広島大学大学院教育学研究科紀要　第二部　第57号　2008　19－28

ベクトルの外積に関する考察

―その概念の広がりと教材性に関して―

今　岡　光　範

（2008年10月２日受理）

Study on the Cross Product of Vectors

―For an expanse and teaching material aspect of the notion―

Mitsunori Imaoka

Abstract: The cross product of vectors is a fundamental notion in the vector analysis and the applications of mathematics. It is a peculiar one to the space vectors, and a sort of product with the alternating law and without the associative law. One purpose of the article is to describe such peculiarity of the cross product from the fundamental mathematical view point and consider a generalization of the cross product to the general dimensional vectors. Then, in the case of the plane vectors, the generalization corresponds to the vertical vector, and to explore the notion of the vertical vector as a teaching material is another ingredient of the article, where we describe some useful aspect of the notion showing several concrete examples.

Key words: cross product, space vector, vertical vector, teaching material
キーワード：外積，空間ベクトル，垂直ベクトル，教材

１．はじめに

本稿の目的を述べる前に，ベクトルの外積とその教材性を概観しよう。ベクトルの外積は，空間における直線や平面の位置関係，多面体の体積や表面積，曲線や曲面の曲がり方（曲率）など，身近な空間図形性質を調べるときに有用な概念である。ベクトル積やクロス積とも呼ばれ，ベクトル解析という分野の基本的な概念の一つである。ベクトルの外積は，数学を応用する理工系の分野でも頻繁に現れる。歴史的にも，電磁気学を中心として，空間の物理現象を巧みに数式化するものとして重宝されてきた。今日，大学では，ベクトルの外積は，数学の教養として必ずといってよい程扱われる内容である。

一方，高校までの学校数学の内容にはベクトルの外積は含まれていない。昭和35年告示の高校の学習指導要領で，数学教育の現代化を図る教材の一つとして，ベクトルの内容が導入された[1)]。それ以来，ベクトルの内容は高校数学に欠かせないものとして，今日まで継続して扱われている。今岡・平岡（2004）[2)] で，高校生の数理思考の広がりが図れるように，ベクトルの教材内容を充実する観点について論じた。かつてベクトル教材が導入されようとしているときに，ベクトルの外積もその内容の候補の一つにあがっていた形跡がある[3),4)]。また，田村（1959）[5)] や川崎（1991）[6)] などにおいて，学校数学におけるベクトルの外積の教材性が論じられている。しかし，ベクトルの外積が教科書に登場したことはない。それは，概念が難しすぎるとか，有用性に欠けるとかということではなく，高校数学の中で空間ベクトルをどう扱うかということに大きく関係している。これまでの教科書の内容がそうであったように，ベクトルの和・差，定数倍という演算，ベク

トルの内積，および，それらの図形的な応用を学ぶことが，ベクトルの概念の基礎を形成する上でまず必要であることは異論のないところであろう。空間ベクトルの内容は，これまで一貫して，それらの基礎的な概念を平面ベクトルと同じように扱えるようにすることを中心に編成されてきた。この方針について，もっと豊かな内容を望む声もあるが，高校数学のカリキュラム編成上の制約もあり，さらに内容を増やす方向には進みにくい。ベクトルの外積は空間ベクトルに特有な概念であり，今後も高校数学の内容に入る可能性は低い。

さて，本稿の目的は，大きく分けて二つある。一つは，ベクトルの外積の概念の数学的な特異性を浮き彫りにすることである。そのため，ベクトルの外積の概念の形成過程を明確にし，その概念の広がりに関して言及するとともに，その概念の一般化を図る。もう一つの目的は，「垂直ベクトル」という平面ベクトルの教材性を考察することである。この概念は，ある意味で空間ベクトルの外積の平面版と考えることができ，垂直性に関係した図形性質をベクトルで表現するのに適している。それは，学校数学の図形教材の中でも十分に適用できるものであり，そのことを具体的な教材例によって示そう。

一つ目の目的には，第２節と第３節の内容が相当するが，次のような背景がある。ベクトルの外積を数学の道具として使う人は少なくないだろうが，その歴史的な側面やその概念の特異性・系統性などに関心をもって調べた人は意外と少ないであろう。たとえば，ベクトルの外積はハミルトンの四元数の研究[7]と密接に関係しているが，この四元数という数に親しんだことのある人は多くはないであろう。そこで，第２節では，ベクトルの外積の概念の基本から始めて，古典的な面についてはクラインの著書[8]の訳書[9]を参照しながら，概念の形成過程とその広がりを描写する。

さらに，第３節でベクトルの外積の概念の一般化についてふれる。ベクトルの外積の概念の一般化は，そのどの面を重視するかということで一様ではない。例えば，微分幾何学での微分形式にも，積の交代性に特徴をもつ「外積」という概念がある。しかし，本稿で考えるのはそのようなものではなく，もっと直接的な形の一般化である。そのとき，平面ベクトルの場合には，上記の「垂直ベクトル」という概念が対応する。それは，工学などで，二つの平面ベクトルの外積をそれらの成分による行列式で定めるもの（たとえば，金谷（1998）[11]）もあるが，それとも違い，単に，与えられたベクトルを回転して得られるベクトルである。それゆえ，垂直ベクトルの概念は学校数学でも十分に理解できる類のものである。本稿の二つ目の目的は，具体的な教材例を用いてこの垂直ベクトルの教材性を論ずることであり，第４節がそれに相当する。

