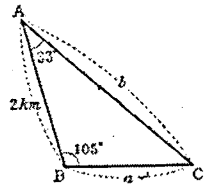


・ 「第二類３，第１節 軌跡，§１ 機械の軌跡」の最初の問題（上右図)です。第二類の教科書には，このような，具体物を用いた問題が数多く見られ，数学の実用性や，数学的な方法の広がりを示す内容になっています。

・　「第二類３，第２節　三角形と三角関数，§２三角形を解くこと」の最初の部分の問題（右図）です。問４で，正弦定理の公式を見出すことを求めています。実際の公式は，後の鈍角も含めた三角比の内容の中でその式を示し，証明は，やはり問題になっています。

第二類3　2節　三角形と三角関数
§2　三角形を解くこと　の最初の部分の問題
問4で，正弦定理の公式をつくることを求めている

問 3.　三角形ABCデ
$A = 33^\circ$,　$B = 105^\circ$
$c = 2\,km$
ガワカツテキルトキ,コノ三角形ヲ解ケ。



問 4.　鋭角三角形ABCデA, B, Cトaトカラb, cヲ求メルタメノ公式ヲ作レ。

このように，「第一類・第二類」の教科書は，今の教科書と較べてもかなり違います。今の教科書は，内容を精査して，分かりやすい文章表現や内容構成を通して，基礎・基本となる内容の理解を図ることを最優先させています。その点，これらの「第一類・第二類」の教科書は，分かりやすさよりも，数学が実際に使われている場面などを通して，数学的な方法や考え方の豊かさを示すことによって，生徒の数理的思考を高めることに重点が置かれています。

第一類・第二類の教科書の特徴

- 分科的扱い ⟹ 統合した扱い
  新しい内容の導入
  解析幾何や微分積分など
- 斬新な教授方針
  まず具体的な現象で数理を考える
  ⇩
  次第に論理的なものに発展させる
  ⇩
  最後に統合的なものにする

実測や作業で生徒が自分で数理を発見する試み

この第一類・第二類の教科書は，「読んで分からぬ本」といった批判がでたと言われ，必ずしも高く評価されていたわけではなかったようです。ただ，戦争のため，出版されてすぐに中等教育は実質的に停止の状態になってしまい，戦後は新しい教育方針に移行しましたので，これらの教科書はほとんど陽の目をみることはなかったことになります。

私は，具体的な現象から入り次第に数理を高めていく内容構成や，知的好奇心を刺激するような問題の設定など，何か数学の躍動感といったものを感じて，大変，感動しました。もちろん，これらの教科書の内容は，今日そのまま使えるということではありませんが，数理的思考ということに関しては，学ぶ点が多いように思います。そこで，少し以前から，これらの教科書をいろいろな角度から調べてみようと，共同研究を行っています。その研究題目に「数理的思考」という表現を使っていますので，ここでも，それを使うことにしました。

(3) 高校数学の内容と「数理的思考の広がりを図る」ことについて

私は，「数理的思考の広がり」ということは，高校数学の目標と，本質的に結びついていると考えています。実際，高校数学の内容は，中学校までに学んだ内容を統合し，発展・拡充させるものであり，自然と数学的な方法や考え方の広がりをだすものになっています。その一つの現れとして，中学校では，「数と式」，「図形」，そして，「数量関係」と，３領域に分けて学びますが，高校ではそれらを統合して学ぶことになります。例えば，

- 三角比の内容は，間接的な測定の方法に広がりを与えると共に，三角関数に拡張され，広い文脈で用いられることになります。
- 微分・積分の内容であれば，関数の変化を代数計算によって捉える新しい方法を学びますが，方程式の解に関する情報や，接線や面積などの図形的な方法も統合したものとして，微分・積分を学びます。

2. 高校数学での数理の広がり

高校数学： 中学校までに学んだ内容を統合し，
発展・拡充させる

例）
[三角比] ・間接的な測定方法に広がりを与える
・三角関数に拡張され，広い文脈で用いられる

[微分・積分] ・関数の変化を捉える新しい方法
・方程式の解に関する情報や，接線や面積などの図形への活用を通して，数学的方法の広がりを与える

高校数学では，そのような統合された内容を通して，生徒が，数学的な方法や考え方の有効性を理解し，その活用を通して，多面的に思考を働かせるようになることが期待されているのではないかと思います。それは，私の言い方での「数理的思考の広がりを図る」ことに他ならないと思う訳です。

2． 高校数学の教育調査から

(1) 平成 14 年度の高等学校教育課程実施状況調査

平成 10 年 7 月の教育課程審議会答申の中で，今日の子供の現状に対する分析が行われていて，それが，現行の学習指導要領の改訂の指針になりました。その客観的なデータとなったのは，平成 5 年度から平成 7 年度にかけての，小・中学校の義務教育を対象にして行われたいくつかの教育調査の結果でした。高校に関しても，その後，教育調査が行われるようになりました。

その中で，平成 14 年度に高等学校の教育課程実施状況調査というものがあり，その分析結果が国立教育政策研究所から公表されています。その調査は昨年度も行われていますが，まだ分析結果が発表されていませんので，公表されている平成 14 年度の調査から，少し見てみたいと思います。この調査は，学習指導要領で示されている学習目標がどのくらい到達されているかということを調べる目標で行われています。必修科目が調査対象になり，数学では「数学Ⅰ」で調査が行われていますが，いわゆる基礎・基本の内容の問題が用いられています。また，生徒や先生の学習に対する質問紙調査もあわせて行われています。ただし，三年生を対象にして調査は行われました。

(2) 三角比の問題から

ここでは，高校生の数理的思考の基礎力という観点から，「図形と計量」の三角比に関する調査問題の結果を見てみたいと思います。「ピサの斜塔の傾きの問題」がありました。この問題は，三角比の定義に関する理解を問うものです。選択問題で， 5 つの項目から解答を選ぶものですが，$\sin\theta$ という正答は 54%位です。中学校の同種の教育調査で，三角形の相似に関するいくつかの問題の正答率が高くないこともあり，図形性質を辺の比で考えるということは，生徒にとって，あまり分かりやすくないということが推察されます。

先生と生徒への質問紙調査において，「三角比の意味や相互関係」は，「生徒にとってわかりやすい」と思われている先生の割合は，分かりにくいと思われている先生の割合を上回っています。一方で，生徒質問紙では，それが「よく分かった」という生徒の割合は，「よく分からなかった」という生徒の割合を下回っています。先生と生徒の意識の差が，若干，ある可能性もあります。

三角比は，間接測量の最たるものであり，いろいろな現実的な場面で用いられていて，数理的思考を育てるよい教材だと思います。したがって，導入にあたっては，三角比を用いて実際に何かを間接測定をしたり，三角比の歴史的な側面にふれたりすることで生徒の関心や意欲を引き出すことが必要だと思います。しかし，知合いの高校の先生から伺う話では，進度などの関係から，そのようなことはほとんどやっていないと言うことでした。それと関係する可能性のあるものとして，生徒への質問項目に「学んだことはふだんの生活や社会生活でも役に立つと思った」かどうかというのがありますが，三角比の意味について70%以上の生徒が，「役にたつとは思わなかった」という回答をしています。

三角比の概念は，多少時間がかかっても，実感をもたせて進めることが大事だと思います。実際に，何かを測定する活動は，三角比の有用性を理解するためだけではなくて，事物の図り方の工夫や，誤差などの測ったものの精度に対する経験にもなり，それが数理的な関心を引き起こす効果もあります。調査結果は，そのような活動の面が，一般的には不足しているのではないかということを示していると思います。

また，調査問題の中に，壁絵の話題を用いた余弦定理の応用に関する次の問題もありました。この問題では，正弦定理と余弦定理を忘れていても答えられるように，問題の下側にその公式が準備されていました。この問題の正答率は 31.1%にすぎません。無回答が42.2%と随分高い割合になっています。この問題は，少々，長い文章で状況設定も盛り込み，その中から数理を読み取って答えるようになっています。いつの時代も，生徒が文章題や記述による解答を苦手とする傾向はあったと思いますが，OECD の PISA の教育調査でも，日本の高校生の読解力は，決して高くないことが判明しました。実際に，日常生活と結びついた数理は，何かの文脈の中で現れるのが普通です。そのような文脈の中から，数理を読み取ることは，数理的思考を高めることになると思います。

３．数理的思考の広がりを図る工夫

(1) 数理的思考の広がりを図る要素

数理的思考の広がりを図るということは,「思考の基礎力を形成する」,「思考を伸ばす」,「思考を発展させる」という三段階に分けて考えることができると思います。その場合，以上のような調査におけるよる課題も踏まえて，次のようなことが言えると思います。

まず，数理的思考の基礎力を形成するためにには，基礎・基本となる知識・技能をきちんと習得することが最も大事だと思いますが，特に，ばらばらな知識ではなく，知識を身近なものとして系統的に捉えることが課題であると思います。そのために，実感を伴うような活動によって，体系だった知識が獲得できるような工夫が大事だと思います。

数理的思考を伸ばすためには，基礎・基本を活用する力を育てることが最も大事だと思いますが，そのために，いろいろな状況の中で数理を読み取り，それを式や文章で表現しながら，問題解決を図る力を伸ばすことが課題であると思います。

思考を発展させるためには，生徒が数理に対して関心をもち，自分で進んで学ぶような意欲や態度を育てることが最も大事だと思いますが，そのために，数理を振り返り，一般化したり応用したりするなど，探求的な活動をすることが大事だと思います。

「数理的思考の広がりを図る」ための具体的な工夫としては，月並みですが，授業方法や教材の工夫や，数学的活動を生かすことなどが考えられます。特に，数学が実際に使われている場面の活用ということも大事だと思いますが，その点については，近年の数学的モデリングの研究が参考になるのではないでしょうか。

3. 数理的思考の広がりを図るために

- 数理的思考の基礎力を形成する
  - ・基礎・基本の知識・技能の習得
  - ・実感を伴い，体系だった知識の獲得
- 数理的思考を伸ばす
  - ・基礎・基本を活用する
  - ・いろいろな状況の中で数理を捉え，式や文章で表現し，問題解決を図る
- 数理的思考を発展させる
  - ・数理に関心をもち，自分で学ぶ意欲や態度
  - ・一般化，応用など，探求的な活動の場

ここでは，一つの事例として，生徒による問題設定の活動ということを，少し，話してみたいと思います。

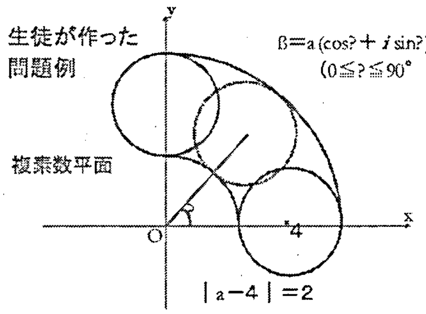
(2) 生徒による数学の問題づくりの活動から

生徒による数学の問題作りの活動を授業で生かす工夫は，昔から行われてきました。特に，小学校での実践はよく行われていて，いずれもよい評価が報告されています。高校では，小学校などに比べると，そうポプラーではないかもしれません。

私も，ある県立高校で授業をさせてもらったとき，この数学の問題づくりの授業をしてみました。一般には，生徒による数学の問題づくりというのは，「原題」を与えて，そこから，問題を発展させる形が普通ですが，単発的な授業でしたので，2 時間で終わる工夫をしました。3年生が対象でしたが，事前に，2年生のときの図形に関する内容から問題をつくる宿題を出してもらいました。そのような方法は，生徒が参考書などの問題をそのまま出すのではというような懸念があると思います。しかし，決してそうではありませんでした。生徒は，結構，面白がって，傑作な問題を作ろうと頑張って取り組んでいました。授業では，全員の問題をプリントにして，私からのコメントもつけて渡しました。一つの文集のようなものができましたが，そのような作品集を残すことも一つのねらいでした。

右の図のような問題がありました。

「複素数平面上で，方程式$|\alpha-4|=2$で定まる円を90°回転するとき，その円が通る部分の面積を求めよ」

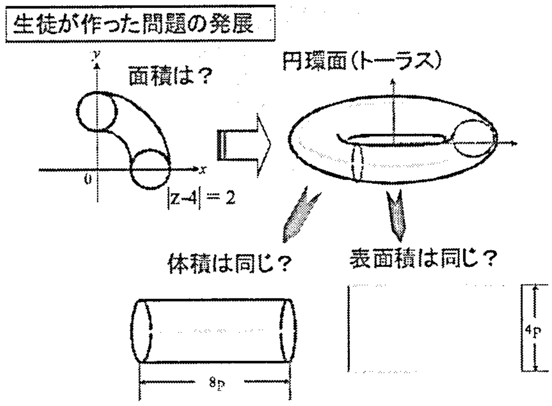


授業で，出題者の生徒に説明をしてもらい，その問題を皆で解いてみました。その後，この問題を，空間で回転させて，トーラスのようにしたらどうだろう，ということを問いかけました。

そして，引き伸ばして，このようにすれば，円柱は体積や側面積が求まるけれど，同じ体積や面積になるだろうか？　とたずねました。生徒の予想は，ちょうど，半々の数になりました。　実際に，トーラスの体積については，ほとんどの教科書が，数学 III の積分の応用として載せています。しかし，このような視点でみることは，あまりないと思います。

後で，積分を応用して確かめてごらんと言って授業では解を示しませんでした。それについて，授業の感想で，答がどうしても知りたいと書いた生徒もいました。

表面積に関しては，ちょうど，球の体積と表面積の関係と同じ関係が成り立ちます。すなわち，球の体積を半径で微分すると表面積になるように，トーラスの体積を経度の半径で微分すると表面積になります。したがって，高校生でも，表面積が，長方形に等しいかどうか，調べてみることができます。



この実践から，次のようなことを実感しました。

(1)　生徒は問題を作るのに苦しむが，自分の作った問題には強い愛着をもつ。

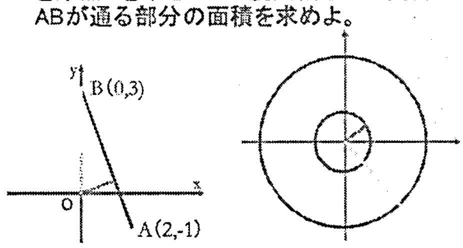
(2)　問題づくりによって，自分がつくる問題の中に独自の考えが含まれ，それを発表することになるが，生徒はそれを結構楽しむ。

(3)　生徒が出した問題を発展させると，生徒たちは大変興味をもつ。それは，生徒の主体的な学習を伸ばすことにもなる。そのことは，数理的な思考の広がりを図る教材の開発の面で一つのヒントを与えている。

昨年，愛知県のある高校の先生にお願いして，普段の授業で問題作りの活動をやってみてもらいました。やはり高校の先生だなと感心したのは，その先生は，生徒の作った問題を交換させて，それぞれに，正解を作らせたり，コメントを書かせたりという，生徒のコミュニケーションを取り入れた活動にされたことです。その先生によれば，日ごろ，休憩時間の生徒の会話の中に，数学に関することなどは全く登場しないけど，そのときだけは，数学の問題が生徒の話題になり，休み中も取り組んでいたということでした。

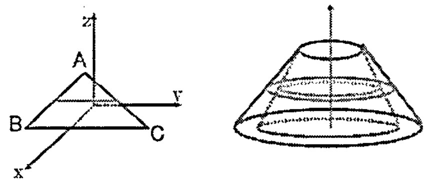
生徒の作った問題例(回転体)

問題：点A(2,-1)，B(0,3)の2点を結ぶ線分ABを原点Oを中心に360度回転させた。線分ABが通る部分の面積を求めよ。



授業での発展

問題：xyz空間内で，A(1/2,0,1)，B(1,−1/2,0)，C(1,1,0)を頂点とする三角形を考える。この三角形をz軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求めよ。



5．おわりに

昨年の10月に，中央教育審議会から「新しい時代の義務教育を創造する」という，義務教育の答申がだされました。その中で，今後の教育内容の改善として，特に，「国語力」，「理数教育」，「英語教育」の充実の重要性が記述されました。そういう意味で，数学は，今後も学校教育の教科の大事な柱として，改善を続けていくことになります。

その答申の中で，「学力観」について，「基礎的な知識・技能の育成と，自ら学び自ら考

える力の育成とは，対立的あるいは二者択一ではなく，両方を総合的に育成することが必要である」とされています。両者を総合的に育成するためには，基礎・基本となる知識・技能を確実に定着させることに加えて，それらを活用する力や，探求する活動が必要だと思います。その意味で，「数理的思考の広がりを図る」という視点も，少しは役にたつのではないかと考えています。

はなはだまとまりませんでしたが，以上で，私のつたない講演を終わりにしたいと思います。ご清聴ありがとうございました。

参考文献

- 和田義信：『数理』について，第 20 回数学教育論文発表会記念講演，日本数学教育学会論究，49・50 巻，75－89，1988.
- 教科書「中等数学第一類」，1～5，中学校用，中等学校教科書株式会社，1943，1944.
- 教科書「中等数学第二類」，1～5，中等学校教科書株式会社，1943 年，1944 年.
- 数学編纂趣意書，第一類，第二類，中学校用，中等学校教科書株式会社，1943，1944.
- 小倉金之助，『科学の指標』，中央公論社，1946 年.
- 小倉金之助，鍋島信太郎，『現代数学教育史』，大日本図書，1957 年.
- 平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査結果報告書，数学編，国立教育政策研究所研究所教育課程研究センター，2007.
- 今岡光範：高校生・大学生による数学の問題作り，全国数学教育学会誌　数学教育研究，第 7 巻，125－131，2001.
- 下村哲，今岡光範，向谷博昭，菅野栄光，高校生による数学の問題作り－高校 3 年生を対象にして－，全国数学教育学会誌　数学教育研究，第 9 巻，243－253，2003.

第２章　数理的思考の広がりを図る教材の開発Ｉ

工学的な背景をもつ教材の考察

今岡 光範（広島大学大学院教育学研究科）

はじめに

現行の教育課程でも，身近な事象との関連を一層図ることで，数学に対する生徒の興味・関心を喚起し，学習意欲を高めることが望まれている。数学は自然科学や工学などとの関連性が強いが，そのような分野との結びつきを実際に学ぶとなると，相応の基礎知識も必要になる。単に他分野でも数学が使われていることを紹介するだけでは学ぶ者の興味・関心を呼び起こすことは難しく，数学的にも面白い要素が必要である。

そこで，いくつかの現実的な事象の分析に共通して用いられる数学的方法を抽出し，それを分かりやすい形で捉え，その観点を生かした教材を工夫することも必要である。それによって，数理的な思考のよさをより分かりやすく伝えることができると考える。本稿では，工学的な事象の分析でよく現れる，点と線からなる図形の動きを捉えるという観点を取り上げ，その教材性を考察する。

なお，本稿は，今岡・冨田・西岡[1]の内容の一部を取り上げたものである。

１．「フレーム」という表現について

グラフ理論におけるグラフは，頂点の集合と辺の集合，および，その結合関係で与えられる。平面上や空間の中に，グラフの頂点を点で，辺を線で描いた図形は，グラフを空間に実現したものである。いま，ここでは，辺が直線分，または，棒状の図形によって実現されたグラフをフレームということにする。何個かの部材を結合してできている現実の構造物において，部材を棒状の図で結合部を丸印で表してその構造を考えることは多いが，フレームはそのような構造物のモデル化である。フレームまたはフレームワークという語は，元々，そのような骨格構造という意味もある。

工学における建築構造などでは，柱やはりなどの部材を接合してできる骨組み構造の安定度を数学的に記述し分析することが行われる。そのとき，その骨組み構造のモデルはここでいうフレームの一つである。力学的につりあいのとれた安定した建築構造のフレームは動かず，そうでない不安定な建築構造ではフレームが動くと考えられる。また，機械構造としてのリンク装置では，地面などに固定されたリンクという意味でフレームという語が用いられるが，それはここでいうフレームの意味とは違う。しかし，リンク装置全体をその構成要素であるリンクの結合体としてモデル化し，リンクを直線分，その結合部を点として図示した図形は，ここでいうフレームの一つである。そのようなフレームは，機械の構造を調べるときの基本になる。リンク装置の機能は，リンクが組み合わされてどのように動くかということで定まるが，それは，フレームの動きを数学的に調べることが基本

となる。

フレームは，図形としては何も特別なものではない。平面上に描かれた直線分からなる幾何図形は，線分の両端を点として意識すればフレームと考えられる。しかし，上述の工学的なモデルのように，そこに動きの要素が加わり，フレームの動きを捉えようとするといろいろな数学的な考察が必要になる。そこに，フレームを通した数学的方法の広がりが生じる。ここでは，そのようなフレームの動きという観点で，実際面に現れる数学の必要性と数学の発展的な考え方とをつなげるような図形教材を探っていく。

2．第二類の教科書

現実社会と数学との結びつきが強く打ち出された図形領域の教科書として，第二次世界大戦中に出版された中学校の第二類の教科書がある(2)。これは，1942 年に文部省が中学校の理数科の根本的な革新を求めて定めた教授要目に従って編纂されたもので，1943 年に第 1～3 学年，1944 年に第 4，5 学年用の教科書が発行された。小倉・鍋島(4)によれば，このときの教授要目と教科書の作成は，次のような特色を有していた。

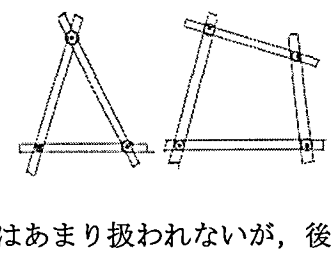
「それまでの応用性を軽視し，形式的，論理的に偏重していた中学校の数学教育において，創造力，科学的精神を培うための画期的な革新を反映したものであった。それまでの中等教育は，代数，幾何，三角法などが分科的に孤立していたが，この教科書では，解析幾何，微分積分，画法幾何，統計などの新しい内容を組み込むとともに，それらを統合して扱うという，新しい試みを示した。」

また，この教科書による教授方針として，「まず具体的未分化的なものを取り上げ，次第に論理的なものに発展させ，最後に総合的なものにする」という見解の基で，「直観を重んずるとともに論理の厳正を期すること，実際の仕事や具体的な問題の考察からはいって，生徒が自ら理法を把握するように指導するような方法をとる」という方針が採られた。そして，これらの教科書の書き方は，公式などに関する説明が少なく，問題形式によって，生徒が実測や作図の作業や計算，図表の作成などを自ら行うことを通して，一般法則を見出していくというものであった。

実際には，教科書はかなり専門的で程度も高く，戦時中の状況下で教師に教材研究をする余裕はなく，また，生徒が自ら調べてみる参考書なども不足した。1944 年には中等教育は実質的に停止の状況になり，戦後は新しい教育制度になったため，これらの教科書はほとんど使用されなかったことになる。次節では，その教材の内容を通して，フレームの動きの教材性を調べる。

3．フレームの動き

第二類の教科書 1「3. 図形の観察　§6 図形の合同」の導入部で，図のような棒状の三角形のフレームと四角形のフレームの図を示し，四角形のフレームが変形を許すのに対して，三角形のフレームは変形しないことを述べて，三角形の合同性を導入している。

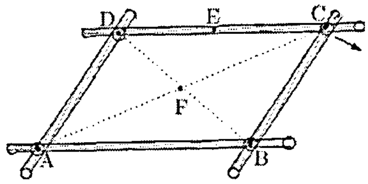


つまり，三角形の合同が三辺の長さでが決まることをフレームの動きで印象づけている。

四角形の辺の長さを保つ変形可能性は，現行の学校数学ではあまり扱われないが，後で

見るように現実的な事象の原理の中にはよく現れる。同教科書３「１．軌跡　§２点の運動」の最初の部分に，次のような平行四辺形のフレームの動きを用いて，点の軌跡を問う問題がある。

問題：四本ノ棒ガ，右の図ノヤウニ連結サレテ，平行四辺形ヲ作ッテイル。辺 AB ヲ固定シテ他ノ辺ヲ動カシ，平行四辺形ノ形ヲイロイロ変ヘルトキ，辺 CD ノ中点 E ノ軌跡ハ何カ。マタ，対角線ノ交点 F ノ軌跡ハ何カ。

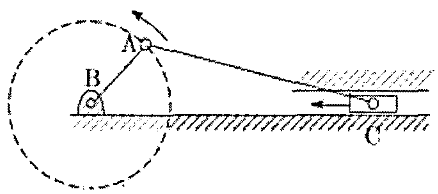


このような四角形のフレームの場合は，点の周りでの辺の回転を許すと，辺の長さを変えないで角度を変える変形が可能なことから，いろいろな動きをする。この問題でも，平行性，円の性質，回転の意味などを総合してフレーム上の点の動きを捉えるようになっている。四角形のフレームは，模型も容易に作れるので，実物を動かしながら観察することも可能である。また，このような問題設定は，抽象的な平行四辺形では作りにくい。

この問題のように，フレームの動きは，点の軌跡に関する豊かな教材性をもつ。以下，工学的なリンク装置を背景にもつフレームの動きを通して，具体的な教材例を考える。

４．リンク装置を用いた教材

機械工学における機構学では，機械の構造をいくつかの要素に分解して捉え，それを総合して機械の動きを調べることが行われる。そのとき，まず，機動部を構成する各要素を機素といい，機素を組み合わせ相対運動を引き起こすものを対偶と呼んで，構造の基本単位にする。何個かの機素を何個かの対偶で組み合わせ，一定の動きをする装置を考えたものがリンク装置である。リンク装置を構成する機素をリンク，対偶をピンというが，リンク装置の構造をリンクは直線分でピンは点で図示してモデル化すれば，フレームが得られる。そのフレームの動きが，リンク装置の機能を表すことになる。

