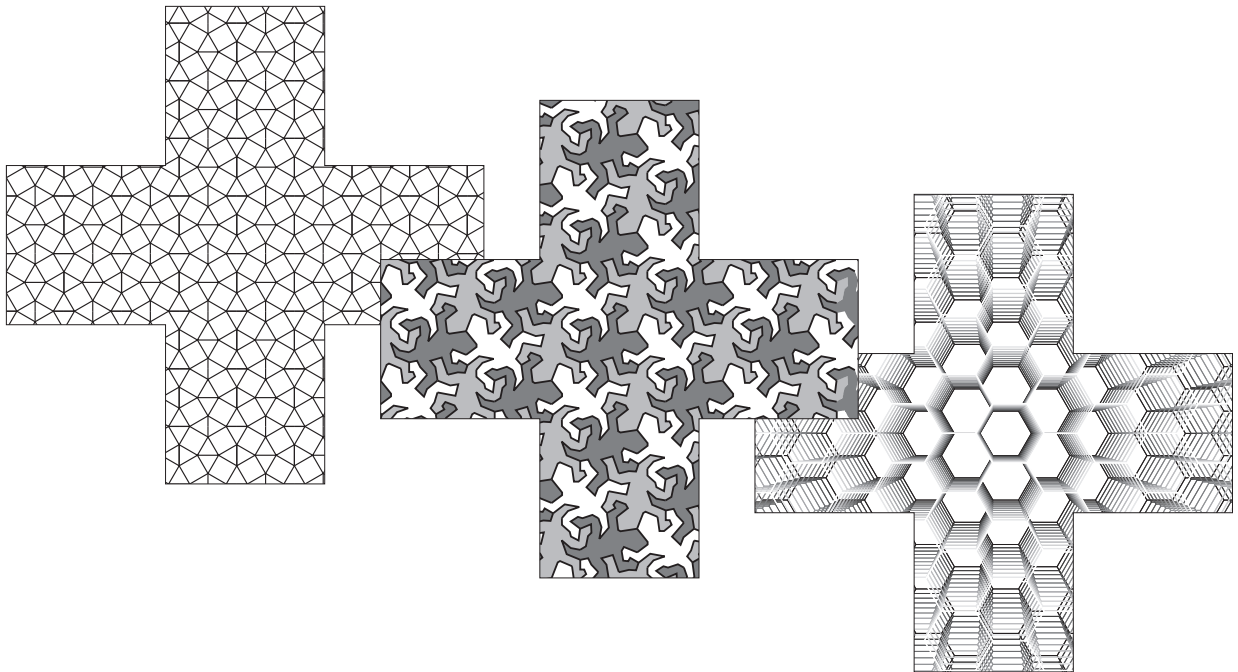


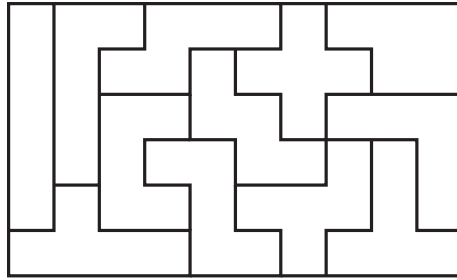
ポリオミノの数学



寺垣内 政一（広島大学大学院教育学研究科）

はじめに

子供のころ、ペントミノというパズルを持っていた。プラスチックでできた長方形の枠内に、様々な形のピースを配置して、すきまなく埋め尽くすというものだった。



何千通りものやり方があると説明書に書いてあるわりには、大変難しいパズルだったことを記憶している。現在でも安価な値段で市販されているし、コンピューター上で動作するゲームとしても流通している。

ペントミノは、この冊子のテーマであるポリオミノの一部である。簡単にいえば、同じ大きさの正方形を辺にそってくっつけた図形がポリオミノであり、正方形を5枚だけ使うものがペントミノである。ちなみに、正方形2枚からできるものをドミノとよぶ。(最近、ある大学生にきくと、ドミノとはそもそもドミノ倒しのための道具であると思っていたらしい。)

ポリオミノに関わる数学の話をもとめたものが、この冊子である。英語でかかれた本としては、Solomon Golombの「Polyominoes」とGeorge Martinの「Polyominoes」が代表格だろう。どちらも大変楽しい本だが、現時点で邦訳はない。それどころか、ポリオミノをテーマとした本格的な数学の和書は、私の知る限り存在しない。もちろん、本冊子でもとりあげたドミノのしきつめ問題など、個別には時々取り上げられている。

ポリオミノは、素材としては単純だが、奥は深い。たとえば、長方形ではないようなポリオミノのコピーを5個組み合わせて、長方形を形作ることができるのか、今だにわかっていない。すべての話題を網羅することは到底できないが、単なるパズル本のレベルではなく、ポリオミノという素材を、数学の視点からある程度深く扱った冊子を書きたかったというのが、私の動機である。

この冊子は、2008年度広島大学大学院教育学研究科リサーチオフィスプロジェクト「中等教育における教科教育内容に関する研究」の補助をうけて作成したものである。取りま

とめいただいた今岡光範先生に厚く御礼申し上げます。

2009年2月 寺垣内 政一

目次

1	Polyomino	1
2	Domino	2
3	Tromino	10
4	Tetromino	17
5	Pentomino	27
6	Bigger Polyomino	34
7	Polyomino の位数	37
8	Thurston の判定条件	39
	参考文献	45

1 Polyomino

この冊子において，すべての議論は平面上で行う．同じ大きさの正方形を，辺にそってぴったりとはりあわせていったものを，ポリオミノ (polyomino) という．特に， n 枚の正方形からなるものを， n -オミノ (n -omino) とよぶ．

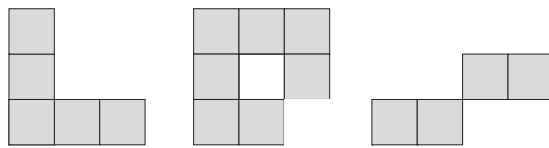


図 1 polyomino とそうでないもの

図 1 において，左側の 2 つは polyomino の例であるが，右端のものはそうではない (Golomb [5] は，こういったものを pseudo-polyomino とよんでいるが，この冊子では扱わない)．中央のものは，いわゆる“穴”をもつ polyomino の最初の例である．

平面上の図形として，polyomino に対しては，自由に平行移動，回転及び裏返しという操作を行えるものとする．つまり，そうして重なり合う polyomino は同じものとみなす．このとき，最初に思いつく素朴な問題は，自然数 n に対して， n -omino は何種類あるのかということであろう．表 1 にみられるように，小さい n に対しては固有の名前が流通している．

なお，28-omino は，153, 511, 100, 594, 603 種類あることが知られており ([18] 参照)，より一般には， n -omino の種類の数を $P(n)$ とすれば，

$$3.72^n < P(n) < 4.65^n$$

と予想されている ([19])．

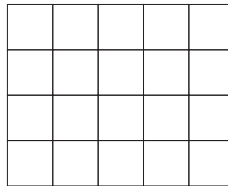
この冊子では扱わないが，裏返しを許さないで， n -omino を分類する立場もあることを注意しておく．



以下， $m \times n$ -board とは，自然数 m, n に対して，縦の長さが m ，横の長さが n の長方形であって，1 辺の長さが 1 の正方形に格子状に分割されたものをさす．図 2 に， 4×5 -board を示す．

n	名称	種類の個数
1	monomino	1
2	domino	1
3	tromino	2
4	tetromino	5
5	pentomino	12
6	hexomino	35
7	heptomino	108
8	octomino	369
9	nonomino	1285
10	dekomino	4655

表 1 polyomino の個数

図 2 4×5 -board

2 Domino

domino に関するもっとも有名な問題から始めよう。

問題 2.1. 図 3 のように、 8×8 -board から対角線上に位置する角の 2 マスを除いたものを、*domino* だけでタイリングできるか。

domino によるタイリング (domino タイリングとよぼう) とは、domino をすきまなく、重なりなく、しきつめることを意味する。より一般に、polyomino によるタイリングも同様に定義される。

さて、問題の答えは「できない」である。まず、 8×8 -board を、通常のチェス盤のように、隣接するマスが異なる色をもつように黒と白で塗り分けておく（こういう塗り分け

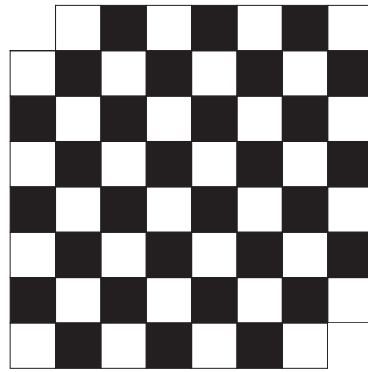


図3 domino だけでタイリングできるか？

をチェッカーボード彩色という). すると, domino をどこに置いたとしても, 黒いマス, 白いマス, それぞれ 1 マスずつをおおうことがわかる. よって, domino タイリングができるとすれば, 黒いマスと白いマスの枚数は同じでなければならない. しかし, 図3の塗り分けにおいて, 黒いマスは 30 マス, 白いマスは 32 マスあるため, domino タイリングはできないことがわかる.

以上の考察からわかるように, domino タイリングができる領域は, 異なる色のマスが隣接するように黒と白で塗り分けられたとき, 黒いマスと白いマスが同じ枚数でなければならない. しかし, それは domino タイリングできるための必要条件であって, 必ずしも十分条件かどうかはこの時点ではわからない. たとえば, 次の問題を考えよう.

問題 2.2. チェッカーボード彩色された 8×8 -board から, 適当に 1 枚ずつ黒いマスと白いマスを除いた領域は, domino タイリングができるか.

この場合, 残っている領域において, 黒いマス, 白いマス共に 31 枚ずつあるから, domino タイリングできる可能性は残されている. 実は, 巧妙な手法で, それが可能であることが示される.

図4のように, “壁”を設置する. ×印をつけたマスが削除されたとする. あとは壁にそって, domino を貨物列車のように並べていけばよい.



長方形領域については, domino タイリングができるための必要十分条件を得るのはやさしい.

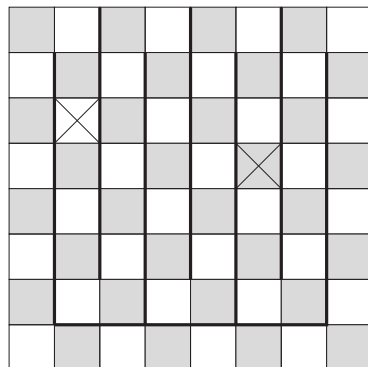


図 4 壁

定理 2.1. $m \times n$ -board が domino タイリング可能であるための必要十分条件は、 m または n が偶数であることである。

証明. domino タイリング可能とすると、面積 mn は偶数でなければならないから、 m または n が偶数である。逆に、 m または n が偶数であれば、domino タイリング可能であることは明らかである。□

それでは、縦も横も長さが奇数であるような長方形領域について、monomino 1 枚を使用することにすればどうだろうか。

定理 2.2. m, n を奇数とする。このとき $m \times n$ -board は、domino $\frac{mn-1}{2}$ 枚と monomino 1 枚を使ってタイリングできる。

証明. $m \times n$ -board を、 $(m-1) \times n$ -board と $1 \times n$ -board に分割して考えればよい。前者は domino タイリング可能であり、後者は domino $\frac{n-1}{2}$ 枚と monomino 1 枚によってタイリングできる。□

★

長方形ではない領域の場合、チェッカーボード彩色において、黒と白のマスが同じ枚数だけあっても、図 5 が示すように、domino タイリング不可能な場合がある。

1990 年、William Thurston [17] は、穴のあいていない領域が domino タイリングできるための必要十分条件を与えた。穴のある領域に対しては、1996 年、伊藤賢一 [8] によって必要十分条件が得られている。さらに、伊藤 [9] は平面ではなく、曲面上の領域にまで

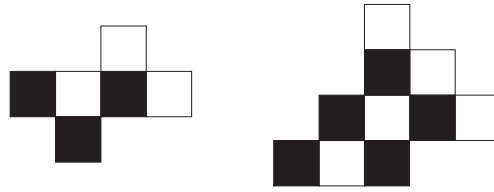


図5 domino タイリング不可能

考察を広げている．Thurston の条件は，それほど複雑なものではないが，少し高度なので，§8 に記述する．



domino タイリングが可能な領域に対して，何通りのタイリングが可能かという問題が想起される．一般には難しい問題だが， $2 \times n$ -board ならば，容易に解決できる．