筆者の望みは，本稿が，数学の概念の教材化を図る工夫の面において，一つのモデルになればということである。

２．外積の概念の広がり

以下，ベクトルの外積を単に外積ということにする。この節では，外積の定義から始め，概念の諸相にふれながら，その広がりに言及する。

2.1. 外積の定義に関して

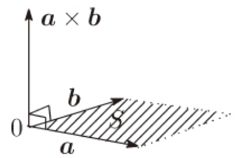
ベクトルは向きと大きさをもつ量である。高校の教科書などでは $\vec{a}$ のように矢印をつけて表されるが，本稿では記述を簡単にするために，矢印なしで，単に a だけでベクトルを表す。そして，空間ベクトルとは，三次元空間のベクトルのことである。

二つの空間ベクトル a, b に対して，外積 $a\times b$ は次の（ⅰ）～（ⅲ）を満たすベクトルとして定義される。

（ⅰ）　$a\times b$ は a, b に垂直である

（ⅱ）　$a, b, a\times b$ はこの順で右手系である

（ⅲ）　大きさ $|\,a\times b\,|$ は a, b を二辺とする平行四辺形の面積に等しい



ここで，（ⅱ）の右手系とは，右手を用いて，a の方向に親指，b の方向に人差し指を向けたとき，中指の方向に $a\times b$ が向いていることを示す。

a, b のどちらかが零ベクトル 0 であるか，a, b が平行であるときは，$a\times b=0$ と定める。

外積は，空間ベクトルの集合において，積（かけ算）の演算を与えるが，定義の（ⅱ）から $b\times a=-a\times b$ である。この性質を外積の交代性というが，実数のかけ算などが満たす可換性 $ab=ba$ を満たさないことを示している。これが，外積の特異性の一つである。

空間に xyz–座標系を設け，空間ベクトル a の始点をその座標の原点に置くとき，a を位置ベクトルといい，その終点の座標 (a_1, a_2, a_3) を a の成分という。ベクトル a はその成分によって定まるので，$a=(a_1, a_2, a_3)$ のように等号で表す。

外積の最も簡単な例を考えてみよう。それは，xyz–座標軸方向の長さ１のベクトル（単位ベクトル）

$$e_1=(1,0,0),\quad e_2=(0,1,0),\quad e_3=(0,0,1)$$

の外積であり，$e_i \times e_j = \varepsilon_{ij}^k e_k$ となる。ただし，ε_{ij}^k は,

$(i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ のとき， $\varepsilon_{ij}^k = 1$,

$(i,j,k)=(2,1,3),(1,3,2),(3,2,1)$ のとき， $\varepsilon_{ij}^k = -1$,

$i=j$ のとき，$\varepsilon_{ij}^k = 0$.

実際,（ⅰ),（ⅱ）より垂直な方向が定まり, 大きさは,（ⅲ）から，この場合一辺１の正方形の面積より１である。

このとき，$e_1\times(e_1\times e_2) \neq (e_1\times e_1)\times e_2$である。実際,

$$e_1\times(e_1\times e_2)=e_1\times e_3=-e_2,\ (e_1\times e_1)\times e_2=0\times e_2=0.$$

よって，外積は，実数のかけ算などが満たす結合法則 $a(bc)=(ab)c$ も満たさない。これも，外積の特異性の一つである。

一方，式の展開を可能にする分配法則 $a(b+c)=ab+ac$ に関して，外積では次が成り立つ。

(*) $a\times(rb+sc)=r(a\times b)+s(a\times c)$ （r, s は実数）

この性質を外積の双線形性という。これを用いて，外積の成分が求められる。まず，どんな空間ベクトルも

$$a=(a_1,a_2,a_3)=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$$

と表せることに注意し，上記の e_1, e_2, e_3の外積の関係式と双線形性(*)から，外積の成分表示は次のようになる。

(**) $a\times b=(c_1,\ c_2,\ c_3)$,

$$c_1=a_2b_3-a_3b_2,\ \ c_2=-a_1b_3+a_3b_1,\ \ c_3=a_1b_2-a_2b_1.$$

ところで，(*)の双線形性であるが，その一つの証明方法を示しておこう。いま，ベクトル a を固定して考える。任意の空間ベクトル v に対して，v を a と垂直な方向 v_1と平行な方向 v_2の和 $v=v_1+v_2$に分解すると，定義より,

$$a\times v=a\times v_1$$

が成り立つ。v に v_1を対応させる写像$f_a(v)=v_1$ を考えると，f_a は線形写像である。すなわち,

$$f_a(rw+sw')=rf_a(w)+sf_a(w')$$

が成り立つ。そして，a と v_1 の始点を合わせ，a を軸として v_1を反時計まわりに90° 回転し$|a|$倍拡大（縮小）すると，$a\times v_1$が得られる。一般に，空間ベクトル w に対して，その始点を a の始点に合わせ，a を軸として反時計まわりに90° 回転し$|a|$倍して得られるベクトル w' を対応させる写像$g_a(w)=w'$ を考えると，g_a も線形写像である。したがって，合成写像 g_af_a も線形写像であり，次が成り立つ。

$$(g_af_a)(v)=g_a(v_1)=a\times v_1=a\times v.$$

外積の双線形性(*)は，g_af_a の線形性，つまり,

$$(g_af_a)(rb+sc)=r(g_af_a)(b)+s(g_af_a)(c)$$

に他ならない。以上のようにして, 外積の双線形性 (*) が成り立つことが分かる。

外積の定義を，逆に成分(**)によって与えることもできるが，実際には，外積は偽ベクトルという，向きを変える座標変換に対して成分表示は不変ではないという問題もある（たとえば，小松(1994)[12]）。