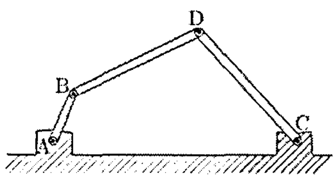


図の例では，AB，AC と共に BC もリンクと考えられ，A，B，C がピンである。

このリンク装置のように，何個かのリンクが閉路の形に結合され，多角形の形をしたリンク装置は連鎖と呼ばれる。その中で，四角形の連鎖は代表的なものである。このようなリンク装置の教材性に関しては，松嵜・磯田[6]などの研究もある。

第二類の教科書３「１．軌跡」の最初の部分で，次のような四角形の連鎖に関する問題がある。ただし，問いの後半部分は省略する。

問題：右ノ図デ，B ガ A の周リヲ回転スルト，D ハドンナ運動ヲスルカ。



この問題は，節の最初の部分にあることから，教科書の「実際の仕事や具体的な問題の

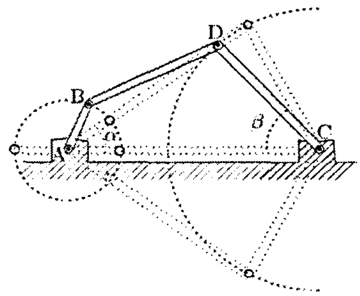
考察からはいって」という方針を表す問題である。A の周りの B の回転と C の周りの D の回転は，BD というリンクがあることから，独立な動きにはならない。この問題の問いかけは，次のように具体化できる。

1. B や D は完全に回転するか。
2. もし B か D が完全には回転しないならば，どういう角度の間を動くか。

さらに，次のような問いかけにも発展できる。

3. CD の長さが与えられた AB と同じ長さのリンク装置の場合，どんな運動になるか。
4. 与えられた AB と BD の長さが逆のリンク装置ではどのような運動になるか。

図をみたときに，直観的には，B は A の周りを完全に回転するが，D は部分的にしか回転せず，ある角度の間を往復運動するように見える。教科書には「直観を重んずるとともに論理の厳正を期する」という方針があることから，直観だけではなく，リンクの長さなどから，図形の動きを正確に捉えることをねらっていると考えられる。



その場合，次のような学習活動が期待できる。まず，AB＝a, BD＝b, CD＝c, AC＝d として，教科書の図を実測してみると，a＝1cm, b＝2.5cm, c＝2.7cm，d＝4.1cm となる。したがって，a＋d＝5.1＜5.2＝b＋c が成り立つことから，上記の問いかけ 1 に関して，点 B は点 A のまわりを完全に回転することが分かる。一方，(a＋b)＋c＝6.2＞4.1＝d であることから，点 B が線分 AD 上にあるときの，三角形 ADC をつくることができる。そのとき，∠ACD＝β を時計まわりを正とする角とすると，点 D が点 A 中心，半径 a＋b の円盤内にあることから，D の回転で∠ACD が β より大きくなることはできない。

余弦定理を用いて，$\cos\beta=\dfrac{c^2+d^2-(a+b)^2}{2cd}\fallingdotseq 0.535$ より，$\beta\fallingdotseq 58°$ である。したがって，問いかけ 2 に関して，D は時計まわりに－58° ≦∠ACD≦58° の間を往復運動することになる。また，そのとき∠DAC＝α とすると，正弦定理から，

$\dfrac{c}{\sin\alpha}=\dfrac{a+b}{\sin\beta}$ より $\sin\alpha=\dfrac{c\sin\beta}{a+b}\fallingdotseq 0.654$ だから，$\alpha\fallingdotseq 41°$ である。

この場合のように，四角形の連鎖からなるリンク装置で，1 個のリンクが固定され，1 個のリンクが完全に回転し，他の 1 個のリンクが往復運動するものを「てこクランク機構」という。ワットの蒸気機関や足踏みミシンはてこクランク機構の原理が入っている。第 2 類の教科書には，上記の問題の後に，足踏みミシンの動きに関する問題も準備されている。

問いかけ 3 の場合のリンク装置は「両てこクランク機構」というものの例であり，同じように考えて，B も D も往復運動になり，リンクの長さからどのような角度の間の往復運動になるかも分かる。問いかけ 4 に関しては B も D も完全に回転することになり「両クランク機構」というものの例になる。

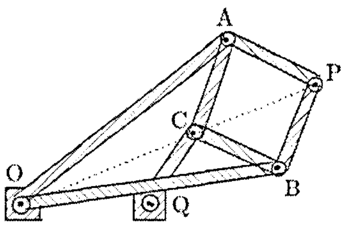
このように，簡素なリンク装置の仕組みをフレームの動きとして図形的に捉えることで，三角形の成立条件や三角関数に関する性質など，目的に応じた数学の使い方が経験できる。

そこに数学的方法の広がりと，図形の総合的な見方につながる要素がある。また，この問題を抽象的な四角形の動きを問うものとして設定すれば，それは不自然であり，問いかけ方も難しい。現実的な題材を背景にもつことで，図形の問題設定とその考察の幅が広がることも物語っている。

5．ポースリエの機構

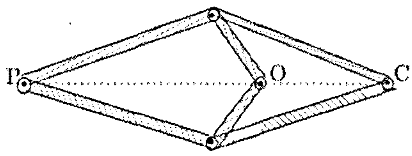
直線運動を引き起こすリンク装置は直線運動機構と呼ばれる。1864年に，フランスのポースリエは，直線の軌跡を描くリンク装置を発明した。ケンプの講義録(7)に，このポースリエの機構から発達した，さまざまな直線運動機構が示されている。ケンプは，ユークリッド原論での定規とコンパスによる作図の公準にもふれ，リンク装置で直線の軌跡を実現することは，元々，容易ではなかったと記している。

ポースエリエの機構は，点 O と点 Q が固定され，長さが OA＝OB＝p，AC=BC=AP=BP＝q を満たし，QC が点 O と点 Q の間の距離に等しくなっているフレームとして説明できる。点Cが点Qを中心として回転すると，点Pが直線OQに垂直なある直線の軌跡を描くというものである。



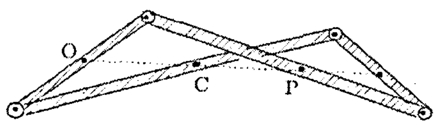
その原理は，$OC \cdot OP = p^2 - q^2$ と OC と OP の積が定数になることである。このことは，端的に言えば，中心が点 O，半径が$\sqrt{p^2 - q^2}$の円 O に関して，点 C と点 P は反転の位置関係にあることを物語っている。反転の性質として，中心 O を通る円または直線は直線に，中心 O を通らない円または直線は円に写される。点 C が，点 Q 中心の点 O を通る円上を動くので，点 C の反転像である点 P は，$OM = (p^2 - q^2)/2OQ$ をみたす OQ の延長線上にある点 M を通り，直線 OQ と垂直な直線上を動くことが分かる。これがポースリエの機構の原理である。

以上の原理は，反転の性質を知らなくても，直接，初等幾何的に説明できる。ポースリエの機構が見つかった後，その原理を応用した，いくつかの直線運動機構が考案された。



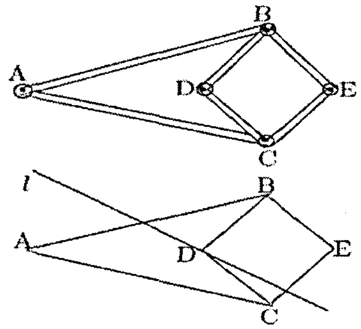
右図も，同様に $OC \cdot OP = p^2 - q^2$ を満たす。そこで，点 O を固定して，点 C が点 O を通る円上を動くようにすると，点 P はやはり直線運動をする。

右図はハートの機構と呼ばれるものである。これも，ポースリエの機構の原理を拡張して得られたものであり，点 C が点 O を通る円運動をするとき，点 P は直線運動する。ポースリエの機構が OQ も隠れたリンクと考えると 8 本のリンクからなるのに対し，ハート機構は 6 本からなり，直線運動機構として最小のリンク数のものである。



このように，一つの発見があると，その原理を応用することにより，更なる発見があることは多くの場合に見られることである。現実的な事象において，数学は原理の解明とその応用を図る上で大きな役割をもっている。このことは，実際に数学が使われる場面を教材化していくときに欠かせない要素だと考える。

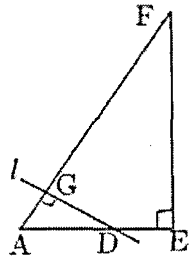
第二類の教科書 3「1．軌跡」のまとめの問題の中に，上記の原理を応用した次の問題がある。



問題：右ノ図デ AB＝AC＝p cm，BD＝CD＝BE＝CE ＝q cm デアル。角 BAD ノ大キサヲ x° トシテ，積 AD・AE ヲ計算セヨ。

次ニ，A ヲ固定シテ D ヲ一直線 l ニ沿ッテ動カシタトキ，E ハドンナ線ヲ書クカ。

この問題の前半は，まさに，ポースリエの機構の原理である。後半は，点 D が直線を動くときの点 E の軌跡を問題にしていて，その原理の応用になっている。反転の性質を考えれば，直線 l は点 A を通らない直線なので，点 E は円を描くことがわかる。もちろん，教科書では，反転の性質は扱っていない。その節では，軌跡の求め方として，ユークリッド幾何の方法と解析幾何の方法の双方が示してあるので，解きかたが工夫できる問題になっている。後半をユークリッド幾何の方法で答える場合，例えば，次のようになる。



点 A から直線 l に垂線 AG を引き，AG の延長線と，点 E を通り AE に垂直な直線との交点を F とする。そのとき△ADG ∽ △AFE より，

$$AF \cdot AG = AD \cdot AE = p^2 - q^2$$

である。AG は定数より，この式から AF も定数で，点 F はＡＧの延長線上にあるから定点になる。

∠AEF＝90° より，点 E は常に AF を直径とする円上にある。ゆえに，点 E は円を描く。ただし，点 D は，$p-q \leqq AD \leqq \sqrt{p^2-q^2}$ を満たす範囲しか動かず，点 E はそれに応じた範囲しか動かない。その範囲は作図できる。

今日，軌跡に関する内容の理解は高くないという。その原因は，図形を条件を満たす点集合として見る見方ができないことや，式と図形との結びつきが弱いということなどが考えられるが，現実的な事物の動きと軌跡の教材を結びつける機会が少ないこともあげられるだろう。この直線運動機構のモデルなどを用いて，実際に器具がどのように動くのかを見ながら，軌跡の原理を考えていくような教材の工夫もあると考える。

6．おわりに

本章では，フレームの動きという観点から，工学的な背景をもつ図形教材を考察してきた。最初に述べたように，現実的な事象と数学とを結び付ける図形教材において，事象を統合して捉える何がしかの数学的な観点が大事であるということが根底にある。その意味では，ベクトルの機能に関する観点なども有力な候補であろう。本文でのフレームの動きを取り入れた具体例からは，次のような要素を導出した。

1．リンク装置をモデルにしたフレームの動きから，数学を必要に応じて活用したり，図形を総合的に捉えたりする教材が工夫できる。

2．直線運動機構をモデルにしたフレームの動きから，動きの原理を数学的に捉え，その原理を応用し発展させるところに，実際面での数学の有用性があることを示すことができる。

本章の内容は，フレームの発展的な教材研究をテーマにした二人の大学院生との共同研究をもとにしたものである。実際に，彼らは次のことを示した。冨田真吾(8)は，正方形フレームの理論を発展させ，必ずしも長方形でない正方形フレームに対して，それを定形にする対角線の最小本数を表す組合せ的な式を具体的に与えた。さらに，一階建ての建物の構造に対応するフレームの定形性が，ある2部グラフの操作を用いて判定できることを示した。また，西岡亮平(9)は，フレームの定形性を調べるとき，無限小変形を考えることや，力のつりあいを数学化した方法が有効であることを示すとともに，テンションフレームについては，向き付けられた2部グラフの連結性によって，フレームの定形性を調べることができることを証明した。

コンピュータの発達によって，図形の動きを実際に操作しながら考えることも可能になってきている。ただ，その場合にも，背景にある実際の事物の動きを介した，形の認識ということが基本となる。機械の動きなどを取り入れた伝統的な観点の図形教材を生かすことと，数学的方法の広がりにつながるような新しい観点で現実的な事象を数学化する双方が，現実世界や他分野と数学との結びつきを測る教材の工夫として求められていると考える。

他分野と数学との結びつきを図る教材の更なる考察を行うことを今後の課題としたい。

[引用・参考文献]

(1) 今岡光範，冨田真吾，西岡亮平，「フレームの動きを取り入れた図形教材の考察」，『数学教育学研究』，全国数学教育学会，第12巻，2006年.
(2) 『中等数学第二類1～5』，中等学校教科書株式会社，1943年，1944年.
(3) 小倉金之助，『科学の指標』，中央公論社，1946年.
(4) 小倉金之助，鍋島信太郎，『現代数学教育史』，大日本図書，1957年.
(5) 井沢実，加藤博著，『機構学』，産業図書，1996年.
(6) 松嵜昭雄，磯田生美，「数学的モデリングにおける理解深化に関する一考察　ークランク機構の関数関係の把握ー」，『日本数学教育学会誌』第81巻，1999年.
(7) A. B. Kempe : How to Draw a Straight line, Lecture on linkages, National Council of Teachers of Mathematics, 1877.
(8) 冨田真吾，「フレームの定形性に関する幾何的性質の研究」，広島大学大学院教育学研究科修士論文，2005年.
(9) 西岡亮平，「グラフとテンションフレームの定形性に関する研究」，広島大学大学院教育学研究科修士論文，2006年.

［参考］　数学「第二類」の内容

1

1．測量
1. 距離ヲ測ルコト
2. 高サヲ測ルコト
3. 縮図法
4. 概測
5. 種々ノ問題

2．図形ノ書キ方
1. 見取図
2. 展開図
3. 投影図[1]
4. 投影図[2]
5. 定木トコンパスニヨル作図
6. イロイロナ曲線
7. 種々ノ問題

3．図形ノ観察
1. 対称図形[1]
2. 対称図形[2]
3. 図形ノ対称ト全等
4. 図形ノ回転
5. 回転体ト回転面
6. 図形の合同
7. 回転運動
8. 種々ノ問題

2

1．平行ト相似
1. 平行模様
2. 平行線ト平行平面
3. 平行四辺形
4. 図形ノ拡大ト縮小
5. 相似形
6. 三平方ノ定理
7. 種々ノ問題

2．三角関数
1. 正接
2. 正弦ト余弦
3. 三角関数表
4. 種々ノ問題

3．円ト球
1. 大円ト小円[1]
2. 接平面ト接線
3. 大円ト小円[2]
4. 円周角　中心角
5. 内接　外接
6. 種々ノ問題

3

1．軌跡
1. 機械ノ運動
2. 点ノ運動
3. 軌跡ノ求メ方[1]
4. 座標ト軌跡
5. 軌跡ノ求メ方[2]
6. イロイロナ軌跡
7. 点ノ位置ヲ定メルコト
8. 種々ノ問題

2．三角形ト三角関数
1. 縮図法ト三角測量
2. 三角形ヲ解クコト[1]
3. 三角形ヲ解クコト[2]
4. 直角ト鈍角トノ正弦，余弦
5. 正弦定理　余弦定理
6. 加法定理　減法定理
7. 三角関数ノ図形ヘノ応用
8. 種々ノ問題

3．円運動ト三角関数
1. つるまき運動
2. 円運動
3. 三角関数ノ拡張
4. 単振動
5. 振動ノ合成
6. 加法及ビ減法定理ノ拡張
7. 種々ノ問題

4

1．立体図形ノ表現
1. 見取図ト投影図
2. 側面図
3. 断面図
4. 切ロノ面積
5. 種々ノ投影法
6. 透視図
7. 種々ノ問題

2．球面上ノ図形
1. 漸長図
2. 中心透視図
3. 円柱正積図
4. 種々ノ問題

3．円錐曲線
1. 円錐ノ切断[1]
2. 円錐ノ切断[2]
3. 円錐曲線ノ主ナ性質
4. 種々ノ問題

5

1．円錐曲線
1. 円錐ノ切断[1]
2. 楕円
3. 円錐ノ切断[2]
4. 放物線
5. 円錐の切断[3]
6. 双曲線
7. 円錐曲線ノ定義
8. 或ル種ノ軌跡
9. 種々ノ問題

2．力ト運動
1. 構造物ニ働ク力
2. 機械ノ運動
3. 一定の力ガ働クトキノ運動
4. 力ガ変ハル場合の運動
5. 種々ノ問題

第３章　数理的思考の広がりを図る教材の開発Ⅱ

近似性に関する教材の考察

平岡 賢治（長崎大学教育学部）
今岡 光範（広島大学大学院教育学研究科）

はじめに

本稿は，第 40 回数学教育論文発表会で発表した内容(1)を少し手直ししたものである。本研究のテーマである数理的思考の広がりを図る見地から，学校数学における近似性の扱いを概観し，高校数学における二次関数の接線の指導に視点を当てて考察を行う。

筆者達は，戦時中の中学校数学第一類の教科書に着目している。その数理思想を現在の学校数学に生かすため，数学的活動の視点から高校一年生の近似性に関する意識調査を行い，放物線と接線の関係を近似性の観点から授業実践を行い，その考察を行う。

筆者の役割分担として，第１節から第３節までの近似性の教材に関する理論的な部分は今岡が担当した。第４節は両者の意見交換によって造られ，第５節の近似に関わる性質の授業実践部分は平岡が担当した。本稿の考察に先立ち，それぞれの筆者が第一類の教科書を分析し，数理的思考の広がりを図る上で今日的な内容や扱いと異なるような箇所について討議した。特に，図表の用い方などについて，この教科書独特の興味深い扱い方が注意を引いた。ここでは，その一つである近似性の扱いに関して述べるが，他の点については別の機会にまとめたいと考えている。

１．近似性について

数学教育の今日的課題として，自然現象や社会生活などと結びついた実際的な題材を生かし，生徒の数学に対する関心を高め，探求心を豊かにすることがある。例えば，OECD の学習到達度調査（PISA）(2)では，義務教育修了段階の生徒が，学んだ数学をどれだけ実際的場面に活用できるかが試され，科学的リテラシーなどと結びついた数学的教養の重要性が示されている。一方で，このような実際的場面と結びついた数学の考えには，常に近似性の考え方が伴う。例えば，自然界にあるものの面積や体積の測定や統計資料における相関性の判定などにも見られるように，状況に応じて的確な近似値や近似的な関係性を求めていくことが大事になる。ここでいう近似性とは，近似値や誤差といった数値的なものや，近似式などの数式によるもの，また，グラフの概形などの図形的なものなどをあわせて意味する。近似性は，円周率の値の追及，微分・積分の誕生，関数の級数展開の理論，曲面の曲率の概念など，歴史的にも数学の様々な発展に大きく関与してきた。

現行の教育課程において，小学校では，見積りや概数という，数の感覚や筆算の力を養うものとして，数値的な近似性の学習が位置づけられている。およその面積という図形的な近似性も扱われるが，数の近似に較べるとそう多くはない。高校で，区分求積法とも関係して積分による面積の求め方を学ぶが，近似性という側面はそう強くない。高校数学の「数値計算とコンピュータ」で，近似値や台形公式など近似式の内容があるが，この科目の履修者は

少ない。その意味で，小学校で学ぶ数や図形の近似性を除いては，現今の学校数学で近似性の内容は，決して豊富に取り上げられているとはいえない傾向にある。

以下の節で，高校数学の身近な内容と関連させて，近似式の考えを導入する教材例を提示する。広田他(3)にも見られるように，高校数学が応用される分野では，近似式は本質的に用いられる。しかし，上述のように，近似式の内容を学ぶ高校生は少ない。このことから，高校数学の必修的な内容の中で近似式にふれる機会を具現化できないかという課題が生じる。その一つの方法として，二次関数のグラフの接線に着目した。二次関数は高校数学における関数の基本であり，そのグラフである放物線やその接線は，図形として身近な存在である。この放物線の接線を一次近似式と結びつけることで，関数とグラフの学びの中に近似性を入れることができる。

本稿では，具体的に実践案を示す。それを通して，生徒が近似式というものの存在を知り，高校 2，3 年生の微分・積分などにも現れる近似性の考えに発展させていくことをねらうものである。

数理的考察における近似性の役割を重視し，その教材開発に正面から取り組んだ教科書として，戦時中の 1943 年，1944 年に発行された中学校数学第一類の教科書がある (4)。この教科書は，具体的・現実的な素材を教材の中心に据え，それを通して，生徒の数理的能力の開発をめざしたものである。次節で現今の学校数学における近似性の扱いをさらに考え，その対比として，第 3 節でこの第一類の教科書における近似性の扱いについて言及する。そして，近似式に関する教材の考察を第 4 節で行い，その実践例を第 5 節で示す。

2．現行の扱い

小学校算数では，日常生活と結びついた素材を通して，数の計算や図形の概念を学ぶ。そこでは，「見積もり」という近似性は重要であり，学習指導要領解説(小学校算数) (5) では次のように位置付けられている。

「社会的事象などにかかわって合理的な判断をしたり，将来の見通しを立てたりする際にも，見積もりの力や，数についての豊かな感覚が生かされることが多い。」

見積もりは，第 3 学年以降の四則計算においても必要である。実際，割り算では，筆算で商をたてるときにその見積もりをすることが必要である。また，第 4 学年での四捨五入の考えなど，「概数の見積もり」も学ぶ。必要な位に丸めた値やおよその数を用いることは，日常的な場面では本質的である。算数でその基礎が準備されていることは重要である。

また，第 5 学年以降の算数で，円の面積など，「近似的な値として面積を求める」ことも学ぶ。ただ，図形の面積の近似値の考えは， 2000 年の PISA の調査問題「大陸の面積」で(2)，日本の生徒の正答率が高くなく，無答率が高かったということでは，十分に浸透していない可能性もある。

中学校数学では，文字の使用や図形性質の証明に代表されるように，小学校で学んだ具体的な性質を普遍化する内容が多く，近似性に関係した内容は少ない。現今では，平方根の値の近似値の内容があるが，電卓を利用して考えることが薦められている。従前の内容には，「数の表現」として，近似値や誤差，有効数字などの概念が扱われていたが，現行の内容にはない。

高校数学で，種々の関数の性質やその応用において，再び，数値や面積の近似値が現れる。実際に，三角比表や対数表などの各種の表における近似値や，積分での区分求積などに

現れている。

このように，現行の学校数学における近似性に関する内容は，数値や面積などの近似値に対してはそれ相当にあるが，誤差の扱いなどはほとんどない。また，近似式の内容も少ない。この傾向は，文字式や関数の基本的な内容の中に，実際面と結びついた内容をどのように位置付けていくかという問題と関係している。次節で，現行の教科書とかなり違う面をもつ，戦時中の第一類の教科書における近似性の扱いに触れることで，その問題を考える。

3．第一類の教科書での近似性の扱い

中等教育の数学に具体的・現実的な素材を積極的に取り入れた場合，どのような教科内容になるかということに関して，一つのよい見本が戦時中に発行された第一類の教科書である。第一類の教科書は，代数・統計・関数領域を中心に扱っている。その教科書の編纂趣意書(6)において，基本精神１～10があるが，特に2～5において，実際面の重視や近似性に関する基本精神が次のように記されている。（原文のカタカナをひらがなに変換）

2． 問題には具体的素材を多くとり，事象を数学化し，かつこれを処理する修練を重んずること。

3． 具体に即して数理を十分に会得せしめ，然る後にその抽象化，形式化を図り，よってもってこれを具体的事象に自在に応用し得るよう練磨すること。

4． 事象の数学的表現における近似性の取扱いを重視すること。

5． 図表に関する操作を重んじ，関数観念と連続観念の涵養に務めること。

この基本精神には，その他に，「事象に即して生徒自ら数理を発見するように導くこと」などもあり，現今の「数学的活動」や「創造性の育成」といった精神を当時すでに積極的に有していたことが分かる。

基本精神の２，３での具体的素材の例として，次のような題材を扱った問題が見られる。

統計資料（人口，面積，温度，生産，資源，漁獲高），科学的・工学的題材（天体の距離，光の速さ，沸点，寒暖計，単振子，つるまきバネ，はかり，比重，歯車，フレーム，結晶），地図，身近な道具（じょうご，ろうそく），投影図，運行図表など。

基本精神４の近似性の重視に関して，次の記述がある(6, p.11)。

「真に具体的なる問題を数学的に解釈し処理せんとするならば，必然的に表現の近似性を究めることが最も重要になってくる。この近似性の取扱いは，従来回避せられただけに極めて困難であるが，それにも拘わらず本書はこれに関するある程度の能力を与えんことを期したものである」

基本精神５にある図表とは，グラフのことである。この教科書では，具体的な事象と数学的な考察を結び付ける核心として関数を位置づけ，その関数を生み出したり，関数を解釈したりするものとして，図表を重視している。具体的な事象と結びついた図表は，近似性なしでは語れない。もっと直接的に，近似値および近似的な現象がすべてこれらの図表の中に込められているとも言える。

この教科書での誤差の扱いは，箇所によっては難しい。それは，この教科書が，数理的能力の向上を掲げていたことが関係する。実際面と結びついた数学を，興味や関心を惹きつけることを第一義として扱う限りは，近似性の正確な扱いは要求されない。しかし，それを通

して数理的な考察力を高めるためには，近似がどのくらい正確かということも数理的に重要になり，近似値や誤差のある程度精密な扱いもまた大事な考察対象になる。

このように，第一類の教科書は，現実と結びついた数学を推進する場合に，近似性は避けて通れないということを指摘しているのと同時に，そのような素材を通して考察力を高めるためには，誤差の限界などの，近似性についての合理的な扱いが必要になることも指摘している。それゆえ，教科書ではかなり高いレベルの内容も扱っている。

実際に，この教科書は，初学者にとってかなり程度が高く，戦時中のきびしい社会情勢の中で，教科書の数理的能力を向上するという意図は生かされなかったと伝えられる。また，終戦後は違う教育課程に移行していったことから，非常に短命でもあった。しかし，今日，再びこの教科書の価値が見直されてきている[(7)など]。