定理 2.3. $2 \times n$ -board に対する domino タイリングの総数を T_n とすると， $T_n = F_{n+1}$ である．ただし， F_n は Fibonacci 数 ($F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ($n \geq 1$)) である．

証明. $T_1 = 1, T_2 = 2$ は明らかである． $n \geq 1$ として， $2 \times (n+2)$ -board を横長の長方形として考える．

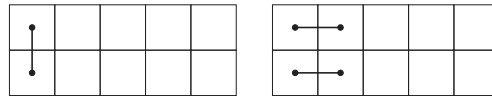
図6 $T_{n+2} = T_{n+1} + T_n$

図6に示すように，左端に domino を立てておく場合，タイリングの総数は T_{n+1} に等しい．また，左端に2枚の domino を水平におく場合，タイリングの総数は T_n に等しい．つまり，漸化式 $T_{n+2} = T_{n+1} + T_n$ が成立し， $T_n = F_{n+1}$ であることがわかる． □

[7] では，母関数を利用して， $3 \times n$ -board に対する domino タイリングの総数が分析されている．ここでは，数列の漸化式を用いて解決しよう．

$3 \times n$ -board の domino タイリングの総数を a_n とする．また，補助的に， $3 \times n$ -board の左角の1つを除いた領域に対する domino タイリングの総数を b_n とする．容易にわかるように， $a_1 = 0, a_2 = 3, b_1 = 1, b_2 = 0$ である．

次に，左端に注目して，漸化式 $a_{n+2} = 2b_{n+1} + a_n$ を得る (図7) ．

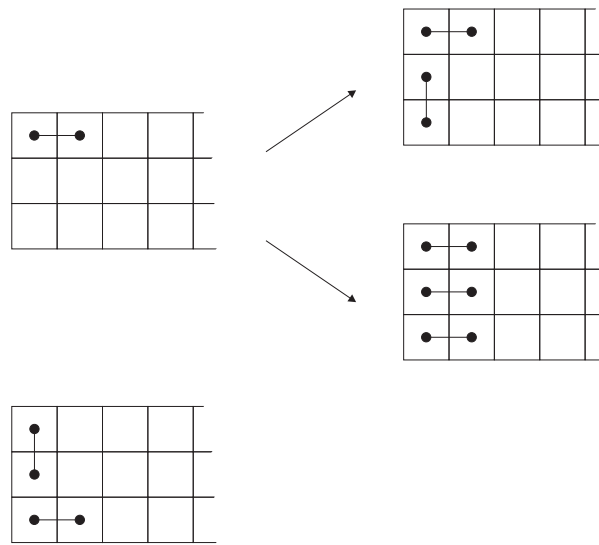


図7 $a_{n+2} = 2b_{n+1} + a_n$

同様に，漸化式 $b_{n+2} = a_{n+1} + b_n$ を得ることができる (図8) .

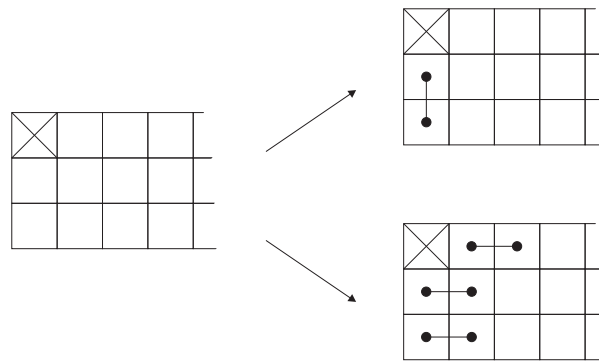


図8 $b_{n+2} = a_{n+1} + b_n$

小さい n の値に対して， a_n, b_n を計算しておく (表2) .

こうして，初期条件 $a_1 = 0, a_2 = 3, b_1 = 1, b_2 = 0$ のもとで，連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+2} &= 2b_{n+1} + a_n \\ b_{n+2} &= a_{n+1} + b_n \end{cases}$$

n	1	2	3	4	5	6
a_n	0	3	0	11	0	41
b_n	1	0	4	0	15	0

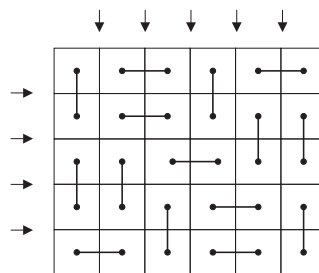
表 2

を解けばよい．詳細は省略するが，結果は次のようになる．

定理 2.4. $3 \times n$ -board に対する domino タイリングの総数を a_n とすると， $a_{2m-1} = 0$ ， $a_{2m} = \frac{11(\beta^{m-1} - \alpha^{m-1}) - 3(\beta^{m-2} - \alpha^{m-2})}{2\sqrt{3}}$ ($m \geq 1$)．ただし， $\alpha = 2 - \sqrt{3}$ ， $\beta = 2 + \sqrt{3}$ である．



domino タイリングに関する最後の話題として，強固な domino タイリングというものを考えよう．以下，長方形領域を考える．長方形領域 R が domino タイリングされるとする． R を 2 つの長方形領域に分割するような任意の直線（ただし，格子に沿ったもの）は，少なくとも 1 枚の domino の中央を横断するとき，その domino タイリングは強固であるという．図 9 は， 5×6 -board の強固な domino タイリングの一例である．矢印の示す 9 本の直線は，いずれも domino の中央を一度は横断しているからである．

図 9 5×6 -board の強固な domino タイリング

次の問題は，端から考察を進めれば容易にわかる．

問題 2.3. $m \leq 4$ ならば， $m \times n$ -board は強固な domino タイリングをもたないことを示せ．

よって、以下では $m, n \geq 5$ として、 $m \times n$ -board を考察する。5 × 5-board は、もちろん domino タイリングをもたない。そして、5 × 6-board は強固な domino タイリングをもつ (図 9)。

驚くべきことに、6 × 6-board には強固な domino タイリングが存在しない。

定理 2.5. 6 × 6-board は、強固な domino タイリングをもたない。

証明. 背理法で証明する。6 × 6-board が強固な domino タイリングをもったとする。

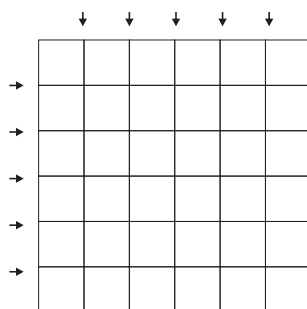


図 10 6 × 6-board

図に矢印で示した 10 本の直線のそれぞれは、少なくとも 1 つの domino の中央を横断する。また、どの直線も、6 × 6-board を、面積が偶数の長方形 2 つに分割する。従って、どの直線もちょうど偶数枚の domino の中央を横断しなければならない。

一方、1 つの domino の中央を横断する直線は 1 つしかないので、domino が少なくとも 20 枚は存在しなければならない。しかし、もともと 18 枚の domino でタイリングしているのだから、これは矛盾である。□

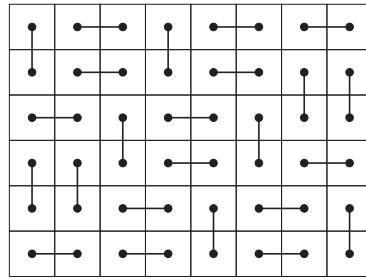
問題 2.4. 6 × 8-board の強固な domino タイリングを見つけよ。

図 11 に一例を示しておく。

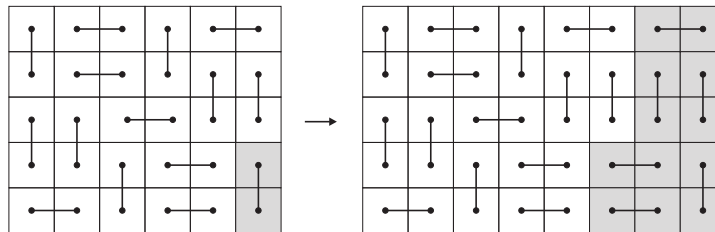
定理 2.6. $m \times n$ -board が強固な domino タイリングをもつには、以下のすべてをみたすことが必要十分である。

- (1) $m, n \geq 5$
- (2) $mn \equiv 0 \pmod{2}$
- (3) $(m, n) \neq (6, 6)$

証明. 条件の必要性は、これまでに述べてある。従って、十分性を示す。

図 11 6×8 -board の強固な domino タイリング

まず, 図 12 のように, 5×6 -board の強固な domino タイリングを, 5×8 -board の強固な domino タイリングに拡大する.

図 12 5×6 -board から 5×8 -board へ

これを続けていけば, $5 \times n$ -board (n は 6 以上の偶数) に対して, 強固な domino タイリングを構成できる.

また, 図 13 に示すように, 5×6 -board の強固な domino タイリングを, 7×6 -board の強固な domino タイリングに拡大できる.

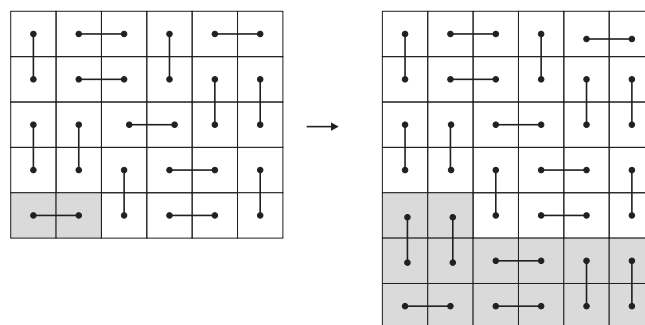
図 13 5×6 -board から 7×6 -board へ

図 12 及び 13 の操作を組み合わせることで、 $m \times n$ -board (m は 5 以上の奇数、 n は 6 以上の偶数) に対して、強固な domino タイリングを構成できる。

同様に、図 11 に示した 6×8 -board の強固な domino タイリングを出発点にして、 $m \times n$ -board (m は 6 以上の偶数、 n は 8 以上の偶数) に対して、強固な domino タイリングを構成できる。□

3 Tromino

tromino には 2 種類ある。

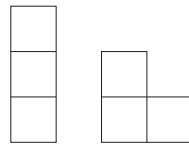


図 14 tromino

前者を I-tromino、後者を L-tromino とよぶ。

まずは、非常にやさしい問題を考えよう。

問題 3.1. 8×8 -board を、*tromino* のみを使って、タイリングできるか。

答えは、不可能。面積を考えればすぐにわかる。

まずは、I-tromino によるタイリングを考えよう。次の結果は容易にわかる。

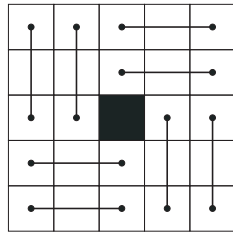
定理 3.1. $m \times n$ -board が I-tromino だけでタイリングできるための必要十分条件は、 m または n が 3 で割り切れることである。

言い換えれば、長方形領域については、面積が 3 の倍数であることと、I-tromino だけでタイリングできることが同値である。

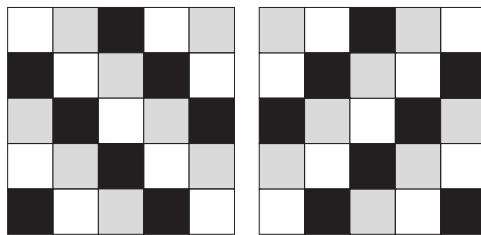
問題 3.2. 5×5 -board を、I-tromino 8 枚と monomino 1 枚を使ってタイリングせよ。

タイリングは、試行錯誤ですぐにみつけれられる。図 15 に一例を示しておく。

この問題のおもしろいところは、monomino の位置にある。誰がやっても、monomino は中央にくる。それはなぜか。図 16 に示された 3 色塗り分けを考える。前者のように塗り分けた 5×5 -board を左に 90 度回したものが後者にすぎない。よって、どちらにせよ、白いマスは 9 マスあるが、他の 2 色のマスについてはそれぞれ 8 マスずつしかない。

図 15 5×5 -board のタイリング

I-tromino をどこに置くにせよ, 3 色のマスをもつ I-tromino を 1 つずつおおうことがみてとれる. 従って, monomino は白いマスのいずれかでなければならない. 図 16 の両方の塗り分けにおいて, 共通する白いマスは中央しかない. よって, monomino の位置は中央でなければならないことがわかる.

図 16 5×5 -board の 3 色塗り分け

次の問題は, 問題 3.2 を少し一般化したものである.