2.2. 外積の基本性質に関して

空間ベクトル $a=(a_1, a_2, a_3)$，$b=(b_1, b_2, b_3)$ のなす角を $\theta\ (0\le\theta\le 90°)$ とするとき，内積 $a\cdot b$ は,

$$a\cdot b=|a||b|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

で定められる。ここで，後者の等式は，三辺の長さが $|a|,|b|,|a-b|$ の三角形の余弦定理を用いて示すことができる。

それに対して，外積の大きさは，定義の（ⅲ）から,

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$$

である。このことから, 内積が a の b 方向への「射影」である[13] のに対して，外積の大きさは a の b 方向に対する「垂直成分」を表していることが分かる。また，定義の（ⅰ)，（ⅲ）と内積の定義より，一平面上にない位置ベクトル a, b, c に対して，これらを三辺とする平行六面体の体積 $V(a, b, c)$ は,

$$V(a,b,c)=|(a\times b)\cdot c|$$

であることが分かる。このときの $(a\times b)\cdot c$ は，ベクトルの三重積と呼ばれるもので，「向きづけられた体積」を表す。内積と外積の成分表示および行列式の展開公式から，次の公式が得られる。

$$(a\times b)\cdot c=\det(a\ b\ c).$$

ここで，$\det(a\,b\,c)$ は a, b, c を行ベクトルにもつ正方行列の行列式を表す。この公式から，行列式がやはり向きづけられた体積を表すことを，外積を通して理解することができる。

外積を電磁気学などの物理的な応用に用いる場合には，パリティと呼ばれる以下の意味で，注意が必要になる（たとえば，ELK(1997)[14]，一松(1997)[15]，小松(1994)[12]）。

空間の向きを逆にする，すなわち x, y, z 座標を $x\to -x,\ y\to -y,\ z\to -z$ にするとき，ベクトル v は，$-v$

になるならば極性ベクトル，v のままであれば軸性ベクトルと呼ばれる。空間の点を表す位置ベクトルのような素朴な意味でのベクトルは極性ベクトルである。ところが，二つの極性ベクトルの外積は軸性ベクトルになる。これは，定義の(ⅱ)の右手系ということの帰結であるが,成分表示からもすぐ分かる。応用面では，軸性ベクトルは極性ベクトルと区別される。その意味でも，外積は特異なベクトルなのである。

2.3.　歴史的側面

「ベクトル」という表現は，1845年のハミルトンの論文に初めて登場したという[9]。ハミルトンは，アイルランドの王室天文学者という称号を得た人であるが，数学や物理の分野でも優れた研究をした人である。数学の研究においては，特に，四元数の創始者として名高い[7]。以下に記述するように，四元数は外積と関係が深く，外積の概念の起こりはハミルトンの研究にあると考えられる。

四元数は，実数の概念を拡張した数であり，その集合には実数と同様に四則演算が定義できる。ただし，積に関して $xy=yx$ という可換性だけは成り立たない。そのように，四元数の集合は，積の可換性は満たさないがそれ以外の通常の四則演算の法則はすべて満たす数の集合である斜体というものになっている。高校の教材でもお馴染みの複素数は，やはり実数の概念を拡張した数であるが，その集合は，積の可換性も含めて実数の四則演算と同じ法則を満たす体というものになっている。実際，複素数は，閉体という，実数よりもすぐれた体である。加えて，複素数は平面の幾何的解釈を伴い，関数論を始め幅広い応用性を有している。ハミルトンは，三次元空間において本質的な役割を果たす数の体系を作れば，それは複素数以上に優れたものができるという信念をもって，四元数の概念を考え出したと伝えられている。

四元数を，少し具体的にみてみよう。四元数 q は，

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ijk = -1$$

という関係を満たす単位 i, j, k を用いて，

$$q=a+bi+cj+dk \qquad (a, b, c, d \text{ は実数})$$

の形に表される数である。このとき，a を q の実部，$bi+cj+dk$ を q のベクトル部分という。四元数 q と $q'=a'+b'i+c'j+d'k$ の和・差 $q\pm q'$ は次のように定められる。

$$q \pm q'=(a \pm a')+(b \pm b')i+(c\pm c')j+(d\pm d')k.$$

積については，与えられた関係式から，$ij=k$, $jk=i$, $ki=j$, $ji=-k$, $kj=-i$, $ik=-j$ が成り立ち，これらの関係式と分配法則，および，実数と i, j, k との積の可換性を用いて定められる。たとえば，次のようである。

$$\begin{aligned}(bi+cj)(a+dk) &= (bi+cj)a+(bi+cj)dk \\ &= bia+cja+bidk+cjdk \\ &= (ba+cd)i+(ca-bd)j.\end{aligned}$$