4．近似式に関して

第一類の教科書(3，p.43)において，近似式は次のような内容で導入されている。ただし，原文とは，書き方も記号も変えてある。

「温度 0° のときのある物体の体積をb，温度$x°$のときの体積をyとすれば，

$$y = b(1+ax)^3$$

となる（aはその物質の線膨張係数)。もし，axが非常に小さいとき，

$$y = b(1+3ax)$$

と考えてもよい。このような式を近似式という。」

これは，関数の一次近似式に他ならない。第一類の教科書では，この 3 次式の他に，2 次式や $y=\sqrt{1+x}$，分数式の 1 次近似に関する問題も載せている。　この一次近似式は，テイラー(Taylor)展開における一次の部分に相当するもので，具体的な関数値の近似値を求めるのにも便利である。関数$f(x)$の$x=c$における一次近似は，ランダウ(Landau)の無限小の記号$o(x)$を用いて，

$$f(x) = a(x-c)+b+o(x-c)$$

と表されるが，そのとき，$a(x-c)+b$が$f(x)$の一次近似であり，$b=f(c)$，$a=f'(c)$である。したがって，一次近似式のグラフである直線は，$f(x)$の$x=c$における接線になる。

近似式には，他の種類もある。その一つの例は，曲線上に 3 点(一直線上にない)が与えられたとき，それらを通る放物線による曲線の近似である。これは，曲線の近似曲線として放物線をとるものであり，シンプソン(Simpson)の公式はその応用である。第一類の教科書では，この放物線近似も第 4 巻で扱っている。コンピュータの絵を書くソフトで，自由曲線を書く場合にもこの原理が用いられているものもある。また，岡部[(8)]は，高校生がこのような放物線の近似を生かして落ち葉の面積を求める教材の活動性を著している。この近似曲線の考えは，高次の場合にも活用でき，広田他[(3)]は賃金曲線に三次の近似曲線を用いる方法を示している。統計における回帰直線のような，最小二乗法を用いる方法は，さらに別の近似式として有用である。このように，近似式には豊富な内容がある。

一直線上にない 3 点を通る放物線の決定は，三元連立一次方程式と関係するが，現行の高校数学では扱われていない。もちろん，発展的教材として扱うことは可能である。

それに対して，曲線の接線は，一次近似の図形版である。接線は，方程式の重根や，微分係数に関係して，高校数学の大事な内容であり。それは大学の数学での多様体の接空間など

にも発展していく。特に，放物線は，高校数学の必修的な内容である二次関数のグラフであり，近似式の図形的なイメージを与えるのに適している。

二次関数$y=ax^2+bx+c$を考え，任意の定数αに対して，

$$y=a(x-\alpha)^2+d(x-\alpha)+e$$

と変形すると，それは$x=\alpha$での一次近似式$y=d(x-\alpha)+e$であるのと同時に，この二次関数の$x=\alpha$における接線の方程式である。一次近似式である一次式は代数的な表現であり，接線は図形的な表現である。接線は接点の近くでそのグラフに近接し次第に曲線から遠ざかるが，それは正に近似式のイメージを如実に表している。グラフが接点で急激に曲がっていれば，近似式は$x=\alpha$のすぐ近くでしか近似はよくなく，緩やかに曲がっていれば，少し広い範囲で近似を与えるものとして機能することを図的にあらわしている。

このように，高校数学の一つの中心的な教材である二次関数について，そのグラフである放物線の接線に注目することで，近似式の存在を多くの高校生に伝え，微分・積分を学ぶ生徒は，さらにそれを発展させていくことが可能になると考える。

次節で，実際の授業における実践例を示し，その可能性を示唆する。

５．近似性に関する意識調査と授業実践

筆者の一人は，この放物線の接線を用いた近似式の内容を，長崎県立高校での SSH 用の授業で実践した。その趣旨は，前節までに述べたことに他ならない。

授業を行うに当たって，次の 3 つの問題を用いて事前調査を行った。

1) 二次関数$y=x^2+2x-3$と無理関数$y=\sqrt{x+1}$のグラフをかき，その方法を説明させる。

2) $\sqrt{2}$の値とその求め方を説明させる

3) 半径 10 の円の面積と，放物線とx軸および$x=1$で囲まれた面積を求め，その方法を説明させる。

調査問題 1)は(x,y)の値を求めればグラフがかけること，平方根は近似値を用いること，2)は$\sqrt{2}$の値について考えること，3)は曲線で囲まれた図形の面積を既習の知識を使ってその近似値を求めることについて，生徒の考え方をつかむことを目的とした。

調査結果は，次のようであった。

1) 二次関数のグラフは，完全平方式に変形し格子点を通るグラフをかいていたが，無理関数は，xの値に対してyの値を求めてグラフをかいているのは 19 人中 5 人,また 8 人は$y^2=x+1, x=y^2-1$と変形して放物線のグラフを活用してグラフをかいている。
2) $\sqrt{2}$の値を覚えているが 19 人中 5 人，また，$1.1^2, 1.2^2, 1.3^2, \cdots\cdots$ を計算し 2 に近い平方数を求めた生徒は 10 人，1 人が開平して求めていた。
3) 円の面積公式πr^2を用いたのが 13 人，円の内部の正方形と欠けた正方形の個数を数えて求めている生徒が 5 人(重複あり)，内接および外接する正 8 角形の面積を求めた生徒が 1 人，内接する正 12 角形を求めたのが 1 人いた。

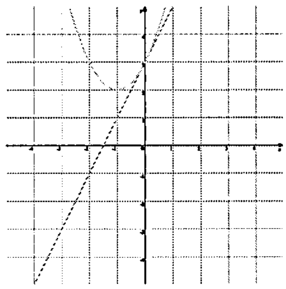
   放物線については，区間$0\leq x\leq 1$を 5 等分して区分求積の考え方で求めたのが 1 人，10 等分して三角形と台形に分解して求めたものが 1 人，1 辺が 0.25 の直角二等辺三角形に細分して求めたものが 1 人，9 人は正方形から 4 分の 1 円を除いたものが 9 人であった。

1)の無理関数のグラフは，二次関数のグラフを活用してグラフをかく生徒や，グラフ上の点は格子点やxの整数値を計算して直線や曲線で結んでグラフをかく生徒がいた。また，3)の円の面積は，公式を利用する生徒も多くいたが，一方では正方形や正多角形で近似する考え方で求めていた生徒も多く，放物線では，円や直角二等辺三角形で近似する生徒や区分求積のアイデアを使った生徒もいた。

このアンケートの結果をもとに，次の枠囲いに示した授業を計画した。授業の実際についての考察は，別の所で発表する予定である。そして，調査問題 3)の面積の近似性についての指導を今後予定しており，事前調査の中に取り入れた。

授業の流れ

1．二次関数 $y=x^2+2x+3$ $\cdots(1)$ と一次関数 $y=2x+3\cdots(2)$ のグラフをかかせる。



2．グラフ(2)はグラフ(1)の接線になることに気づかせる。

3．点(0,3)を通る接線の方程式を，判別式などを利用して求めさせる。

4．関数のグラフは，いろいろなxの値の関数値を計算して(x,x^2+2x+3)の値を座標平面上にとって，これらの点を結んでグラフを描くことを確認する。

○ $x=0$の近くの値の計算を行う。
$x=0.1$のとき$y=3.21$，$x=0.01$のとき$y=3.0201$，
$x=0.001$のとき$y=3.002001$

○ 実際に，グラフ上の点は次のような近似値になることに気づかせる。

○ $x=0.1$のとき$y=3.2$，$x=0.01$のとき$y=3.02$，$x=0.001$のとき$y=3.002$

○ これらは，一次関数$y=2x+3$上の点であることを理解させる。

○ $x=1$の近くで同様の計算をするには二次関数(1)を$y=(x-1)^2+A(x-1)+B$と変形しA,Bの値を求めればよいことに気づかせる。

６．おわりに

本稿では，数理的考察の広がりを図る観点から，学校数学における近似性に関して考察し，高校での主要教材の中に近似式の考えを入れることを提案した。それは，実際の現象面を数学化するときには，どうしても近似という問題は避けてとおれないものであり，それをどのように扱うかは，数理的な思考に大きく関係してくると考えるからである。

しかし，本稿であげたような単発的な教材だけでは，近似性に関する生きた意識を生徒に与えることはできないだろう。もっといろいろな教材開発が必要である。そして，このような，近似性を取り入れることは，数学的活動を通した数理的な広がりを与える教材開発のヒントになるのではないかと考えている。筆者達は近似性に関する更なる考察を今後の課題としたい。

引用・参考文献

(1) 平岡賢治，今岡光範，近似性に関する考察 ー数理的な広がりを図る教材の視点からー，第 40 回数学教育論文発表会論文集，379－384.
(2) 生きるための知識と技能，国立教育政策研究所，2002
(3) 広田昭幸，川西琢也編：こんなに役立つ数学入門，ちくま新書，2007.
(4) 数学第一類 1-5，中学校用，中等学校教科書株式会社，1943，1944.
(5) 小学校学習指導要領解説，算数編，p.39，文部省，1999.
(6) 数学編纂趣意書，第一類，中学校用，中等学校教科書株式会社，1943，1944.
(7) 田中義久，西村圭一：『数学　第一類における関数の指導についての考察，日本数学教育学会詩，第 8 巻 5 号，2006.
(8) 岡部すすむ：日常性の数学，教育研究社，1994.

第４章　数理的思考の広がりを図る教材の開発 Ⅲ

数学的活動を通した数理的な思考の広がり

平岡　賢治（長崎大学教育学部）

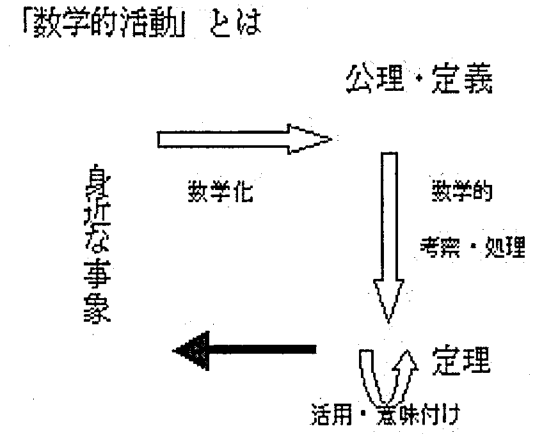
はじめに

平成 20 年 8 月に平成 23 年度から全面実施される小学校・中学校の学習指導要領が改訂されると同時にその解説も発行された。また、高等学校の学習指導要領（案）の提示もなされ、平成 21 年 3 月には新しい学習指導要領が改訂されることになっている。小学校・中学校の新学習指導要領では、算数的活動や数学的活動についての例示を含めて以前にも増して重要視されている。

本稿では、数学的活動を通した数理的な思考の広がりについて大学院生と行った共同研究や SSH における授業実践について報告を行う。本稿で扱う教材は中学校数学第 1 類及び第 2 類の内容、長崎和算研究会での内容、高校数学の内容などである。

１.　　数学的活動と数理的な思考

平成 11 年 3 月に改定された高等学校学習指導要領の解説（数学編）では、数学的活動について、右の図を示し、3 つの思考活動を例示して説明を加えている。



- 身近な事象との関連を一層図り、数学化の過程を重視する。
- 主体的に様々な問題解決の方法を味わったり、問題解決の後も自らの思考過程を振り返ったり、その意味を考え、より発展的に考えたり、一般化したりして問題の本質を探ろうとするなど、数学的考察・処理の質を高める。
- 見いだした数学的知識の意味を身近な事象に戻って味わったり、見いだした数学的知識をいろいろな場面に活用したりする。

このように、新しい数学の概念の導入や理論の拡張が、実際的な問題から始まるだけではなく、数学的活動が純粋に数学的な問題から始まることもある。

２. 円の分割問題

豊田(2008)は、高校数学でも扱われる円の分割数の問題

「1 つの円を 1 本の弦，2 本の弦，3 本の弦，等々で次々に分割し，それによって生じる部分領域数が最大となるようにするとき、n 本の弦で分割される最大の分割数を求めよ」

に着目し、組合せやパスカルの三角形、さらには空間図形の拡張問題として球の平面による分割数についても考察を行った。この問題は、図のように1本の線分により，新しい領域が1つ増加 することに着目すると、分割数が最大となるための条件は

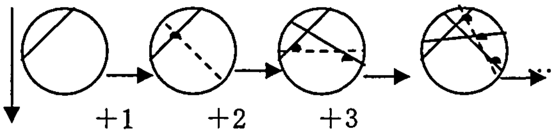
① 新たにたにひく弦は既存の全ての弦と交わること

② 既存の交点を通らないこと

の2つである。

・ n本目の弦が，既存の$(n-1)$本の弦と交わる。

増加交点数を d_n とすると　$d_n = n-1$



+1　+2　+3

・n本目の弦は $(n-1)$本の弦と交わるから $\{(n-1)+1\}$本の線分に分割される。

増加線分数をc_nとすると　$c_n = (n-1)+1$

n本目の弦をひくと，新たに$\{(n-1)+1\}$個の領域が増加するから、増加領域数をb_nとすると

$b_n = (n-1)+1$

n本の弦を引くときの最大領域数を a_n とする。最大領域数 $\{a_n\}$ は，$a_0 = 1$ ，$\{a_n\}$ の階差数列$\{a_n - a_{n-1}\}$は$\{b_n\}$に一致する。

したがって

$a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \{(n-1)+1\}$　$(n=1,2,3\cdots)$　より

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{(k-1)+1\}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}(k-1) + \sum_{k=1}^{n}1 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ①$$
$$= 1 + \frac{1}{2}n(n-1) + n$$

①の式中の1は原領域を表し，$\sum_{k=1}^{n}(k-1)$は増加交点数の和であるから全ての交点数を表す。また，$\sum_{k=1}^{n}1$ は増加する弦の数の和であるから，全ての弦の本数を表す。さらに，この式を読み替えると円領域内の交点・弦・円の数の和となり，0次元・1次元・2次元のものの総数の和を表しているともいえる。

また，最大領域数 a_n の式中の 1 は ${}_nC_0$，$\frac{1}{2}n(n-1)$は${}_nC_2$，nは${}_nC_1$と考えると，

$$a_n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2$$

と表される。このとき，パスカルの三角形の

n	a_n	$a_n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2$
0	1	$\boxed{1}$ ($\boxed{0}$) ($\boxed{0}$)
1	2	$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ ($\boxed{0}$)
2	4	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$
3	7	$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{3}$ 1
4	11	$\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ 4 1
5	16	$\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{10}$ 10 5 1
6	22	$\boxed{1}$ $\boxed{6}$ $\boxed{15}$ 20 15 6 1
⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
n		$\boxed{{}_nC_0}$ $\boxed{{}_nC_1}$ $\boxed{{}_nC_2}$ ・・・・・ ${}_nC_n$

中では右の(表 1)の□で囲まれた部分の和に現れる。

また、この問題から、次の２つの問題に広げることができる。
１つは、円を球にして、円の弦による分割問題を、球の平面による分割の最大領域数を求める問題、もう１つは、円周上の点を結んでできる減による最大領域数を求める問題である。

１つ目の問題については、球の n 個の平面による分割の最大領域数を A_n とすると、

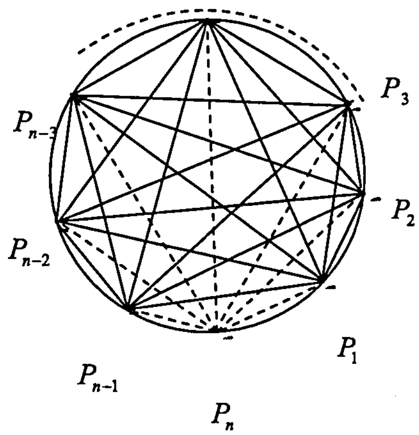
$$A_n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3$$

を得て、パスカルの三角形の中では(表 3)の□で囲まれた部分の和に現れる。

円板	A_n	$A_n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3$
0	1	$\boxed{1}$ ($\boxed{0}$) ($\boxed{0}$) ($\boxed{0}$)
1	2	$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ ($\boxed{0}$) ($\boxed{0}$)
2	4	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ ($\boxed{0}$)
3	8	$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$
4	15	$\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{4}$ 1
5	26	$\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{10}$ $\boxed{10}$ 5 1・・・
⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
n		$\boxed{{}_nC_0}$ $\boxed{{}_nC_1}$ $\boxed{{}_nC_2}$ $\boxed{{}_nC_3}$ ${}_nC_n$

２つ目の問題は､「円周上の点を結ぶ弦により円を分割するときの最大領域数を求めよ。」として、次のように考察した。

まず、n 個目の点から左回りに円周上の点に番号をつける。n 個目の点 P_n をとるとき，既存の $(n-1)$ 個の点からは，各々 $(n-2)$ 本の弦を引くことができ、n 個目の点をとるときの増加交点数は次のようになることが分かる。



円内部増加交点数を w_n とすると、

$$\begin{aligned}
w_n &= 0 + \{(n-2)-1\}\cdot 1 + \{(n-2)-2\}\cdot 2 + \cdots \\
&\quad \cdots + 2\cdot(n-4) + 1\cdot(n-3) + 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}\{(n-2)-k\}\cdot k \\
&= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)
\end{aligned}$$

このときの増加領域数を y_n (すなわち、増加線分数 z_n) とすると、

$$\begin{aligned}
y_n = z_n &= 1 + [\{(n-2)-1\}\cdot 1 + 1] + [\{(n-2)-2\}\cdot 2 + 1] + \cdots \\
&\quad \cdots + \{2\cdot(n-4)+1\} + \{1\cdot(n-3)+1\} + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}[\{(n-2)-k\}\cdot k + 1] \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}\{(n-2)-k\}\cdot k + \sum_{k=0}^{n-2} 1 \\
&= w_n + (n-1) \\
&= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) + (n-1)
\end{aligned}$$

このとき、最大領域数をx_n（これはモーザー数列と呼ばれている）とすると、

（㊟モーザー数列は 1, 2, 4, 8, 16, $\boxed{31}$, 57, 99, 163, ・・・）

$$
\begin{aligned}
x_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{6}(k-1)(k-2)(k-3)+(k-1)\right\} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}(k-1)(k-2)(k-3)+\sum_{k=1}^{n}(k-1) \quad \cdots\cdots③ \\
&= 1+\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)
\end{aligned}
$$

③の式中の 1 は原領域を表し，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}(k-1)(k-2)(k-3)$ は円内部増加交点数の和であるから，全ての円内部交点数を表す。また

$\sum_{k=1}^{n}(k-1)$ は増加する弦の数の和であるから，全ての弦の本数を表す。

また，この式は $x_n={}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4$ と表され

パスカルの三角形では(表 5)の□で囲んだ部分の和に現れる。

点	$x_n = \ {}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4$
0	$\boxed{1}$ (0) $\boxed{(0)}$ (0) $\boxed{(0)}$
1	$\boxed{1}$ 1 $\boxed{(0)}$ (0) $\boxed{(0)}$
2	$\boxed{1}$ 2 $\boxed{1}$ (0) $\boxed{(0)}$
3	$\boxed{1}$ 3 $\boxed{3}$ 1 $\boxed{(0)}$
4	$\boxed{1}$ 4 $\boxed{6}$ 4 $\boxed{1}$
5	$\boxed{1}$ 5 $\boxed{10}$ 10 $\boxed{5}$ .1 . .
⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
	$\boxed{{}_nC_0}$ ${}_nC_1$ $\boxed{{}_nC_2}$ ${}_nC_3$ $\boxed{{}_nC_4}$ ${}_nC_n$

３．第１類、第２類の教科書から

中学校数学第１類・第２類は 1943･1944 年に発行された教科書で、「数理思想」中核として書かれた「尋常小学算術」(緑表紙教科書）に続くものとして発行された。この教科書を定める中学校数学新教授要目には次のような記述がある。

「數學ニ於テハ，數，量，空間ヲ中心トシテ事物現象ヲ考察處理スル能力ヲ錬磨シ數理ト其ノ應用トノ一般ヲ會得セシメ數理思想ヲ涵養シ國民生活ノ實践ニ導キ國運發展ノ實ヲ擧グルノ資質ヲ啓培スルコトヲ要ス　數學ニ於テハ，數，量，空間ノ基本的性質ト其ノ重要ナル理法及之ガ應用ニ就キテ授クベシ　教授ニ當リテハ數，量，空間ノ關聯ヲ重視シ第一類ト第二類トノ二系統ハ相互ニ關聯セシメツツ一體タル數學ノ目的ヲ達成セシムベシ

低學年ニ於テハ具體的ナル操作ニヨリテ基礎的考察處理ノ能力ヲ得シメ學年ノ進ムニツレテ數理ノ厳正ナル考察ニ向ハシメ高學年ニ於テハ綜合的考察力ノ涵養ニカムベシ　實測，作圖等ノ作業ヲ重視シ知行一體ノ修練ヲ爲サシムルト共ニ直觀ト推理トヲ一體トシテ抽象シ具體化スルノハタラキヲ錬磨シ工夫創造スルノ能力ヲ養フニカムベシ　反復練習ニヨリテ基本事項ヲ體得セシムト共ニ實地ニ活用スルノ能力ヲ錬磨スルニカムベシ　教授ニ當リテハ國民ノ日常生活竝ニ郷土ノ實際ノ資料ヲ重視スベシ　全般ニ亙リ産業，國防ノ觀點ニ立チテ指導スベシ」

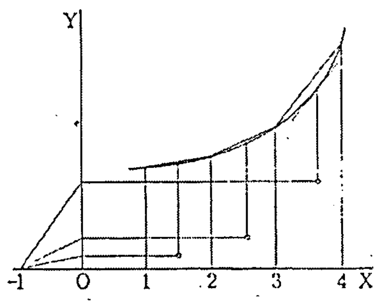
この要目に基づいて，以下のような編集方針で第一類，第二類は作られている。

1　既成ノ數學ノ注入ヲ排シ，事象ニ即シテ生徒自ラ數理ヲ發見スルヤウニ導クコト。
2　問題ニハ具體的素材ヲ多クトリ，事象ヲ數學化シ，且ツコレヲ處理スルノ修練ヲ重ンズルコト。
3　具體に即シテ數理ヲ十分ニ會得セシメ，然ル後ニソノ抽象化，形式化ヲ圖リ，依ツテ以テコレヲ具體的事象ニ自在ニ應用シ得ルヨウ錬磨スルコト。
4　事象ノ數學的表現ニ於ケル近似性ノ取扱ヒヲ重[illegible]スルコト。
5　用語・記號ノ定義ハ概念ノ醸成ヲ俟ツテ與ヘルノヲ原則トスルコト。
6　圖表ニ關スル操作ヲ重ンジ，函數觀念ト連續觀念ノ涵養ニ努メルコト。
7　作業ヲ重ンジ，直觀ヲ的確豊富ニスルコト。
8　圖形ノ動的ナ面ヲ重[illegible]シ，空間圖形ノ觀察ヲ重ンズルコト。
9　直觀的ニ明ラカナ事項ハ，スベテ推理ヲ基礎トシ，少數ノ公理ニ基ク論理體系ハトラヌコト。
10　論理偏重，形式偏重ノ嫌アル問題ハ避ケルコト。

數學編纂趣意書に「問題中心主義ヲトツテ，先ヅ具體的素材ヨリ數理ヲ抽出セシメントシタ」とあるように，問題中心主義をとった結果，定理・公式は書物の表面に出ていない。問を積み重ねて事象に即して生徒自身が数理を発見するように導いている。これは「尋常小学算術」（緑表紙教科書）からの流れである。
また、問題中心主義をとった結果，定理・公式は書物の表面に出ていない。問を積み重ねて事象に即して生徒自身が数理を発見するように導いている。それに対して現行の教科書では定理・公式の提示から始まることが多い。実際の教室内の授業では題材を数学化するという数学的活動がほとんどなされていないと考える。

出口(2008)は修士論文で、微積分の指導のあり方をについて数学的活動の視点から考察した。特に、第１類４の第２節「2. 速さと距離の図表」にある問９と問 10 の問題に着目し、与えられた関数の導関数と原始関数のグラフを描かせる問題に焦点を当てた考察を行っている。

〔問９〕右の図は，関数の図表からその導関数の図表を作る一つの方法を示す。どのような方法であるか。



作図方法は次の手順で行う。

（ｉ）直線ｘ＝１，ｘ＝２とこの曲線との交点をＡ，Ｂとし，それらを結んで弦ＡＢを作る。

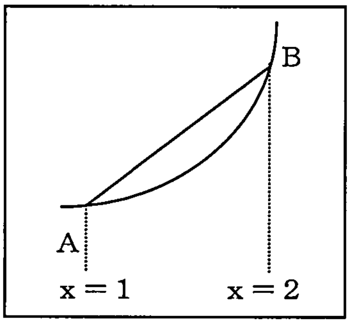


図１

（ⅱ）弦ＡＢと平行な曲線の接線を引き，接点Ｃ（x_1，y_1）を目分量で決める。

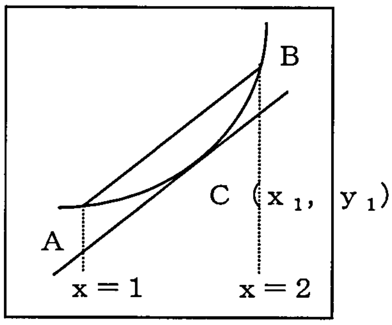


図２

（ⅲ）弦ＡＢと平行な直線を点（－１，０）から引き，ｙ軸との交点をＤ（０，$y_1{}'$）とする。

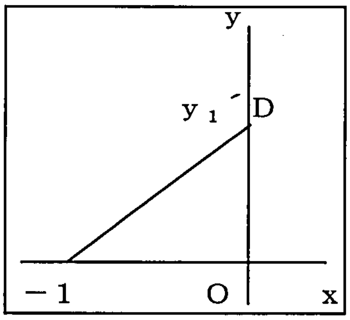


図３

（ⅳ）点Ｃを通りｙ軸に平行な直線と点Ｄを通りｘ軸に平行な直線との交点をＥ（x_1，$y_1{}'$）とする。

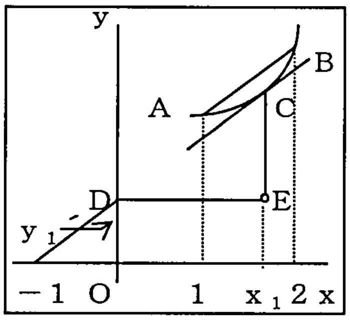
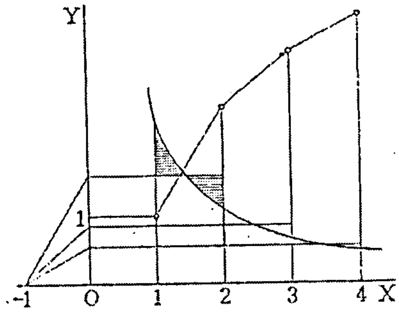