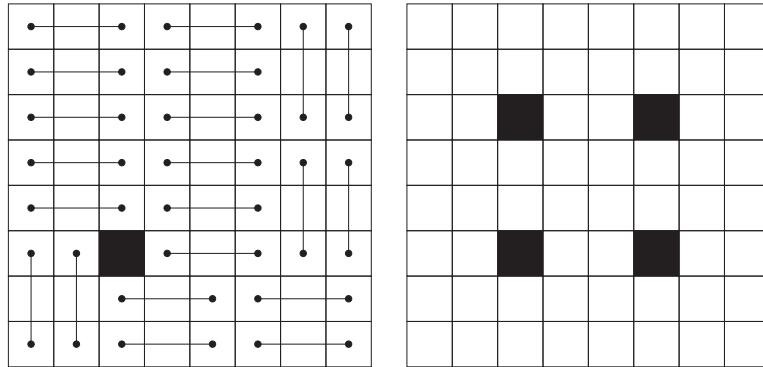
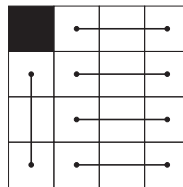
問題 3.3. 8×8 -board を, I-tromino 21 枚と monomino 1 枚を使ってタイリングせよ.

図 17 に一例を示す. 問題 3.2 と同様の 3 色塗り分けを行って議論することで, monomino の位置は, 図 17 右の 4 つの黒いマスのいずれかでなければならないことがわかる.

一般に, 正方形領域の I-tromino によるタイリングに関しては, 次のことを証明できる.

定理 3.2. $n \geq 3$ とする. $n \times n$ -board は, I-tromino と高々 1 枚の monomino を使ってタイリングできる.

証明. $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき, I-tromino だけでタイリングできることは明らかである. $n = 4, 5$ のときは, それぞれ図 18, 15 のように, monomino を 1 枚使用してタイリングできる.

図 17 8×8 -board のタイリング図 18 4×4 -board のタイリング

あとは、縦と横の長さを 3 ずつ広げたときに、L-tromino だけで付け加わった領域をタイリングできることからわかる。□

★

次は、L-tromino に関する問題を考えよう。

定理 3.3. $m \times n$ -board が L-tromino のみでタイリングできるには、以下のすべてを満たすことが必要十分である。

- (1) $m, n \geq 2$
- (2) $mn \equiv 0 \pmod{3}$
- (3) 一方が 3 ならば、他方は偶数

証明. 【必要性】 $m, n \geq 2$ かつ $mn \equiv 0 \pmod{3}$ であることは明らかである。そこで、 $m = 3$ としたとき、 n が偶数であることを示す。 $n = 2k + 1$ (≥ 3) とする。

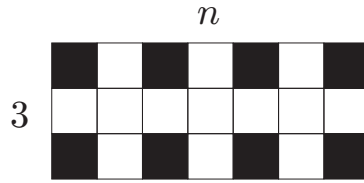
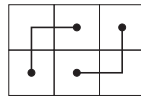
図 19 $3 \times (2k + 1)$ -board

図 19 に示すように、奇数番目の列の一番上と一番下のマス黒く塗る。このとき、黒いマスの総数は、 $2(k + 1) = 2k + 2$ 枚である。

一方、1 つの L-tromino が 2 つ以上の黒いマスをおおうことはできない。よって、L-tromino が少なくとも $2k + 2$ 枚は存在することになるが、面積が少なくとも $3(2k + 2) = 6k + 6$ 以上となり、不合理である。

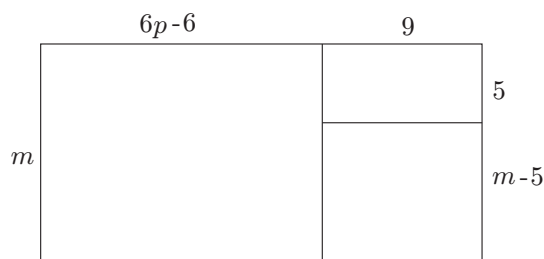
【十分性】図 20 に示すように、 2×3 -board が L-tromino 2 枚でタイリングできるので、 $2k \times 3l$ -board はタイリングできる。

図 20 2×3 -board のタイリング

そこで、 m を 3 以上の奇数として、 $m \times 3l$ -board を考察する。

l が偶数のときは、 $m \times 6p$ -board となるが、 $3 \times 6p$ -board と $(m - 3) \times 6p$ -board に分割すれば、それぞれが上述の結果から L-tromino でタイリングできる。

l が奇数のときは、 $m \times (6p + 3)$ -board となるが、仮定から $m \geq 5$ である。これを、図 21 に示すように、3 つの長方形 ($m = 5$ のときには 2 つ) に分割する。

図 21 $m \times (6p + 3)$ -board の分割

5×9 -board を除いては，上述の結果からタイリング可能であり，図 22 が 5×9 -board の L-tromino によるタイリングを示している． \square

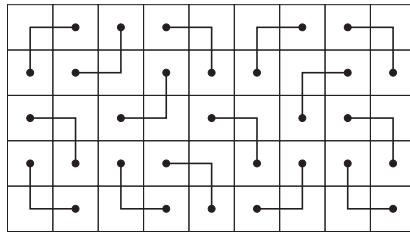


図 22 5×9 -board のタイリング

問題 3.4. 5×5 -board を，L-tromino 8 枚と monomino 1 枚を使ってタイリングせよ．また，monomino の位置に関して考察せよ．

図 23 に 3 つの例を示す．

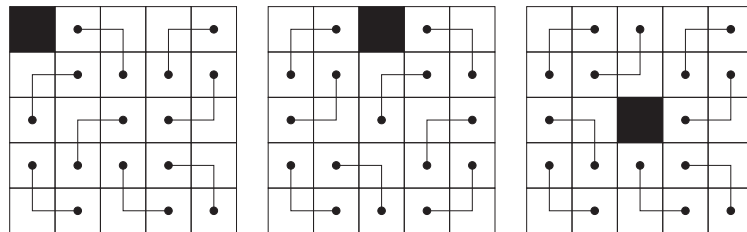


図 23 5×5 -board のタイリング

従って，monomino の位置は，図 24 の黒いマスは可能であることがわかる．それ以外の位置に monomino を置いたとき，L-tromino だけで残りをタイリングできないことは 1 つ 1 つ検討していけばわかる．(対称性を利用すれば，実際に確認する必要があるのは，3 通りだけである．)

問題 3.5. 8×8 -board を，L-tromino 8 枚と monomino 1 枚を使ってタイリングせよ．また，monomino の位置に関して考察せよ．

タイリングを見つけることは容易である．興味深いことに，monomino はどんな位置にもおくことができる．まず， 2×2 -board は，L-tromino 1 枚と monomino 1 枚でタイリングできるが，monomino の位置は任意に選べる．この事実と対称性を利用して， 4×4 -board を L-tromino 5 枚と monomino 1 枚でタイリングする際，再び monomino

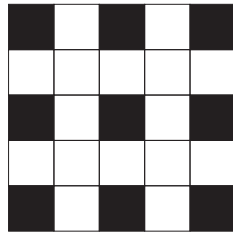
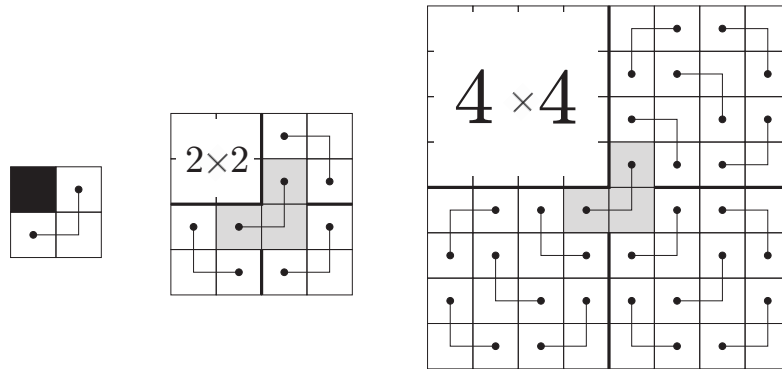


図 24 monomino の位置

の位置を任意に選べるのがわかる (図 25) . これを続けて, 8×8 -board に限らず, より一般に, $2^n \times 2^n$ -board ($n \geq 1$) は, L-tromino $\frac{4^n-1}{3}$ 枚と monomino 1 枚でタイリングできて, monomino の位置は任意に選べる .

図 25 2×2 -, 4×4 -, 8×8 -board のタイリング

次はやさしい .

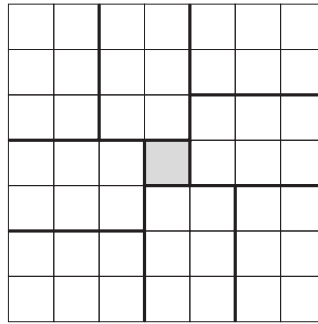
問題 3.6. 3×3 -board を, L-tromino だけでタイリングできないことを示せ .

定理 3.4. $n \geq 2$ とする . $n \neq 3$ ならば, $n \times n$ -board は, L-tromino と高々 1 枚の monomino を使ってタイリングできる .

証明. 定理 3.3 より, n が 6 以上の 3 の倍数のとき, L-tromino のみでタイリングできる . また, $n = 2, 4, 5$ についてはすでに述べてある . $n = 7$ のときは, 図 26 に示しているように, 2×3 -board の L-tromino 2 枚によるタイリング (図 20) を基本にして, monomino 1 枚を使ってタイリングできる .

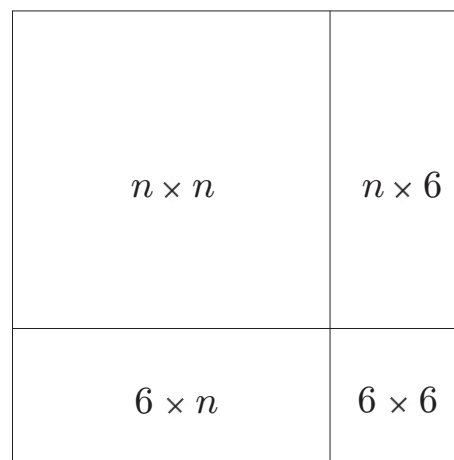
よって, 次の補題が示されれば, 定理の証明は完了する .

□

図 26 7×7 -board のタイリング

補題 3.1. $n \geq 2$ とする. $n \times n$ -board が, L-tromino と高々 1 枚の monomino によってタイリングできるとき, $(n+6) \times (n+6)$ -board へ, monomino の枚数を増やさずにタイリングを拡張できる.

証明. $(n+6) \times (n+6)$ -board を, 図 27 のように分割する. 6×6 -board は, L-tromino だけでタイリングできた.

図 27 $(n+6) \times (n+6)$ -board の分割

$6 \times 2l$ -board は, 3×2 -board を組み合わせて, L-tromino だけでタイリングできる. $6 \times (2l+1)$ -board は, $6 \times (2l-2)$ -board と 6×3 -board に分割すれば, それぞれ L-tromino だけでタイリングできることがわかる. □

4 Tetromino

tetromino は 5 種類ある .

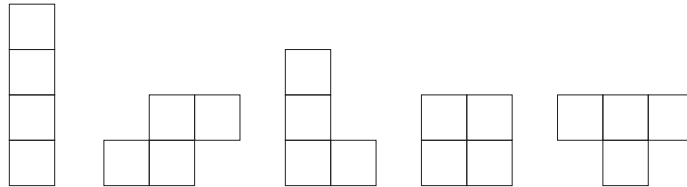


図 28 tetromino

図 28 において, 左から, I-, S-, L-, O-, T-tetromino とよぶ .

最初の問題はやさしい .

問題 4.1. 8×8 -board を, I-tetromino, L-tetromino, O-tetromino, T-tetromino をそれぞれ 4 枚使ってタイリングせよ .



それでは, I-tetromino に関する問題を考えよう . domino タイリングと同様に, 強固な I-tetromino タイリングが定義される .

