一般均衡理論と選択公理
～経済学と数学の境界問題～*

市 橋　　勝†

1　論文の目的と経済学における均衡解研究

経済学は、1950年代から60年代にArrow、Debreu[4]、McKenzieらによって、一般均衡体系における均衡解の存在が証明された。特に、Debreuは、その位相数学的方法の経済学への導入が評価されて、1983年にノーベル経済学賞を受賞することとなった。経済システム全体の需給関係において、均衡する解があるかどうかを、高度に抽象的なレベルで厳密に証明したことは、経済学のまさに画期であったと言ってよい。

事実、このような基本的な位相概念を用いたスタイルは、例えば、現在理論経済学における一つの流行となっているゲーム理論における均衡解の存在証明でも、Fudenberg and Tirole[6]などのテキストで使用されている[1]。

それだけではなく、Arrowが1950年代に先鞭を付けた社会的選択理論の領域においても、近年、例えば、Chichilnisky[3]などが、位相数学的手法をこの領域に積極的に導入している[2]。

この均衡解の存在証明の源流にあるのは、数学者Brouwerの不動点定理の一般化である。それは、同じ数学者である角谷[8]によって定理として提出されたが、この問題は、もともとNeumanが提起した経済学の一般

*この論文の問題意識は、本学経済学部の安武公一講師との私的研究会に依るところが大きい。また、数学的内容に関しては、熊本大学理学部の数学者古島幹雄教授から御教示いただいた。記して感謝申し上げたい。無論、本稿のありうべき誤謬は全て筆者に帰するものである。

†広島大学総合科学部　(E-mail)ichi@ipc.hiroshima-u.ac.jp, (URL)http://www.ipc.hiroshima-u.ac.jp/~ichi/

[1]Fudenberg and Tirole[6]、Chapl、1.3、p.29～36参照。

[2]例えば、Chichilnisky[3]、定理18、p.174など。

均衡理論やゲーム理論における不動点の問題をきっかけとしているから[3]、現在理論経済学上における均衡解の存在は、一般均衡理論にせよ、ゲーム理論にせよ、この角谷の不動点定理を基礎に保証されていると言ってよい。

このことは、ゲーム理論の祖とされるNashの一般ｎ人ゲームの均衡の存在証明が、この角谷の不動点定理に依拠していることからも明らかである[4]。

以上の、理論経済学における均衡解の存在証明は、しかし、実証上の観点から見れば、殆どその有益性が乏しいものであった。事実、Debreuと共に極限定理を証明したScarf[7]は、その後の研究において、現実の経済データから当該経済システムの均衡解を求めるアルゴリズム論の研究にシフトしていることが、例えば、Shoven and Whalley[20]などで、紹介されている。

すなわち、理論経済学上証明された均衡解は、その証明スタイルが構成的（construcutive）ではないために、実証上は実際の均衡解を求めるアルゴリズムの開発が必要とされたのである。現在、実証的経済学における大きな一つの潮流であるCGEモデルは、まさにそのような均衡解計算の数値シミュレーションとなっている[5]。このアルゴリズムは各種が知られており、今なお開発途上であるようだが、決定版は未だ存在していない。

また、計量経済学における連立モデルの解の計算も、実際にはガウス・ザイデル法やニュートン法を用いた収束計算によって、当該連立体系の解と見なすのがスタンダードなスタイルとなっている。だが、この収束計算は、ある一定回数の繰り返し計算をしても収束しない場合が少なくないことが知られている。つまり、連立計量モデルは「均衡解を持たない」結果となることがしばしばあるのが、実証上のいわば「常識」となっている。

このように、理論上は保証されているはずの均衡解だが、現実の経済データからそれを探り出してくるという作業は、極めて面倒なものとなって

[3] 角谷[8]、p.457。
[4] Nash[14]。
[5] Shoven and Whalley[20]、3,4章。

いるのが実状である[6]。

では、理論経済学における均衡解の存在証明とは一体なのか、そして、それが依拠している論理的根拠は何なのか。それが、経済学の実証上に投げかけている意味は何か。本稿は、これらの問題について考察する。

結論を先取りして言えば、理論経済学における均衡解の存在証明の論理的根拠は、選択公理（Axiom of Choice : AC）にあり、また、理論経済学が選択公理に依存する限り、それは現実経済の実証分析に関して看過しがたい論理的難点を持ち込むことになったということである。

2　一般均衡解の存在証明の論理

本稿では、主にDebreu[4]と角谷[8]の証明方法に依拠しながら、説明を進めることにする。

Debreu[4]における証明の概要は、財xの需要関数の代わりに対応correspondenseΦを用意し、需要されるxと生産されるyを持つ二つの開集合の直積空間の開集合$G(\Phi)$を定義して、そこにおける不動点の存在を証明するものとなっている。

まず、対応上の不動点の存在を言うためには、ある種の連続概念を用いる必要があるので、対応Φに優半連続upper hemicontinuityを定義する。すなわち、（Euclid空間上における）優半連続概念とは、任意の点列が収束する点を有し、その極限が対応Φに含まれるものである。

$x_n \to x_0, y_n \in \Phi(x_n), y_n \to y_0$で、$y_0 \in \Phi(x_0)$が成立するならば、$S$の閉・凸部分集合族$\Re(S)$における、点対集合対応$x \to \Phi(x) \in \Re(S)$は、優半連続と呼ばれる。