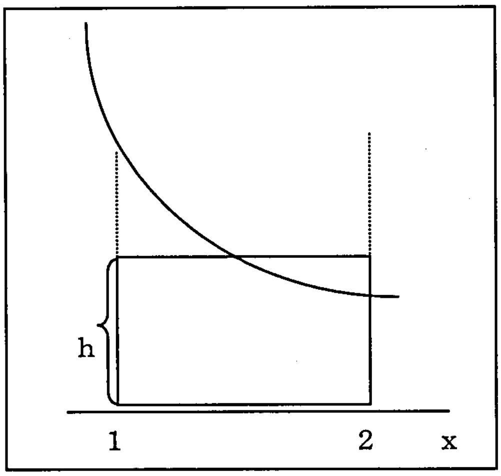
図４

〔問 10〕右の図は，関数の図表からその原始関数の図表を作る一つの方法を示す。どのような方法であるか。



（ｉ）区間〔１，２〕における曲線下の面積と等積な長方形を図のようにかき，高さをｈとする。

（ⅱ）点（１，１）から図１の長方形の高さｈと等しい傾きで直線を引き，ｘ＝２との交点を（２，y_2）とする。



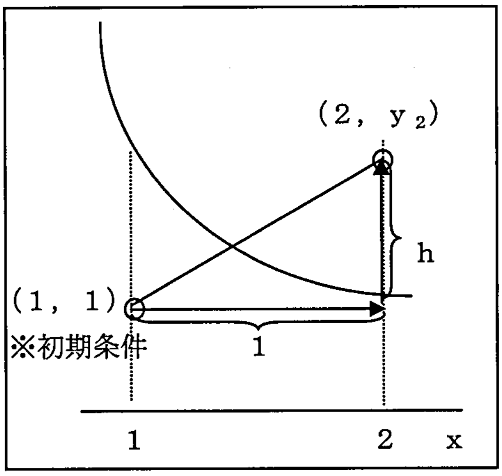
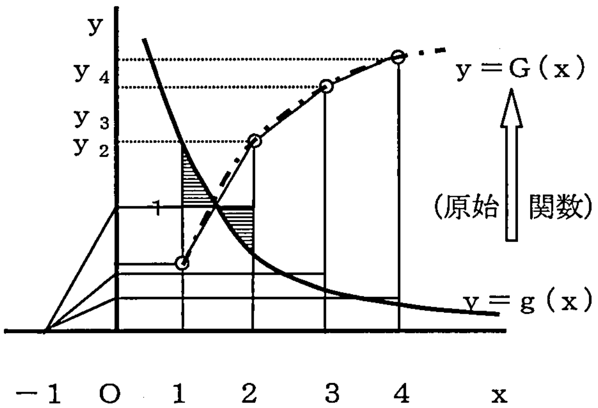


図1　　　　　　　　　　　　図2

以下，図1，図2の手順を，区間〔2，3〕,〔3，4〕………においてそれぞれ繰り返していくと，下の図3のようになる。ここで，曲線を表す関数を y＝g (x)とすると，原始関数（y＝G (x)とする）を表すグラフは破線（━・━・━）のようになる。



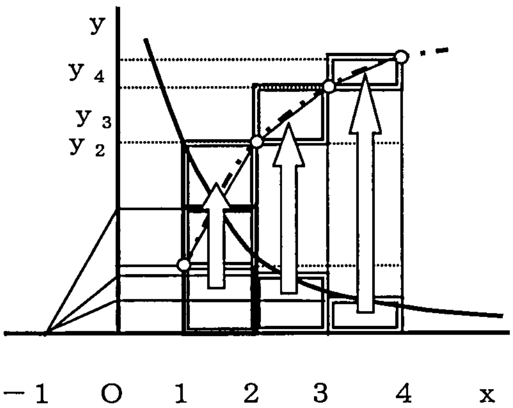


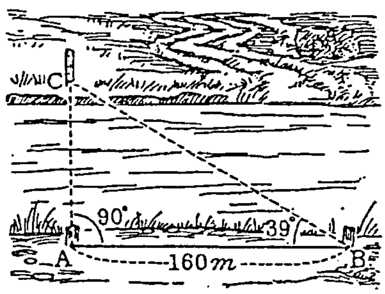
図3　　　　　　　　　　　　図4

この問題は、関数の変化の割合を直観的にとらえ、それを数学的な対象である直線の傾きや面積の量に変換して考察させている。

また、寺田(2009)は、修士論文で第2類3の第3節「2．三角形ト三角函数」の三角関数の指導について、数学的活動の視点から現在の高校数学の三角比の指導と比較して考察している。

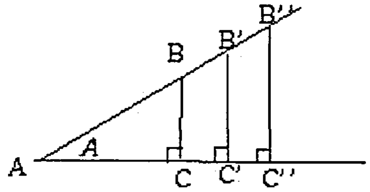
第3節　中学校数学第二類　3「2．三角形ト三角函数」における数学的活動

問1　川幅を測るために，岸に基線 AB を設けてその距離を測り，次に A の対岸に目標 C を定めて AB と BC との水平角を測ったら 39° であった。
図の上で，AC の距離を求めよ。



この問題は、三角比の値 sin39° を用いれば容易に AC の距離を求めることができる。しかし、この問題のねらいはsin39° 値を求めることにある。分度器を用いて 39° の直角三角形をそれぞれ書かせ、相似な三角形の比としてACの距離を求めさせたり、分度器とグラフ用紙を用いて sin39° の値を求め、ACの距離を求めさせたりすることができる。これは、三角形の相似の意味を再確認すること、相似の性質を活用すること、グラフ用紙の有用性など、数理的方法の広がりとその活用について気づかせることができる。

一方、現在の教科書での三角比の指導は、直角三角形の相似性に着目させ、2 辺の比が一定であることから三角比を導入し、その図形的性質や三角比の相互関係について指導することが多い。



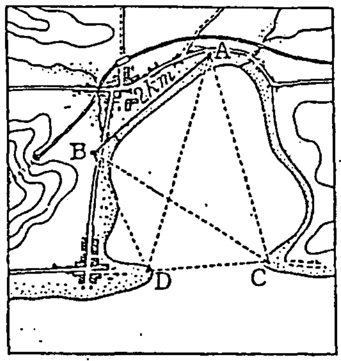
実際に、この授業を三角比の学習終了後の長崎県内の公立高校 1 年生を対象に行った。すると多くの子どもたちが、「三角比の値がわからないからわからない。」と、戸惑った表情になった。そこで、分度器、定規、コンパス、グラフ用紙、電卓など準備していることを説明し、それらを使ってACの距離を求めるように促した。その結果、

① 底辺が 16cm の直角三角形を作図し、その高さを求めた。
② 底辺が 16 でないような直角三角形で求めるように促した。
③ 底辺が 5cm、10cm などの直角三角形を作図して、その高さを測り、底辺と高さの比から AC の距離を求める発想に気づく子どもたちが現れ、その子たちを中心に電卓や手計算でACの距離を求めていた。

この考えは、三角比の利用について改めて再確認をしたことにもなり、数学の活用場面として数理的な広がりとそのよさを自分たちで再確認した場面と考えることができる。さらに、直角三角形の合同条件、直角三角形の 2 辺の比は角の関数として定義できることなど、三角比の意味についても再確認を行うことができた。

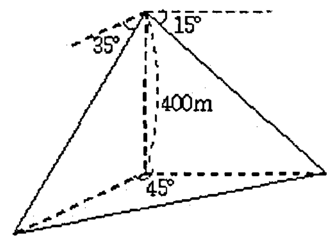
また、第 2 類では、次の 2 題が続いている。

問2 ある湾の入り口の幅 CD を測るために。海岸に基線 AB を設けて，その長さと水平角とを測ったら，AB=2km，BAC=64°，BAD=33°，ABC=72°，ÉABD=108° であった。図の上で，CD の長さを求めてみよ。



É

問3 高さ 400m の山の上から望むと，東方のある駅は俯角 35° に見え，東南方の次の駅は俯角 15° に見えた。両駅の距離を作図により求めよ。



問３では､それぞれの位置関係を右の図のように視覚的にとらえることを要求している。問題文を読み、それぞれの位置関係を理解し、図で表すことは、第１類、第２類の趣意書に述べているように事象を数学化する重要な操作活動として位置づけている。この問題は、現行の教科書では三角比の活用問題として扱われ､多くの場合図もともに表示されている。しかし、図を描かせ、それを読み取り数学化すること数学的活動として重視することが必要であろう。

４．和算に学ぶ数理的思考

和算では、1622 年「割算書」が、1627 年「塵劫記」がそれぞれ発行され、社会の安定と実務的な数学の必要性もあり､そろばんの普及とともに数学も広がったといわれている。特に､「塵劫記」は遺題継承といわれる解答なしの問題を巻末に継承することで、江戸時代に数学は全国に広がったといわれている。また、算額を神社に奉納することも江戸時代には流行し、このことも数学の広がりに貢献したといわれている。

入江(2008)は、修士論文でこの和算について数学的活動の視点から中学校及び高等学校の教材として考察を行った。

次の図１と図２は和算の問題で扱われている数理的思考の広がりとして代表的な問題の１つである。

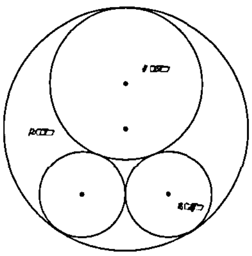


図１

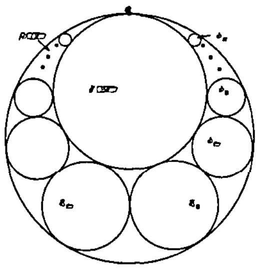
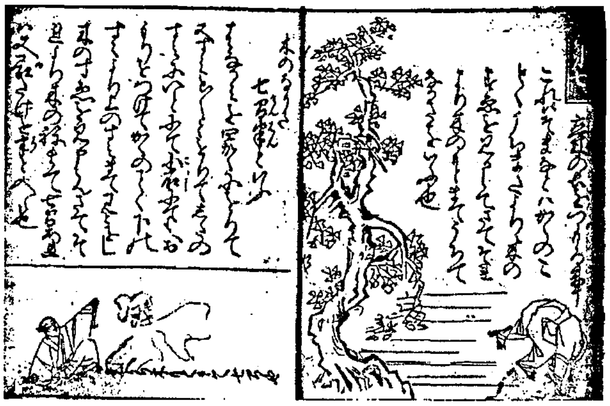


図２

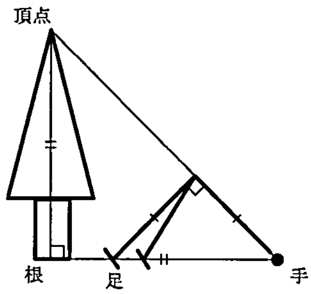
図２は図１にある下の２つの内接円をさらにその周りに拡張したものであるが､外円と中の大円に接する小円の半径を求めさせる問題である。図１は三平方の定理を用いる問題であるが、図２はさらに複雑な問題として興味深い問題である。このような問題は和算には多く見ることができる。



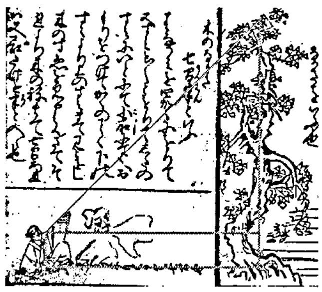
「塵劫記」の問題について、中学校教材の視点から考察を行っている。右の図は、木の高さを測る２つの方法とその高さを求める問題である。

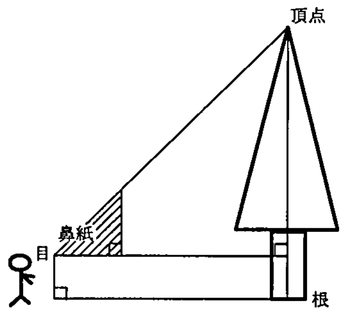
次に示すように直角二等辺三角形と三角形の相似の性質の活用の場面を通して、数理的思考の広がりのよさを体感させることができる。

右のページは
1. 腰を直角に折り曲げて地面に両足を付く。
2. 股を通して木の頂点が見える位置まで移動する。
3. 木の高さが目から木の根元までと等しくなっているので，地面で目と木の根元を測ることにより木の高さを求めることができる。



左のページは、
1. 道具として鼻紙を使う。地面に座って鼻紙を目の前に置く。
2. 目線が斜辺を追った先に木の頂点がくるように場所を移動する。
3. 自分と木の根元の位置と木の高さが直角二等辺三角形となり，自分と木の根元の長さを測って，自分の上半身の長さを足すことで求める事ができる。





おわりに

数理的な思考の広がりは、学校数学の授業で扱われる重要な思考の１つである。その具体化が算数的活動、数学的活動である。わが国では数理活動を取り入れた小学校算数科の緑表紙教科書や中学校数学の第１類、第２類において、数学的活動を観ることができる。さらに、江戸時代に発達した和算、「塵劫記」で扱われた遺題継承、全国的に広まったといわれる算額、全国に数学を広めた遊歴算家などを考えると、数理的な思考の広がりに関する興味・関心は非常に高いものがあると考えられる。

本稿は中学校・高等学校の教材に関する修士論文を中心にまとめたものであるが、小学校の教材ももちろん多い。今後も、このような観点から学校数学の教材を考察することが必要であると考えている。

引用・参考資料

・豊田喜代美「数学的方法における教材の広がりに関する研究―パスカルの三角形の考察を通して―」、九州数学教育研究第 15 号、17-31、2008.

・出口基司、「『第一類』における微分・積分の教材に関する研究～生徒の理解を深める教材の提示の視点から～」、長崎大学教育学研究科修士論文、2008.

・寺田隆司、「三角形の決定と作図方法に関する研究 ―高校数学の教材の視点から―」、長崎大学教育学研究科修士論文、2009.

・入江康介、「数学的活動の視点から見た和算の教材化」、長崎大学教育学研究科修士論文、2008.

第5章　数理的思考の広がりを図る教材の開発 Ⅳ

多角形の内角・外角の和の発展

今岡　光範（広島大学大学院教育学研究科）

はじめに

数理的思考の広がりを図るためには，継続的で発展的な教材も必要である。本章では，多角形の内角・外角の和という図形性質の教材を通して，小学校から大学まで一貫した教材を例示する。

鍵となるのは，図形の不変的な性質である。昭和 31 年の高等学校数学の学習指導要領において中心概念というものが記述されており，教科内容の柱となる事項が明記されていた。その中心概念の一つに,「式や図形について不変性を見いだすこと」が掲げられていた。この「不変性」ということの意味をどう捉えるかということは議論の余地があろうが，広義に捉えれば，数学的な意味やその活用性に照らして意義があり，ある範囲の対象が不変にもつ特性のことをさすと考えてよさそうである。そのような不変性を意識することは，数理的思考の広がりを図ることにつながるものであると考える。

そこで，小学校や中学校での基本的な図形内容であり，不変性に関して多くの要素を含むと考えられる，多角形の内角や外角の和の性質をとりあげ，不変な性質を基点とした教材内容の開発を示す。この場合の不変性は，次のような，図形の「組合せ的性質」と呼んでよい要素をもっている。

・ 図形に関する複数個の量の和，差，積，商またはその合成によって考えられる不変な性質

・ 図形の分解や合成を考えて得られる不変な性質

本章の内容は，今岡・速水(1) の考察を主として引用し，それに今岡・松田(10)，Imaoka・Takata(9)の考察を加える。

1．多角形の内角・外角の和

三角形の内角・外角の和は，小学校算数でのしきつめや実測などによる観察に始まり，中学校数学でのユークリッド幾何的な証明を通して，その不変な性質を学ぶ。そして，三角形を基礎にして，多角形の内角・外角の和を求める。この節では，これらの教材について，その背景も含めて考察を加える。

(1)　三角形の内角の和

通常の意味で，内角とは各頂点において隣接する二辺が三角形の内側につくる三つの角であり，内角の大きさの和を単に内角の和と表現することにする。いろいろな三角形について，個々の内角の大きさはそれぞれに異なるが，三つの内角の和は常に一定値の 180°になる。このことは，ある意味で不思議なことであるが，図形の典型的な不変性である。

この内角の和の性質は，ユークリッド原論における「平行線公準」，またはヒルベルト

の公理系における「平行線公理」から導かれる。後者は「平面上で，与えられた直線の上にない点を通ってその直線に交わらない直線はただ一つ存在する」というものであり，平面が“どこまでも平たく広がっている”というイメージに合致している。また，同じ三角形をしきつめたり，三角形の紙を折ってみたりして，生徒が操作を通して実感できることとも合致している。

この平行線の公理を「平面上で，与えられた直線の上にない点を通ってその直線に平行な直線は少なくとも二つ存在する」という公理に置き換えると，双曲幾何（非ユークリッド幾何）ができる。双曲幾何では，三角形の内角の和は 180° より小さくなる。その公理は，上述の平面のイメージからすると違和感があるが，空間の一つの捉え方として正当なものである。実際，双曲幾何は，相対性理論などの，大域的な図形の見方として有用なものであることが歴史的に実証されている。

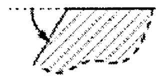
そのように，小学校で学ぶ三角形の内角の和の性質は，幾何の発展の歴史の中で重要な意味をもち続けてきた。その要因として，その和がどの三角形に対しても一定だという不変性質が，図形の形状と本質的に関わっていることがあげられる。また，その和が一回転の半分の大きさであるということも手伝って，人々に何か自然の摂理のようなものを感じさせ，図形の神秘性を醸し出すものであったことも要因としてあげられるだろう。

(2) 多角形の内角の和

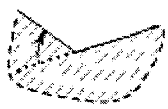
三角形の内角の和の性質は，多角形の内角の和の性質に拡張される。n 角形の場合は，対角線によって(n－2)個の三角形に分割することで，内角の和が「(n－2)×180°」であることが分かる。個々の n 角形の内角は，分割された(n－2)個の三角形のいくつかの内角の和であるがそれぞれに異なる。それらのすべての内角の和をとることによってこの不変性に達する。これは，前節でふれた，図形の分割や合成を通した組合せ的性質である。

この多角形の内角の和に関する組合せ的性質は，凸多角形に対してだけではなく，凹多角形に対しても成り立つ。ここで，凸多角形とは，通常の意味での“くぼみのない多角形”のことであり，その多角形の内側の任意の 2 点を結ぶ(直)線分上のすべての点が多角形の内側にあることで規定される。凹多角形は凸多角形ではない多角形のことであるが，その内角は同じように各頂点で多角形の内側にできる角のことである。さらに，多角形の内角の和の公式は，曲面上にある多角形の内角の和の考察に拡張され，球面上の多角形に対する球面過剰公式やなめらかな曲面上の多角形に対するガウス・ボネの公式といった美しい不変性に発展した。ここでも，不変性が数学の発展の芽となったことをみることができる。

(3) 多角形の外角の和


(図 1)

多角形の頂点での外角は，(図 1）のように，その頂点に隣接する 2 辺の一方をその頂点から延長してつくる角である。凸多角形の場合，すべての内角の大きさは 180° 未満であり，内角と外角の和は 180° である。


(図 2)

凹多角形の場合，どれかの頂点では内角が 180° よりも大きくなる。その場合，(図 2）のように，外角は多角形の内側にある。そのとき，外角の大きさは負の値にとる。つまり，(図 2)の矢印で示した外角は，負の大きさの角とするのである。そのようにすると，すべての多角形

に対して頂点での内角と外角との和は 180° という不変性が成り立つ。そして，凹 n 角形でもその内角の和は(n－2)×180° であるから，「多角形の外角の和は 360° である」ということが，すべての多角形に対して成り立つことになる。

この多角形の外角の和の性質は，内角の和の性質を経由せずに直接求めることができる。その一つの方法は，外角が，その頂点に隣接する 2 辺の“それ方”であることから，多角形の辺上の 1 点から出発して，多角形の内側を左に見ながら周辺を一周して出発点に帰ってくると，各頂点でのそれ方は全部で 1 回転することから，外角の和は 360° であるというものである。

ただし，この場合，上の考察と同様，進む方向に対して反時計まわりの方向にそれるときは正のそれ方，その逆のときは負のそれ方とする。したがって，凹多角形では，正のそれ方と負のそれ方の総和が 360° になるのである。角の向きは，図形的に正負の概念をだすものとして大事である。その意味で，外角の和の性質は，和の要素に加えて差の要素も加わった組合せ的性質であることが分かる。

多角形の外角の和を直接示すもう一つの方法は，補角を考えるものである。いま，多角形が凸多角形であるとする。そのとき，各頂点での補角とは，(図 3)のように，多角形の内部の点からその内角を形成する 2 辺に垂線を下ろし，その二つの垂線のなす角のことをいう。この補角の定め方はその内部の点の取り方によらない。四角形の内角の和が 360° であることから，補角の大きさは外角の大きさに等しい。

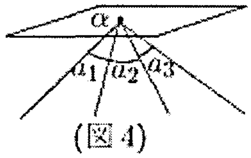

(図 3)

補角のつくり方から，各補角を平行移動し，隣り合う補角は辺で重なるようにして，すべての補角を 1 点の周りにきっちりとすきまなくしきつめることができる。したがって，補角の和は 360° であり，それゆえ，外角の和も 360° であることが分かる。このとき，平行移動で補角を合わせることは図形の合成の一種であり，やはり組合せ的性質を考えていることになる。補角もまた，負の大きさを導入することで，凹多角形の場合にも考えることができる。

(4) 立体角の不足角の和

多角形の外角の和の不変性は，空間図形に対しても拡張される。空間図形において，多角形に対応する図形は多面体である。多面体は，多角形の面で囲まれ，隣り合う面は互いの辺でぴったりと重なってできる。多面体の辺はその面の辺が重なってできる部分であり，多面体の頂点は辺の端の点である。多面体の典型的なものとして，角柱，角錐，正多面体などがあげられる。凸多面体とは，これらの身近な例がそうであるように，その内部の任意の 2 点を結ぶ(直)線分上のすべての点が多面体の内部にあるものである。以下，簡単なために，凸多面体を考える。

多面体の頂点には何個かの面が集まるが，それらの頂点，辺，面でできる図形がその頂点での立体角である。立体角をつくる各面は，頂点のところで面上に角を作るが，それは立体角の平面角とよばれる。いま，多面体の一つの頂点での立体角 α に k 個の面が集まっていて，それらの平面角の大きさが $a_1, a_2, \cdots, a_k$ あるとしよう。そのとき，立体角の立体性から $a_1+a_2+\cdots+a_k < 360°$ が成り立つ。それは，



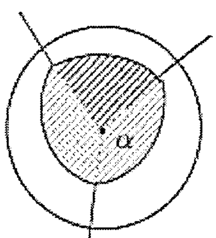
(図 4)

立体角を頂点で切り開いて平面上に置いたとき，平面角すべてで頂点を囲めないことからも分かる。この不等式の右辺と左辺の差

$$D(\alpha)=360^\circ-(a_1+a_2+\cdots+a_k)$$

を立体角 α の不足角という。この不足角の考えは，ユークリッド原論第 13 巻で，正多面体が五種類しかないということを示すことに用いられている。不足角 $D(\alpha)$ が大きければ，$a_1+a_2+\cdots+a_k$ は小さく，α は尖った角であることを表すので，不足角は外角と同じ振る舞いをする。

デカルト(Descartes)は,「どの凸多面体においても，頂点における不足角の総和は 720°である」ことを示した[2]。この定理は，(2)項における平面上の外角の組合せ的性質のアナロジーであるが，外角のもつ“それ方”という意味は立体角に対しては定かではない。しかし，平面上の弧度法の考えを空間に拡張した立体弧度法というものがある。その方法は，立体角の頂点を中心とする単位球面を考え，立体角が切り取る球面上の部分の面積を立体角の大きさとするものである。



(図 5)

また，立体角の補角の概念は，平面角での垂線を垂直面に置き替えることで定義できる。そのとき，立体角の不足角は，立体弧度法で計った補角の大きさに等しいことが証明できる。

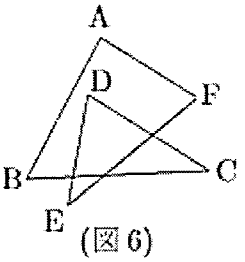
したがって，多角形の補角の和が弧度法では単位円周の長さの 2π であるという理由と同様に，多面体の補角の和は単位球面の面積の 4π であるということが成り立つ。そのことが，不足角の和が 720° であるというデカルトの定理に他ならない。さらに，このデカルトの定理は，オイラー標数に関する多面体定理と同値であることも分かる。

ここにも，外角の和の不変性の広がりがみられる。また，この立体角に関する組合せ的性質は，平面角に対する弧度法や補角の概念を拡張するなど，図形概念の広がりも与えるものになっている。