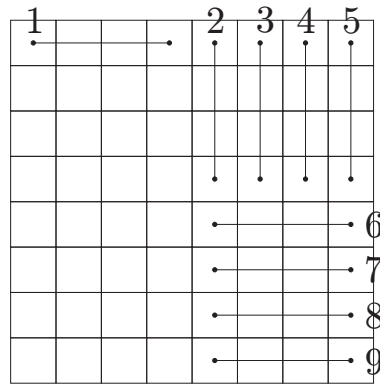
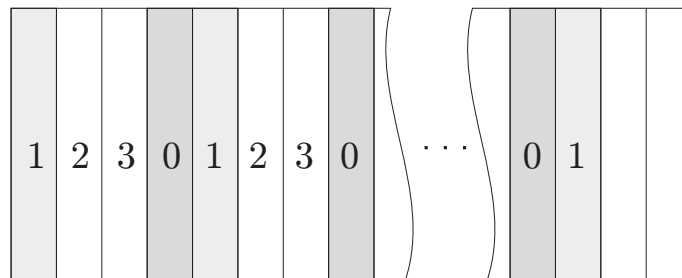
問題 4.2. 8×8 -board は, 強固な I-tetromino タイリングをもたないことを示せ .

図 29 のように, $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 9$ の順で考察していくと, いずれ, I-tetromino を横断しない直線がみつかってしまう .

定理 4.1. $m \times n$ -board が I-tetromino タイリングをもつための必要十分条件は, m または n が 4 で割り切れることである .

証明. 十分性は明らかである . そこで, $m \times n$ -board が I-tetromino タイリングをもつとして, n が 4 で割り切れないと仮定する . このとき, m が 4 で割り切れることをいう .

図 30 に示すように, n 列を左から順に, 1, 2, 3, 0 とラベル付けしていく . このとき, n が 4 で割り切れないと仮定しているため, 1 のマスのほうが 0 のマスよりも m 枚だけ多い .

図 29 8×8 -board図 30 $m \times n$ -board のラベル付け

一方, I-tetromino タイリングにおいて, 各 I-tetromino は $0, 1, 2, 3$ がふられたマスをもつずつおおうか, 同じ番号のマスをもつ 4 マスおおう. 従って, 1 のマスと 0 のマスの枚数の差は, 4 の倍数でなければならない. よって, m が 4 で割り切れる. \square

この議論は, そのまま一般化できる.

定理 4.2. $m \times n$ -board が直線型の d -omino でタイリングできるための必要十分条件は, m または n が d で割り切れることである.

証明は, 定理 4.1 と同様であり, 列を左から順に $1, 2, 3, \dots, d-1, 0$ を使って, 巡回的にラベル付けしていけばよい.

★

L-tetromino について, やはり強固なタイリングを考えよう.

問題 4.3. 8×8 -board に対して，強固な L-tetromino タイリングを見つけよ．

図 31 に一例を示す．半分しか描いていないが，残りは同じものを回転してしきつめればよい．

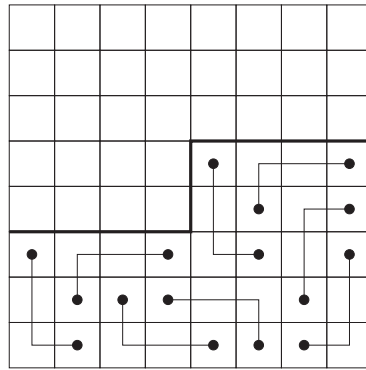


図 31 8×8 -board の強固な L-tetromino タイリング

問題 4.4. 8×8 -board を，L-tetromino 15 枚と O-tetromino 1 枚を使ってタイリングできるか．

タイリングはできない．しかし，チェッカーボード彩色を使った議論では証明できない．そこで，1 列おきに黒く塗る．黒いマスの総数は 32 枚である．タイリングできたと仮定すると，O-tetromino は 2 枚だけ黒いマスをおおう．一方，L-tetromino は 3 枚か 1 枚の黒いマスをおおう．前者の L-tetromino が a 枚，後者が b 枚とすると，

$$3a + b = 30, \quad a + b = 15$$

となるが， $2a = 15$ となって，矛盾する．

定理 4.3. $m \times n$ -board が L-tetromino タイリングをもつための必要十分条件は， $m, n \geq 2$ かつ $mn \equiv 0 \pmod{8}$ であること．

証明. 【必要性】 $m, n \geq 2$ は明らか．面積を考えれば， $mn \equiv 0 \pmod{4}$ である．よって， m を偶数と仮定して十分． $2\ell \times n$ -board において，奇数行目をすべて黒くぬる．L-tetromino には 2 種類あって，黒いマスを 3 マスおおうものと 1 マスだけおおうものがある．前者が x 枚，後者を y 枚とすると，

$$x + y = \frac{2\ell n}{4} = \frac{\ell n}{2}.$$

一方，黒いマスの総数は ln 枚だから，

$$3x + y = ln.$$

こうして， $ln = 4x$ となり， $ln \equiv 0 \pmod{4}$ を得た．従って， $mn \equiv 0 \pmod{8}$ である．

【十分性】 $2a \times 4b$ -board が， $8a \times n$ -board（ただし， n は 3 以上の奇数）を考えればよい．L-tetromino 2 枚で， 2×4 -board をタイリングできるので，前者がタイリングできることはやさしい．後者については， $8a \times 3$ -board と $8a \times 2c$ -board ($c \geq 0$) に分割する．このとき， $8a \times 2c$ -board は先ほどのようにタイリングできる．また， $8a \times 3$ -board については， 8×3 -board のタイリングを利用して（図 32 参照．スペースの都合上 3×8 -board を描いた）タイリングできる． \square

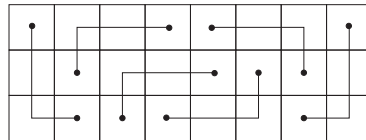


図 32 3×8 -board の L-tetromino タイリング



S-tetromino は，テトリスの場合と同様に，使い勝手のよいものではない．

問題 4.5. $m \times n$ -board は，S-tetromino タイリングをもたないことを示せ．

次の問題は，たとえば S-tetromino の位置に着目すれば容易に解ける．

問題 4.6. $2 \times n$ -board を，5 種類の tetromino をすべて使ってタイリングすることはできないことを示せ．

問題 4.7. 3×4 -board に対して，S-tetromino と L-tetromino を使ったタイリングを 2 つ 見つけよ．

問題 4.8. 6×6 -board を，6 枚の S-tetromino，2 枚の L-tetromino，1 枚の O-tetromino によってタイリングせよ．

図 33 に一例を示す．

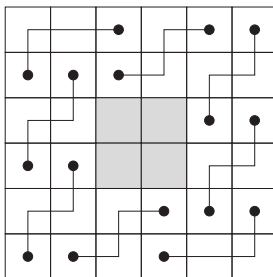
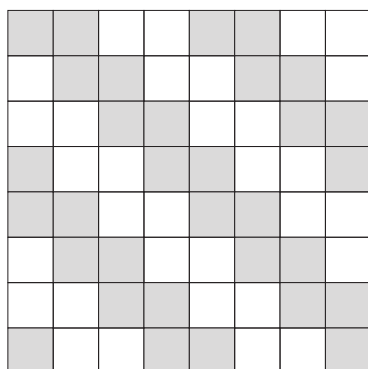


図 33 6 × 6-board のタイリング

問題 4.9. 8×8 -board を, *I-tetromino* と *S-tetromino* あわせて 15 枚と *O-tetromino* 1 枚を使ってタイリングできるか.

タイリングはできない. チェッカーボード彩色を使った議論ではうまくいかない. そこで, 図 34 のように黒く塗る. 黒いマスの総数は 32 枚である.

図 34 8×8 -board のタイリング

タイリングできたと仮定すると, *O-tetromino* は 1 枚あるいは 3 枚の黒いマスをおおう. 一方, *I-tetromino* は 2 枚の黒いマスをおおい, *S-tetromino* は 0 枚, 2 枚あるいは 4 枚の黒いマスをおおう. よって, 黒いマスの総数は奇数となり, 矛盾する.



T-tetromino に対しても, 強固なタイリングが考えられる.

問題 4.10. 8×8 -board に対して，強固な T-tetromino タイリングを見つけよ．

図 35 に一例を示す．

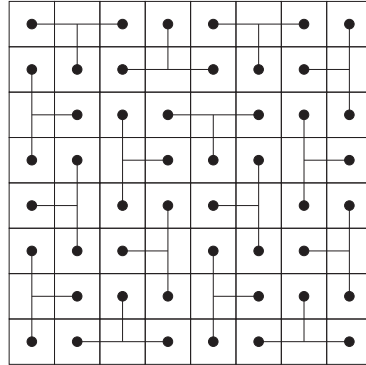


図 35 8×8 -board の強固な T-tetromino タイリング

問題 4.11. 8×8 -board を，T-tetromino 15 枚と O-tetromino 1 枚を使ってタイリングできるか．

これは，チェッカーボード彩色を利用すればたやすい．黒いマス，白いマスそれぞれ 32 枚ずつある．タイリングできたと仮定すると，O-tetromino は 2 枚の黒いマスをおおい，T-tetromino は 1 枚あるいは 3 枚の黒いマスをおおう．従って，タイリングできるとすれば，T-tetromino 15 枚によって，30 枚の黒いマスをおおうことになるが，問題 4.4 と同様の議論によって，矛盾にいたる．

次の定理は，D. W. Walkup [16] によって証明されたものである．

定理 4.4. $m \times n$ -board が T-tetromino タイリングをもつための必要十分条件は $m, n \geq 2$ かつ $m \equiv n \equiv 0 \pmod{4}$ であること．

必要性について，少し考察する． $m, n \geq 2$ と $mn \equiv 0 \pmod{4}$ はよい．そこで， m を偶数として十分なので， $2\ell \times n$ -board を考える．チェッカーボード彩色を行うと，黒いマスの総数は $\frac{\ell n}{2}$ 枚である．T-tetromino には 2 種類あって，3 枚の黒いマスをおおうものが x 枚，1 枚の黒いマスをおおうものが y 枚あるとすると，

$$x + y = \frac{\ell n}{2}, \quad 3x + y = \ell n$$

を得る．こうして， $\ell n = 4x$ となるので， $mn \equiv 0 \pmod{8}$ がわかる．よって， m か n のいずれかは 4 の倍数であることまではわかるのだが，両方が 4 の倍数でなければならない

ことを示す簡明な議論がない．ここでは，Walkup の議論を多少，書きなおして収録する．

そのためには準備がいる． xy 平面の第 1 象限において， x 座標も y 座標も偶数である点 $P(x, y)$ に対し， $x - y \equiv 0 \pmod{4}$ ならば点 P を *type A*， $x - y \equiv 2 \pmod{4}$ ならば点 P を *type B* とよぶ．図 36 において，黒丸が *type A* の点であり，白丸が *type B* の点である．

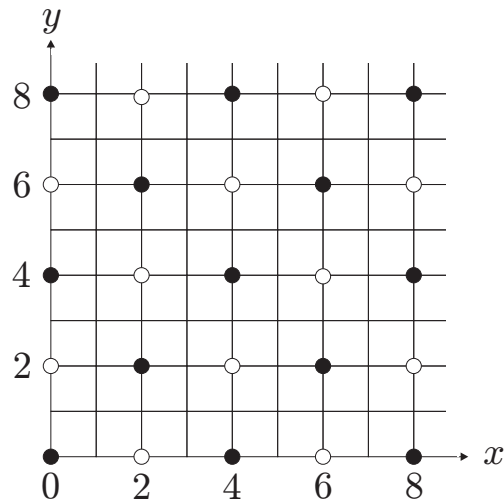


図 36 第 1 象限の *type A*, *B* 格子点

T-tetromino タイリングされた $m \times n$ -board を，左下の角が原点にくるように第 1 象限に配置する．すると，そのタイリングは自然に第 1 象限全体のタイリングに拡張できる．タイリングを 1 つ固定して，次の定義を行う．

各格子点からは 2 本，3 本あるいは 4 本の長さ 1 の線分が出ている．そういった線分が T-tetromino の内部を横断しないとき，*cut* という．また，T-tetromino には，内角が 90 度であるような角が 6 か所ある．そのような角は 1 つも接しない格子点を *cornerless* という．

補題 4.1. 第 1 象限内の *type A* の点から出る線分は，いずれも *cut* であり，*type B* の点は *cornerless* である．

証明. 非負整数 λ に対して，直線 $L(\lambda) : x + y = 4\lambda$ を考える．直線 $L(\lambda)$ 以下の点（すなわち，領域 $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\lambda\}$ に含まれる格子点）に対する望む主張を命題 $P(\lambda)$ とよぼう． λ に関する帰納法を行う．明らかに， $P(0)$ は成立する．（原点は *type A* であるが，そこから出る 2 本の線分は必ず *cut* である．）そこで， $P(\lambda)$ が成立す