実部が０の四元数を純四元数という。純四元数 $q=bi+cj+dk$ は空間ベクトル $v=(b, c, d)$ と１対１に対応する。この対応を通して，四元数を空間の幾何に結びつけるというのが，ハミルトンがめざしたものであった。二つの純四元数 q, q' に対応する空間ベクトルをそれぞれ v, w とすると，v と w の外積は，q, q' の積のベクトル部分 $V(qq')$ に対応する。すなわち，この対応を等号で表わせば，次が成り立つことが分かる。

$$v\times w = V(qq').$$

これが，外積と四元数の積との関係である。このように，外積は四元数に密接した概念であり，空間ベクトルが考えられたごく初期の段階から存在したものであることが分かる。

四元数の積の演算は，空間における回転の合成を記述するのに有用である（たとえば，Steenrod(1951)[16]，横田(1973)[17]，一松(1997)[15]）。それゆえ，外積も空間の回転と深く関係している。実際，空間のベクトル値関数 $v=(x, y, z)$（ベクトル場）に対して，その回転 Rot $(v)= \nabla\times v$ は外積を用いて表わされる。

四元数は，ハミルトン以後，アイルランドを中心とした熱狂的な愛好家達によって研究されたが，複素数ほどまでには優れた数ではないことが判明している。ただ，物理や工学などへの数学の応用の中心は三次元空間であり，三次元空間で特有な数学の道具が比較的少ないことを考えれば，四元数および外積は，三次元空間の性質を調べる上で貴重な概念であると言えよう。

3. 一般次元への一般化

2.1項，2.2項の内容から分かるように，外積は空間に特有なものであり，2.3項でふれたように，その概念が生まれたいきさつも空間の幾何性質と結びついていた。

数学的には，一般次元の空間における外積の概念が存在しても何の不思議はない。その場合，本来の三次元空間の外積のどの性質を一般化しようとするかによって，いろいろな一般化が考えられる。ここでは，O'Keeffe[18),19)]によって表わされている，直接的な方法での外積の一般化を考える。

2.2項で外積の基本性質にふれた。その中で，ベクトルの三重積は，行列式の概念に結び付くものであっ

た。行列式は，一般次元でも定義される概念であり，むしろ，多変量解析などにみられるように，一般次元の中で生きる概念である。したがって，このベクトルの三重積と行列式との関係を基軸にした外積の一般化を考える。

ベクトルの三重積 $(a\times b)\cdot c$ は，a, b, c を列ベクトルにもつ三次の行列式に等しかった。この三重積は，$a\times b$ を固定して c を変化させると，空間ベクトルに実数の値を対応させる線形写像と考えられる。この観点は，n 次元ベクトル空間にも一般化できる。すなわち，$(n-1)$ 個の n 次元ベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ に対して，

写像　$f[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}]:\{n\text{次元ベクトル}\}\to\{\text{実数}\},$

$$f[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}](c)=\det(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_{n-1}\ \ c)$$

を考える。ここで，$\det(a_1\ a_2 \cdots a_{n-1}\ c)$ は n 次の行列式を表す。行列式の性質から $f[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}]$ は線形写像である。このような線形写像は線形汎関数とよばれるものである。線形汎関数 $f[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}]$ に対して，その随伴ベクトルと呼ばれる，次の関係式を満たす n 次元ベクトル u が一意に存在する。

$$f[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}](c)=\det(a_1\, a_2 \cdots a_{n-1}\, c)=u\cdot c.$$

この随伴ベクトル u の存在に関する説明は，紙面の都合上，割愛する。大事なのはこの関係式が，任意の n 次元ベクトル c に対して成り立つことである。この n 次元ベクトル u を $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ の外積であるとして，次のように定める。

$$a_1\times a_2\times\cdots\times a_{n-1}=u.$$

つまり，$(n-1)$ 個の n 次元ベクトルの積を考えるものであり，３次元空間については元の外積と一致する。この外積の一般化は，空間ベクトルの外積の基本性質として大切なものの多くを満たす[18), 19)]。

一般次元の図形の体積の考察には行列式がよく用いられるが，この n 次元ベクトルの外積は行列式を用いて定めていることから，それが体積の考察に活用できると考えるのはごく自然なことである。

ここで，一般化された外積の応用例を一つ紹介する。ただし，詳細は本稿の趣旨ではないので，その意義や証明などは他の論文に譲る。その応用には，単体という概念を用いる。単体の概念は，１単体は線分，２単体は三角形，３単体は四面体であり，それを一般化したものである。一般に，任意の自然数 k に対して，k 単体は $(k+1)$ 個の独立な頂点を含む最小の凸集合として定められる。単体は，図形を分割して組合せ的に調べるときの基本となるものである。k 単体の中で，そのすべての頂点の座標成分がすべて整数であるものを整 k 単体という。そして，頂点以外にはすべての座標成分が整数である点は含まない整 k 単体を基本 k 単体と呼ぶことにする。

いま，Δ を n 次元空間における整 $(n-1)$ 単体とし，その頂点の位置ベクトルを $0, v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ とすれば，

$$v_1\times v_2\times\cdots\times v_{n-1}=(m_1, m_2, \cdots, m_n)$$

において，$m_1, m_2, \cdots, m_n$ は整数である。このとき，次が成り立つ。

［定理］ Δ が基本 $(n-1)$ 単体であるための必要十分条件は，$m_1, m_2, \cdots, m_n$ の最大公約数が１であることである。

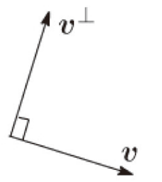
この事実は，当然，通常の三次元空間の場合にも成り立つが，著者はそれが書かれた文献を知らない。立体のピックの定理の不成立とも関係していて，現在，博士課程前期の院生である津島久美が，それに関係する性質を修士論文の課題として取り組んでいる。