2．折れ線多角形

この節では，前節で調べた多角形の内角・外角の和に関する不変性を，折れ線による多角形の組合せ的性質に発展させてみよう。

折れ線は，(直)線分が有限個の点で折れてできる図形であり，折れ線を活用した図形教材の研究も以前から行われている[たとえば3]。折れ線は，折れ目の点を頂点，折れ目の点を結ぶ(直)線分を辺とするグラフと考えることもでき，その場合，グラフでいう歩道(walk)になっている。特に，折れ線上の１点を始点して，辺を連続的にたどっていくとき，すべての辺を通って再び始点に帰る折れ線を閉折れ線という。



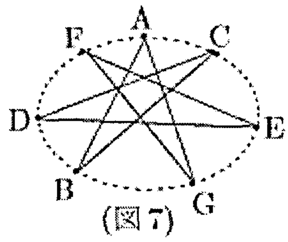
(図 6)

前節の多角形は，辺が互いに交差しない，自己交差のない（単純な）閉折れ線で囲まれた図形である。そこで，一般化して，辺の自己交差も許した，何個かの閉折れ線によってできる平面図形を，ここでは，折れ線多角形ということにしよう。折れ線多角形では，折れ目の点を頂点，それをつなぐ(直)線分を辺と考える。したがって，(直)線分の交点は頂点とは考えない。折れ線多角形が n 個の頂点をもつとき，折れ線 n 角形とよぶことにする。

そのとき，折れ線多角形の内角や外角はどのように考えれば，それらの和について，通常の多角形の不変性が拡張できるだろうか。まず，具体例でみてみよう。

(1)　星形多角形

折れ線多角形の例として，星形多角形が考えられる。星形多角形は，たとえば，次のようにして構成できる。まず，自然数 n，m を，条件 $n \geqq 3$，$m < n/2$ を満たすようにとる。平面上に，自己公差のない凸形の閉曲線をかき，その上に n 個の点を任意にとり頂点とする。一つの頂点 A から出発して，反時計周りに m 番目にある頂点 B を(直)線分で結び，次に頂点 B から反時計周りに m 番目にある頂点 C を(直)線分で結ぶ。これを繰り返すと，何回かで A に帰り，閉折れ線ができる。もしそれまでに現れていない頂点があれば，その一つから始めて同じようにして，閉折れ線を作る。これを繰り返して，すべての n 個の頂点がどれかの閉折れ線の頂点になるようにして一つの星形多角形が出来上がる。



(図 7)

n，m の条件に関して，$m=n/2$ ならば，m本の(直)線分でできる図形になるので，星形多角形とは考えない。また，$m>n/2$ ならば，m が $m<n/2$ の場合のどれかの形と同じになるから，$m<n/2$ の場合を考える。

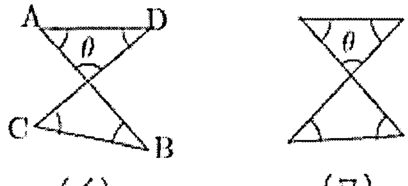
また，星形多角形が一筆書きできるための必要十分条件は，すなわち 1 本の閉折れ線からなる条件は，n と m が 1 以外に共通因数をもたない，すなわち，互いに素であることであるということも分かる。

このようにして，自然数の組(n, m)に対して作られる星形多角形を星形 n/m 角形という。もちろん，それは一通りの形ではない。(図 7) は星形 7/3 多角形である。特に，星形 n/1 角形は通常の n 角形である。

星形多角形について，各頂点で内側につくられる角が内角であり，外側につくられるのが外角である。星形多角形の内角や外角の性質を調べる教材は，中学校などでの興味深い発展的教材として注目されている(たとえば, (4))。一般に，星形 n/m 角形の内角の和は，$(n-2m)\times 180^\circ$ になる（後の(3)項参照）が，その導き方はいろいろ考えられ，図形の組合せ的性質を学ぶのに適している。注目すべきは，内角の和が n と m の組に対して不変になることである。頂点の個数の n が不変性に関係するのは自然であるが，m はどのように関わるのであろうか。このあたりから，折れ線多角形の不変性の探求活動が始まる。

(2)　折れ線多角形の内角の和

（図 8）のような折れ線四角形を考えてみよう。(イ）で四つの角A，B，C，Dでその内側が内角であると考える。その場合，交点での角度を θ とすると，折れ線多角形の内角の和は，(イ)，(ロ)ともに，$360^\circ-2\theta$ である。(イ)と(ロ)では θ の大きさが異なるとすると，内角の和は等しくない。(イ)と(ロ)はよく似た折れ線多角形であり，同じ内角の和をもっていて欲しいが，そうはなっていない。

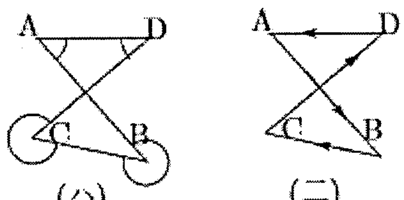


(図 8)

もし（図 9）の(ハ)のように，(イ)の頂点 B，C では外側の角が内角であると考えると，

その場合は内角の和は 720° になる。同じように，(ロ)でも下の二つの頂点では外側を内角と考えると，やはり内角の和は 720° である。このようにすると，再び，内角の和の不変性が生じる。

それでは，どのように図 9(ハ)の外側にある角を"内角"と考えることができるのだろうか。それは，折れ線多角形に進む方向の向きを入れることである。いま(ニ)のように閉折れ線に向きをいれて，その向きに従って一周する。そのとき，各頂点で，左手が回転してできる角が内角であるとする。そして，内角の大きさは正の値であるとする。そのとき，(ハ)で示した角はすべて内角ということになる。



(図 9)

通常の多角形の場合，単純な折れ線であるから，その内部が常に左手になるように辺に向きを入れることができる。そのとき，ここでいう内角は，通常の多角形の内角である。星形多角形の場合も，各頂点から反時計回りに次の頂点を選び，その向きに辺に向きを入れれば，その内角は前節で考えた内角と同じである。

このように，折れ線多角形に向きを入れて定める内角は，通常の内角の概念を一般化したものと考えることができる。ただし，向きのとり方によって内角は異なってくる。例えば，(図 10)(ホ)の向きでは，内角の和は 360° であるが，(へ)の向きでは，内角の和は 1080° になる。

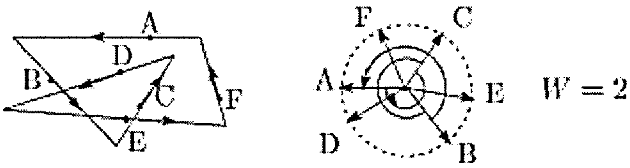
(図 10)

このように，折れ線多角形では，向きの定め方によって内角が変ってくる。このようなことから，折れ線多角形の内角の和については，向きに依存した不変性がないかと考えることができる。この面を，折れ線多角形の外角の和について考えてみよう。

(3) 折れ線多角形の外角の和

折れ線多角形の頂点での外角を次のように定めよう。それは，折れ線多角形の向きにしたがって進むとき，その頂点で，進入方向から出口方向へ正面の向きが回転してできる角を外角とするものである。そして，その大きさは反時計回りを正とする有向角度で計る。そのようにすれば，(2)項の内角の定め方から，一つの頂点で内角と外角の和は常に 180° になり，多角形の場合と同じように不変性を考えていることになる。

そのとき，折れ線多角形の外角の和はどうなるのだろうか。いま，(図 11) のように，1 個の閉折れ線からなる折れ線多角形の場合，辺上の 1 点 A を始点にして，閉折れ線の向きに従って 1 周して A に帰ると，出発のときと同じ方向に向く。このとき，終点 A での方向は，始点の方向に次々と外角の大きさを加えていったものである。それが同じ向きになることから，外角の和は 360° の整数倍である。つまり，向きが与えられた折れ線多角形 K について，その外角の和は，ある整数 W を用いて， W×360° と表される。



(図 11)

この整数 W の図形的な意味は次のようである。折れ線多角形 K を向きにしたがって 1 周するとき，(図 11) の右図のように，辺の方向ベクトルが各頂点で回転すると考えると，その回転の角度の総和が外角の和であり，それが $W\times360^\circ$ になる。すなわち，整数 W は，辺の方向ベクトルが K の始点から終点までに，向きを含めて何回転したのかという回転の数を表す。

それゆえ，整数 W を折れ線多角形 K の回転数と呼ぼう。(図 11) の場合，辺の方向ベクトルは正の向きに 2 回転するから，W=2 である。多角形の場合，内側が左側にあるように向きを入れるので，常に W=1 である。何個かの閉折れ線でできる折れ線多角形の場合は，回転数 W はそれぞれの閉折れ線の回転数の和とする。

このように，折れ線多角形の外角の和は，回転数で定まる。また，折れ線 n 角形の内角の和は，各頂点で内角と外角の和が 180° であることから，$n\times180^\circ-W\times360^\circ$ となる。以上をまとめると，次のようになる。

命題：向きが与えられた折れ線 n 角形 K の回転数を W とすると，

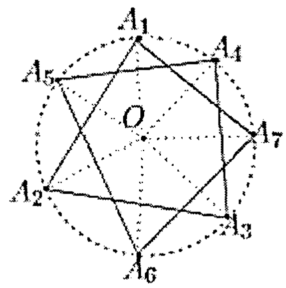
K の内角の和＝ $(n-2W)\times180^\circ$,　　K の内角の和＝ $W\times360^\circ$

が成り立つ。

この性質は，多角形の場合の組合せ的性質を拡張したものである。その不変性は，向きの与え方に依存するが，頂点の個数 n と回転数 W で定まり，やはり，離散的な側面をもつものであることが分かる。

この命題の具体例として，星形 n/m 角形 S の内角の和を，再度，考えてみよう。簡単なために，n と m が互いに素な整数になる場合を考える。このとき，S は一筆書きできる。S には，上述のような向きをいれる。それは，各頂点で辺の方向ベクトルが正の向きに回転するような向きである。

(図 12) のように，S の頂点 A_1 から出発して向きに沿って現れる頂点を順に A_1, A_2, …, A_n とすると， S のすべての頂点が現れる。S の内部の点 O を固定し，三角形 A_1OA_2, A_2OA_3, …, A_nOA_1 をつくる。このとき，次が成り立つ。



(図 12)

$$\angle A_1OA_2+\angle A_2OA_3+\ \cdots\ +\angle A_nOA_1=m\times360^\circ$$

実際，O を始点とする動径を OA_1 から OA_2, OA_2 から OA_3, …, OA_n から OA_1 という方向に回転させると，動径はちょうど m 回転することになり，上式が成り立つ。

O から直線 A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 に垂線を下ろしその足を P_1, P_2, …, P_n とすると，$\angle P_1OP_2$, $\angle P_2OP_3$, …, $\angle P_nOP_1$ は，頂点 A_2, A_3, …, A_1 の補角であり，それは外角の大きさに等しい。したがって，S の外角の和について，次が成り立つ。

$$\angle P_nOP_1+\angle P_1OP_2+\ \cdots\ +\angle P_{n\text{-}1}OP_n=\ \angle A_1OA_2+\angle A_2OA_3+\ \cdots\ +\angle A_nOA_1$$
$$=\ m\times360^\circ$$

ゆえに，m は S の回転数 W であり，上の命題の系として，(1)項で述べた次の組合せ的性質が成り立つ。

系：　星形 n/m 角形の内角の和は $(n-2m)\times180^\circ$ である。

この公式は，n と m が互いに素でない場合，すなわち，複数個の閉折れ線からなる場合にも同じように成り立つ。また，m=1 のときは多角形の場合であり，n 角形の内角の和の公式に他ならない。

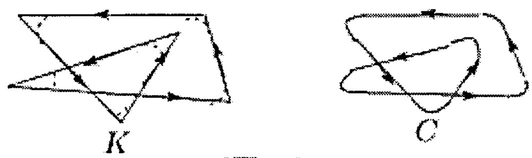
折れ線多角形の回転数の概念は，平面上のなめらかな閉曲線の回転数という概念のアナロジーである。最後に，そのようななめらかな閉曲線の回転数の組合せ的性質への発展について考えてみよう。

4．閉曲線の回転数

(1) 外角の和と回転数

折れ線多角形 K において，(図 13)のように，各頂点の近くを円弧で置きなおして，K からなめらかな閉曲線 C をつくる。C には K の向きと同じ向きを与える。C の各点で，その向きの方向の単位接ベクトルが考えられる。その単位接ベクトルの始点を原点に移すと，終点は単位円周上にある。閉曲線 C 上の任意の 1 点を出発点として向きにしたがって一周するとき，原点を始点とする単位接ベクトルの終点は単位円周上を行き来する。C 上を一周して出発点に帰るとき，単位接ベクトルの終点は全体として円周上を何周かする。その周回数 W(C)を C の回転数という。

閉曲線 C は折れ線多角形 K の頂点を丸めて得られたものであるから，W(C)は K の回転数 W に等しい。実際，K の辺の方向ベクトルが頂点のところで外角として一気に回転するのに対して，C の接ベクトルは，角を近似する円弧に沿ってなめらかに回転し，頂点の前後で回転の大きさは同じになるからである。したがって，閉折れ線 K の回転数 W を求めることと，それを近似する閉曲線 C の回転数 W(C)を求めることとは同値である。



(図 13)

ところが，なめらかな閉曲線 C の回転数 W(C)は，微分幾何や位相幾何の手法が適用でき，次のようないろいろな方法で求めることができる。

(i) 閉曲線 C の曲率を C 上で線積分すると W(C)×2π になることから，曲率の積分を用いる方法(例えば(5))

(ii) 写像度の考え方を用いて，一定方向の接ベクトルをもつ点をすべて取り出し，その点での曲率の正負によって±1 の値を与え，その総和が W(C)になることを用いる方法

(iii) 始点の向きと自己交差点での情報を活用した，ホイットニーの定理(6)を用いる方法

(i)は微分幾何，(ii)は位相幾何で開発された方法を活用するものであるが，本質的には同じ方法である。(iii)は閉曲線の自己交差点に関する組合せ的な性質を活用するものであり，結び目やグラフの解析にもみられる方法である。

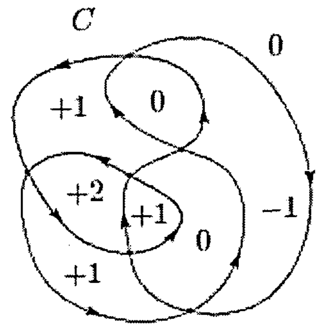
たとえば，(ii)の方法を（図 13）の閉曲線に用いると，右側のなめらかな曲線 C の接ベクトルが，上側を北として北を向くのは 2 個所の点であり，そこでの曲率は正であるから，そのことだけで W(C)=2 が求められる。したがって，左側の折れ線多角形 K の回転数は W＝2 であることになる。

回転数は整数という離散的な量であるが，なめらかな曲線は連続的な対象である。折れ

線多角形を近似するなめらかな閉曲線を考えることで，上記のように回転数の意味が豊かになり，連続性と離散性の相乗効果の一面をみることができる。

(2) 閉曲線の回転数

閉曲線 C の回転数という概念には，局所的な回転数の概念もある(たとえば(7))。それは，C 上にない領域のまわりを，C が向きをこめて何回周るかという回数として定める。



(図 14)

たとえば，(図 14) で，数字はその領域に対する局所的な回転数を表す。フロイデンタール(8)は，「閉曲線で区切られた領域を隣り合う領域は異なる色で 2 色で色分けできる」という二色性質を例にだして，この局所的な回転数の教材性に言及している。(図 14)からも分かるように，曲線で隣り合う領域の局所的な回転数の差は±1 であり，その偶奇性の違いを用いて，二色性質を示すことができる。そのように，局所的な回転数は，それをどのようにして求めたらよいか，どのような組合せ的性質があるかなどを，実際に紙の上にかいてみながら調べることで，曲線に親しみながら組合せ的性質の探求を可能にする題材である。

この局所的な回転数は，次のような定理の証明にも活用される。

[代数学の基本定理] $n \geq 1$ のとき，複素数係数の代数方程式

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

は，必ず複素数の解をもつ。

[ブラワーの不動点定理] 円盤と同相な図形 X に対して，任意の連続写像 $f : X \to X$ は必ず不動点をもつ。すなわち，$f(x) = x$ となる X の点 x がある。

[ボルスク・ウラムの定理] 空間において，半径 r の球面 S を定義域とし，平面 H に値をとる任意の連続写像 $f : S \to H$ に対して，$f(x) = f(-x)$ となる S の点 x がある。

特に，この最後の定理の応用である次の定理は，大学での数学の興味ある話題になるだろう。

[ハム・サンドイッチの定理] 空間において，体積をもつ 3 つの立体 A, B, C があるとき，ある 1 つの平面で切って，これらの 3 つの立体をそれぞれ二等分することができる。

(3) 回転数に関するある組合せ的公式

なめらかな閉曲線 C について，局所的な回転数と前項で述べた回転数 $W(C)$ との関係を調べることも，組合せ的性質の探求の一つである。図 14 のような，領域のまわりの C の局所的な回転数全体の和を $L(C)$ としよう。図 14 の場合，

$$L(C) = (+2) \times 1 + (+1) \times 3 + 0 \times 2 + (-1) \times 1 = 4$$

である。また，(図 14)では，すべての交点はちょうど二つの弧の交わりになっている。すなわち，二重交点のみである。この場合，交点の回りの局所的な回転数の和が 4 の倍数であることがわかる。そこで，その和を 4 で割った値をその二重交点の重さということにし，

交点での重さ全体の和を$G(C)$で表す。(図 14)の場合，6 個の二重交点があるが，

$$G(C)=(+1)\times 3+0\times 3=3$$

である。(図 14)の C の回転数 W(C)は，(1)項で述べたような方法を用いて考えると，$W(C)=1$である。そのとき，$W(C)=1=4-3=L(C)-G(C)$が成り立つ。

ところが，面白いことに，この関係 $W(C)=L(C)-G(C)$は一般に成り立つ。それは，必ずしも二重交点ばかりではない場合にも，n 重交点の重みをうまく定義することによって成り立つ(9)。ただし，2 つの弧の部分が接するような点がある場合は避け，そのような部分がないなめらかな曲線を正則な曲線ということにしよう。

次の定理が成り立つ。この定理の教材性に関することは，今岡・松田(10)で論じた。ここでは，証明の概要も述べる。

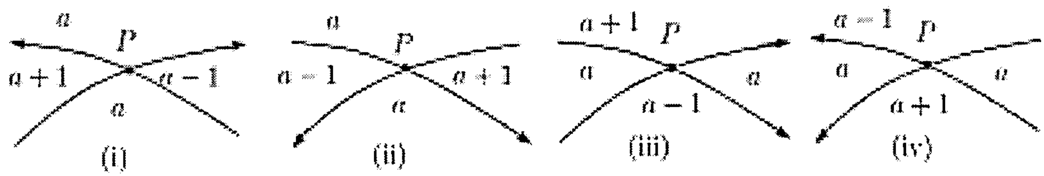
[定理] 向きづけられた正則な曲線Cに対して，$W(C)=L(C)-G(C)$ が成り立つ。

証明の概要：Cの交点がすべて二重交点のときの証明の方針を説明する。多重交点をもつ場合，議論は複雑になるが，証明の方針は同じようである。

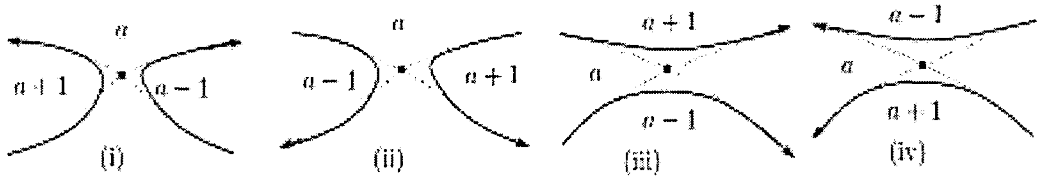
(Step1) 基本的な考え方

もしCに交点がなければ，Cは単純閉曲線であり，$W(C)=L(C)=1$，$G(C)=0$より成り立つ。

交点Pの重さを$G(P)$と表わすことにする。$G(P)=a$の交点Pがあれば，そのまわりの局所的な回転数は次のようである。



そのとき，Pのすぐ近くで，次のように曲線を向きを保ちながら"つなぎ変える"。



つなぎ変えた後の閉曲線については，交点の数は 1 つ減る。そこで，証明は，交点の個数に関する数学的帰納法で行う。交点が与えられた個数未満の場合には公式が成り立っていると仮定する。もし，どれか 1 つの交点でつなぎ変えをし交点の個数を 1 つ減らすときに，$W(C)-L(C)+G(C)$の値が変わらないということが示せれば，数学的帰納法によって証明が完成する。

(Step2)　定義の見直し

ところが，つなぎ変えをした後，曲線は 1 本の弧からなる閉曲線になるとは限らず，2 本に分かれるかもしれない。したがって，数学的帰納法を遂行するためには，数本の閉曲線からなる場合に，それぞれの概念を拡張しておく必要がある。

いま，$C=\bigcup_j C_j$ で各 C_j は向きづけられた 1 本の正則な閉曲線であり，$C=\bigcup_i C(i)$ で各 $C(i)$ が C の連結成分である場合を考える。このとき，$W(C)$, $L(C)$, $G(C)$ を次のように定義する。

$$W(C)=\sum_j W(C_j),\quad L(C)=\sum_i L(C(i)),\quad G(C)=\sum_i G(C(i))$$

(Step3)　数学的帰納法

(Step2)の定義の下で，交点の個数が 0 になるのは，何個かの単純閉曲線の交わりのない和の場合である。そのときは，$W(C)=L(C)$，$G(C)=0$ が成り立つので，帰納法の出発点が保証される。

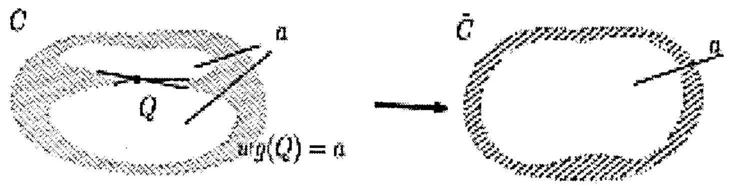
C の任意の一つの交点を Q とし，$G(Q)=a$ とする。Q で上のつなぎ変えを行った結果の曲線を $\tilde{C}$ とする。$\tilde{C}$ は交点の数が C より 1 つ少ないので，帰納法の仮定により，$\tilde{C}$ については等式が成り立つ。

したがって，次が成り立てば，C に対しても等号が成り立ち，帰納法が完成する。

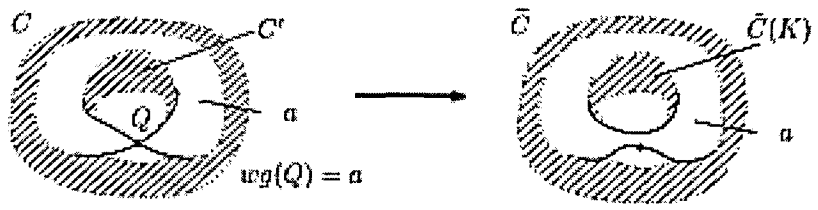
(1) $W(C)=W(\tilde{C})$，　　(2) $L(C)-G(C)=L(\tilde{C})-G(\tilde{C})$

(1)については，前項の回転数を接線と曲率を用いた方法で求めることができることから成り立つことが分かる。

(2)について考える。もし，Q でのつなぎ変えで連結成分の数が変らなければ，次の図のようになり，$L(C)$, $G(C)$ の減り方が同じことから，(2)が成り立つことがわかる。



もし，Q でのつなぎ変えで連結成分が 1 つ増えるならば，次の図のようである。



そのとき，$\tilde{C}$ に新しい連結成分 $\tilde{C}(K)$ が生まれ，そこでは，すべての連結成分のまわりでの回転数が a だけ減る。それに伴って，その中の交点の重みも変化する。次の(Step4)でこのときにも(2)が成り立つことを示し，証明が完成する。

(Step 4)　最終段階

上の新しい連結成分 $\widetilde{C}(K)$ について，それが生まれる元の C の部分を C' とする。ただし，Q は C' では交点と考えず，境界の１点と考える。C' について，内側の連結成分の回転数の和を $\widetilde{L}(C')$，Q を除いた C' 内の交点の重みの和を $\widetilde{G}(C')$ で表す。

このとき，次の補題が成り立つ。$L(C)$ と $G(C)$ の変化は，C' から $\widetilde{C}(K)$ への変化と，Q が無くなることによって起こるから，補題によって証明が完成する。

[補題]　等式 $L(\widetilde{C}(K))-G(\widetilde{C}(K))=\widetilde{L}(C')-\widetilde{G}(C')-a$ が成り立つ。

証明.　$\widetilde{C}(K)$ の交点の個数を v，交点と交点を結ぶ曲線の部分の個数を e，平面上の $\widetilde{C}(K)$ の補集合を考え，その有界な連結成分の個数を f とする。そのとき，非有界な連結成分も入れて，$\widetilde{C}(K)$ を球面上の多面体と考えると，オイラーの多面体定理より，$v-e+f=1$ が成り立つ。そのとき，二重交点しかないと仮定しているので，$2v=e$ が成り立つから，

$$f-v=1 \qquad \cdots\cdots (3)$$

が成り立つ。

C' の対応する交点，曲線および有界な連結成分の個数は，$\widetilde{C}(K)$ のそれらと等しい。このとき，$\widetilde{C}(K)$，C' の局所回転数は，それぞれの連結成分の回転数の和であるから，次が成り立つ。

$$L(\widetilde{C}(K))=\widetilde{L}(C')-af \qquad \cdots\cdots (4)$$

$\widetilde{C}(K)$，C' の対応する交点の任意の１組を P, P' とし，それらのまわりの連結成分の回転数の和をそれぞれ $\Sigma_P, \Sigma_{P'}$ とすると，$\widetilde{C}(K)$ の各連結成分の回転数は a だけ減るので，

$$\Sigma_P=\Sigma_{P'}-4a$$

が成り立つ。そのとき，P, P' の重みは，それぞれ，

$$G(P)=\frac{\Sigma_P}{4}, \quad G(P')=\frac{\Sigma_{P'}}{4}$$

であるから，$G(P)=G(P')-a$ となる。

$\widetilde{C}(K)$，C' の重みはそれぞれの交点での重みの和であるから，

$$G(\widetilde{C}(K))=\Sigma_P G(P)=\Sigma_{P'}(G(P)-a)=\widetilde{G}(C')-av \qquad \cdots\cdots (5)$$

が成り立つ。

したがって，(3)，(4), (5)より，次の等式が成り立ち，結論を得る。

$$L(\widetilde{C}(K))-G(\widetilde{C}(K))=(\widetilde{L}(C')-af)-(\widetilde{G}(C')-av)=\widetilde{L}(C')-\widetilde{G}(C')-a.$$

証明終

おわりに

以上，多角形の内角・外角の和の性質が，その不変性を拡張することで，図形の組合せ的性質に発展することを，具体的に提示してみた。それは，図形の不変性を発展させる例示であり，他の不変性の発展のモデルであると考えている。同時に，図形教材を発展させていく視点を示していると考える。

２節で述べた多角形の内角・外角に関する性質は，よく知られていることであろう。しかし，それを図形の不変性として重視する見方が，３節で示したような性質への発展につ

ながる鍵となっていることは，そう明確にされていない場合が多いのではないだろうか。本稿を通して，その側面を顕在化できたのではないだろうか。

本稿の考察を通して，教材開発に関する次の可能性が指摘できよう。

- 図形の中に何がしかの意味のある「和」や「差」などを見出し活用しようとすることで，不変な性質を宿した教材の工夫ができる
- しきつめ，分解合同，三平方の定理の証明などにも見られるが，図形を分解したり合成したりして考えることで，不変な性質をもつ教材の工夫ができる
- 図形の「回転」や「向き」の考え方を活用することで，図形を用いた負の性質の存在や偶奇性などの離散数学の側面をもつ教材の工夫ができる

最近の数学教育に関する学会でも，本稿で扱った，多角形の内角の和の教材性に関する発表がよく見られる。やはり，その不変性は，教材の視点から魅力のあるものであろう。今後も，様々な観点からの図形教材の考察を重ねていきたい。

参考・引用文献

(1) 今岡光範，速水誠：「多角形の内角・外角の和に関する考察」，全国数学教育学会誌 数学教育研究，第 13 巻，215-223，2007.