ると仮定して， $P(\lambda + 1)$ が成立することを示す．

証明は次の 3 段階にわけて行う．

- (1) 直線 $L(\lambda + 1)$ 上の type A の点に対して，下と左に出る線分が cut であること
 - (2) 直線 $L(\lambda)$ と $L(\lambda + 1)$ の間にある type B の点が cornerless であること
 - (3) 直線 $L(\lambda + 1)$ 上の type A の点に対して，上と右に出る線分が cut であること
- (1) 直線 $L(\lambda + 1)$ 上の type A の点 P を考察する (図 37)．

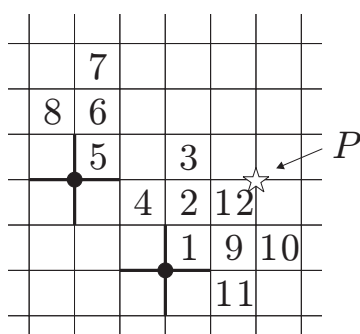


図 37 Step 1

もし，1 つの T-tetromino が 1-2-3-4 のマスに位置していたら，5 のマスをおおうためには，5-6-7-8 に T-tetromino が位置しなければならない．左斜め上に向かって，この議論を続けていくと， y 軸までいたり破綻する．1 つの T-tetromino が 1-9-10-11 のマスに位置していたとしても同様である．従って，1 のマスをおおう T-tetromino の位置は，1-2-3-12，1-9-11-12，1-2-4-12，1-9-10-12 のいずれかである．いずれにせよ，点 P から下と左に出る線分は cut になる．

- (2) 直線 $L(\lambda)$ と $L(\lambda + 1)$ の間にある type B の点 Q を考察する (図 38)．

点 Q が cornerless でなかったとする．このとき，1，2，3 のいずれのマスからも T-tetromino の内角 90 度の角が Q に接することができない．よって，4 のマスからであり，いいかえれば，1，2，3 のマスは 1 つの T-tetromino によっておおわれている．それは，1-2-3-5 か 1-2-3-6 に位置するものであり，前者ならば，6 のマスをおおえず，後者ならば 5 のマスをおおえない．(Q の左下の type B の点が cornerless であることを利用している．)

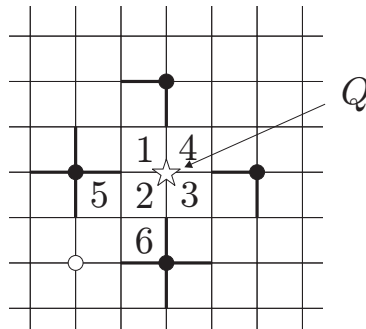


図 38 Step 2

(3) 直線 $L(\lambda + 1)$ 上の type A の点を考察する (図 39).

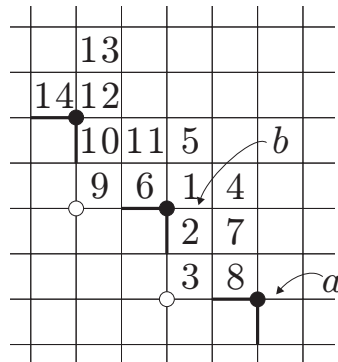


図 39 Step 3

線分 a が cut であるとき, 線分 b も cut であることを証明する. x 軸上の線分は cut であるから, これによって, 直線 $L(\lambda + 1)$ 上の type A の点から右にでる線分はすべて cut であることを結論できる.

b が cut でないので, 1 および 2 のマスは 1 つの T-tetromino によっておおわれる. それは 3 のマスをおおわない. よって, 1-2-4-6, 1-2-4-5, 1-2-5-6 のいずれかに位置する. しかし, 4 をおおうと, 7, 8 のマスを見て, 破綻にいたる. よって, 1-2-5-6 に位置する. すると, 9, 10 が 1 つの T-tetromino によっておおえない. そこで, 10 と 11 のマスを見

れば, 10-12-13-14 を 1 つの T-tetromino がおおうことになる. これを左上に向かって続けていけば, y 軸にいたり, 破綻する.

同様にして, 直線 $L(\lambda + 1)$ 上の type A の点から上にでる線分はすべて cut であることを結論できる. \square

定理 4.4 の証明. 十分性は, 4×4 -board を T-tetromino 4 枚でタイリングできるので明らかである. 必要性については, T-tetromino でタイリングされた $m \times n$ -board を第 1 象限に, 左下の角が原点にくるように配置する. このとき, $(0, 0), (n, 0), (0, m), (n, m)$ を頂点の座標とする. タイリングは, 第 1 象限全体に自然に拡張される.

まず, $n \equiv 2 \pmod{4}$ は不可能である. なぜなら, $n \equiv 2 \pmod{4}$ ならば, 頂点 $(n, 0)$ は type B であり, 補題 4.1 によって cornerless のはずだが, $m \times n$ -board の右下の角だから, それはありえない. もし $n \equiv 3 \pmod{4}$ ならば, 頂点 $(n, 0)$ を図 40 の点 P として, 1 のマスをつめることができない. もし $n \equiv 1 \pmod{4}$ ならば, 頂点 $(n, 0)$ を図 40 の点 Q として, 2 のマスをつめる T-tetromino の位置は一意的であるが, そのとき, 点 Q のすぐ左上の type B の点に別の T-tetromino の角がきてしまう. 以上により, $n \equiv 0 \pmod{4}$ がわかる. 同様の議論によって, $m \equiv 0 \pmod{4}$ もわかる. \square

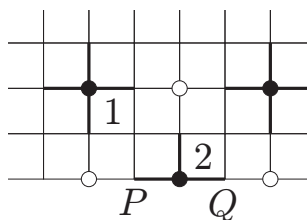


図 40 $n \equiv 1$ or $3 \pmod{4}$

問題 4.12. 5 種類の tetromino をすべて 1 枚ずつ使っては, 長方形領域をタイリングできないことを示せ.

$m \times n$ -board をタイリングするとして, 面積は 20 でなければならないから, $\{m, n\} = \{1, 20\}, \{2, 10\}$ あるいは $\{4, 5\}$ である. 1×20 -board が不可能であることは明らか. また, 問題 4.6 によって, 2×10 -board が不可能であることもよい. 4×5 -board に対しては, チェッカーボード彩色を行えば, 不可能であることがわかる.

5 Pentomino

Pentomino には, 12 種類ある.

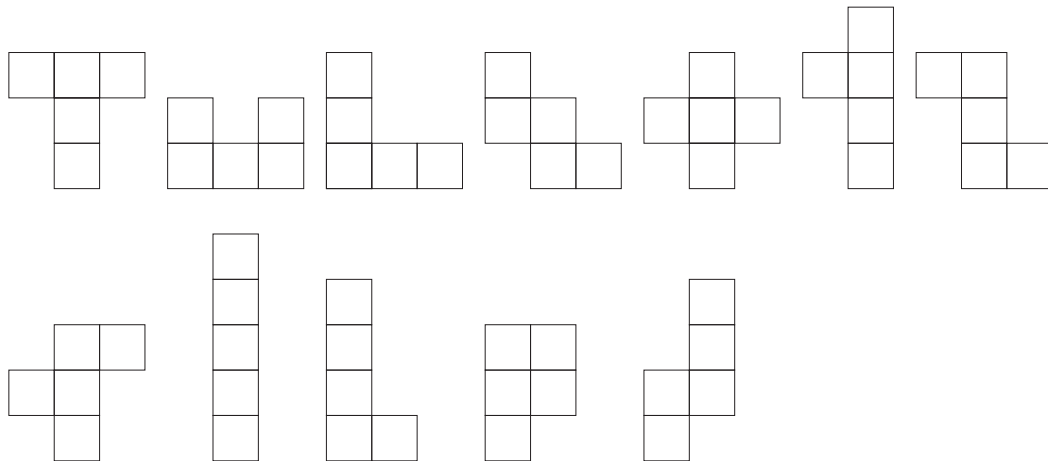


図 41 pentomino

図 41 において, 上段左から T, U, V, W, X, Y, Z-pentomino, 下段左から F, I, L, P, N-pentomino とよばれる.

問題 5.1. 3×5 -board を, U-pentomino, F-pentomino, P-pentomino を 1 枚ずつ使ってタイリングせよ.

問題 5.2. 4×5 -board を, T-pentomino, V-pentomino, Y-pentomino, N-pentomino を 1 枚ずつ使ってタイリングせよ.

問題 5.3. 5×5 -board を, U-pentomino, X-pentomino, F-pentomino, L-pentomino, P-pentomino を 1 枚ずつ使ってタイリングせよ.

図 42 に上の 3 つの問題の解答例を示しておく.

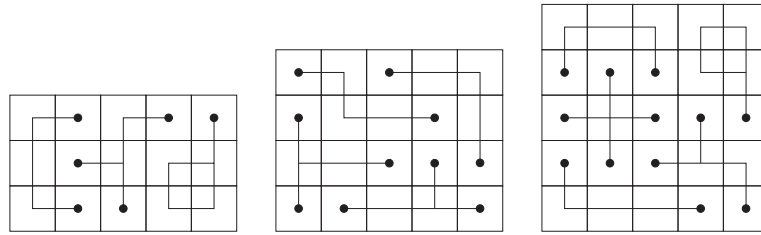


図 42 pentomino タイリング

定理 5.1. $m \times n$ -board が L-pentomino タイリングをもつには、以下のすべてを満たすことが必要十分である。

- (1) $m, n > 1$.
- (2) $m, n \neq 3$.
- (3) $mn \equiv 0 \pmod{5}$.
- (4) 一方が奇数ならば、他方は 5 でない。

証明. 【必要性】(1) と (3) は明らかである. $m = 3$ としよう. 図 43 の番号 1 のマスをおおう L-pentomino の位置は、対称性を考慮すれば 3 通りあるが、いずれの場合もそのあとをうめていけない. こうして、 $m \neq 3$ であり、同様に $n \neq 3$.

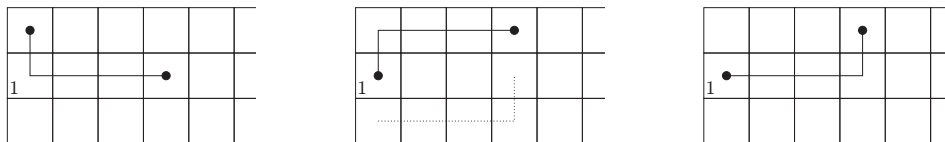
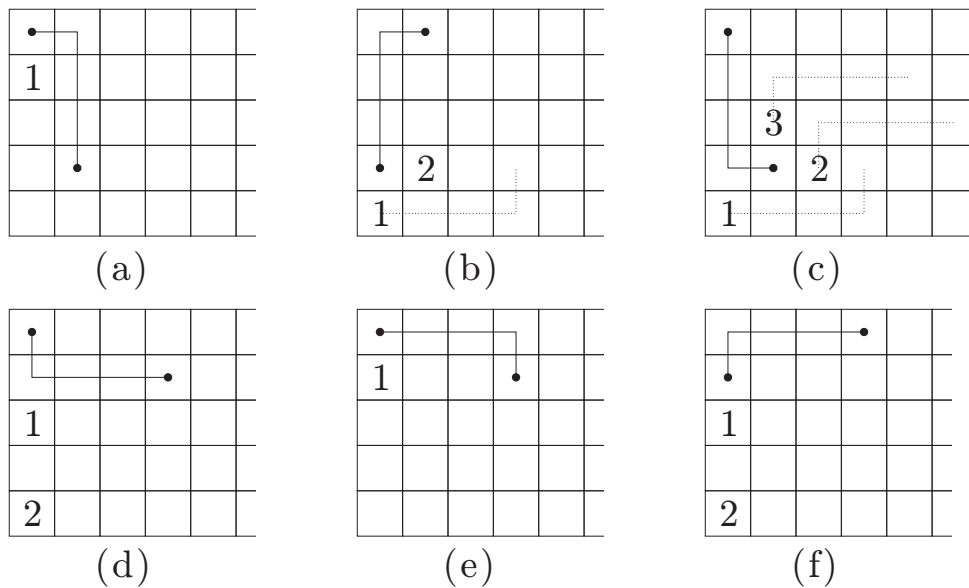


図 43 L-pentomino の位置

次に、 n を奇数として、 $5 \times n$ -board を考える. L-pentomino タイリングを固定して、格子にそった縦の線の中で、L-pentomino の内部を横断しないものがあれば、そこで分割することで、 $n' < n$ なるある奇数 n' に対して、 $5 \times n'$ -board を得る. 従って、最初から $5 \times n$ -board のタイリングは、そのような縦の線をもたないと仮定してよい.