したがって、対応Φは（点列コンパクトの意味で）コンパクト*compact*であるとされる。なぜなら、通常、Euclid空間上におけるコンパクト集合

---

[6]更に、現実に調査され、発表されているSNAをはじめとする各種経済データの「精度」の問題も、事態を面倒なものにしている原因に加えられる。

は、有界・閉集合と同値であることが定理として知られており[7]、任意の点列が収束先を持ち、且つ、その極限がその集合の中に含まれているというのは、点列コンパクトの定義そのものであるからである。すなわち、ここで言う点列コンパクト集合とは、集合Sの点からなる任意の無限点列$\mathbf{x}_\nu$が、それ自身収束するか、収束する部分列を有し、しかも、その極限が全てSに属するような集合を言う[8]。

これを、開集合概念で定義すると、次のようになる。

今、fを$X \to Y$の対応とし、$f(\mathbf{x}) \neq \Phi$ となる $\mathbf{x} \in X$を取る。このとき

$$f(U(\mathbf{x},\delta)) \subset V(f(\mathbf{x}),\varepsilon)$$

が成立するように、$f(\mathbf{x}) \subset Y$の任意の $\varepsilon > 0$ 近傍 $V(f(\mathbf{x}),\varepsilon)$ に対して、$\mathbf{x}$の近傍 $U(\mathbf{x},\delta)$を選べるならば、対応 f は、点$\mathbf{x}$で優半連続である。但し、$f(U(\mathbf{x},\delta)) = \bigcup_{\tilde{\mathbf{x}} \in U(\mathbf{x},\delta)} f(\tilde{\mathbf{x}})$。

また、fがXの任意の点で優半連続ならば、fはXで優半連続である。

さて、この優半連続に加えて、定義域・値域が操作上対応関係を保つように凸性を定義することで、特殊な対応を排除し、存在証明の準備を整えた後に、不動点の存在を保証するのが、角谷の不動点定理となる。

定理１（角谷[8]）集合Sが、*Euclid* 空間上における非空、コンパクト、凸の部分集合で、対応Φが優半連続、SからSへの凸値対応ならば、Φは不動点を有する[9]。

実際の角谷の定理では、Brouwerの不動点定理によって、収束する点列を保証し、それが不動点であるとする証明を行っている。そこでは、コ

---

[7]証明は、有界・閉集合を与えて、点列が収束する点を有し、且つその極限が集合内に収まるのは点列コンパクトそのものであることを言うことで必要性を証明し、十分性は、コンパクト集合だが有界集合ではない、という仮定を置いて、背理法によってなされる。例えば、小山[11]第２章、p.134。

[8]小山[11]、p.132。

[9]Debreu[4]、p.699。

ンパクト概念そのものではなく、集合Sにおけるr次元の閉単体をn回重心分割することで、証明を与えている[10]。

証明のアウトラインは、集合S上のr次元の閉単体をn回重心分割する。このとき、単体の頂点は $i=0,1,\cdots,r$、分割回数は $n=1,2,\cdots$ である。そして、その分割において、各頂点から点列を取り出し、$\{x_i^{n_\nu}\}(i=0,1,\cdots,r;\nu=1,2,\cdots)$とする。この点列は収束点を有するので、それを$x_0$とする。

その上で、$x_n=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i^n x_i^n(n=1,2,\cdots),\lambda_i^n\geq 0,\sum_{i=0}^{r}\lambda_i^n=1$ という、n回重心分割のそれぞれに、各頂点を凸結合した点x_nを定義する。

ここで、$y_i^n=\varphi_n\left(x_i^n\right)(i=0,1,\cdots,r;\nu=1,2,\cdots)$という連続関数$\varphi$を取ると、$y_i^n\in\Phi_n\left(x_i^n\right)$と、(Brouwerの不動点定理によって) $x_n=\varphi_n\left(x_n\right)=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i^n x_i^n(n=1,2,\cdots)$を得る。

更に、$i=0,1,\cdots,r$ について $\lim_{\nu\to\infty}y_i^{n'_\nu}=y_i^0$ 、$\lim_{\nu\to\infty}\lambda_i^{n'_\nu}=\lambda_i^0$となる収束点列 $\{y_i^{n'_\nu}\}$ と $\{\lambda_i^{n'_\nu}\}(i=0,1,\cdots,r;\nu=1,2,\cdots)$ を $\{n_\nu\}(\nu=1,2,\cdots)$ から $\{n'_\nu\}(\nu=1,2,\cdots)$ として取る。すると、この時、$\lambda_i^0\geq 0,\sum_{i=0}^{r}\lambda_i^0=1$、そして、$x_0=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i^0 x_i^0$ となる。

$i=0,1,\cdots,r$について、$x_i^{n'_\nu}\to x_0,y_i^{n'_\nu}\in\Phi\left(x_i^{n'_\nu}\right)$、$y_i^{n'_\nu}\to y_i^0$なので、$\Phi(x)$の優半連続性により$i=0,1,\cdots,r$ について、$y_i^0\in\Phi\left(x_0\right)$でなければならず、よって、$\Phi_n(x)$の凸性により、$x_0=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i^0 y_i^0\in\Phi\left(x_0\right)$ となるのである。このx_0が、不動点である。

明らかなように、この証明で決定的に重要なのは、点対点写像の関数φにおける不動点がBrouwerの定理によって保証されることである。その結果、それを点対集合写像の対応Φに拡張しても、閉単体上で関数を選べば、頂点同士をうまく凸結合した点から点列を選ぶことで不動点に収束させられるというからくりである。

---

[10] 角谷[8]、p.457-458。原論文における定理は、
「全ての閉・凸部分集合族を $\Re(S)$ とした時、$x\to\Phi(x)$ が、$\Re(S)$ における r 次元の閉単体S上の優半連続な点対集合写像であるならば、$x_0\in\Phi\left(x_0\right)$なる $x_0\in S$ が存在する」となっていて、より一般的な形で示されている。