(2) Cromwell, Polyhedra, Cambridge University Press, 1997.

(3) 石谷茂，渡辺幸信，『図形の見方と教え方』，明治図書，1962.

(4) 文部科学省，『個に応じた指導に関する指導資料 ー発展的な学習や補充的な学習の推進ー』，事例 7, 13，中学校偏，教育出版，2002.

(5) 小林昭七，『曲線と曲面の微分幾何』，裳華房，1977.

(6) H. Whitney, *On regular closed curves in the plane*, Compositio Math., Vol. 2, 50-62, 1935.

(7) W. Fulton, Algebraic Topology, PARTⅡ, GTM153, Springer-Verlag, 1995.

(8) H. Freudenthal, Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Chapter 9, D. Reidel Publishing Company, 1983.

(9) M. Imaoka, I. Takata, *A combinatorial relation between winding numbers in a plane*, JP Journal of Geometry and Topology, Vol. 2, 203-221, 2002.

(10) 今岡光範，松田憲子：「閉曲線の回転数の内容学的考察」，全国数学教育学会誌 数学教育研究，第 8 巻，271-277，2002.

第６章　数理的思考の広がりを図る実践活動Ｉ

高校生による問題作り

菅野　栄光（愛知県立半田高等学校）
下村　　哲（広島大学大学院教育学研究科）
今岡　光範（広島大学大学院教育学研究科）

はじめに

筆者達は，これまで，次のような高校生による数学の問題作りの実践を行ってきた。

- 今岡光範 ： 高校生・大学生による数学の問題作り，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，第７巻，125－131，2001.
- 下村哲，今岡光範，向谷博明，菅野栄光： 高校生による数学の問題作り－高校３年生を対象としてー，全国数学教育学会誌 数学教育学研究，第９巻，243－253，2003.
- 下村哲，今岡光範，菅野栄光： 高校生による数学の問題作り (II) －数列の問題作りを通してー，全国数学教育学会誌 数学教育学研究，第 12 巻，215－225，2006.
- 菅野栄光，下村哲，今岡光範： 高等学校における発展的な問題作りの授業 －大学入試問題を活用した取組みー，日本数学教育学会誌，第 89 巻第７号，2－9，2007.
- 菅野栄光，下村哲，今岡光範： 高等学校における問題作りを取り入れた微分法の演算指導 －機械的練習からの改善をめざしてー，全国数学教育学会誌 数学教育学研究，第 14 巻，111-117，2008.
- 菅野栄光，下村哲，今岡光範：高校生による発展的な問題作り －コンピュータを活用した方程式の学習ー，第 41 回数学教育論文発表会論文集，99－104，2008.

これらの実践を通して，生徒による数学の問題作りが，いろいろな意味での数理的思考の広がりを図るのに適した活動であることを実感してきた。その面については，第一章でも述べたところである。

具体的にどのような活動になるのかを描くために，本章では，上で最後にあげた菅野・下村・今岡(2008)の論文の主要部を再録する。本論文は本研究の趣旨を生かした研究の成果であると考えている。

１．研究の位置づけ

新しい知見を得るために主体的で創造的な思考を働かせる，そのような力を育むための優れた方法の一つとして，学習者による問題作り（問題設定）の授業が考えられる。平林(1984)，Brown と Walter(1990)らによる「算数・数学教育のシツエーション」を生かした問題設定は，問題作りの基本的な方法を提示している。斎藤(1986)は，創造性の育成を目指して，高校生による問題作りの実践とその分析を行っている。筆者らは，図形領域・関数領域での問題作り（今岡(2001)，下村・今岡・向谷・菅野(2003)，数列の問題作り（下村・

今岡・菅野(2006)），大学入試問題を原題とした問題作り（菅野・下村・今岡(2007)）など，高等学校における問題作りの実践を多く行ってきた。これらの先行研究を踏まえ，数学Ⅱ「図形と方程式」の内容に関するコンピュータを活用した問題作りの授業実践を試みた。数学の指導にコンピュータを活用する場合，その形態は様々である。教師が要所で操作して見せ，生徒の理解を深めさせるといったことは比較的よく行われている。生徒一人一人が操作することが可能な場合，目前の問題を解決するためだけにコンピュータを活用するのではなく，自分の興味に応じて係数や変数の次数など設定を変えてみることによって学習に深まりが出てくる。「図形と方程式」の学習場面で，方程式の解を，グラフとグラフの共有点の x 座標として捉えさせることがある。文字定数の値に応じて解の個数が変化する様子は，コンピュータの画面上でグラフを動かせて考えるとイメージしやすい。ここでもう一歩踏み込んで，自分で色々と設定を変えて問題を作り変えてみることは，新しい発見や深い理解につながる。

２．指導の流れの概略

本実践は，平成 19 年 7 月～9 月に，公立高等学校 2 年生の 8 クラス（男子 162 名，女子 158 名，計 320 名）を対象にして行った。対象生徒は，2 年生になってから文系・理系のクラスに分かれていて，文理とも 4 クラスずつである。生徒の中には，１年次に数学の問題作りを経験している者もいたが，半数以上がそういった経験は未体験であった。

実施計画と指導目標は次のようである。

① 導入および課題の提示（1 時間）　② 問題作り（夏休み自宅課題 2～3 時間相当）
③ 割り当ての問題を考える（1 時間）　④コメント作成，意見交換（1 時間）
⑤ 発展的な扱い（3 時間）　⑥事後評価，ふり返り（1 時間）

ねらいは次の通りである。

・グラフの変化と方程式の解の個数の変化を関連付けて動的に捉えられるようにする。
・コンピュータを活用しながら多くのグラフに触れ，問題作りを通じて知識の統合を図る。
・互いに問題を解き合いコメントし合うことによって，数学的なコミュニケーション能力を高める。

本実践で，関数グラフソフト GRAPES Ver.6（フリーソフト：大阪教育大学付属高等学校池田校舎 友田勝久教諭作）を使用した。

３．原題と課題

(1) 原題に関して

まず，次のような問題を生徒たちに考えさせた。

（問１）２次方程式 $x^2-3x+1-k=0$ の異なる実数解の個数を答えよ。

多くの生徒が判別式 $D=5+4k$ の符号によって３つの場合に分類して解答していた。このような処理の仕方は１年次に繰り返し練習をしており，その解法についてはよく覚えていたようである。続けて(問２)を提示した。

（問２）３次方程式 $x^3-3x-k=0$ の異なる実数解の個数を答えよ。

今度は(問１)のときのようにすぐに取りかかる生徒は少なく，戸惑った様子の生徒が多かった。２次方程式の場合は判別式を用いて機械的に解くことができたが，３次方程式の場合は同じようには処理できない。方程式の解というのは，グラフで考えるとx軸との共有点のx座標であることに気付かせ，そういった観点からもう一度（問１）を捉え直してみることにした。

GRAPES を用いて，$y=x^2-3x+1-k$ のグラフをパラメータ k の値を変化させて$D=0$ のときのkの値($k=-1.25$)を境にグラフがx軸と交わったり離れたりする様子を見ていた。多くの生徒は，判別式を使って問題は解けるけれども，その図形的な意味を把握しておらず，機械的な学習になってしまっていたようである。

（問２）も同様に，３次関数のグラフが上下に動く様子を観察させ，$k=\pm2$ のとき，グラフがx軸と接し，それを境に実数解の個数は変わることを読み取らせた。しかし，３次関数は２次関数のときに比べてグラフが複雑になっているので，$f(x)-k=0$ というタイプの方程式をグラフで考える際には，$y=f(x)$ と $y=k$ の２つの関数のグラフに分けて考えさせることにした。

(2) 課題の提示

３節での活動後，次のような課題レポートを課した。

(課題)「３次方程式 $x^3-3x-k=0$ の異なる実数解の個数を答えよ」という問題を原題として，GRAPES を活用し，自分の創意工夫によって作り変えた問題を１題作成せよ。

３節の（問２）を原題とした発展的な問題作りである。生徒の状況を考慮して，次の作成例をいくつか示しておいた。

○ 定数 k を変えてみる。

(例) ３次方程式 $x^3-3x+2k=0$ の異なる実数解の個数を答えよ。

○ x の部分を違う式に変えてみる。

(例) 方程式 $2^x-k=0$ の異なる実数解の個数を答えよ。

○ 解の範囲に制限を加えてみる。

(例) ３次方程式 $x^3-3x-k=0$ がただ１つの正の実数解のみもつとき，定数kの値の範囲を答えよ。

○ x の係数に k を含めてみる。

(例) ３次方程式 $x^3-kx-k=0$ の異なる実数解の個数を答えよ。

また，コンピュータを活用して問題作りを行う際の注意点として，以下にあげた点を指摘しておいた。

ア．GRAPES を活用し，グラフを動的に捉え，試行錯誤すること。

イ．作成した問題が完成するまでの思考過程をコメントとして記述すること。

ウ．安易に参考書や問題集の式を丸写ししないこと。

エ．図を入れた模範解答（値等は近似値でもかまわない）を用意すること。

オ．完成後に自分以外の複数の生徒に作成した問題を解いてもらう（コンピュータを用いてグラフの動きを観察してもらう）場面を設定する予定であること。

カ．数学的に興味深い問題は，クラスをこえて全学年の授業で紹介すること。

イはワークシートにコメントを残すことによって，自分の思考が整理でき，問題が完成した後のふり返りの効果をねらっている。また，出来合いの問題をそのまま流用といったことを抑止する効果ももたらす。エに関しては，模範解答には，GRAPES の座標軸からよみとれる程度の近似値が記されていればよいとした。本研究では式計算によって数学的に方程式を解くことより，数多くの方程式についてグラフで観察していくことを重視している。教科書等ではあまり見られない，汚い数値（キリのいい整数ではない数値）の例を多く見ていくことの教育的効果もねらいとしている。オ，カについては，先の実践においてすでに検証されたように，自分が作った問題が他者に解かれたり公開されたりするといった前提が，より意欲的に問題作りに取り組むきっかけになるからである。

4．問題作りの活動

生徒に対して，４節で述べたような課題提示がなされた後，夏休みを含めて約２ヶ月という比較的長い期間が問題作成期間として与えられた。GRAPES はフリーソフトであり，多くの生徒は家でインターネットに接続できる環境であったので，各自ダウンロードして使えるようにしたようである。家でコンピュータが使えない者，もしくは，コンピュータの操作が不得手で友人と相談したり教えてもらったりしながらやりたい者のために，時間を決めて学校のコンピュータルームを解放し，自由に GRAPES を使ってもよいこととした。締め切りが近くなった頃には，学校で問題作りを行う生徒も多数見られた。

まず，各クラスごとに生徒同士で問題を解き合う（厳密には，本研究においてはコンピュータに入力してグラフの動きを観察する）ことを行った。問題作りの実践において，全体の場で何題か選んで取り上げることとは別に，「自分が作成した問題を他者に解いてもらう場面を確保すること」は極めて重要である。その他者が教師であっても構わないが，多くの場合，時間的制約から困難であることが予想されるので，生徒同士で行わせるのがよいであろう。いずれにしてもこれを行わずに，選んだ問題のみを取り上げると，生徒の満足度および充実感，その後の問題作りに対する意欲などに悪影響を及ぼす。

本研究においては，コンピュータルームの教師用サーバーに生徒の作成した問題をストックしておいて，各生徒は LAN 回線を通じて割り当てられた問題を閲覧して解くようにした。１つの問題に対して４人の解答者（１人の生徒に対して４題の問題）を割り当てた。コンピュータで結果を確認した後は問題作成者に対して，問題に関しての感想・質問・改善点の提案など自由にコメントを送るようにした。すべて LAN 回線によるネットワークを利用して行った。また，時間に余裕のある生徒は，割り当てられた４題以外にも興味のある問題に自由にチャレンジしてよいこととした。

その後数時間の授業を使って，教師が選んだ問題をクラスの枠をこえて取り上げ，みんなでコンピュータを操作してみることにした。

数学の問題作りとそれを媒介とした友人間のコミュニケーションについては，先の実践

の場合と同様，良好になされたようである。

5．生徒が作成した問題

生徒が作成した問題のいくつかを例示する。

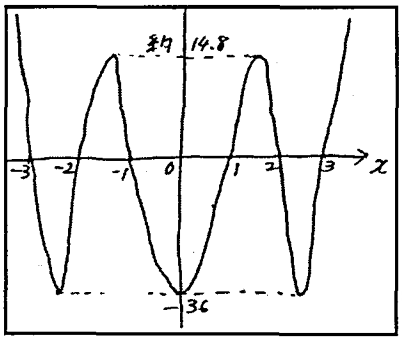
<生徒が作成した問題①>

$x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 - k = 0$
の異なる実数解の個数を求めよ。

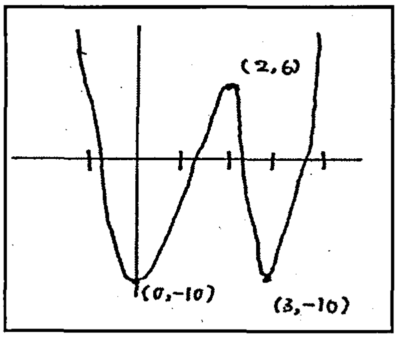
<生徒が作成した問題②>

6次方程式 $x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 10 + k = 0$
の異なる実数解の個数を答えよ。

４次以上の高次方程式を作った者が一番多く，コンピュータの助けを借りることによって，グラフは３次関数までという教科書の制約を離れることができた。問題①では，kを分離した後の６次関数のグラフは５か所で極値をとる（図１）。これより，直線 $y = k$ は極小値と極大値の間において，６次関数のグラフと最大で６つの交点をもつ。問題②は同じ６次方程式ではあるのだが，３か所でしか極値をもたず，最大で４解しか存在しない（図２）。この２つの問題を比較することによって，生徒たちは一般にn次方程式が必ずしも最大でn個の実数解をもつわけではないということを理解したようである。また，問題①に関連して偶関数のグラフはy軸について対象であることについて触れた。生徒たちは，問題①の式に奇数次の項を継ぎ足してグラフを非対称に変えてみたり，逆に問題②の式から奇数次の項を取り除いたりしてグラフの変化を観察していた。こういった項を付け加えたり削ったりしても一瞬にしてグラフがえがけるのがコンピュータの利点である。



（図１）



（図２）

<生徒が作成した問題③>

$3x^5 - 45x^4 + 220x^3 - 360x^2 + 300 + k = 0$
の異なる実数解の個数を答えよ。

問題①，②はともに最高次の項の次数が偶数である高次方程式であったが，問題③のように奇数になるとグラフは上から下まで連続になり，解の個数が0になる場合は起こらなくなる。この問題は5次方程式であるが，生徒たちはそれぞれ式を変形して7次にしたり，9次にしたりして納得いくまでコンピュータを操作していた。中には，100 次関数と 99 次関数のグラフを比較していた生徒もいた。

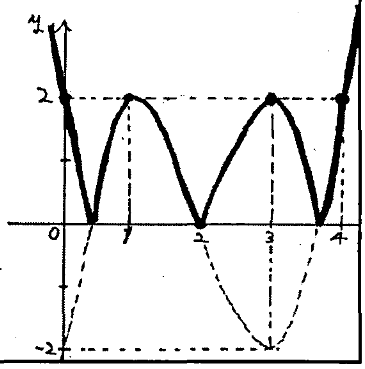
〈生徒が作成した問題④〉

3次方程式 $|x^3-6x^2+9x-2|-k=0$ の異なる実数解の個数を答えよ。

絶対値記号を使ってみたいという生徒も少なくなかった。GRAPES ではabs( )という関数で絶対値記号も扱えることを教えると，生徒たちは絶対値を用いることによってグラフがどう変わるのかを観察し，より複雑となったグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数を探っていた。

絶対値記号の中の3次関数をうまく調整して，x軸に対して折り返したグラフが直線 $y=2$ について線対称になるように工夫をしている。その際，GRAPES を活用してグラフを上下動させて考えたという。問題④の作成者による解答は次の通りである。

式を変形して、$|x^3-6x^2+9x-2|=k$ とする。
両辺をそれぞれ $=y$ とおくと、
$y=|x^3-6x^2+9x-2|$ …①
$y=k$ …②
①と②のグラフをGRAPESで描いて、その共有点の個数を考える。



よって、
$k=0$のとき 実数解 3個
$0<k<2$のとき 〃 6個
$k=2$のとき 〃 4個
$2<k$のとき 〃 2個

〈生徒が作成した問題⑤〉

$x^2-3\sqrt{2}x+5-\sin\theta=0$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ が
異なる2つの実数解を持つとき、
定数θの値の範囲を答えよ。

kの部分を三角関数に変えることによって，x軸に平行な直線の動きが単純ではなくなった問題である。θの値の変化により，ある幅で上下動するのだ，という作成者の解説をみな興味深そうに聞いていた。

作成された問題の不備や作成者の勘違いを発端にして，その問題点をみなで共有しながら学んでいくという過程は，問題作りの授業のよさの一つである。最後に紹介する問題⑥もそのような展開になった。

〈生徒が作成した問題⑥〉

3次方程式 $\frac{1}{3x^3}-2x^2+3x-k=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

この問題を作成した生徒は，最初は普通の３次方程式を作成したつもりであった。ところがコンピュータの入力ミスで分母にxを入れてしまったところ，グラフが不連続の面白い形になったのでそのまま問題にしたという。これを授業で取り上げ，色々と気づきや意見を言わせてまとめていった。生徒たちは，$y=\frac{1}{3x^3}$や$y=-2x^2+3x$のグラフを重ね合わせ，xが０の付近では分数関数に，$\pm\infty$では２次関数に近い形のグラフになることを理解した。複数のグラフを重ねて同時に表示したり消したりできるのも関数ソフトを活用する利点である。この問題を考えた後で，生徒たちは分数関数とn次関数の和である関数を自分で作って表示させ観察していた。内容としては数学Ⅲになってしまうが，この問題について考え解説を行ったのは文系クラスの生徒である。0による除法が行えない理由にまで立ち戻って議論したクラスもあり，漸近線の意味やタンジェントのグラフが所々不連続である理由が改めて分かったという生徒もいた。xに代入できないような値がある関数の式を入力しても，GRAPES はちゃんとそのように(不連続に)えがいてくれることに対して，生徒が言うには「グラフは正直である」とのことであった。

６．考察とまとめ

事後評価によると，「方程式の解の個数を問う問題を原問題とした問題作りにコンピュータを活用することは有効であったかどうか」という質問に対して，「とても有効であった」が 65。5%，「どちらかといえば有効であった」が 31。6%と，実に 97。1%もの生徒がその有効性を認めている。自分自身でコンピュータを操作することによって，グラフの動きと連動した方程式の解の個数の変化の把握が容易になり，問題作りがスムーズに行われたものと思われる。

計算や式変形の負担を減らし，短時間で多くのグラフにふれることができるのはコンピュータの強みである。このことによって多くの発見や気づきがなされた。「コンピュータを活用した問題作りを通して意外な発見や興味深い結果などがあったかどうか」という質問に関しては，「多くあった」，「多少あった」が合わせて 47。7%と，約半数の生徒が何らかの発見をしている。そして，この発見の程度と学力の高低には関連性がない。

次のページにある(表１)は，発見の程度を４段階，数学の学力を上位，中位，下位の３段階で表した場合のクロス表である。χ^2値(カイ２乗値)を計算すると 4。998，Cramer のＶは 0。090 になり，ほとんど関連性はないと見なせる。もともと問題作りの授業は，学力の差をこえて生徒の授業参加が期待できる可能性を持っていると思われる。

	全くなかった	あまりなかった	多少あった	多くあった	計
上位	6	40	32	18	96
中位	7	54	42	15	115
下位	7	51	29	12	99
計	17	145	103	45	310

（表１）

高等学校で生徒自身がコンピュータを操作する活動を頻繁に行うのは，まだまだ難しい面もあるのが現状である。しかし，今回の「図形と方程式」における解の個数問題を原題とした問題作りの授業のように，グラフを動的に捉えさせたり，多くの例を試したりさせたい場面には，その活用を検討してみる価値があるものと思われる。

参考文献

1) 鈴木純子(1998),「グラフ電卓を活用した数学科の指導に関する研究―問題づくりを取り入れた「三角関数」の指導―」,『日本数学教育学会誌』, 第 80 巻, 第 9 号, pp。165-169。

2) 磯田正美・大久保和義・飯島康之(1992), 『メディアを活用する数学科課題学習―場面からの問題作成による授業改善―』, 明治図書。

7) 平林一栄(1984), 「問題解決から問題設定へ」, 『日本数学教育学会論文発表会論文集』, pp。69-72。

8) Brown, S。I。・Walter, M。I。共著／平林一栄監訳 (1990) ,『いかにして問題をつくるか―問題設定の技術―』, 東洋館出版。

9) 斎藤昇(1986),「問題創作学習における学習者の関心―創造力育成を目指して―」,『日本数学教育学会誌』, 第 68 巻, 第 5 号, pp。24-33。

10) 今岡光範(2001), 「高校生・大学生による数学の問題作り」, 『全国数学教育学会誌, 数学教育学研究』, 第 7 巻, pp。125-131。

11) 下村哲・今岡光範・向谷博明・菅野栄光(2003), 「高校生による数学の問題作り―高校３年生を対象として―」,『全国数学教育学会誌, 数学教育学研究』, 第 9 巻, pp。243-253。

12) 下村哲・今岡光範・菅野栄光(2006) , 「高校生による数学の問題作り (Ⅱ)―数列の問題作りを通して―」, 『全国数学教育学会誌, 数学教育学研究』, 第 12 巻, pp。215-225。

13) 下村哲・今岡光範(2007), 「コンピュータを活用した数学の問題作り (Ⅳ)―原題の設定の考察を中心として―」,『全国数学教育学会誌, 数学教育学研究』, 第 13 巻, pp。225-234。

14) 菅野栄光・下村哲・今岡光範(2007), 「高等学校における発展的な問題作りの授業―大学入試問題を活用した取り組み―」,『日本数学教育学会誌』, 第 89 巻, 第 7 号, pp。2-9。

第７章　数理的思考の広がりを図る実践活動 Ⅱ

大学生によるコンピュータを活用した問題作り

下村　哲　(広島大学大学院教育学研究科)
今岡 光範 (広島大学大学院教育学研究科)

はじめに

筆者達は，数年に渡り，教育学部で数学教師をめざす学生を対象にして，コンピュータを活用した数学の問題作りの活動を取り入れた授業を実践し，その結果を分析して，その改善をめざす研究を行ってきた。そして，その成果を全国数学教育学会で研究発表し，論文で公表してきた。それらの論文は，以下のものである。

コンピュータを活用した数学の問題作り（全国数学教育学会誌　数学教育学研究）

（Ⅰ）大学における実践を通して　（2002年，第8巻）

（Ⅱ）自由に問題を作成する大学における実践を通して　（2003年，第9巻）

（Ⅲ）大学生により作成された問題の活用を中心として（2004年，第10巻）

（Ⅳ）原題の設定の考察を中心として（2007年，第13巻）

さらに，2008年1月の全国数学教育学会にて，同研究「（Ⅴ）作成された問題の考察を中心として」と題した研究発表を行い，現在，投稿中である。

問題作りの活動は，「問題設定」という表現が正式であるが，それは，問題解決能力を育成する大事な要素であると考えられてきた。しかし，我々は，単に問題解決能力の育成に限らず，もっと多くの意義があると考えている。例えば，学習内容の理解を深化，作品作り，問題を創造することへの生徒の関心・意欲，問題を軸にしたコミュニケーションの向上など，さまざまなプラス面があると考えている。特に教育をめざす大学生にとっては，そのような問題作りを自分自身が経験する効果は大きいと考える。