左上の隅のマスに注目する. このマスをおおう L-pentomino の位置は、図 44 のように 6 通りある. いずれの場合もタイリング不可能であることをみる.

(a) については、1 のマスをうめると L-pentomino の内部を横断しない縦の線が発生してしまう. (b) については、1 のマスをうめる L-pentomino は図のように一意的であ

図 44 $5 \times n$ -board のタイリング

り，そのあと，2 のマスをうめる方法は 2 通りあるが，いずれにせよ矛盾にいたる．(c) の場合，1, 2, 3 の順にうめていくと，破綻する．(d) については，1 のマスをうめる L-pentomino は 3 通りあるが，そのあと 2 のマスをうめられないか，うめたあと破綻する．(e) の場合，1 のマスをうめる方法は 4 通りあるが，そこで破綻するか，(b), (c) に帰着する．(f) の場合，1 のマスをうめる方法は 4 通りあり，そこで破綻するか，そのあと 2 のマスをうめて破綻する．以上により，必要性が示された．

【十分性】(3) より， $m = 5\ell$ としてよい． 5×2 -board は，L-pentomino 2 枚でタイリングできる．従って， n が偶数であればタイリングできる．

よって， n を奇数とする．このとき， $n = 2a + 5$ ($a \geq 0$) とおける．

もし ℓ が偶数であれば， $\ell = 2p$ として， $10p \times (2a + 5)$ -board を $10p \times 2a$ -board と $10p \times 5$ -board に分割する．どちらも， 5×2 -board を使ってタイリングを構成できる．

もし ℓ が奇数であれば， $\ell = 2p + 3$ とおける(今， n が奇数なので，(4) によって $\ell > 1$)． $m = 5(2p + 3)$ は奇数なので， $n \geq 7$ に注意する．ここで， $m \times n$ -board を図 45 のように分割する．

右下の 7×15 -board を除いて，上述の議論からタイリング可能である．あとは， 7×15 -board を図 46 のようにタイリングすればよい． \square

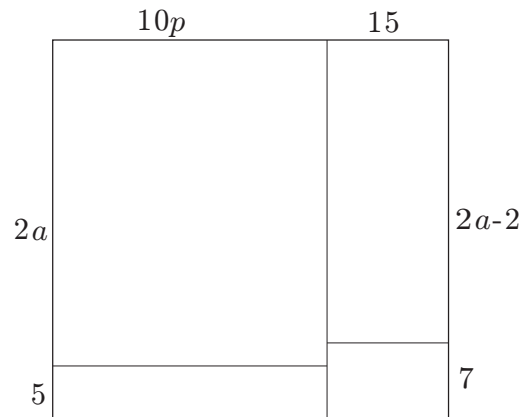


図 45 $(10p + 15) \times (2a + 5)$ -board の分割

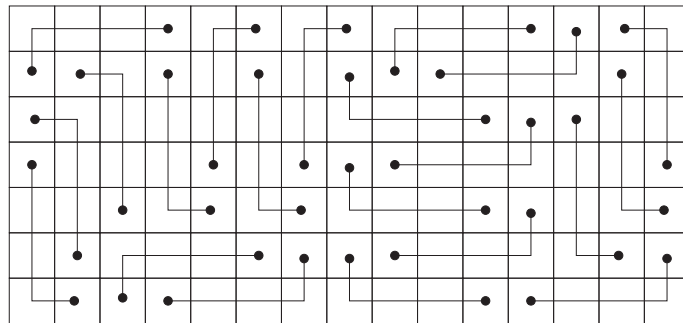


図 46 7×15 -board のタイリング

興味深いことに，次の定理が示すように，L-pentomino タイリング可能な長方形領域と，P-pentomino タイリング可能な長方形領域は一致する．

定理 5.2. $m \times n$ -board が P-pentomino タイリングをもつには，以下のすべてを満たすことが必要十分である．

- (1) $m, n > 1$.
- (2) $m, n \neq 3$.
- (3) $mn \equiv 0 \pmod{5}$.
- (4) 一方が奇数ならば，他方は 5 でない．

証明. 【必要性】(1) と (3) は明らかである． $m = 3$ としよう．図 47 のように，破綻することをみるのはやさしい．こうして $m \neq 3$ ．同様に， $n \neq 3$ ．

次に， n を奇数として， $5 \times n$ -board を考える．P-pentomino タイリングを固定して，

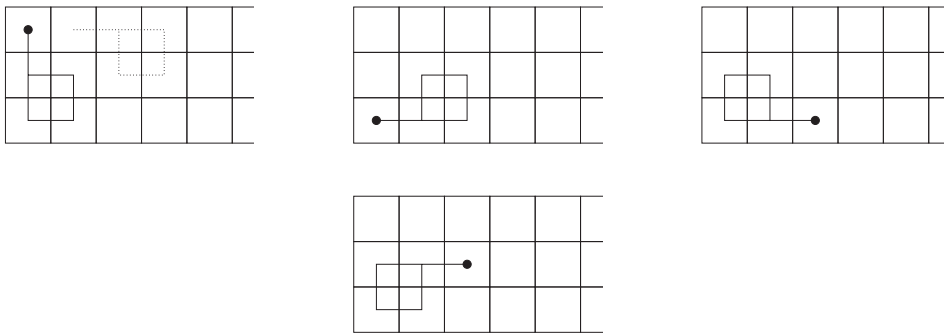


図 47 $3 \times n$ -board

格子にそった縦の線の中で，P-pentomino の内部を横断しないものがあれば，そこで分割することで， $n' < n$ なるある奇数 n' に対して， $5 \times n'$ -board を得る．従って，最初から $5 \times n$ -board のタイリングは，そのような縦の線をもたないと仮定してよい．

左上の隅のマスに注目する．このマスをおおう P-pentomino の位置は，図 48 のように 6 通りある．いずれの場合もタイリング不可能であることをみる．

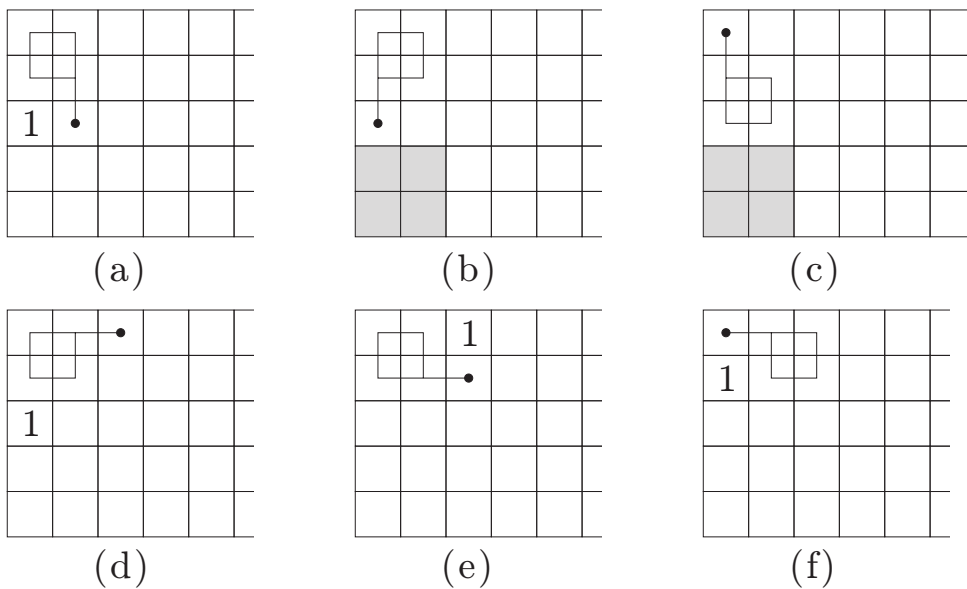


図 48 $5 \times n$ -board

(a) と (f) はやさしい．1 のマスをおおう P-pentomino は一意的であり，それによって破綻する．(b) 及び (c) に対しては，塗った 4 マスは 1 枚の P-pentomino でおおうこと

になり，(d) あるいは (e) に帰着する．(e) に対しては，1 のマスをおおう P-pentomino は一意的であり，そのあと，下の 3 行に対して， $m = 3$ の場合の考察を行えば破綻する．

残るのは (d) のみである．1 のマスをおおうには，図 49 の 2 通りしかない（他の方法ではすぐに破綻する）．

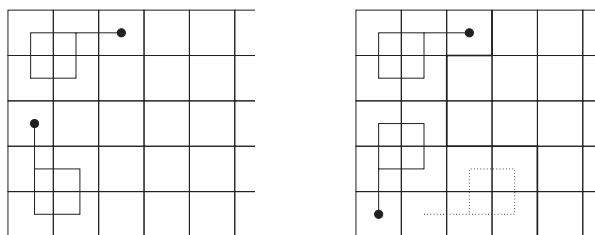


図 49 case (d)

前者の考察をさらに進めていくと，図 50 の形までいき，図 49 の後者から 2 列だけ遅れた状態で一致する（さらに，上下を反転させて）．

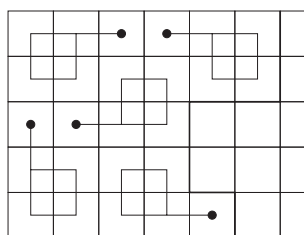


図 50 case (d) のつづき

あとは 6 列を周期として，同じ状態をくりかえしていく．最終的にはタイリングできるが，そのとき n が奇数であったことに矛盾してしまう．

【十分性】定理 5.1 の証明と全く同様にできる．ただし， 7×15 -board は，図 46 のようにタイリングされる． \square

問題 5.4. 12 種類の *pentomino* をすべて含むような n -omino のうちで， n が最小のものを見つけよ．

そのような n -omino をを見つけることは困難ではない．図 52 に示す 2 つの 9-omino は，条件を満たしている．実は， $n = 9$ が最小値である．

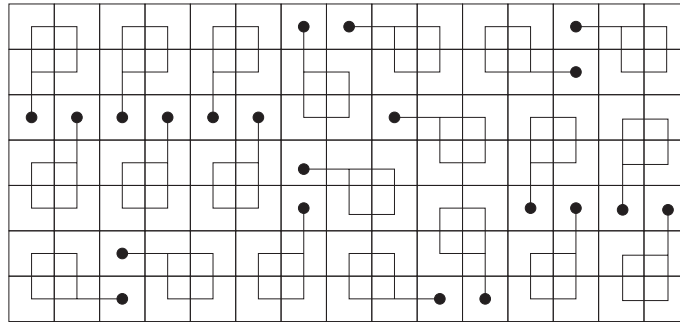


図 51 7 × 15-board

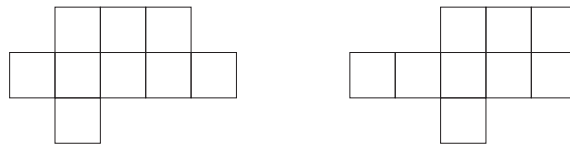


図 52 すべての pentomino を配置可能

$n \leq 8$ として, n -omino でそのような例 P があったとしよう. まず, I-pentomino と X-pentomino の位置は, 少なくとも 3 つのマスを共有しなければならない. なぜなら, 高々 1 枚しか共有しないとすると, それら 2 つの pentomino だけで 9 枚以上のマスが必要になる. 2 枚共有するとすると, 2 つの pentomino の和は, 図 53 の形しかない. しかし, これで 8 マスなので, P と一致することになるが, V-pentomino を配置できない.

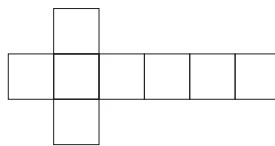


図 53 I-pentomino と X-pentomino

3 つのマスを共有するとき, 2 つの pentomino の和は, 図 54 のように 2 通りある.

このままでは, V-pentomino を配置できない. よって, あと 1 マスだけ増やして, V-pentomino を配置できるようにするには, 図 55 のように 2 通りしかない.

いずれにせよ 8 マスなので, P と一致するのだが, U-pentomino を配置できない.