４．垂直ベクトルの教材性

前節の外積の一般化を平面ベクトルの場合に考えてみよう。この場合，与えられた一個の平面ベクトル $v=(x, y)$ に対する外積を考えることになる。それは，すべての平面ベクトル $c=(c, d)$ に対して，

$$f[v](c)=\det(v\ c)=u\cdot c$$

を満たすベクトル $u=(s, t)$ である。よって，$xd-yc=sc+td$ が任意の c, d に対して成り立つので，$u=(-y, x)$ となる。この u を v の垂直ベクトルというが，v を反時計まわりに90° 回転して得られる。



以後，垂直ベクトルを，$u=v^{\perp}$ で表わそう。ゆえに，

$v=(x, y)$ に対して，$v^{\perp}=(-y,\ x)$.

まず，垂直ベクトル $v^{\perp}$ が現今のベクトル教材でも生きる要素をもつことや，垂直ベクトルの基本性質についてふれよう。

4.1. 垂直性の表現

図形考察に現今の高校のベクトルの内容を応用するとき，ベクトルの和・差と定数倍の演算，および内積を用いるだけではうまく表現できない場合もある。例えば，次のような場面である。

（例１）　正三角形 ABC において，頂点 A, B の位置ベクトルが a, b であるとき，もう１つの頂点 C の位置ベクトル c を a, b を用いて表す。

（例２）　相異なる２点 A, B の位置ベクトルが a, b であるとき，線分 AB の垂直二等分線 l を，a, b を用いてベクトル方程式で表す。

例１の正三角形や例２の垂直二等分線は，定規とコンパスによる作図において，最も基本的なものである。しかし，ベクトルで表現しようとすると，どちらの例も，与えられた位置ベクトル a, b を含む関係式の形でしか表せない。例１であれば，c は関係式

$$\left(c-\frac{a+b}{2}\right)\cdot(a-b)=0$$

を満たす。しかし，このままでは $c=f(a, b)$ の形には表せない。そのことは，c を用いてさらに図形を調べていくことを困難にする。例えば，後で述べる4.3項の最後に示す例などはそうである。

これらの面は，ベクトルの図形性質への応用において，線形変換を導入せず，和とスカラー倍および内積だけを用いようとする場合に，図形の回転に関する性質がうまく表現できなことに起因する。それを解消する一つの案として，回転ベクトル（仮称）という概念を導入することが考えられる。

それは，各平面ベクトル $v=(x, y)$ に対して，それを反時計まわりに角度 θ だけ回転したベクトル

$$v(\theta)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$$

を考えるものである。この回転ベクトルを用いれば，例１は，正三角形 ABC が正の向きであれば，

$$c=a+(b-a)(60^\circ)$$

とできる。（例２）も，垂直二等分線 l の媒介変数 t による方程式は，

$$v=\frac{a+b}{2}+t(a-b)(90^\circ)$$

と表される。この回転ベクトルは，複素数 z に対して $ze^{i\theta}$ という複素数を考えることに相当し，回転行列が表す線形変換の像

$$v(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

に他ならない。したがって，回転ベクトルを考えることは，線形変換の一部を導入するという考え方に他ならない。

垂直ベクトルは，90° 度の回転ベクトルであるが，それだけを導入するだけでも，例１や例２などには対処できる。そのような面を以下考えてみよう。

4.2.　垂直ベクトル

Herman[10] は，中等教育でのベクトル教材として有用な種々のベクトル表示を提案する中で，垂直ベクトル（perpendicular vector）の概念も示している。そのように，垂直ベクトルを使おうという考えは，決して新しいものではない。

前節で導入したように，垂直ベクトル $v^\perp$ は，平面ベクトル v を，始点を中心に反時計まわりに90° 回転して得られるベクトルであり，$v=(x, y)$ のとき，$v^\perp=(-y, x)$ である。ここで，$0^\perp=0$ と考えている。この垂直ベクトルを用いれば，例１, 例２の c および l の方程式は，それぞれ次のようにあらわされる。

（例１）　$c=\dfrac{a+b}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-b)^\perp$

（例２）　$v=\dfrac{a+b}{2}+t(a-b)^\perp$　（t は媒介変数）

垂直ベクトルの定義から，いくつかの基本性質を列記する。まず，次の性質がある。

・$a\cdot a^\perp=0,\ \ |a^\perp|=|a|.$

・$(a^\perp)^\perp=-a$

・$a=(t,s)$ に対して，$\det(a\ \ a^\perp)=t^2+s^2\geq 0.$

次は，垂直ベクトルの線形性に関するものである。

・$(a+b)^\perp=a^\perp+b^\perp,\quad (ra)^\perp=ra^\perp$　（r は実数）

・$a\neq 0$ のとき，任意の平面ベクトル v は，$v=ra+sa^\perp$ と表される。ここで

$$r=(v\cdot a)/|a|^2,\quad s=(v\cdot a^\perp)/|a|^2$$

また，次の内積に関する関係式が成り立つ。

・$a\cdot b^\perp=-a^\perp\cdot b,\quad a^\perp\cdot b^\perp=a\cdot b$

・$a\cdot b^\perp=|a||b|\sin\theta,\quad a^\perp\cdot b=-|a||b|\sin\theta$
　（θ は b から a への有向角度）.