さらに、角谷[8]は、Euclid空間上の有界・閉の凸集合においても、この定理が成立することを証明している。ところで、コンパクト集合が、Euclid空間上においては有界・閉集合になることは前述の通りなので、コンパクトで凸であることと、有界・閉で凸であることとはEuclid空間上においては同値である。また、同様に、集合SをR^n上のコンパクトな凸集合とし、$dimS=r$とすれば、SはR^rの凸体と位相同型であることが定理として知られているので[11]、結局、集合Sを、コンパクトで凸とすれば、角谷の定理を証明することができることになる。

こうして、Debreuをはじめとする理論経済学者は、この角谷の定理を、一般の空間におけるコンパクト集合にまで議論を一般化して、経済学の一般均衡点の存在証明を与えている。だが、上記の通り、その角谷の不動点定理は、Brouwerの不動点定理によってその存在が保証されているのである。

では、Brouwerの不動点定理は、どのようにして証明されるのか。次にこの問題を検討しよう。

3 Brouwerの不動点定理の論理

Brouwerの不動点定理で、もっとも単純な証明は、中間値の定理を用いて証明するものである。すなわち、Euclid空間では、有界・閉集合上の関数において中間値の定理によって不動点の存在を容易に説明できる。

定理 2 (Brouwerの不動点定理〈中間値の定理によるもの〉) 閉区間[a,b]を[a,b]に移す任意の連続関数 $f(x)$ は、少なくとも一つの不動点を有する。

これは、実数の収束性をもとにして証明される中間値の定理によって、$x^* = f(x^*)$ となる点の存在を証明するものである。

[11]例えば、小山[11]第4章参照。

だが、より一般化したBrouwerの不動点定理の証明は、次のようにコンパクト集合を用いたものによる証明が多用される[12]。

定理　3（Brouwerの不動点定理〈コンパクト・凸集合によるもの〉）XをR^nのコンパクトな凸集合とし

$$\mathrm{f}: X \to X$$

を連続写像とすれば、

$$\mathrm{f}\left(\mathbf{x}^*\right) = \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^* \in X$$

を満たす点$\mathbf{x}^*$が存在する。

証明のアウトラインは、まず、Xと位相同型な単体Sを用意し、Sに含まれるアフィン独立なベクトル（その最大個数を$m+1$個とする）によって集合を構成する。その集合上でSからSへの連続写像$\mathbf{g}$における不動点の存在を証明し、位相同型なXにおいてもそれが成立するというやり方をとる。

任意の点 $\mathbf{x} \in S$ は、

$$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{a}_j, \qquad \alpha_j(\mathbf{x}) \geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\mathbf{x}) = 1$$

と表せる。但し、 $\mathbf{a}_j, j = 0, \cdots, m$ は、Sにおけるアフィン独立なベクトル。また、それぞれの $\alpha_j(\mathbf{x})$ は、S上における$\mathbf{x}$の連続関数となることは定理で知られている[13]。また、$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in S$なので、

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{a}_j, \qquad \alpha_j(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = 1$$

と書ける。

[12]例えば、小山[11]第４章。
[13]小山[11]p.244参照。

ここで、Sの部分集合F_j を次のように定義すると、$\alpha_j(\mathbf{x}), \alpha_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$が$\mathbf{x}$の連続関数で、$S$がコンパクトであることから、$F_j$は閉集合となる。

$$F_j = \{\mathbf{x} | \alpha_j(\mathbf{x}) \geq \alpha_j(\mathbf{g}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in S\}, \qquad j = 1, 2, \cdots, m$$

Sの任意の辺単体 $[\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \cdots, \mathbf{a}_{ir}]$ を取ってくると、

$$[\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \cdots, \mathbf{a}_{ir}] \subset F_{i1} \cup F_{i2} \cup \cdots \cup F_{ir} \qquad (1)$$

となることが証明できる。また、別な補題[14]から、(1)式が成立するならば、$F_0, F_1, \cdots, F_m$ に対して、$F_0 \cap F_1 \cap \cdots \cap F_m \neq \phi$が言える。
そこで、

$$\mathbf{x}^* \in F_0 \cap F_1 \cap \cdots \cap F_m$$

となる$\mathbf{x}^* \in S$ を取ると、F_jの定義と、係数α_j の総和の定義から、

$$\alpha_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)) = \alpha_j(\mathbf{x}^*), \qquad j = 1, 2, \cdots, m$$

でなくてはならず、よって、

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\mathbf{g}(\mathbf{x}^*))\mathbf{a}_j = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\mathbf{x}^*)\mathbf{a}_j = \mathbf{x}^*$$

となるので、$\mathbf{x}^*$は写像 $\mathbf{g}: S \to S$ の不動点であることが言える。

この結果、位相同型であるコンパクトで凸の集合Xにおいても、不動点の存在が言えることになる。

以上が、一般的な形のBrouwerの不動点定理の証明のアウトラインであるが、重要なポイントはコンパクト集合を前提にすることで、閉集合(F_j)を持ち込み、有限個の可算集合（の直積）から特定の点$(\mathbf{x}^*)$を取ってこれるように操作している点にある。このような点が取れるのは、言うまでもなく、収束する点列の存在を保証し、極限点をその内側に含むコンパクト集合を前提としているからに他ならない。

さて、角谷の不動点定理の際にも、その一般化としてコンパクト集合が

[14]Knaster, Kuratowski, Mazurukiewicz の補題。

用いられることを述べたが、実は、角谷の定理を保証するBrouwerの定理においても、今見たようにコンパクト集合によってその一般化がなされているのである。つまり、コンパクト集合を前提に出来なければ、一般の不動点定理の論理は成立しない。