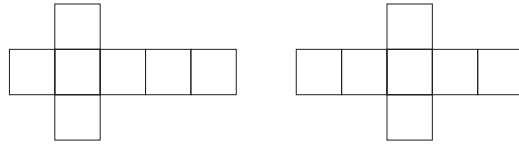


図 54 I-pentomino と X-pentomino

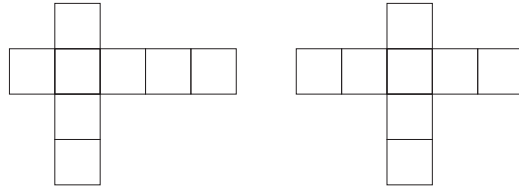


図 55 I-pentomino と X-pentomino と V-pentomino

6 Bigger Polyomino

hexomino は図 56 に示すように、35 種類存在する。

問題 6.1. 35 種類の *hexomino* のすべてを一枚ずつ使って、長方形領域をタイリングすることはできないことを示せ。

$35 \times 6 = 210$ なので、候補となる長方形のサイズは、 1×210 , 2×105 , 3×70 , 5×42 , 6×35 , 7×30 , 10×21 , 14×15 である。チェッカーボード彩色を行うと、いずれの場合も黒白それぞれ 105 マスずつとなる。

さて、図 56 にみられるように、上段の 24 種類はそれぞれ黒白 3 マスずつおおい、下段の 11 種類は一方を 2 マスと他方を 4 マスおおう。従って、たとえば黒いマスは偶数枚でなければならないので、前述の長方形のいずれもタイリングすることはできない。



次の問題は、2004 年にアテネで開催された第 45 回国際数学オリンピックで出題されたものである（表現は少し変えてある）。

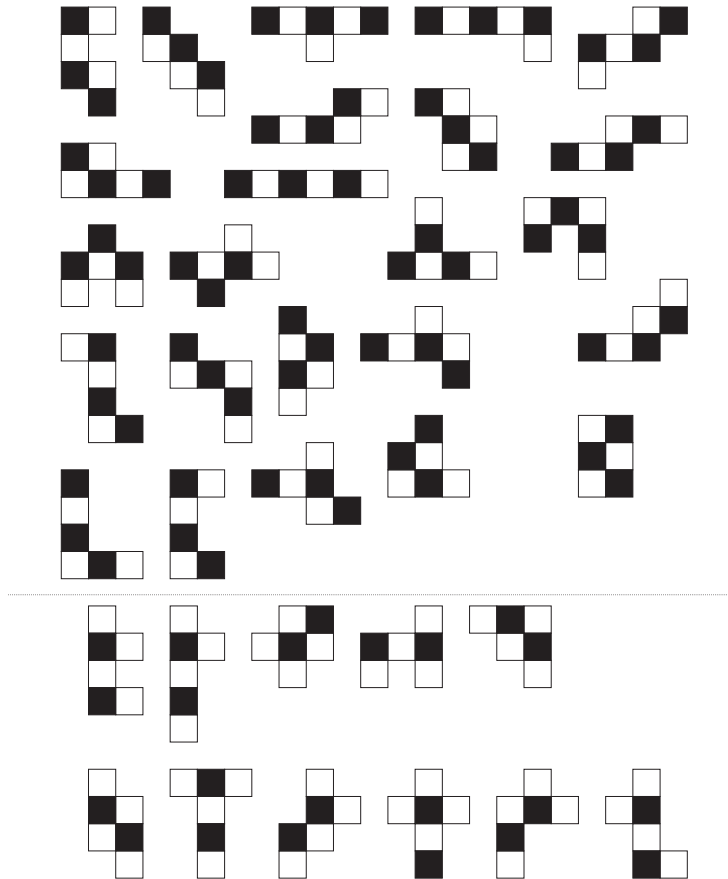
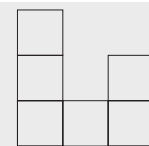


図 56 hexomino

定理 6.1. $m \times n$ -board が右図の hexomino でタイリングできる
 には、以下のすべてを満たすことが必要十分である。



- (1) $m, n \neq 1, 2, 5$.
- (2) $mn \equiv 0 \pmod{12}$.
- (3) どちらか一方は 4 で割り切れる。

以下の証明は [2] によるものである。

証明. その hexomino を H とよぶ。

【十分性】 4×3 -board は、H 2 枚でタイリングできるので、 $4a \times 3b$ -board はタイリングできる。また、 12×3 , 12×4 , 12×8 -board が 4×3 -board を組み合わせて得られるので、タイリングできる。あとは、これらに 12×3 -board を継ぎ足していくことで、

$12 \times n$ -board ($n \neq 1, 2, 5$) がタイリングでき、よって $12a \times n$ -board ($n \neq 1, 2, 5$) もタイリングできる。

【必要性】(1) は容易にわかる。さて、hexomino H のくぼみをふさぐには、図 57 のように 2 通りの配置しかない。それらを type A, type B とよぶ。

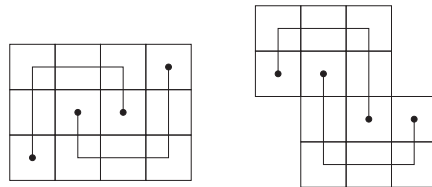


図 57 type A と type B

長方形領域をタイリングしているので、type A あるいは type B の形で、hexomino がペアをなしている。つまり、偶数枚の hexomino が必要であり、 $mn \equiv 0 \pmod{12}$ とわかる。あとは、type A と type B のペアあわせて偶数組存在することをいえば、 $mn \equiv 0 \pmod{24}$ となり、(4) が従う。

今、 $mn \equiv 0 \pmod{12}$ なので、 m あるいは n が奇数であれば、他方は 4 で割り切れる。従って、 m も n も偶数としてよい。

さて、type A 及び type B を、 $m \times n$ -board 内での置き方に応じて 6 種類に分ける。type A については、縦長の配置を A_1 、横長の配置を A_2 とする。type B については、図 58 の左 2 つの配置で、最上段が $m \times n$ -board の奇数行目にくるものを B_1 、偶数行目にくるものを B_2 とし、右 2 つの配置で左端の列が奇数列目にくるものを B_3 、偶数列目にくるものを B_4 とする。

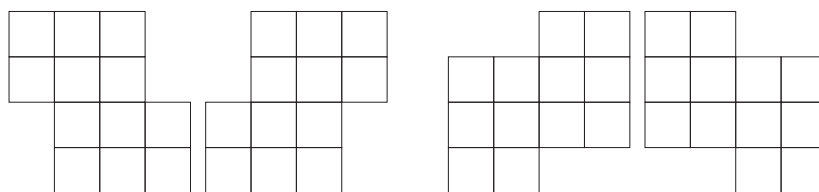


図 58 type B の 4 つの配置

まず、 $m \times n$ -board の奇数列を黒く、偶数列を白く塗る。このとき、黒いマスと白いマスは同枚数になる。そして、 A_1 以外の配置は、それぞれ黒白同じ枚数をおおう。 A_1 においては、黒白の枚数が 4 だけ違う。よって、 $m \times n$ -board 全体では、 A_1 が偶数組存在

する．

次に，図 59 の左の塗り分けを行う． B_1 以外の配置は，それぞれ黒白同じ枚数をおおう． B_1 においては，黒白の枚数が 4 だけ違う．よって， $m \times n$ -board 全体では， B_1 が偶数組存在する．同様に，図 59 の右の塗り分けを行うことで， B_2 が偶数組存在することがわかる．

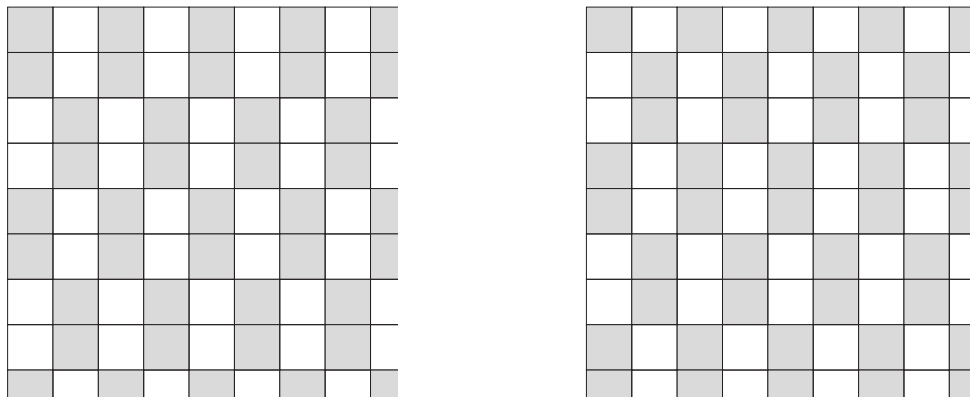


図 59 塗り分け

あとは，上記の 3 つの塗り分けを 90 度回転したものを使えば，それぞれ A_2 ， B_3 ， B_4 が偶数組存在することがわかる． □

7 Polyomino の位数

1969 年，Klarner [10] は polyomino の位数を次のように定義した．polyomino P のコピーを組み合わせて長方形を形成できるときの最小個数を， P の位数とよぶ．いくつか組み合わせても長方形が作れないときは，位数は定義されない．

明らかに，monomino，domino，I-tromino の位数は 1 であり，L-tromino の位数は 2 である．

問題 7.1. *tetromino* の位数をそれぞれ決定せよ．

I-tetromino と O-tetromino の位数は 1 であり，L-tetromino の位数は 2 である．残った T-tetromino のだが，位数は 4 である．それは，定理 4.4 の帰結としてもわかるが，位数が 2 や 3 でないことは，可能な長方形のサイズをみて容易に結論できる．

問題 7.2. *pentomino* の位数をそれぞれ決定せよ .

I, L, P, Y-pentomino 以外は, 位数をもたないことがわかる . I-pentomino の位数は 1, L と P-pentomino の位数は 2, Y-pentomino の位数は 10 である (図 60). なお, 9 枚以下の Y-pentomino では長方形を形成できないことは, 可能な長方形のサイズを順に考えてわかる .

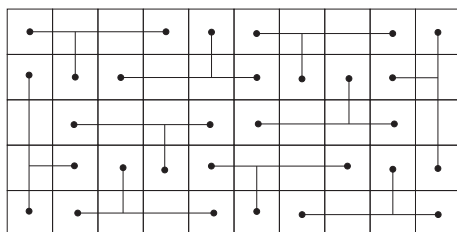


図 60 Y-pentomino

1989 年に出版された Golomb の論文 [6] によると, 上記以外で知られていた位数は, 18, 24, 28 だけだった . Golomb [6] は, 任意の $n \geq 1$ に対して, 位数 $4n$ の polyomino を無限個構成した . その他に, 散発的な例として, 50, 76, 92, 96, 138, 192, 312 といった位数をもつ polyomino が知られている . その後, Marshall [12] は, 互いに素な自然数 a, b に対して, $2(a^2 + b^2)$ を位数として実現できることを示した . 依然として, すべての偶数が位数として実現可能か未解決であり, 特に 6 が可能かどうかはわかっていない .

Klarner は, 位数 3 の polyomino は存在しないと予想した . この予想は, Stewart-Wormstein [15] によって 1992 年に解決された . その後, Maltby [11] によって, 長方形を 3 つの合同な連結図形 (多少, 制約がある) に分割する方法は, 3 つの長方形への分割しかないことが示されている . なお, 5 以上の奇数を位数にもつ polyomino は発見されていない .