最後の性質から，$a\cdot b=|a||b|\cos\theta$ に対して，$a\cdot b^\perp=|a||b|\sin\theta$ である。これは，内積が a の b 方向への正射影を反映し，垂直ベクトルとの内積は，b と垂直方向への a の正射影を反映するものであることを示している。それは丁度，極座標と xy- 座標の変換において，点 (r, θ) の x 軸への正射影が $r\cos\theta$ であり，y 軸への正射影が $r\sin\theta$ であることに対応するものである。この

ことを通して，内積の定義や正射影の意味も鮮明にできるのではないだろうか。

このように，垂直ベクトルは，回転ベクトルの特殊なものであるが，現今のベクトル教材の理解にも役立つものであることが分かる。

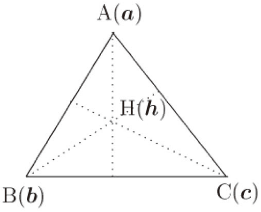
もし授業で活用しようとするならば，次のような展開が考えられる。まず，例１や例２のような図形性質を準備し，その式表示のよい方法を問う。生徒の方から，解析幾何の方法で，求めたい図形の成分表示は分かるというような考えがでてくることが期待される。それを何かベクトルの言葉で表現できないかという問いかけから垂直ベクトルを導入する。上記のような，垂直ベクトルの基本性質をいろいろあげることは，内積の性質などの，それまでのベクトルの基本性質をどのように調べてきたのかを再確認することにもなる。そして，垂直ベクトルの図形への活用を通して，数学的な方法の広がりを生徒に感じ取らせることができるだろう。さらに，角度 θ の回転ベクトルにまで発展すれば，それは行列や線形変換の考え方につながっていくだろう。また，空間ベクトルに発展させれば，外積のような考えが生徒自身の中からでてくる可能性もある。

4.3. 垂直ベクトルを活用する図形教材例

ここでは，垂直ベクトルの図形への活用を通して，その教材性を例示する。まず，三角形の垂心をベクトルを用いて表すことを考えてみよう。

［命題１］　三角形 ABC の垂心 H の位置ベクトル h は，頂点 A, B, C のそれぞれの位置ベクトル a，b，c と内角 A, B, C を用いて，次の式で表される。

$$h = a + (\cot A)(b-c)^{\perp} = b + (\cot B)(c-a)^{\perp}$$
$$= c + (\cos C)(a-b)^{\perp}.$$



命題１を証明してみよう。まず，AH⊥BC であるから，ある実数 k が存在して，

$$h = a + k(b-c)^{\perp} \qquad \cdots\cdots \ (1)$$

となる。また，CH⊥AB であるから，

$$(h-c)\cdot(a-b)=0 \qquad \cdots\cdots \ (2)$$

となる。ゆえに，(1)を(2)に代入して，k を表す式にすると，次のようになる。

$$k = -\frac{(a-c)\cdot(a-b)}{(b-c)^{\perp}\cdot(a-b)}$$

$$= -\frac{(a-c)\cdot(a-b)}{((b-a)^{\perp}+(a-c)^{\perp})\cdot(a-b)}$$

$$= -\frac{(a-c)\cdot(a-b)}{(a-c)^{\perp}\cdot(a-b)}.$$

最後の分数の分母，分子は，

$$(a-c)\cdot(a-b) = (c-a)\cdot(b-a)$$
$$= |c-a||b-a|\cos A,$$

$$(a-c)^{\perp}\cdot(a-b) = -(a-b)\cdot(a-c)^{\perp}$$

$$= -|b-a||c-a|\sin A$$

であるから，$k=\cot A$ となり，(1)に代入して命題１の最初の等号が得られる。命題１の第２番目と第３番目の等号についても，それぞれ頂点 B, C から始めて同様に得られる。

命題１から，$AH=|h-a|=|\cot A||b-c|=|\cot A|BC$ などであることから，次の系１がでてくる。

［系１］直角三角形でない三角形 ABC の垂心を H とすると，次の関係式が成り立つ。

$$|\tan A| = \frac{BC}{AH},\quad |\tan B| = \frac{CA}{BH},\quad |\tan C| = \frac{AB}{CH}.$$

さらに，この系１に三角形 ABC における正弦定理

$$BC/\sin A = CA/\sin B = AB/\sin C = 2R$$

（R は三角形 ABC の外接円の半径）を適用すると，次の系２もでてくる。

［系２］直角三角形でない三角形 ABC の垂心を H とすると，次の関係式が成り立つ。

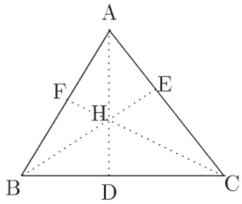
$$\frac{AH}{|\cos A|} = \frac{BH}{|\cos B|} = \frac{CH}{|\cos C|} = 2R.$$

江原[20] は，基本図形の性質をベクトルで調べる興味深い例をいくつか示している。その中にある次の性質も，垂直ベクトルを用いて示すことができる。

［系３］下の図のように，三角形 ABC の垂心を H，頂点 A，B，C から対辺におろした垂線の足をそれぞれ D，E，F とすると，

$$AH : HD = \cos A : \cos B \cos C$$
$$BH : HE = \cos B : \cos C \cos A$$
$$CH : HF = \cos C : \cos A \cos B$$