では、このコンパクト集合を条件に出来る論理的保証は何か。

4　コンパクト集合の論理

ここで、コンパクト概念を整理しておきたい。コンパクト集合は、前述してきた点列コンパクトとして直感的に定義するものと、より一般的に、開集合によって定義するものとがある。点列コンパクトの定義と、開集合によるコンパクトの定義は、一般の空間では一致しない。後者のほうがより一般的である。

開集合によるコンパクトの定義は次の通りである。

定義　4（開集合によるコンパクト）一般に、集合Xがコンパクトであるための、必要十分条件は、Xの任意の開被覆が有限被覆を持つことである[15]。

すなわち、Xの任意の開被覆$X=\cup_{\gamma\in\Gamma}O_\gamma$が与えられたとき、$\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$の中から取り出した有限個の$X_{\gamma 1}, X_{\gamma 2}, \cdots, X_{\gamma s}$によって、$X$は、

$$X=O_{\gamma 1}\cup O_{\gamma 2}\cup\cdots\cup O_{\gamma s}$$

と覆うことができる。

このコンパクト概念と、上記までの点列コンパクトが一致するには、通常、位相空間において第二可算公理を満たす必要がある。第二可算公理とは、位相空間Tが、そこにおける可算個の開集合族（可算基）$B=\{V_n|n\in\omega\}$

[15]松坂[12]第5章、p.209。小山[11]第12章、p.141。神谷・浦井[9]第4章、p.154。志賀[18]第17章、p.124。

[16]田中[22]第3章、p.105～106。志賀[18]第27章。

によって、次の可算開被覆の性質を満たすことを言う[16]。すなわち、

任意の開集合Gは、$G=\cup\{V_n|V_n\subseteq G\}$と表すことができる。　(2)

ここで、V_nは開集合である。

この時、コンパクト集合と点列コンパクトは必要十分の関係となる。

〈証明〉[17]

(1) ($\Leftarrow$) Tは点列コンパクトであるが、（有限被覆の意味で）コンパクトではないと仮定して矛盾を導く背理法を用いる。

Tはコンパクトではないので、（第二可算公理による）Tの可算開被覆$T=\cup\{V_n|n\in\omega\}$の中から、有限個のV_nでは、決してTを覆えないものが存在する。よって、$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n$は、$T$とは一致しないので、可算選択公理を仮定すると、

$$x_n\notin V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{3}$$

という点x_nを取れる。

一方、Tは点列コンパクトなので、その性質により、点列$\{x_n\}$から適当な部分列を取ると、

$$x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_n},\cdots$$

となり、

$$\lim_{n\to\infty}x_{k_n}=a \tag{4}$$

となる点aが存在する。

ここで、第二可算公理より$T=\cup\{V_n|n\in\omega\}$であるから、$a\in V_m$となる開集合が存在する（$a\in T$より）。よって、ある点以降は

$$x_{k_i}\in V_m \tag{5}$$

が成立する。

ところが、k_iは任意の数をとりうるので、今$k_i>m$となる十分大きなk_iを取ると、(3)から

$$x_{k_i}\notin V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_m\cup\cdots\cup V_{k_i}$$

[17]証明の基本は、田中[22]第３章、p.105～106、志賀[18]第17章に依る。

つまり

$$x_{k_i} \notin V_m$$

これは(5)と矛盾する。

よって、T はコンパクトでなければならない。

(1) ($\Rightarrow$) T は（有限被覆の意味で）コンパクトであるが、点列コンパクトではないとして矛盾を導く。

T は点列コンパクトではないので、可算点列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \tag{6}$$

があって、(6)は収束する点列を含まない。そこで、

$$F = \{x_1, x_2, \cdots\}$$

を考えると、Fは閉集合となる$(F \subset T)$[18]。

Fが閉集合ならば、F^Cは開集合となり、また、

$$x_i \notin F^C (i = 1, 2, \cdots)$$

である。

また、各x_nに対して、十分小さい正数ε_nを選んでおくと$V_{\varepsilon_n}(x_n)$の中にはx_n以外にはFの元が含まれないようにすることができる[19]。

そこで、今、

$$O_n = V_{\varepsilon_n}(x_n) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

[18]今、任意に$y \in \overline{F}$を取る。ここで、$\overline{F}$はFの閉包である。
もしも、$y \notin F$ならば、yはFの集積点となるので、全ての正整数kに関して近傍$U(y, \frac{1}{k})$は

$$U(y, \tfrac{1}{k}) \cap F \neq \phi \tag{7}$$

となる。ここで(7)に含まれる1点を選んでx_kとする。
$y \notin F$なので、kを互いに異なるように選べるので、

$$x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$$

は(6)の（番号の異なる）点列で、明らかにyに収束する。だが、これは$y \notin F$に矛盾する。よって、$y \in F$となる。従って、$\overline{F} \subseteq F$となるが、閉包の定義を考慮すれば、$\overline{F} = F$。

[19]もし、そうでないとすると、$\varepsilon_n \to 0$としても、$V_{\varepsilon_n}(x_n)$の中にはx_n以外のFの元が入ってしまうことになるため、その点が集積点となってしまうからである。

と置くと、（第二可算公理より）Tの開被覆

$$T = F^C \cup O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n \cup \cdots$$

を得ることができる。だが、この中の有限個を選んでも、ある番号から先のx_nはこの中に決して含まれることはないので、有限個によってTを覆うことはできない。

これは、Tの有限被覆性と矛盾する。

よって、Tは点列コンパクトでなければならない。

□

さて、以上から、一般のコンパクト集合を前提とできるならば、はじめに述べたDebreuの不動点定理は一般のレベルでその存在が証明されることになるが、それは、一般のレベルでの角谷の不動点定理が、そしてまた、Brouwerの不動点定理が証明されるからに他ならない。