大学生を対象にした問題設定は，外国でも，教員養成との関わりで実践されている。しかし，多くが，その形態や方法，心理学的な分析，数学教育における位置づけなどの，どちらかといえば，原理や方法論的な枠組みの研究が多く，数学的な内容面にも入り込んだ研究は少ない。

我々の問題作りの研究の目的は，コンピュータを活用する技術の向上と，創造性を高め数理的思考の広がりを図ることとの相乗効果をねらうものであり，将来の数学教師が自らの数学力を鍛え，生徒の創造性を育む活動を企画できるようにすることである。研究を行う観点としては，いくつかあげれば，次のようなことがあった。

1）　大学生による問題設定の活動は有効か。

2）　大学生の問題設定の活動を，授業でどのように組織するのか。

3）　大学生は，問題作りの過程で，どのような工夫ができるか。

4）　大学生は，数学的な内容や質に関して，どんな問題が作れるか。

5）　原題に関して，どのような設定が考えられるか。

6）原題を固定しない，自由な設定での問題作りについてはどうか。

7）コンピュータは問題作りに有効か。

8）大学生は，問題作りの過程でコンピュータをどのように使えるか。

9）コンピュータを利用する問題設定と利用しない問題設定との比較はどうか。

10）コンピュータを用いる問題設定に対する学生の情意面はどうか。

実際には，本研究でふれていない他の観点も考えている。例えば，作られた問題の評価はどうするか，問題設定の他の学習への波及効果はどうかなど，評価に伴うこともある。筆者達は，大学生の数理的思考の広がりという意味では，問題設定における数学内容面に力を入れてきた。いずれにせよ，このような研究はほとんど行われておらず，本研究が他には見られない側面があると考えている。

本稿では，（Ⅰ）～（Ⅲ）で行った研究を概略的に振り返ると同時に，（Ⅳ）の研究を少し詳しく取り上げる。なお，本研究を通して，大学での授業実践は下村が担当し，コンピュータの数式処理ソフトWolfram Research社のMathematicaを活用した。

1．これまでの研究から

研究（Ⅰ）．

本研究では，高校数学程度の原題を設定し，コンピュータ及び既有の知識を活用して問題を発展させることを試みた。この研究はその後の一連の研究の出発点であり，将来教師を目指す学生に，作成する問題の結果を予想したり，発展的な考え方をしたりするのに，コンピュータがどのように有効であるかを調べることに重点を置いた。

そして，次のようなことをねらいとした。

・将来，生徒に問題の発展的な扱いによる指導ができるための経験

・将来，生徒に創造的な考え方を培う指導ができるための経験

・作成した問題の発表，検討により，学習，創作に対する意欲，関心につながることへの認識

・既習内容の理解の深まり

・予想をたてたり，発展的な考え方をするのに，コンピュータが有効であることを理解する

このときの授業実践で用いた原題は，次のようである。この原題は，問題を発展させようとするときに，多様なものが考えられることや，数学的に面白い性質を表していると考えた。

［原題１］２つの放物線$C:y=x^2$, $D:y=x^2+1$について，Dの接線とCとで囲まれた図形の面積は一定となるか考えてみよう。

［原題２］２つの放物線$C:y=x^2$, $D:y=x^2+2$について，Dの接線とCとで囲まれた図形の面積は一定となるか考えてみよう。

このときの活動で，学生が作った問題を例示すると，次のようなものがあった。

問題：２つの曲線 $C:y=x^2$, $D:y=x^4-4x^2$ について，C と D で囲まれた面積と，C, D の交点を結ぶ直線と C で囲まれた面積が等しくなるかどうかを考えてみよう。◇

学生のコメント：いきづまってふとこの問題をやってみたところ，うまく問題が解決できた。◇◇

原題の関数の本質的な特徴である関数の対称性をとらえた問題である。また，２次関数から４次関数に，構成要素を変更している。出題者の記述，説明によると，問題作りに熱中し，$C:y=x^4$，$D:y=x^4+1$ の場合，コンピュータで数値計算をしながら３次関数と４次関数が接する場合，２次関数と４次関数が交点をもつ場合を考え，最後に，２次関数が４次関数に接する場合を考えて，偶然に２つの面積が一致する場合を見つけたということである。コンピュータなしでは容易に作成されなかったであろう問題である。

問題： 曲線 $y=ae^x\ (a\neq 0)$ 上の任意の点 P での接線と x 軸との交点を T，P から x 軸へ下ろした垂線と x 軸との交点を Q とするとき，線分 TQ の長さは常に一定となるか考えてみよう。◇

学生のコメント： 例題では，面積が一定となることについて考えた。今回は面積ではなく，線分の長さで一定になるものはないかと考えて，この問題を作成しました。◇◇

面積から線分の長さに観点を変更し，構成要素を放物線から指数関数に変更した問題である。出題者は，具体的な場合をコンピュータを用いて描いた上で，結果を予想している。$a=1$ の場合の問題を作成し，グラフと数値計算から結果を予想している学生もいた。予想を立てるのに積極的にコンピュータを利用した好例である。

授業では，学生が作った問題の中から，最初の問題例を授業で発展させて，次のような問題を授業で全員に考えてもらった。

問題：２つの曲線$C:y=ax^2+c$，$D:y=x^4+bx^2+c$について，CとDで囲まれた面積と，C，Dの交点を結ぶ直線とCで囲まれた面積が等しくなるかどうかを考えてみよう。◇

多くの学生が，コンピュータを用いて考えていた。$a=b$ の場合には，問題のように囲まれる面積がないことに気付いた学生や２つの面積を別々に求めて、その形から等しくならないと結論した学生もいた。$a=3$，$b=-12$ という具体的な場合を考え等しくなるといった意見もでた。また，常に，等しくならないわけではないという意見もでたので，「どういう場合に等しくなるのだろうか」という発問をすることにより，考えるのをやめていた学生に再度考える機会を与えた。その結果，$b=-4a$ の場合に等しくなると言う意見が数多くでたので，その結果を全員で確認し，最後に $a>b$ を仮定しておくことが望ましいことを注意して授業を終えた。

学生の感想をアンケートを通して調べた。その一つに次のようなものがあった。

項　目		人数（人）	反応（%）
コンピュータは予想を立てるのに役に立つ道具に	なる	18	51.4
	少しなる	13	37.1
	どちらでもない	1	2.9
	あまりならない	3	8.6
	ならない	0	0
コンピュータは，予想の解決に役に立つ道具に	なる	24	68.5
	少しなる	9	25.7

	どちらでもない	1	2.9
	あまりならない	1	2.9
	ならない	0	0
コンピュータは，新しい知見を得るのに役に立つ道具に	なる	18	51.4
	少しなる	16	45.7
	どちらでもない	1	2.9
	あまりならない	0	0
	ならない	0	0

コンピュータの有用性に関するアンケート

この研究(I)から，例えば，次のことが示唆できた。

1．コンピュータを活用した問題作りは，将来教師を目指す大学生にとって，予想を立て証明していく中でのコンピュータ活用の有効性を経験する上で，よい機会となる。
2．日常の授業では見られなかった探究的な学習活 動が見られた。コンピュータを活用した問題作りは，学生の積極性を引き出す効果がある。
3．作成された問題を授業で公開することは，良い問題をつくろうとする意欲につながる。
4．学生の作った問題を検討し，学生はどう工夫して問題を作ったかなどを知ることは，学生の理解につながる。

研究（II）

この研究では，研究（I）における原問題を設定した問題作りの後に，「自由な設定」でコンピュータを活用する問題作りの試みを行った。この「自由な設定」というのは，小学校や中学校の問題作りにあるような“原題”の形ではなく，既習のある学習単位の内容などを視野において，問題設定を学生に自由に任せる方法を意味する。原問題をもとにした問題作りの経験の上に，自分で問題を組み立てていく課題をすることで，一層，既習の内容に対する理解が深まるとともに，数学的思考の広がりや知識の統合が期待できると考えた。将来数学教師を目指す学生にとって，自由に作成する問題の結果を予想したり，発展的な考え方をしたりするのに，コンピュータがどのように有用であるかを理解させることに重点を置いた。

この自由な設定で与えた課題は次のようなものである。

[課題]. 微分法，積分法，重積分の範囲で面白い問題を工夫して１題作成せよ。ただし，コンピュータを利用し，どのように利用したかを説明せよ。発問の文章、数値等は各自考え，教科書や問題集にある問題や他の学習者と同一の問題はありえないものとする。作成した問題の解答（説明）を与えよ。

そのねらいとしては，研究(I)で示したもの以外に，次のようなものがあった。

- 自由な設定でのコンピュータを活用した問題作りによる既習の学習内容の見つめ直しを行う。
- 研究(I)における経験をいかした問題作りによる数学的思考の広がりや知識の統合を図る。

そのときの学生が作った問題を例示してみよう。

問題： 楕円 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ に外接する長方形を書き，その長方形に外接する楕円を書く。この作業を繰り返していくと，この楕円の面積は，どのように大きくなっていくか。◇

学生のコメント：円の場合は２倍ずつ増加しているが，楕円の場合はどうなんだろうかと考えた。前回は微分の問題を作ったので，今回は積分の問題を作ってみようと思った。◇◇

学生の説明によると，馴染みある図形の楕円を題材に問題にしてみようということである。非常に素朴な疑問を問題にしていて面白い。

問題： $y=ax^{m/n}$ $(a>0, m<n)$ 上の１点Pにおける接線が，x, y 軸と交わる点をそれぞれ点Q，Rとするとき，QR:PR=n:m となることを示しなさい。◇

学生のコメント：まず，$y=x^{1/2}$ のグラフを書いて何か法則はないのか探していたら，QR:PR=1:1 になることに気付いて，$y=x^{1/3}$ ではどうかと思い，コンピュータを用いたら，QR:PR=m:n ではなく QR:PR=n:m であることがわかった。これは面白いと思い，$y=x^{m/n}$ に a をかけても，この法則が成り立っていたので，これを問題にしました。◇◇

面白そうな関数として無理関数を選んだ問題である。$y=x^{1/2}$，$y=x^{1/3}$ の場合でコンピュータを活用して QR:PR が指数と関連があることを予想している。具体的な場合から一般的な場合に，試行錯誤しながら自ら発展させていく姿勢がみられた。既習の知識の整理の中での新しい発見は意味あるものである。

授業では，学生が作った問題の中から，最初の問題例を授業で発展させて，次のような問題を授業で全員に考えてもらった。

問題：半径1の円に外接する二等辺三角形のうち，面積が最小のものを求めなさい。この時二等辺三角形の高さ，底辺をそれぞれ，h，$2r$とする。◇

既存の問題にあると思われる基本的な問題であるが，まだまだ工夫の余地があることを示すために，問題の解答を予想させ，黒板を用いて，簡単に解答を説明してから，次の問題を全員で考えた。

問題：直円錐に半径１の球が内接するとき，その直円錐の体積の最小値を求めよ。◇

断面を考えれば，学生の作った問題の解答と本質的には同じ解答になることをコメントした。また，構成要素の直円錐を正四角錐にしたり，内接ではなく外接するときを考えたり，体積の代わりに，表面積，具体的には，（球の表面積）/（正四角錐の表面積）などを考えてみてはということを言った。

作成された問題は，学生の問題の分野を選んだ理由をもとに分類すると，次のようであり，下記のようなことが観察できた。

【a】問題作り(I)で作成した問題に関連した問題
【b】問題作り(I)で作成した範囲以外の問題
【c】これまでの学習を省みた問題
【d】自分の好きな分野の問題
【e】不得意分野の問題

【f】コンピュータを積極的に活用する問題
【g:】日常の授業からヒントを得た問題

【a】前回やや不満足なままで問題を提出したためにより工夫された問題を作成しなおそうとしたり，独自に問題設定できなかったために再度同じような問題を作成した学生が見られた。

【b】せっかくの機会があったとき，以前とは違った試みをしてみようと思うことはよくある。複数回問題作りをすることは，視野を広げる契機となるのではないだろうか。

【c】高校までの学習を振り返ったり，残していた疑問にこの機会に取り組もうとした学生が見られた。

【d】慣れないことをするとき，自分の得意なところや興味あるところから取り組むのは自然なことと思われる。

【e】苦手と感じる内容の中に何かありそうだという感覚は誰にでもある。今回のような問題作りはそのような苦手意識に立ち向かう機会を与える要素にもなる。

【f】意識的に，できるだけコンピュータを活用しようとした問題が見られた。以前よりも一層コンピュータに慣れ親しむ機会となることも期待される。

【g:】日常の授業を振り返り，問題作りの機会を利用して，学習内容を問題設定にいかそうとしたり，より理解しようとした問題が見られた。

この研究(II)から，例えば，次のことが指摘できた。

1．コンピュータに慣れ親しんでいない段階では，比較的問題が作りやすいように，原問題をもとにした問題作りを試行して，コンピュータに少し慣れ親しんでから，自由な設定での問題作りを試行してみることが考えられる。
2．コンピュータを活用した自由な設定での問題作りは，日常の数学の学習とコンピュータの学習が　前提となる。問題を作成していく中で，既習内容の理解の深まりと知識の統合が期待される。その場合，継続性が問題ではなく，機会を設けることに意義がある。
3．原問題をもとにした問題作りの経験をいかし，コンピュータを有効に活用した問題が数多く作成された。コンピュータは，数学的思考の発展を促　進する有効な道具となりえる。

研究（III）

研究（II）までの時点では，作成された問題の有効な活用法については十分な考察がなされていなかった。そこで，研究（III）では，高校数学程度の研究（I）とは異なる原題を設定し，コンピュータ，及び既有の知識を活用する問題作りの試みを示すとともに，作成された問題の有効な活用法についても考察した。

その原題は次のようであった。

［原題１］C:$y=x^3+x$上の点P_1でCの接線をひき，再びCと交わる点をP_2とする。Cと線分P_1P_2が囲む図形の面積をS_1とする。同様に，点P_2での接線とCの交点をP_3とし，Cと線分P_2P_3が囲む図形の面積をS_2とする。このとき，S_1とS_2の比は一定となるか考えてみよう。

［原題２］. C:$y=x^3-x$上の点P_1でCの接線をひき，再びCと交わる点をP_2とする。Cと線分P_1P_2が囲む図形の面積をS_1とする。同様に，点P_2での接線とCの交点をP_3とし，Cと線分P_2

P_3が囲む図形の面積をS_2とする。このとき，S_1とS_2の比は一定となるか考えてみよう。

ねらいとして研究(I)，(II)以外のこととして，つぎのことを設定した。

・ 作成された問題を評価したり，作成した問題を評価されたりする経験をする

作られた問題の活用として，次の課題を課した。

［課題］ 原題１，２の結果を参考にして，発展問題（例えば，一般化）を２題作成せよ。ただし，コンピュータを積極的に活用し，どのように活用したかを説明せよ。発問の文章，数値等は各自考え，他の学習者と同一の問題はありえないものとする。作成した問題を解答（証明）せよ。

今回の問題作りでは，将来数学教師を目指す教育学部の学生がどの程度の一般化ができるかを把握するのも目的の一つであった。作られた問題例には次のような問題があった。

問題： 放物線$C: y=x^2$と直線$l: y=x$との交点をO, Pとする。（ただし，Oは原点，P(1,1)とする）$y=x$と平行でy軸と$(0,b)$ $(b>0)$で交わる直線をmとする。$x\leqq 0$で放物線Cと直線mとで囲まれる図形の面積をS_1, $x\geqq 1$で放物線Cと直線mとで囲まれる図形の面積をS_2とするとき，S_1とS_2の比がどうなっているか調べよ。◇

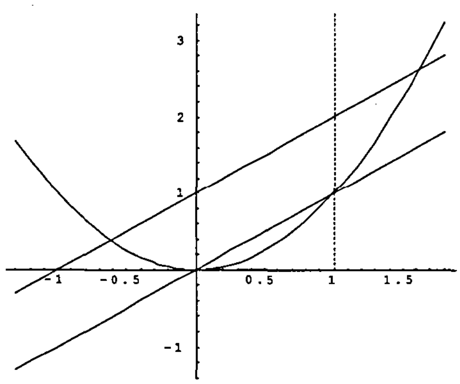


図1

構成要素を３次関数から２次関数に変更した問題である。レポートによると，家庭教師をしている中学３年生といっしょに解いた問題を，問題作成の糸口としている。出題者は，b=1, 3, 10, 1/2の場合のグラフを描きながらS_1とS_2の面積を数値計算している（図１は，b=1の場合)。実験の結果，$S_1=S_2$となることを予想し，一般的なbの場合で証明を与えている。予想を立てるのにコンピュータを活用して，自分なりに工夫をした問題である。直線lを $y=ax$として，より一般的な問題設定をしてもよかったであろう。

また，大学生の中には，具体的な場合をいろいろ調べて発展させる学生がいることがわかる。

問題：$x^2/4+y^2+z^2=1$内部でxy平面上部，$f(x, y)=\sqrt{3/4}\ x$の上部にある立体の体積を求めよ。◇

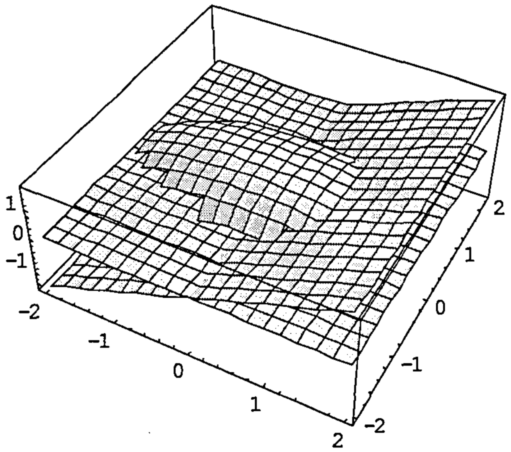


図２

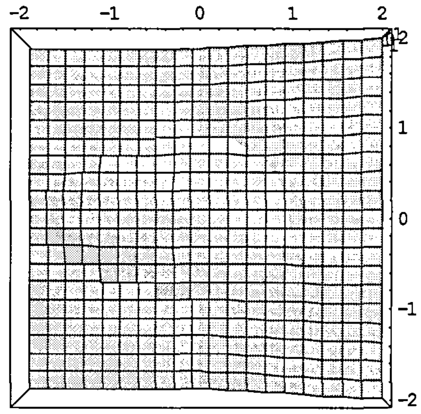


図３

楕円体と２つの平面の位置関係（図２），求める体積を計算する時の積分範囲（図３）を，コンピュータを活用して，適切に設定している。楕円体を扱っているので，数学的な程度も低くない。この問題は，積分範囲に半円が表れるような切断の仕方に独自性があり，出題者の問題作りにかける熱意を感じる。

平成15年1月9日に，全員の問題のプリント資料を配布して，目を通してくるように指示し，面白いと感じた問題，興味をもった問題，難しそうだなと思った問題を選んでもらったり，一人２題分（一人あたりの作成した問題分）の解答作成をくじ引きで割り当てた。1月16日，原題の発展として，次の問題を考えた。

問題. $C{:}y=ax^3+bx$ $(a>0)$上の点P_1でCの接線をひき，再びCと交わる点をP_2とする。Cと線分P_1P_2が囲む図形の面積をS_1とする。同様に，点P_2での接線とCの交点をP_3とし，Cと線分P_2P_3が囲む図形の面積をS_2とする。このとき，S_1とS_2の比は一定となるか考えてみよう。◇

多くの学生は上の問題設定では，$S_1{:}S_2$は一定となるとは思わなかったようである。少し考えてもらってから，黒板を用いて解説した。次に，一般の３次関数$C{:}y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$については，変曲点に関して対称であることに注意し，変曲点を原点に平行移動して考え

ればよいことを確認した。

今回の問題作りの授業では，意欲・関心をもってく発展的な問題についての授業に取り組んでもらおうと思い，次のア）とイ）の工夫をした。

ア）50人分の問題のプリント資料を配布して，目を通してくるように指示した。また，くじ引きで相手を選び，一人２題分（一人あたりの作成した問題分）の解答作成を割り当てた。その際，解答者は出題者に，出題者は解答者にコメントをつけて返却してもらうこととした。

イ）面白いと感じた問題，興味をもった問題を３題，難しいと感じた問題を３題，選び，選んだ理由も書いてもらった。

ア）で，友人の問題を解いてアドバイスをしたり，コメントをしたりすることについてどう思いますかについては，（表1）のようであった。

（表1）

評価	人数（人）	反応（%）
すごくよかった	13	26.5
よかった	29	59.2
どちらでもない	7	14.3
よくなかった	0	0
全くよくなかった	0	0

イ）で選ぶ活動についての感想については（表4）のようであった。

（表4）

評価	人数（人）	反応（%）
すごくよかった	12	24.5
よかった	19	38.8
どちらでもない	17	34.7
よくなかった	1	2.0
全くよくなかった	0	0

研究(Ｉ)，(Ⅱ)で指摘した以外に，例えば，次のようなことが指摘できた。

1．作成された問題の有効な活用法として，ランダムに相手を選び，一人２題分（一人あたりの作成した問題分）の解答作成を割り当て，解答者は出題者に，出題者は解答者にコメントをつけて返却してもらうことが考えられた。友人の問題や自分の問題に深い洞察をしてから発展的な問題についての授業に取り組んでもらうことが出来た。また，所属するコース内及びコースを超えて，仲間づくり，普段あまり話さない人とのコミュニケーションのきっかけとなる，などの効果があった。

2．作成された有効な問題の活用法として，面白いと感じた問題，興味をもった問題，難しいと感じた問題を選んでもらうという活動が考えられた。全員の問題に目を通すことになり，発展的な問題についての授業に効果的であった。

3．コンピュータを活用した問題作りにおいて，過去の問題作成例の資料を配布したり，時々，「コンピュータを用いて問題作りをしてもらいますよ」といった言葉がけをするのは，心構えの面や問題作りをする際に，学生にとって有効であったと推測される。

4．大学生の中には，既習内容ではない題材を，コンピュータを活用することにより解決

させることができることがわかった。コンピュータによる支援の可能性が感じられる。

5．大学生の中には，高校数学程度の原題をもとにしたコンピュータを活用した問題作りで，問題を作成するとき，主として，高校生の教科書・問題集・参考書を参考にする学生が多いことや，4人に1人は，教科書・問題集・参考書を参考にせずに問題を作成していることがわかった。また，問題を作成するとき，発想や組み立てに難しさを感じる学生が多いことがわかった。

2．原題の設定の考察

この節では，研究(IV)から，原題の設定に関する少し詳しい考察を行う。

（1）原題について

小・中学校における問題作りについて，島田・澤田・橋本・長崎氏らを中心とする問題作りに関する研究(1979-1984)がある。その中で,「原題は，どんな問題が望ましいですか」という問いに対して，次のような整理がなされている。

1) 内在する数学的内容が豊富で，しかも価値がある。

2) 問題の程度が，子供の能力，発達段階などに適当なものである。

3) 問題の形式が単純である。

中野ら（1999）の著書の中に，小学校の問題作りにおける原題を選定するときの視点として,「大切な条件は，その原題をいろいろ変えてみることができる可能性を有していることである」,「さらに備わると望ましいこととして数学的な構造があげられる」とある。また，松原小学校の研究（1984）では，原題の選定については，次のように整理されている。

i）一般化の方向を考えやすい問題

ii）類推的な考えが使えそうな問題

iii）逆の構成が可能な問題

iv）組み合わせて新たな構成が容易にできる問題

澤田・坂井ら（1995）の著書では，中学校の問題作りにおける原題の選び方の基本について，次のように整理されている。

ア）どんな問題でも原題にはなるが，指導内容の系統性から考えると教科書の問や章またはまとめの問題，あるいは，その一部を変えた問題を使用するとか，教科書に準拠した問題集にある問題などを利用するとよい。

イ）いろいろ変えられる可能性があると考えられる問題を選ぶ。このことは，与えられた問題を生徒が解き，答えあわせで終わるのではなく，さらに，いま解いた問題をどのようにみて，どのように考えると新しい問題に作り変えられるのかを体験させる機会が多く設定できることを意味する。つまり，生徒の特徴がいろいろな形で現れることが期待できたり，学習に熱中させるなどに効果的であるからである。

ウ）原題を変え，いろいろな問題をつくっていくことによって数学的な性質や構造などが見いだせたり，自然に次の指導内容に結びつけられるような内容を含む問題を選ぶようにする。

これらの先行研究を踏まえ,コンピュータを活用した問題作りにおける原題を設定するときの視点として，次の4つを考える。

a)一般化，類推，逆などの発展的な考え方を生み出す可能性を有する問題
b)原題を作り変えていく中で数学的な性質や構造を見いだせる可能性を有する問題
c)問題の形式が単純である問題
d)コンピュータの活用性を有する問題

上記の４つの視点 a)～d)を踏まえ，数学教師を目指す大学生を対象としていることを考慮し，次のことを視点として，次節の原題を設定した。
①原題は，高校の内容の発展であり，多くの数理の発見につながる可能性を有する問題とする（視点 a，b)。
②学生にとって，コンピュータを活用した問題作りにつながりやすくするために，図形をイメージしやすく（視点 c)，コンピュータ処理が有効であるように（視点 d)，「面積」という要素をもつ問題とする。
③図形的な性質として面白い要素を多く含み，いろいろな関数について調べることができるように（視点 a，b)，「接線」という要素をもつ問題とする。
④学生がコンピュータを活用して処理できる範囲であり，コンピュータによる実験的側面を有する問題とする（視点 a，b，d)。

（２）コンピュータを活用した問題作りの実践

著者の一人は，所属する教育学部において，数理系コース所属の大学２年生を主対象としたコンピュータ基礎演習I, IIを前期，後期に担当した。以下に示すのは，後期の講義に常時出席した45名の学生を対象にしたものである。