Klarner はさらに, polyomino の奇位数という概念も導入した . polyomino P に対して, そのコピーを奇数枚組み合わせると, 長方形が形成できるとき, そのために必要な最小枚数を, P の奇位数とよぶ . 従って, 長方形であるような polyomino は奇位数 1 をもつ . Michael Reid [14] は 1997 年に, 任意の奇素数 p に対して, $3p + 6$ が奇位数として実現

可能であることを示している．一方，奇位数 3 はあり得ないが，5, 7, 9 については可能かどうかわかっていない．

8 Thurston の判定条件

この節では，どのような領域が domino タイリングをもちえるのかを判定する Thurston の条件を説明する．

xy 平面を，整数格子によって単位正方形に分割する．タイリングを考察する領域 R は， xy 平面上の領域であり，単位正方形を辺にそってはりあわせたものとする．さらに，穴はないものとする（トポロジーの言葉でいえば，単連結）．つまり， R そのものは，穴のない polyomino である．

R には自然にチェッカーボード彩色が行われる．黒いマスの境界には反時計回り，白いマスの境界には時計回りの向きを与える（図 61）．以降，格子に対して，この向き付けを固定する．

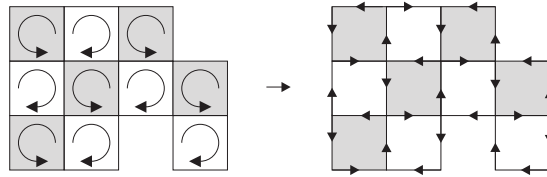


図 61 格子の向き付け

以下，path とは，格子にふくまれる長さ 1 の辺の有限列

$$x_1x_2 \rightarrow x_2x_3 \rightarrow \cdots \rightarrow x_nx_{n+1}$$

であって，辺の終点は次の辺の始点に一致するものをいう．従って，同じ格子点を何度通過してもかまわない．

領域 R 上の格子点 u と v をつなぐ格子にそった path $P : uv_1 \rightarrow v_1v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_nv$ に対して，整数値 $f(P)$ を次のように定義する：

$$f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 1 & (v_iv_{i+1} \text{ の向きが固定された向きと一致するとき}) \\ -1 & (v_iv_{i+1} \text{ の向きが固定された向きと一致しないとき}) \end{cases}$$

とし，

$$f(P) = f(uv_1) + f(v_1v_2) + \cdots + f(v_nv)$$

とする．また，path P が領域 R の内部では，固定された向きに従うとき，admissible とよぶ．

定理 8.1. 穴のないチェッカーボード領域 R が domino タイリングをもつための必要十分条件は， R 内の任意の admissible loop ℓ に対して， $f(\ell) \geq 0$ が成立することである．

たとえば，図 62 の領域は domino タイリングをもたない．実際，図に太線で表示された admissible loop ℓ に対して， $f(\ell) = -4$ となっている．

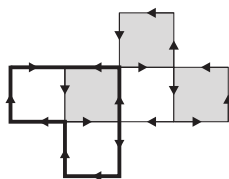


図 62 admissible loop

以下の証明は，必要性については [8]，十分性については [3, 4] を参照したが，多少，議論を変えている．

定理 8.1 の証明. 【必要性】領域 R に domino タイリングが与えられたとする．そのとき，domino を横断しない path を，domino edge path とよぼう．(必ずしも admissible である必要はない．)

R の境界上の格子点の 1 つ u_0 を基点として選ぶ． R 内の各格子点 v に対して，height $h(v)$ を次のように定義する：まず， $h(u_0) = 0$ とおく．基点 u_0 から v までの domino edge path $P(u_0, v)$ を任意に選び，値 $f(P(u_0, v))$ を v の height $h(v)$ とする．もちろん，この定義が正当化されるためには， u_0 から v への domino edge path のとり方に依存しないことを示さなければならない．それは，一つの domino のまわりを 1 周する domino edge loop に対して， $f = 0$ であることからわかる．

さて， ℓ を admissible loop とする． $\ell : v_0v_1 \rightarrow v_1v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_{n-1}v_n$ とする(ただし， $v_n = v_0$)．ここで， $f(v_{i-1}v_i)$ と $h(v_i) - h(v_{i-1})$ を比較する．

	$f(v_{i-1}v_i)$	$h(v_i) - h(v_{i-1})$
$v_{i-1}v_i$ が domino を横断しない	± 1	± 1
$v_{i-1}v_i$ が domino を横断する	1	-3

ℓ は admissible なので, $v_{i-1}v_i$ が domino を横断するとき, 必ず固定された向きにそってあり, 従って $f(v_{i-1}v_i) = 1$ となることに注意する.

これより, 常に $f(v_{i-1}v_i) \geq h(v_i) - h(v_{i-1})$ が成立するので,

$$\begin{aligned} f(\ell) &= f(v_0v_1) + f(v_1v_2) + \cdots + f(v_{n-1}v_n) \\ &\geq (h(v_1) - h(v_0)) + (h(v_2) - h(v_1)) + \cdots + (h(v_n) - h(v_{n-1})) = 0. \end{aligned}$$

【十分性】 R の境界上の格子点の 1 つ u_0 を基点として選ぶ. xy 平面上, u_0 は原点に位置するものとしてよい. そして, その height $h(u_0)$ を適当な定数 k と定める. ただし, 議論を簡単にするために, k を 4 の倍数に選んでおく.

次に, R の境界をどちらかの方向に 1 周する. このとき, 通過する各格子点に対して, 固定された向きにそって辺をたどったときは height を 1 増やし, さもなければ height を 1 減らす. これによって, R の境界上の格子点に height が割り振られるが, 矛盾なく定義されるためには, 1 周して基点に戻ったときに, height の増減が 0 でなければならない. これは以下のようにしてわかる.

R の境界をどちらかの向きに 1 周する loop ∂R は, admissible であるので, 仮定より $f(\partial R) \geq 0$ である. しかし, もし $f(\partial R) > 0$ ならば, 逆向きにまわる admissible loop $-\partial R$ に対して, $f(-\partial R) < 0$ となってしまう. よって, $f(\partial R) = 0$ とわかる.

図 63 に一例を示す. 左下の角が基点 u_0 であり, ここでは $h(u_0) = 8$ としている.

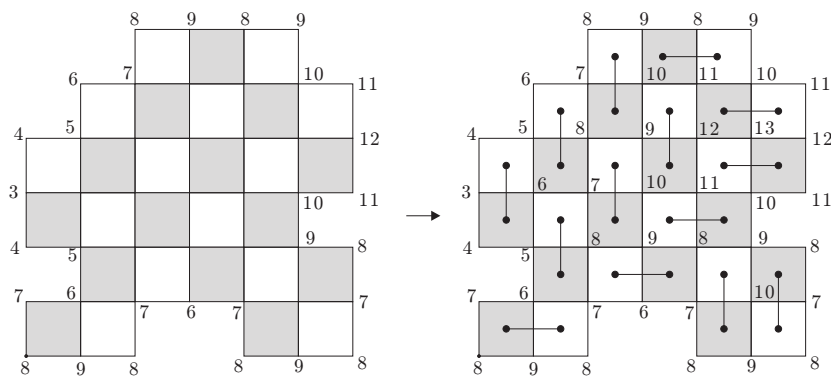


図 63 境界上の height から内部の height, そして domino タイリング

次に, R の内部の格子点 u に対して, $h(u)$ を次のように定義する. R の境界上の格子点 v に対して, v から u へ向かう admissible path のうち, 最短のもの長さを $d(v, u)$ とかいて, $h(u) = \min\{h(v) + d(v, u) \mid v \text{ は境界上の格子点}\}$ と定義する.

こうして、領域 R 上のすべての格子点に対して、height が定義された (図 63)。このとき、次のことがわかる。

主張 8.1. 格子点 $u = (x, y)$ の height は、次を満たす。

$$h(u) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{4} & \text{if } x \equiv y \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 \pmod{4} & \text{if } x \equiv 1 \pmod{2}, y \equiv 0 \pmod{2} \\ 2 \pmod{4} & \text{if } x \equiv y \equiv 1 \pmod{2} \\ 3 \pmod{4} & \text{if } x \equiv 0 \pmod{2}, y \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

主張 8.1 の証明. 基点 u_0 を原点とし、 $h(u_0) \equiv 0 \pmod{4}$ としているので、基点については成立する。まず、 R の境界上の格子点について考察する。ある格子点 $u = (x, y)$ に対して、結論が成立しているとして、境界上の辺にそってとなりの格子点に移動するとき、4 通りの移動方向がある。いずれの場合も結論が成立することが確かめられる。

次に、領域 R の内部の格子点 u について考える。境界上の格子点 v があって、 $h(u) = h(v) + d(v, u)$ となっている。高度 $h(v)$ に関しては、結論が成立しており、 v から u までは admissible path でたどりつくので、先ほどと同様に、 u に対してもまた結論が成立することがわかる。□

主張 8.2. 各辺を固定された向きにそって移動するとき、height の変化は、+1 か -3 のいずれかである。

主張 8.2 の証明. 領域 R の境界上の辺については、height の定め方から、height の変化は常に +1 である。そこで、 R の内部の辺について考える。主張 8.1 により、各辺を向きに沿って移動したとき、height の変化は、mod 4 で 1 である。height の増加が 1 よりも大きいことはない。たとえば、辺 uv に対して、 u から v に向き付られているとして、 $h(u) = x$ ならば、height の定め方より、 $h(v) \leq h(u) + 1$ だからである。また、height が -3 よりも減少することはない。たとえば、辺 uv に対して、 $h(u) = x$ かつ $h(v) < h(u) - 3$ ならば $h(v) \leq h(u) - 7$ であるが、逆に v の側から u の height を評価すれば、 $h(u) \leq h(v) + 3$ のはずであり、 $h(u) \leq h(v) + 3 \leq h(u) - 4$ となって矛盾する。□

主張 8.3. 領域 R の各マスにおいて、境界上の 4 辺のうち、向きに沿って進む際の height の変化が -3 になる辺がただ 1 つだけ存在する。

主張 8.3 の証明. R 内のマスにおいて、その周囲を向きにそって 1 周する loop ℓ を考える。すると、定義によって ℓ は admissible であるので、仮定から、 $f(\ell) \geq 0$ 。しかし、 ℓ

の中に height の減少 -3 の辺が 2 つ以上入っていると, $f(\ell) \leq (-6) + 2 = -4 < 0$ になってしまう. \square

領域 R の境界上の辺では, height の変化は常に $+1$ だったので, 主張 8.3 が意味することは, R 内の各マスは, ただ 1 つだけのマスと height の変化が -3 であるような辺を共有する. つまり, 黒いマスと白いマスが, そのような辺を共有することでペアを形成していく. このペアを domino で置き換えれば, domino タイリングが得られる (図 63). \square

十分性の証明において, 仮定から, 領域 R には黒いマスと白いマスが同枚数だけ存在することが導かれていることに注意しておく. なぜなら, R の境界を反時計回りに 1 周する loop ∂R に対して, 十分性の証明の中で述べたように, $f(\partial R) = 0$ だった. 黒いマスの周囲を反時計回りにまる loop b に対して, $f(b) = 4$ であり, 白いマスの周囲を反時計回りにまる loop w に対して, $f(w) = -4$ である. これらをいわばホモロジー的に足し合わせれば (向きが反対向きの部分は打ち消しあうということ), ∂R を得られるのだから, $f(\partial R) = 0$ になるためには, 黒いマスと白いマスが同枚数なければならない.

なお, 伊藤 [8] によって, 穴のある領域の場合にも定理 8.1 は拡張されている. そのときの必要十分条件は, 穴を囲まないような任意の admissible loop ℓ に対して, $f(\ell) \geq 0$ というものである.

参考文献

- [1] P. Frankl, 前原潤, やさしい幾何学問題ゼミナール, 共立出版社, 1992.
- [2] 長尾健太郎, 国際数学オリンピックの問題にチャレンジ, 数学セミナー 2004年11月, 日本評論社.
- [3] M. Donaldson, *Tiling with dominoes*, thesis, Reed College, 1996.
- [4] J. Fournier, *Tiling pictures of the plane with dominoes*, Discrete Math. **165/166** (1997), 313–320.
- [5] S. Golomb, *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings*, 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995.
- [6] S. Golomb, *Polyominoes which tile rectangles*, J. Combin. Theory Ser. A **51** (1989), 117–124.
- [7] R. Graham, D. Knuth and O. Patashnik, *Concrete mathematics. A foundation for computer science*, Second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994.
- [8] K. Ito, *Domino tilings on planar regions*, J. Combin. Theory Ser. A **75** (1996), 173–186.
- [9] K. Ito, *Domino tilings on orientable surfaces*, J. Combin. Theory Ser. A **84** (1998), 1–8.
- [10] D. Klarner, *Packing a rectangle with congruent n -ominoes*, J. Combinatorial Theory **7** (1969), 107–115.
- [11] S. Maltby, *Trisecting a rectangle*, J. Combin. Theory Ser. A **66** (1994), 40–52.
- [12] W. Marshall, *Packing rectangles with congruent polyominoes*, J. Combin. Theory Ser. A **77** (1997), 181–192.
- [13] G. Martin, *Polyominoes: A Guide to Puzzles and Problems in Tiling*, Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1991.

-
- [14] M. Reid, *Tiling rectangles and half strips with congruent polyominoes*, J. Combin. Theory Ser. A **80** (1997), 106–123.
 - [15] I. Stewart and A. Wormstein, *Polyominoes of order 3 do not exist*, J. Combin. Theory Ser. A **61** (1992), 130–136.
 - [16] D. W. Walkup, *Covering a rectangle with T-tetrominoes*, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 986–988.
 - [17] W. Thurston, *Conway's tiling groups*, Amer. Math. Monthly **97** (1990), 757–773.
 - [18] K. Gong, <http://www.kevingong.com/Polyominoes/index.html>
 - [19] Wolfram MathWorld, <http://mathworld.wolfram.com/Polyomino.html>