つまり、分析対象とする集合にコンパクト集合を持ち込めるならば、そこにおける対応関係では必ず不動点が存在することになる。

では、なぜ不動点定理の証明においてコンパクト集合を持ち込めることが可能であるのか。言い換えれば、なぜ任意の開被覆が有限被覆をもつような集合を持ち込むことが論理的に可能であるのか。

その重要な条件が選択公理である[20]。

5 選択公理の論理

前節で、点列コンパクトと一般のコンパクトの一致する条件を説明したが、その際、重要な前提として第二可算公理の他に、可算選択公理なるものを導入した。実は、一般のコンパクト集合を考える場合、任意の開集合

[20]ところで、距離空間における有限被覆性については、１次元の数直線上における閉区間の問題に置き換えて考えると、Heine-Borelの被覆定理という有名な定理が知られている。そして、これを有界閉集合上に一般化したHeime-Borelの定理も知られているが、そこでも選択公理が重要な前提とされている。例えば、神谷・浦井[9] 第４章参照。

が有限被覆を持つためには、選択公理（Axiom of Choice：AC）を前提としているのである。

すなわち、先の定義４によるコンパクト集合は、選択公理を前提として始めて定義できるものである。なぜなら、前節の証明で述べたとおり、有限被覆に属さない集合（無限可算集合）の中から、ある何らかの方法で点x_nを選択できることが前提とされているからである。この選択は、選択公理によって保証されているのである。逆に言えば、この選択公理が承認されないならば、コンパクト集合の有限被覆性は言えないことになり、よって、前述した不動点定理の証明は成し得ないことになってしまう。すなわち、選択公理は、不動点定理の証明におけるいわばアキレス腱なのである。そしてこの選択公理は、重大な難点を含んでいる公理である。

改めて選択公理を一般的に述べれば、次の公理のことを言う。

公理　５（選択公理１）

$$\forall\lambda\in\Lambda\left\{V_\lambda\neq\phi\right\}\Rightarrow\prod_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda\neq\phi \tag{8}$$

また、この命題は、次の命題とも同値である。

公理　６（選択公理２）任意の集合Aの空でない全ての部分集合の全体をMとすると、任意の$M\in\mathsf{M}$に対して$\Phi(M)\in M$となるようM上で定義された写像Φが存在する。

すなわち、この公理は、空でない（非可算無限の）開集合族$\left\{V_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$が与えられた時、それぞれの$V_\lambda$の中から（少なくとも一つの）元を一斉に取り出してこれる、ということを意味している。

この公理には、少なくとも次の二つの点で重大な問題点を含んでいる。

第一の問題点は、この選択公理は非可算無限集合の中からある点を取り

出せることを示しているものの、その取り出し方については何も言っていないことである。すなわち、どのように取り出せるかは不明であるにもかかわらず、点を取り出せるということだけを公理としているのである。つまり、この公理は構成的（constructive）なものではないために、ある集合の中から点を取り出すアルゴリズムは別途考え出されねばならない。しかも、そのアルゴリズムがどんな場合にも存在しているかどうかは現在までのところ不明であり、したがって、数学者の間でさえ選択公理の採用それ自体に強い抵抗感を抱く者が存在しているのである[21]。

このことの経済学的意味は深刻である。不動点定理の存在証明においては、より一般的なレベルまで抽象化して証明を与えるところに、コンパクト概念を持ち込む意義があった。だが、それは、選択公理を前提にしているために、実際の操作上の観点（構成的な手続き）は無視されており、実際にそのような点が取り出せるかどうかについては不問にされているのである。このことは、実証的な経済分析の観点からは致命的な弱点であると言わねばならない[22]。

第二の問題点は、特に重要だが、選択公理の証明自体が、一種の循環論法になっていることである。

選択公理は、その公理を考えたZermelo自身による整列可能性定理によって証明されるのだが、この整列可能性定理はZornの補題というものによって証明可能となる。ところが、このZornの補題は、選択公理を前提にしなければ証明され得ないのである。すなわち、選択公理はその証明に、自分の公理を前提にしなければならないという論理構造になっている（結論が前提条件とされる循環論法）。

この点を少し詳しく見てみよう。まず、Zermeloの整列可能性定理であるが、それは次のようなものである。

---

[21]例えば、田中[22]、志賀[19]などを参照。

[22]実際、均衡点の存在証明以降、経済学者の間でもこの点に関しての批判が存在した。例えば、荒川[1]など参照。

定理　7（整列可能性定理） Aを任意の集合とするとき、Aに適当な順序$\leq$を定義して、順序集合$(A, \leq)$を整列集合とすることが出来る[23]。

この定理を前提にすれば、先の選択公理6が証明される。

〈証明〉

整列可能性定理7によれば、Aに適当な順序 $\leq$ を定義して、$(A, \leq)$を整列集合とすることが出来る。そこで、Aの空でない各部分集合Mに対して

$$\Phi(M) = min\, M$$

とおけば、このΦは明らかに公理6を満たす。

□

続いて、Zornの補題とは次のものを言う。

補題　8（Zornの補題） Aを帰納的順序集合とすると、それは少なくとも一つ極大元を有する[24]。

そして、このZornの補題を用いると、上記の整列可能性定理7が証明されるが、その前提として次の補題が必要とされるので、証明抜きで書き出しておけば次の通りである[25]。

補題　9 $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$を集合$A$の部分集合族とし、各$W_\lambda$にはそれぞれ順序$\leq_\lambda$が定められていて、$(W_\lambda, \leq_\lambda)$は整列集合をなし、また、$\lambda$, λ'をΛの異なる2元とすれば、$(W_\lambda, \leq_\lambda), (W_{\lambda'}, \leq_{\lambda'})$のいずれか一方は他方の切片