(i)原題の指導と課題

平成15年12月11日に，前節の視点①～④を踏まえて作成した原題をもとにして授業を行った後，コンピュータ，及び既有の知識を活用した発展問題作りのレポートを課す授業を行った。(本研究(Ⅰ)，(Ⅲ）における原題及び問題作成例の資料も配布した。）その原題，ねらい，与えたヒントは次のようである。

原題１．$y=e^x$上の点Pにおける接線とx軸との交点をQとする。線分PQを対角線とし，x軸上に一辺をもつ長方形を作る。この長方形が曲線$y=e^x$によって分けられる２つの部分の面積の比はPの位置によらず一定となるか考えてみよう。

原題２．$y=e^{2x}$上の点Pにおける接線とx軸との交点をQとする。線分PQを対角線とし，x軸上に一辺をもつ長方形を作る。この長方形が曲線$y=e^{2x}$によって分けられる２つの部分の面積の比はPの位置によらず一定となるか考えてみよう。

ア）ねらい：

1. 数学の問題を自分で作ることの大変さと面白さの理解
2. 将来，生徒に問題の発展的な扱いによる指導ができるための経験
3. 将来，生徒に創造的な考え方を培う指導ができるための経験
4. 作成した問題の発表，検討により，学習，創作に対する意欲，関心につながることへの認識
5. 既習内容の理解の深まり

6. 予想をたてたり，発展的な考え方をするのに，コンピュータがどのように有効であるかについての理解
7. 作成された問題を評価したり，作成した問題を評価されたりする経験
8. 将来，生徒の答案を適切に扱うことができるための経験

イ）問題を作るときの前提：

1. できるだけ独自性をもたせること
2. コンピュータを利用した個所，証明，その問題を考えた発想などのコメントを書くこと
3. 作られた問題は授業で公開されること
4. 一人２題分（一人あたりの作成した問題分）の解答作成を割り当てること
5. 数学的な程度を考慮すること

ウ）与えたヒント：

1. 一般化を考えてみたらどうか
2. 他の分野との融合を考えてみたらどうか
3. 自分なりに工夫した問題を作ってみたらどうか
4. 日常の学習を省りみたらどうか

研究(Ⅰ)，(Ⅲ) との違いは，原題，配布した問題作成例の資料の内容（４節参照)，イ）の5, ウ）の4である。授業では，コンピュータの活用による数学的思考の発展を期待して，原題の解決において積極的にコンピュータを活用した。

原題１の結果を予想させると，面積比が一定となると予想した学生が多かった。16名に意見を聞いたところ,「一定とならない」,「一定となると思うが比は見当がつかない」,「1:2」,「1:3」,「2:3」といった意見に分かれた。

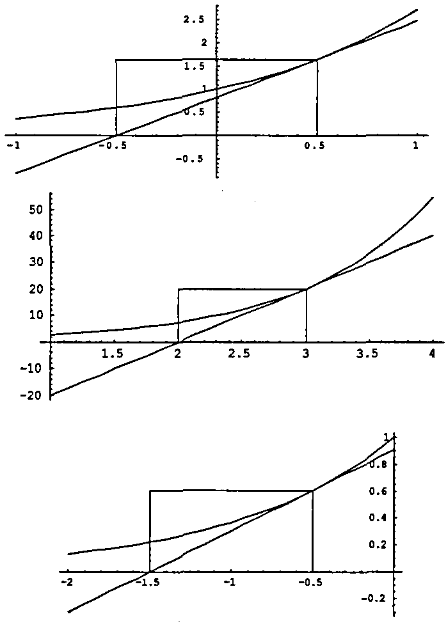


図1　原題１（上から接点のx座標が1/2, 3, -1/2)

Mathematica を活用して，いろいろな場合に，グラフを描いたりすることにより，「面積

比が一定となるのか，一定となるとき面積比はどうか」を再度考えてもらった。多くの学生は，図１のように，数値を変えたりしながら実験していた。学生の中には，コンピュータに不慣れな学生もいるが，学生の操作可能な範囲であり，コンピュータを活用して楽しみながら問題を解決する意欲をもっていたようである。

再度，意見を聞いたが，上記と同様な意見であった。意見を聞いた後，面積比を数値計算させて$1:(e-1)$という結果を得た。一定になるかどうかの結果を予想しにくかったり，結果が自然対数eに関係するという意外性があったりして非常に興味深かったようである。

最後に，点Pのx座標をtとおくと，点Qのx座標がt-1となることに気付かせて，面積比が一定となることをコンピュータを用いて説明し，さらに，黒板で証明した。原題２は，各自で考えてもらうこととした。

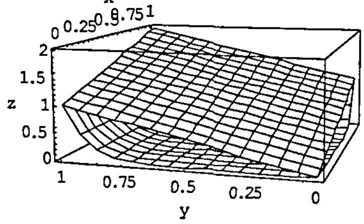
授業後，発展問題作りを実施，具体的には課題を出し，レポート（提出期限 H15年12月26日）として提出してもらった。課題内容は次のようである。

［課題］ 原題１，２の結果を参考にして，発展的な問題（例えば，一般化）を２題作成せよ。ただし，コンピュータを積極的に活用し，どのように活用したかを説明せよ。発問の文章，数値等は各自考え，他の学習者と同一の問題はありえないものとする。作成した問題を解答（証明）せよ。

(ii) 作成された問題の考察と原題についての感想

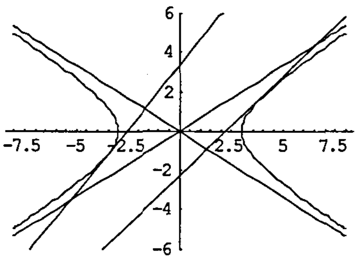
学生の中には，原題の$C:y=e^x$を$C:y=e^{ax}$，$C:y=ae^{ax}$，$C:y=b^{ax}$に変更して問題を作成した者がいた。以下，作成された問題の中から，２節で述べた原題を設定するときの視点①～④の効果が現れたことを示しながら例示する。ただし，数値などの間違いから答えが求まらない問題については，正しい設定に直した。

問題：$f(x,y)=x^n+y^n$，$g(x,y)=x+y$とする。$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$の区間において，f, gで囲まれる体積V_1とfと$z=0$で囲まれる体積V_2の比は一定かそれとも何か規則性があるのだろうか，調べよ。◇



原題の面積比を体積比に観点を変更した問題である。また，２変数関数を扱うことにより，高校の内容を発展させている。出題者は，n=2, 3, 4, 10の具体的な場合に平面と曲面のグラフを描き，各々の場合に数値計算しているので，コンピュータの実験的側面が現れている。そのとき，f, gが４点$(0, 0, 0)$，$(1, 0, 1)$，$(0, 1, 1)$，$(1, 1, 2)$で交わることを，グラフを描いたときに偶然発見しているので，コンピュータの支援のよさを感じる。コンピュータによる実験の結果，規則性を見いだし一般的な場合を問題としている。

問題：双曲線 $x^2/9-y^2/4=1$ 上の点 P(m,n) における接線が，漸近線と交わる点を Q,R とする。原点を 0 とした時，△0QR の面積は点P の位置によらず一定となるだろうか。◇



レポートから，図形的な性質を多く有する円，楕円，双曲線などのいろいろな曲線を，コンピュータを活用して描いていたことがわかる。コンピュータによる実験の結果，双曲線と直線とで囲まれた図形に特徴はないかと考え，原題と同様に，漸近線，接線で囲まれた図形を扱っている問題である。授業で扱った２次曲線の学習から手がかりを得ている様子もわかる。

原題についての学生による感想

- わかりやすい問題でよかった。また他の人がたくさん考えていたように，応用がきく原題だったので，そこから発展して他の面白い問題が生まれてとてもいいと 思った。(同様な感想９名)
- Mathematica 特有のグラフで考えられる，何度でもすぐに計算ができるといったことが発揮される，いい問題だと思う。また積分は高校生レベルで考えやすい。(６名)
- 面積の比が一定になるということは非常に興味深かった。(５名)
- 導入としてはすごくわかりやすい問題だったと思う。(３名)
- 参考にして問題をつくったのでよかった。(３名)
- 手計算でもできるような問題で，親しみやすいものだったので，とっつきやすく原題として適切だったと思う。(２名)
- 全く解いたことがなかったので，今後役に立つと思います。(２名)
- 原題で比を用いた問題が多く挙げられていたので，問題作りを考えるときに参考にもなったが，比の問題に執着してしまい，他の分野の問題を考えにくくなってしまった。(２名)
- 原題はいい問題だと思った。だから，それに匹敵できるような問題を考えようとした。
- 何気なく出された問いを解いても，そこにいたるまでの過程を知らなかったが，問いをつくることは本当に理解していないと作れないし，数に対して，正確な感覚が必要だなと思った。
- $y=e^x$ という関数は発展させやすい（例えば e^{ax},be^{ax},逆関数など）感じだし，面積を取り上げることで，何かを測るという発想がまた，様々なつながり（例えば，体積，モンテカルロ法など）を提起してくれていると思いました。

学生が作った問題や感想から，①～④を視点に原題を設定することは，コンピュータを活用した問題作りをする際に，学生にとって有効であったと推測される。

(iii) 作成された問題からの発展

平成16年1月9日に，全員の問題のプリント資料を配布して，目を通してくるように指示し，面白いと感じた問題，興味をもった問題，難しそうだなと思った問題を選んでもらっ

たり，一人２題分（一人あたりの作成した問題分）の解答作成をくじ引きで割り当てた。

1月22日，原題の発展として，次の問題を紹介した。

発展問題１

問題. $y=ae^{bx}$上の点Pにおける接線とx軸との交点をQとする。線分PQを対角線とし，x軸上に一辺をもつ長方形を作る。この長方形が曲線$y=ae^{bx}$によって分けられる２つの部分の面積の比はPの位置によらず一定となるか考えてみよう。

上にも例示した，次の学生の作成した問題を全員で解くことにした。

学生が作った問題１

問題. $f(x,y)=x^n+y^n$, $g(x,y)=x+y$とする。$0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$の区間において，f, gで囲まれる体積V_1とfと$z=0$で囲まれる体積V_2の比は一定かそれとも何か規則性があるのだろうか，調べよ。

基本的な関数を使って工夫して作成された問題である。出題者に問題についての説明をしてもらったりしながら考えてもらうこととした。学生は，コンピュータを活用して，$n=2, 3, 4, 10, \cdots$と値をいろいろ変えながら，考えていた。（図6（$n=2, 3, 10$））。

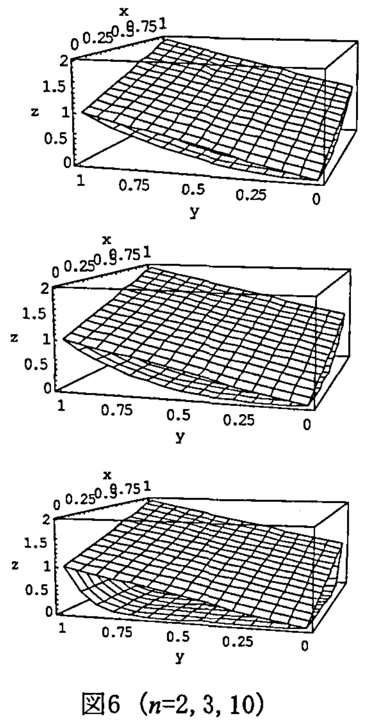


図6（$n=2, 3, 10$）

多くの学生が，25分～30分程度でコンピュータを活用して４点$(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$で交わることを確認した上で問題に対する解答を得ることができた。学生の中には，４点で交わることの証明に苦労する者もいたので，黒板を用いて証明し，問題の解答も解説した。

1月29日，原題の関数の逆関数を題材にして作成した学生が何人かいたので，原題の発展として，次の問題を紹介した。

発展問題３

> 問題. $y=a\log bx$ $(a,b>0)$上の点Pにおける接線とy軸との交点をQとする。線分PQを対角線とし，y軸上に一辺をもつ長方形を作る。この長方形が曲線$y=a\log bx$によって分けられる２つの部分の面積の比はPの位置によらず一定となるか考えてみよう。

さらに，面白いと感じた問題，興味をもった問題，難しそうだなと思った問題を選んでもらった中で票の集まった，多重根号，じゃんけん，立体図形等の問題を，作成者に説明してもらったりした。

(iv) 問題作りの指導法について

問題作りに，平成 15 年 12 月 11 日に配布した過去の問題作成例の資料は役立ちましたかについては(表 1)のようであった。

(表 1)

過去の問題作成例の資料は役立ちましたか	研究(Ⅲ) 人数（%）	今回 人数（%）
役に立った	6(12.2)	14(33.3)
少し役に立った	15(30.6)	21(50.0)
どちらでもない	14(28.6)	6(14.3)
あまり役に立たなかった	3 (6.1)	1 (2.4)
役に立たなかった	8(16.3)	0 (0)

今回肯定的に答えた者が83.3%いたことに注目したい。これは，今回の資料と問題作り（Ⅲ）における資料との違いが一因と考えられる。その違いは次　の２点である。

１）今回は本研究(Ⅰ)，（Ⅲ）の原題と，その各々に対する学生の問題例を載せた。

２）今回は教師が学生の問題を発展させた問題は載せなかった。

原題と学生の問題例があれば，どの原題から学生がどのような問題を作成したのかが分かり，問題作りに困難を感じた学生にとって，自分が実践するときの手がかりになったと思われる。

授業中，時々，「コンピュータを用いて問題作りをしてもらいますよ」といっていたそのことが，問題作りをする意識の上で有用だったかということについては(表2)のようであった。

(表 2)

評価	研究(Ⅲ) 人数（%）	反応（%）
役に立った	16(32.7)	16(38.1)
少し役に立った	21(42.9)	13(31.0)
どちらでもない	7(14.3)	9(21.4)
あまり役に立たなかった	5(10.2)	4 (9.5)
役に立たなかった	0 (0)	0 (0)

研究(Ⅲ)と同様，心構えの面で，言葉がけの重要性が感じられる。

（３）学生による授業評価と感想

問題作りに関する授業の感想をアンケートを通して調べた。問題を作ったときの難しさの感想は(表 3)，問題作りにコンピュータが役に立ったどうかについては(表 4)のようであった。今回は 42 名，本研究(Ⅰ)は 35 名，本研究(Ⅲ)は 49 名のアンケート結果である。

(表 3)

難しさの感想	本研究(I) 人数 (%)	研究(III) 人数 (%)	今回 人数 (%)
大変難しかった	15(42.8)	14(28.6)	11(26.2)
難しかった	17(48.6)	29(59.2)	24(57.1)
普通だった	3 (8.6)	6(12.2)	7(16.7)
そんなに難しくない	0 (0)	0 (0)	0 (0)
やさしかった	0 (0)	0 (0)	0 (0)

(表 4)

問題作りにコンピュータは	本研究(I) 人数 (%)	研究(III) 人数 (%)	今回 人数 (%)
役に立った	21(60.0)	26(53.1)	26(61.9)
少し役に立った	11(31.4)	21(42.9)	11(26.2)
どちらでもない	2 (5.7)	2 (4.1)	5(11.9)
あまり役に立たなかった	1 (2.9)	0 (0)	0 (0)
役に立たなかった	0 (0)	0 (0)	0 (0)

問題作りで最も難しかった場面はどこかという質問に対しては(表 5)のようであった。

(表 5)

問題作りで最も難しかった場面はどこか	研究(III) 人数 (%)	今回 人数 (%)
問題の作成	41(83.7)	33(78.6)
問題の解法・計算	5(10.2)	2 (4.8)
吟味	3 (6.1)	7(16.7)

本研究(III)と同様，問題の作成と回答した学生が大半であった。問題作りにおいて，大学生が問題を作成するときの状況を把握するために，最も難しかったところと2番目に難しかったところについて質問すると(表 6)のようであった。

(表 6)

問題を作成するとき難しかったところ	研究 (III)		今回	
	1番目 人数 (%)	2番目 人数 (%)	1番目 人数 (%)	2番目 人数 (%)
分野	2(4.1)	6(12.2)	0 (0)	5(11.9)
発想	44(89.8)	3(6.1)	33(78.6)	9(21.4)
組み立て	3 (6.1)	32(65.3)	6 (14.3)	23(54.8)
問題の文章	0(0)	5(10.2)	1(2.4)	3(7.1)
その他	0(0)	3(6.1)	2(4.8)	2(4.8)

発想，組み立てという順で答えた学生は本研究(III)が 65.3%で，今回は 54.8%で最も多かった。その他（今回）には，Mathematica の有効的利用（3 名），解答をどうするかという意見があった。

問題を作成するとき，主として，何を参考にしたかについては(表 7)のようであった。

(表 7)

問題を作成するとき，主として，	研究(Ⅲ)	今回
何を参考にしたか	人数（%）	人数（%）
高校の教科書・問題集・参考書	21 (42. 9)	13 (31. 0)
大学の教科書・問題集・参考書	6 (12. 2)	6 (14. 3)
高校の教科書・問題集・参考書，大学の教科書・問題集・参考書	5 (10. 2)	9 (21. 4)
教科書・問題集・参考書を参考にしなかった	12 (24. 5)	11 (26. 2)
その他	5 (10. 2)	3 (7. 1)

研究(Ⅲ)と同様，問題を作成するとき，原題の影響もあるかもしれないが，高校での学習を省みようとして高校の教科書・問題集・参考書を参考にした学生が 31. 0%，教科書・問題集・参考書を参考にしなかった学生が 26. 2%と多かった。その他（今回）には，配付資料，クッキングブックを参考にしたという意見があった。

学生の授業についての評価は，研究(Ⅰ)が(表 8)，研究(Ⅲ)が(表 8')で，今回が(表 8")のようであった。

(表 8) 学生による授業の評価（研究(Ⅰ)）

評価	楽しかったか		ためになったか		充実感を持ったか	
	人数	%	人数	%	人数	%
すごくよかった	1	2.9	9	25.7	11	31.4
よかった	19	54.3	23	65.7	19	54.3
どちらでもない	10	28.6	3	8.6	4	11.4
よくなかった	5	14.3	0	0	1	2.9
全くよくなかった	0	0	0	0	0	0

(表 8') 学生による授業の評価（研究(Ⅲ)）

評価	楽しかったか		ためになったか		充実感を持ったか	
	人数	%	人数	%	人数	%
すごくよかった	4	8.2	8	16.3	13	26.5
よかった	29	59.2	36	73.5	27	55.1
どちらでもない	11	22.4	5	10.2	9	18.4
よくなかった	4	8.2	0	0	0	0
全くよくなかった	1	2.0	0	0	0	0

(表 8')' 学生による授業の評価（今回，研究(Ⅳ)）

評価	楽しかったか		ためになったか		充実感を持ったか	
	人数	%	人数	%	人数	%
すごくよかった	4	9.5	16	38.1	14	33.3
よかった	27	64.3	23	54.8	23	54.8
どちらでもない	11	26.2	3	7.1	3	7.1
よくなかった	0	0	0	0	0	0
全くよくなかった	0	0	0	0	1	2.4

3回の授業の評価は，ある程度似た数値になっているが，いずれの項目に関しても，今回，肯定的に答えた者が多かった。このことは，原題が学生の意欲を出させるのに適切であったことも一因ではないだろうか。特に，「楽しかったか」，「ためになったか」に肯定的に答えた者が，各々，今回は 73. 8%，92. 9%であったことに注目したい。

問題作りにコンピュータが有用かどうかについては，(表 9)のような結果を得た。

(表9)コンピュータの有用性に関するアンケート

項目		本研究(Ⅰ)人数(%)	本研究(Ⅲ)人数(%)	今回人数(%)
コンピュータは，予想を立てるのに役に立つ道具に	なる	18(51.4)	26(53.1)	24(53.1)
	少しなる	13(37.1)	17(34.7)	14(33.3)
	どちらでもない	1(2.9)	4(8.2)	3 (7.1)
	あまりならない	3(8.6)	2(4.1)	0 (0)
	ならない	0(0)	0(0)	1 (2.4)
コンピュータは，予想の解決に役に立つ道具に	なる	24(68.5)	30(61.2)	27(64.3)
	少しなる	9(25.7)	13(26.5)	10(23.8)
	どちらでもない	1(2.9)	3(6.1)	4(9.5)
	あまりならない	1(2.9)	3(6.1)	1(2.4)
	ならない	0(0)	0(0)	0 (0)
コンピュータは，新しい知見を得るのに役に立つ道具に	なる	18(51.4)	23(46.9)	25(59.5)
	少しなる	16(45.7)	19(38.8)	12(28.6)
	どちらでもない	1(2.9)	7(14.3)	5(11.9)
	あまりならない	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	ならない	0 (0)	0 (0)	0 (0)

肯定的な意見が87%前後であり，表4とあわせて，今回も研究(Ⅰ)，(Ⅲ)と同様，コンピュータの有用性を感じている学生が多いことがわかる。

問題作りに関する授業の感想の中で，研究(Ⅰ)，(Ⅲ)で紹介した以外のものに，次のようなものがあった。(紙面の都合上，文章を短くしている部分がある)

学生によるMathematicaを用いた問題作りの感想

- Mathmatica を使えば分かりやすくなるような問題を作りたいと考えていてそれがうまくできたのではないかと思います。
- まず具体的な値をいくつか試し，予想した上で一般的な値で問題をつくる。そこに面白さと楽しさを見つけました。
- 楽しかった。いろいろ考えて作れたし，実際にグラフを書いたりして作れるので，充実した問題ができると思います。
- よかったです。しかしながら家のパソコン等でMathematicaが使えないので，使用時間の限られているのが残念でした。
- 自分では，結構楽しめました。わりと思った通りにコンピューターも動いてくれましたので。いろいろな人から「この問題どうやって解くんや」と言われ，みんなの興味を引いたようなので，自分としては成功だなと思います。
- 本当に難しかった。やりたいことがあってもうまく命令文を作れなかったり，パソコン上に図を示せなかったり苦労した。でもMathematicaだからこそできる問題作りという，なかなか普通はする機会がないだろうことをできてよかった。
- 正直難しかったです。しかし，やろうと思う気持ちはあったので，時間をかけて何とかやれました。
- Mathematica の数式，プログラムの意味を十分に理解していないと，いい問題を思いついてもコンピューターがうまく使えずに，問題が作れなくなってしまう，ということもあったので，Mathematicaをもっと自分のものにしておく必要があったと思いました。
- ほとんど頭で考えたので，一応，収束を確かめたりするのには使いましたし，楽だったので普通に作るよりは良いのではないかと思います。

3．おわりに

本研究で，数学教師を目指す学生による数学の問題作りにコンピュータの利点を生かす試みを行い，どのような原題を設定するかについての考察を行った。研究(IV)の結果，原題の設定に関して次の４つの視点が有効であることが指摘できる。

① 原題は，高校の内容の発展であり，多くの数理の発見につながる可能性を有する問題とする。

② 学生にとって，コンピュータを活用した問題作りにつながりやすくするために，図形をイメージしやすく，コンピュータ処理が有効であるように，「面積」という要素をもつ問題とする。

③ 図形的な性質として面白い要素を多く含み，いろいろな関数について調べることができるように，「接線」という要素をもつ問題とする。

④ 学生がコンピュータを活用して処理できる範囲であり，コンピュータによる実験的側面を有する問題とする。

また，研究(Ｉ)，(Ⅲ)で指摘した以外に，次のようなことも指摘できる。

1．配布する資料の一例として，過去の実践の原題及び学生が作った問題例を資料とすることが考えられる。問題作りをする際，過去の学生が作った問題例のみを資料とする場合（本研究（Ⅲ））よりも，学生にとって有効であったと推測される。

2．大学生の中には，原題をもとにした問題作りを契機に，自由に数学の問題作りを楽しみたいと考える学生がいることがわかった。

今後は，さらに，教育学部での数学の授業における，コンピュータを活用した数学の問題作りの意義とその方法に関する考察をしたい。

引用・参考文献

1) 今岡光範，「高校生・大学生による数学の問題作り」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，2001年，第7巻，pp.125-131.

2) 斎藤昇，「問題創作学習における学習者の関心―創造力育成を目指して―」，『日本数学教育学会誌』，1986年，第68巻第5号，pp.24-33.

3) 澤田利夫・坂井裕編者，『問題作りの授業』，東洋館出版社，1995.

4) 下村哲・今岡光範・向谷博明，「コンピュータを活用した問題作り（I）―大学における実践を通て―」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，2002年，第8巻，pp.235-242.

5) 下村哲・今岡光範・向谷博明，「コンピュータを活用した数学の問題作り（II）―自由に問題を作成する大学における実践を通して―」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，2003年，第9巻，pp.235-241.

6) 下村哲・今岡光範・向谷博明，「コンピュータを活用した数学の問題作り（III）―大学生により作成された問題の活用を中心として―」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，2004年，第10巻，pp.207-217.

7) 下村哲・今岡光範・向谷博明・菅野栄光，「高校生による数学の問題作り―高校３年生を対象として―」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，2003年，第9巻，pp.243-253.

8) 下村哲・今岡光範・菅野栄光,「高校生による数学の問題作り（II）—数列の問題作りを通して—」,『全国数学教育学会誌, 数学教育学研究』, 2006年, 第12巻, pp.215-225.
9) 下村哲・向谷博明・松宮篤,「高専生による数学の問題作り（I）—高専３年生を対象として—」,『日本数学教育学会高専・大学部会論文誌』, 2003年, 第10巻, pp.37-50.
10) 白石修二,『例題で学ぶMathematica[数学編]』, 森北出版, 1995.
11) 東京都世田谷区立松原小学校著,『算数科における問題つくり－発展的な扱いによる指導の実践』, 東洋館出版社, 1984.
12) 中野洋次郎ほか編者,『子どもが問題をつくる』, 東洋館出版社, 1999.
13) 平林一栄,「問題解決から問題設定へ」,『日本数学教育学会論文発表会論文集』, 1984年, pp69-72.
14) ブラウン, S.I.・ワルター, M.I.共著／平林一栄監訳,『いかにして問題をつくるか—問題設定の技術—』, 東洋館出版, 1990.