が成り立つ。



系３は命題１を用いて，次のように示すことができる。まず，命題１の最初の等号は，次のようにも書ける。

$$\overrightarrow{AH} = (\cot A)\overrightarrow{CB}^{\perp} \qquad \cdots\cdots \ (3)$$

A，H，D は同一直線上にあるので，ある実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{AD} = (1+t)\overrightarrow{AH} \qquad \cdots\cdots \ (4)$$

と表される。また，D は線分 BC 上にあるので，ある実数 s を用いて，

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{CB} \qquad \cdots\cdots \ (5)$$

と書ける。(3)～(5) より，

$$(1+t)(\cot A)\overrightarrow{CB}^{\perp} = \overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{CB} \qquad \cdots\cdots \ (6)$$

となる。この両辺のベクトルと $\overrightarrow{CB}^{\perp}$ との内積をとれば，

$$(1+t)(\cot A)\,|\overrightarrow{CB}|^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}^{\perp} \qquad \cdots\cdots \ (7)$$

(7) の右辺は，内積の形と正弦定理を用いて，次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}^{\perp} &= |\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BC}|\sin C\\ &= |\overrightarrow{BC}|^2\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}\sin C\\ &= |\overrightarrow{CB}|^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A} \qquad \cdots\cdots \ (8)\end{aligned}$$

(7)，(8)，および，$A+B+C=\pi$ と余弦の加法定理を用いて，

$$\begin{aligned}t &= \frac{\sin B\sin C}{\cos A} - 1\\ &= \frac{\sin B\sin C - \cos(\pi-(B+C))}{\cos A}\\ &= \frac{\cos B\cos C}{\cos A} \qquad \cdots\cdots \ (9)\end{aligned}$$

(4) と (9) から，次の系３の最初の等式が得られる。

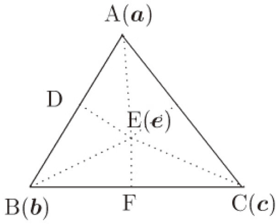
$$AH : HD = \left|\overrightarrow{AH}\right| : \left|\overrightarrow{HD}\right| = 1 : t = \cos A : \cos B\cos C.$$

系３の残りの二つの等式も同様である。

次に，垂直ベクトルを用いて，三角形の外心のベクトル表示を考えてみよう。

［命題２］　三角形 ABC の頂点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ a, b, c とすると，外心 E の位置ベクトル e は次の式で表される。

$$\begin{aligned}e &= \frac{1}{2}((a+b) - (\cot C)(a-b)^{\perp})\\ &= \frac{1}{2}((b+c) - (\cot A)(b-c)^{\perp})\\ &= \frac{1}{2}((c+a) - (\cot B)(c-a)^{\perp}).\end{aligned}$$



命題２は，上図を用いて，次のように証明することができる。E から AB におろした垂線は AB の中点 D で交わるから，ある実数 r を用いて

$$e = \frac{a+b}{2} + r(a-b)^{\perp}$$

と表せる。一方，BC の中点を F とすると，EF⊥BC であるから，

$$\left(e - \frac{b+c}{2}\right)\cdot(b-c) = 0$$

が成り立つ。この二つの式から，垂心の場合と同様にして r を求めると，

$$r = -\frac{\cot C}{2}$$

であることが分かり，最初の等式を得ることができる。残りの２つの等式も同様に示せる。

命題２の外心 e を表す第１式の垂直ベクトルの部分は，命題１の垂心 h を表す第３式に現れる。そのことから，その同じ垂直ベクトルを消去すると，

$$h + 2e = a + b + c$$

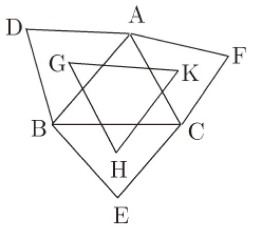
という関係式が成り立つ。両辺を３で割れば，右辺は三角形 ABC の重心 G(g) を表す。したがって，次のオイラー線の性質がでてくる。

［系４］三角形の重心は垂心と外心を２：１に内分する。すなわち，次が成り立つ。

$$g = \frac{h+2e}{3}.$$

垂直ベクトルを利用して，ナポレオンによって示されたと伝えられる次の定理（たとえば，コクセター[21)]）を証明してみよう。

［命題３］任意の三角形 ABC について，その各辺の外側にその辺を一辺とする正三角形 ABD, BCE, CAF を作れば，それら正三角形の中心を結ぶ三角形 GHK は正三角形である。



［証明］ $\overrightarrow{AB}=b$ ，$\overrightarrow{AC}=c$ と置いてみよう。すると，$\overrightarrow{BC}=c-b$ であるから，4.1項の例１と同様に垂直ベクトルを生かして，次のような等式が成り立つ。

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{2}b^{\perp},\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}c+\frac{\sqrt{3}}{2}c^{\perp},$$
$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(b+c)+\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)^{\perp}.$$

G, K, H はそれぞれの正三角形の中心より，次が成り立つ。

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{6}b^{\perp},\quad \overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}c+\frac{\sqrt{3}}{6}c^{\perp}$$
$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(b+c)+\frac{\sqrt{3}}{6}(b^{\perp}-c^{\perp}).$$