[23]整列集合とは、Aの全順序集合において、空でない任意の部分集合が常に最小元を有する時の集合Aのこと。

[24]帰納的（inductive）順序集合とは、順序集合Aにおいて、その任意の空でない全順序部分集合がAの中に必ず上端を有する集合のこと。

[25]松坂[12]第3章参照。

となっていると仮定する。この時

(1) $W=\cup_{\lambda\in\Lambda}W_\lambda$の任意の２元$x$, yに対して

$$x\in W_\lambda,\qquad y\in W_\lambda \tag{9}$$

となるような$\lambda\in\Lambda$が必ず存在する。

(2) また、$x\leq_\lambda y$であるか$y\leq_\lambda x$であるかによって、それぞれ$x\leq y$, $y\leq x$と定義すれば、関係$\leq$は上の(9)を満足するλの取り方に依存しないで決まる。

(3) このように定義された$\leq$はWにおける順序関係となる。

(4) $(W,\leq)$は整列集合となる。

(5) 任意のλに対し、$(W_\lambda,\leq_\lambda)$は$(W,\leq)$と一致するかまたはその切片となる。

(6) $W=\cup_{\lambda\in\Lambda}W_\lambda$も、（$A$の部分順序集合として）整列集合であり、かつ、任意のW_λはWと一致するかまたはその切片となる。

さて、定理７は次のように証明される[26]。

〈証明〉

Aの部分集合の上には、一般に、幾通りもの順序関係が定義されうる。今、Aの部分集合Wと、そこで定義された順序Oとの順序集合$(W,\ O)$を考え、このうち整列集合となっているものの全体をMとする。

Mは空ではない。例えば、Aがただ一つの元aからなる集合$\{a\}$には、一意に順序Oが定義されるが、この$(\{a\},\ O)$はもちろん整列集合である。

次に、Mの２つの元$(W,\ O)$, $(W',\ O')$に対して、両者が一致している時か、または、(W,O)が$(W',\ O')$の切片になっているとき

$$(W,O)\rho(W',O')$$

[26]証明は、松坂[12]による。

として関係 ρ を定義する[27]。

このように定義された ρ がMにおける順序となることは直ぐ分かる。しかも、この順序 ρ について、Mは帰納的な順序集合となる。なぜならば、今、Rを ρ に関するMの任意の全順序部分集合とすると、上記の補題9より、Rの元$(W,\ O)$の台集合Wによる和集合$\cup\{W \mid (W,\ O)\in \mathrm{R}\}=W^*$は、次の性質を有する順序$O^*$が定義されるからである。

1．$(W^*,\ O^*)$は整列集合となる。よって、．$(W^*,\ O^*)\in \mathrm{M}$.

2．Rの各元$(W,\ O)$は$(W^*,\ O^*)$と一致するか、または、切片となる。よって、$(W,O)\rho(W',O')$.

従って、$(W^*,\ O^*)$がMにおけるRの上限となる。つまり、(M,ρ) は帰納的順序集合となる。

よって、Zornの補題より、(M,ρ) は極大元$(W_0,\ O_0)$を有する。

だが、この時、$W_0=A$でなければならない。もしも、$W_0\neq A$ならば、$A-W_0$から一つの元aを取ってきて、$W_0\cup\{a\}=W_1$とし、aを最後の元としてW_0の順序O_0をW_1の順序O_1に拡張するとする。すると、これは$(W_1,\ O_1)\in \mathrm{M}$で、$(W_0,\ O_0)$は$(W_1,\ O_1)$の切片となる。

ところが、これは$(W_0,\ O_0)$の極大性と矛盾する。よって、$W_0=A$. そこで、O_0を$\leq$とすれば、$\leq$はAにおける順序で、しかも$(A,\ \leq)$は整列集合となる。　□

最後に、Zornの補題は、次に二つの補題から導かれる。この際、選択公理を使用する。

補題　10　Aを帰納的順序集合とし、φ はAからAへの写像で、Aの全ての元xに対して、$\varphi(x)\geq x$ となるものとする。この時、$\varphi(a)=a$ となるようなAの元aが少なくとも一つ存在する。

---

[27] 整列集合Wの元aがWの切片になるとは、次の式で定義されるように、aよりも小さいWの元全体の集合のことを言う。

$$W<a>:=\{x \mid x\in W, x<a\}$$

補題　11 Aを極大元を持たない順序集合とすると、AからAへの写像φで、Aの全ての元xに対して、$\varphi(x)\geq x$となるものが存在する。

この補題10、11によって、Zornの補題が導かれるのは明らかである。

〈補題10の証明〉

Aの一つの元x_0を任意に固定し、Aの部分集合Wで、次の諸条件を満たすものを考える。

1. WはAの部分順序集合として整列集合。
2. $minW=x_0$
3. Wの元xがWの中に直前の元x_*を持つならば、$x=\varphi(x_*)$
4. Wの元$x(\neq x_0)$がWの中に直前の元を持たなければ、Wのxによる切片$W<x>=\{y|y\in W, y<x\}$のAにおける上限がxと一致する$(x=sup_A W<x>)$。

今、これらの条件を満たすAの空でない部分集合の全体を$\mathbf{W}$とする。

次に、$W, W'\in\mathbf{W}$とすれば、$W=W'$であるか、または、そのいずれか一方が他方の切片と一致する。すると、$\mathbf{W}$の元W, W'は整列集合なので、$W\simeq W'$であるか、または、そのいずれか一方が他方の切片に順序同型であるという定理が知られている[28]。どちらの場合も同様なので、例えば、WがW'のある切片$W'<b'>$に順序同型である$(W\simeq W'<b'>)$とし、そのときの順序同型写像をfとする$(W'<b'>\ni x'=f(x);x\in W)$。この時、実は$W$は任意の元$x$に対して、$f(x)=x$、従って$W=W'<b'>$となることが、次の超限帰納法[29]によって明らかである。

まず、$x_0=minW=minW'=W'<b'>$であるから、$f(x_0)=x_0$は明ら

[28]比較定理。これを証明抜きで示せば以下の定理である。
W, W'を二つの整列集合とすれば、次の３つの場合のいずれか一つ、しかも、一つだけが成り立つ。

1. $W\simeq W'$
2. W'のある元a'が存在して、$W\simeq W'<a'>$
3. Wのある元aが存在して、$W<a>\simeq W'$

松坂[12]p.103-105 。

かである。

続いて、xをWのx_0以外の任意の元とし、$y<x$となるようなWの全ての元yに対しては$f(y)=y$と仮定する。そのとき、もしxがWの中に直前の元x_*を持つならば、fは順序同型写像であるので、$f(x_*)$は$W'<b'>$の中で、従ってまたW'の中で$f(x)$の直前の元となる。だが、今yについて仮定したことにより$f(x_*)=x_*$だから、上記の条件3によって、

$$f(x)=\varphi(f(x_*))=\varphi(x_*)=x$$

となる。

また、xがWの中に直前の元を持たない場合には、fが順序同型写像であることから同様に、$f(x)$も$W'<b'>$の中に、従ってまたW'の中に直前の元を持たないことになる。更に、fによる$W<x>$の像は順序同型より$(W'<b'>)<f(x)>=W'<f(x)>$となるが、$W<x>$の任意の元$y(<x)$に対しては$f(y)=y$と仮定したので、$W'<f(x)>=W<x>$である。従って、上記の条件4によって、

$$f(x)=sup_A W'<f(x)>=sup_A W<x>=x.$$

よって、以上から、Wに属する任意の二つの集合は一致するか、または、一方が他方の切片になることが明らかとなった。従って、$\cup\mathsf{W}=W_0$と置けば、先の補題9によりW_0も整列集合となり、また、Wの任意の元はW_0と一致するか、またはW_0の切片である。これらのことを考慮すれば、W_0も上記四つの条件を満たすことが分かる。よって、W_0もWの元となり、しかもこれはWの最大元である。

Aは帰納的集合であり、W_0はAの整列部分集合であるから、その定義

[29]超限帰納法とは、次の定理によって知られるものである。
整列集合Wの元に関するある命題Pがあり、それに関して次の(10)が示されたとすると、PはWの全ての元について成立する。

aをWの任意の元とするとき、$x<a$であるWの各元xについてPが成立すると仮定すれば、Pはaについても成立　(10)

により$sup_A W_0 = a$となるaが存在する。このaはW_0の元でなければならない。なぜなら、もし、$a \notin W_0$ならば、$W_0 \cup \{a\} = W'_0$もまた上記四つの条件を満足することが分かるが、これはW_0がWの最大元であることと矛盾するからである。従って、$a \in W_0$、よって、$a = max\, W_0$となる。

そして、このaについては$\varphi(a) = a$が成立する。もし、$\varphi(a) \neq a$ならば、はじめのφの仮定から$\varphi(a) > a$でなければならないが、その場合は$\varphi(a) \notin W_0$となる（$max\, W_0 = a$より）。この時、$W_0 \cup \{\varphi(a)\} = W''_0$とすれば、上記四つの条件を満たすことが上と同様に分かるが、これもW_0の最大性と矛盾する。
よって、$\varphi(a) = a$でなければならない。

□

〈補題11の証明〉

Aの全ての空でない部分集合からなる集合系をMとする。選択公理（公理６）を前提とすれば、M上で定義された写像Φにおいて、Mの全ての元Mに対して$\Phi(M) \in M$となるものが存在する。

今、Aは極大元を持たないと仮定されているので、Aのある元xに対して$\{y | y \in A, y > x\} = M_x$と置けば、どの$x \in A$に対しても$M_x \neq \phi$、すなわち$M_x \in \mathsf{M}$である。そこで$A$の任意の元$x$に対し、

$$\varphi(x) = \Phi(M_x)$$

として、AからAへの写像φを定義すると、$\varphi(x) \in M_x$であるので、$\varphi(x) > x$となる。

□

以上、選択公理をはじめとする三つの定理の関係を詳しく見てきた。現在、選択公理、整列可能性定理、Zornの補題は、数学的には同値命題とされているが、それはそれぞれが互いを前提にし合う数学上の関係から来ている。要するに、選択公理は、数学上大変重要なものであるが、特殊な公理なのである。前述したように、コンパクト集合はこの選択公理に依存

しており、そして均衡解の存在証明はコンパクト集合に依存している。従って、もしもこの選択公理を前提としないならば、コンパクト集合を用いない理論が必要となる。あるいは、均衡解の存在を前提としない経済理論が可能かも知れない。