ゆえに，

$$\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}c+\frac{\sqrt{3}}{6}(2b^{\perp}-c^{\perp}),$$
$$\overrightarrow{HK}=-\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{6}(2c^{\perp}-b^{\perp}),$$
$$\overrightarrow{KG}=\frac{1}{2}(b-c)+\frac{\sqrt{3}}{6}(b^{\perp}+c^{\perp}).$$

$|\overrightarrow{GH}|^2$，$|\overrightarrow{HK}|^2$，$|\overrightarrow{KG}|^2$ を垂直ベクトルの基本性質を用いて計算すれば，

$$|\overrightarrow{GH}|^2=|\overrightarrow{HK}|^2=|\overrightarrow{KG}|^2$$
$$=\frac{1}{3}|b|^2+\frac{1}{3}|c|^2-\frac{1}{3}b\cdot c-\frac{\sqrt{3}}{3}b\cdot c^{\perp}$$

が成り立つ。したがって，三角形 GHK の３辺の長さは等しく，正三角形であることが示せた。

５．おわりに

本稿では，ベクトルの外積の概念の広がりと，その一種の対応である垂直ベクトルの教材性について考えてきた。最後に，ベクトルを用いる数学的方法の特徴にふれて本稿を閉じよう。

前節で，垂直ベクトルを導入することで示せる三角形の図形性質を例示した。例えば，命題３のナポレオンの定理をユークリッド幾何の方法で証明するときは，フェルマー点に注目することが多い。しかし，それに気づくためには，ユークリッド幾何の方法への熟練を要する。上記のベクトルによる方法は，少々長く，決してエレガントではないかもしれないが，垂直ベクトルの基本性質を知れば，式の変形はどれも型どおりのものである。そのように，ベクトルによる方法は，立式と式の変形，そして，式の読みとりを図形に即して行うことで可能になる。それは，たとえば，次のように活用することもできる。

・ コンピュータや実測などで何かの図形性質に関する予想がたてば，それを立式し確かめるのにベクトルの方法を用いる。
・ ベクトルの演算を行い，式の図形的な意味を読み取ることによって，種々の図形性質を見つける。

外積や垂直ベクトルは，図形の向きや垂直性に本質的に関わっている。このように，数学の概念の中で教材とも結びつく要素を取り出して，その生かし方を示すことは，生徒の数理的な思考の広がりを図ることに少しは貢献するであろう。そのような，数学の素朴な概念の中に潜む教材性を探し出すことを今後も模索していきたい。

【引用・参考文献】

１）今岡光範・平岡賢治,「高校のベクトル教材についての一考察－数学的な方法の広がりの視点から－」，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，第10巻，pp.197-206，2004.
２）文部省,『高等学校学習指導要領解説』，大日本図書，1961.
３）井上義夫,「高等学校数学科教育課程研究委員会報告」，日本数学教育会誌，第42巻，pp.69-77，1960.
４）小笠原篤宏・室田敏夫,「空間図形の性質に対する意識調査 －空間におけるベクトルの指導について考えるため－」，日本数学教育学会誌，第63巻，pp.118-122，1981.
５）田村寿雄,「幾何教材の新教育課程及びベクトルの指導について」，日本数学教育会誌，第41巻，

pp.170-172, 1959.
6）川崎宣昭,「高等学校「代数・幾何」教材におけるベクトル積の位置付けに関する一考察」, 日本数学教育会誌, 第73巻, pp.38-45, 1991.
7）W. L. Hamilton, *Elements on Quaternion*, London, 1866.
8）Felix Klein, *Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik im 19*, Jahrhundert I, Springer, 1926.
9）Felix Klein, 彌永昌吉監修, 足立恒雄・浪川幸彦監訳, 石井省吾・渡辺弘訳,『クライン：19世紀の数学』, 第4.3節, 共立出版, 1995.
10）Athen Herman, The teaching of vectors in the German gymnasium, II, *The Mathematics Teacher*, **59**, pp.485-495, 1966.
11）金谷健一,『形状 CAD と図形の数学』, 工学数学講座９, 第１章, 共立出版, 1998
12）小松彦三郎,『ベクトル解析と多様体Ｉ』, 岩波講座　応用数学６, 第1.9節, 岩波書店, 1994.
13）全米数学教師協議会, 井上義夫・佐々木元太郎監訳,『NCTM: 幾何教育への新しいアプローチ』, 第８章, 教育出版, 1980.
14）S. B. Elk, The cross product of two vectors is not just another vector － a major misconception being perpetuated in calculus and vector analysis textbooks, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **28**, pp.531-543, 1997.
15）一松信,『ベクトル解析入門』, 新数学入門シリーズ19, 第１, ３章, 森北出版, 1997.
16)N. E.Steenrod, *The topology of fiber bundles*, §22, Princeton University Press, 1951.
17）横田一郎,『群と位相』, 基礎数学選書５, 裳華房, 1971.
18）J. D. O'Keeffe, Calculation of the components of vector cross product in spaces of arbitrary dimension, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, Vol.21, pp.141-147, 1990.
19）J. D. O'Keeffe, Vector-product identities in n-space, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **24**, pp.295-300, 1993.
20）江原誠,「集合, ベクトル, 関数のグラフ的表示などについて, 興味ある若干の結果」, 日本数学教育会誌, 第48巻, pp.220-227, 1966.
21）H. S. M. コクセター, 銀林浩訳,『幾何学入門』, 1.8節, 明治図書, 1965.