少なくとも、数学基礎論の領域では、この選択公理を否定する命題が存在していることが知られている。無限ゲームにおける決定性公理と呼ばれるものである。

6　選択公理を否定した世界

二人のプレーヤーによる無限ゲームでは、決定性公理（Axiom of Determinateness : AD ）と呼ばれるものが知られている。

今、Xを少なくとも2要素を有する集合とし、

$$X^{\omega} = \{f | f : \omega \to X\}$$

という無限直積位相空間を用意する。X^{ω}の任意の部分集合をAとする。

二人のプレーヤーIとIIが、Iから始めてXの要素を交互に（重複を許して）取り合うゲームを考える。これを無限回（ω回）繰り返すと、その結果、Xの要素の無限系列

$$a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots$$

が得られる。そこで、この無限列と

$$f(2n) = a_n, \qquad f(2n+1) = b_n, \qquad n = 0, 1, \cdots$$

によって定まる$f \in X^{\omega}$とを同一視するとする。

この時、

$$f \in A \Rightarrow I\text{の勝ち}$$
$$f \notin A \Rightarrow II\text{の勝ち}$$

となるゲームを$G(A)$で表す。このゲーム$G(A)$において、IかIIのどちらかが必勝法を有する時、このゲームは「決定性を持つ」と呼ぶ。あるいはまた、決定性公理とは、任意のゲーム$G(A)$において必ず必勝法が存在する、とするものである。

更に、σをIの戦略とすると、戦略σとは、プレーが$2n-1$手まで進行した時、次にIが打つ手a_nを、それまでIIがプレーした手の列$b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$から決める一つの関数

$$\sigma(< b_0, b_1, \cdots, b_{n-1} >) = a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

のことであり、同様にプレーヤーIIの戦略τとは、

$$\tau(< a_0, a_1, \cdots, a_n >) = b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

となる関数のことである[30]。

Iがσに従いIIがτに従ってプレーした結果得られるプレーを$\sigma * \tau$で表し、また、Iが行ったプレーfに対してIIがτに従ってプレーした結果得られるプレーを$[f] * \tau$、IIが行ったgに対してIがσに従ってプレーした結果得られるプレーを$\sigma * [g]$とする。よって、IとIIの戦略集合をそれぞれS_I, S_{II}で示せば、次の同値命題が成立する。

$$\forall \tau \in S_{II}(\sigma * \tau \in A) \Leftrightarrow \forall g \in X^{\omega}(\sigma * [g] \in A) \qquad (11)$$

$$\forall \sigma \in S_I(\sigma * \tau \notin A) \Leftrightarrow \forall f \in X^{\omega}([f] * \tau \notin A) \qquad (12)$$

この時、(11)式はIの必勝法を表し、(12)式はIIの必勝法を表す。

従って、決定性公理とは、全ての集合$A \subseteq X^{\omega}$に対し、

$$\exists \sigma \in S_I \forall \tau \in S_{II}(\sigma * \tau \in A) \vee \exists \tau \in S_{II} \forall \sigma \in S_I(\sigma * \tau \notin A) \quad (13)$$

が成立することを言う。

さて、この決定性公理はとてもキツイ命題であることが知られているが、

---

[30]但し、$n = 0 \Rightarrow \sigma(< \ >) = a_0$。となる。< >は空列を表す。

決定性公理を前提にすると、選択公理が否定される次の定理が証明されている。

定理　12　Xを可算集合とし、$AD(X)$を仮定すると、X^{ω}を整列することは出来ない（すなわち、$AD(X) \Rightarrow \rceil AC(X^{\omega})$）。

〈証明〉[31]

対偶命題の、$AC(X^{\omega}) \Rightarrow \rceil AD(X)$を証明する。すなわち、選択公理を前提として整列集合を作ると、決定性を持たないゲームが存在することになる。

今、X^{ω}のある部分集合をAとし、各$\sigma \in S_I, \tau \in S_{II}$に対し、次のようなプレー集合を作る。

$$T_{\sigma} = \{\gamma \in X^{\omega} | \exists g(\gamma = \sigma * [g])\}$$

$$T_{\tau} = \{\gamma \in X^{\omega} | \exists f(\gamma = [f] * \tau)\}$$

この時、任意のゲーム$G(A)$において、

$$I\text{が必勝法を持つ} \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_I[T_{\sigma} \cap (X^{\omega} - A) = \phi]$$

$$II\text{が必勝法を持つ} \Leftrightarrow \exists \tau \in S_{II}[T_{\tau} \cap A = \phi]$$

となる。

ここで$AD(X^{\omega})$を使ってX^{ω}を順序型λに整列し、S_IとS_{II}もこれと順序同型に整列すると、

$$S_I = \{\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{\nu}, \cdots\}_{\nu<\lambda}$$

$$S_{II} = \{\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_{\nu}, \cdots\}_{\nu<\lambda}$$

となる。

更に、各$T_{\sigma_{\nu}}, T_{\tau_{\nu}}$も順序同型に整列する。ここで、$T_{\sigma_0}$の最小番号元を$f_0$とし、$T_{\tau 0} - \{f_0\}$の最小番号元を$g_0$とする。$\nu < \lambda$として、各$\xi < \nu$に

[31]田中[21]に依る。

対して f_ξ, g_ξ を定義しておくと、$T_{\sigma_\nu} - \{g_\xi | \xi < \nu\}$ の最小番号元をf_ν、$T_{\tau_\nu} - \{f_\xi | \xi < \nu\}$ の最小番号元を g_νとできる。これらを用いて、

$$A = \{g_\nu | \nu < \lambda\} \qquad B = \{f_\nu | \nu < \lambda\}$$

とすると、その構成方法から、

$$A \cap B = \phi \text{ で、} B \subseteq X^\omega - A. \tag{14}$$

この時ゲーム$G(A)$ではI，IIともに必勝法を持ち得ない。なぜならば、任意の $\sigma \in S_I$ を取ると、$\sigma = \sigma_\nu$となるνが決まるが、(14)式により、

$$f_\nu \in T_{\sigma_\nu} \cap B \subseteq T_{\sigma_\nu} \cap \left(X^\omega - A\right)$$

なので、$T_\sigma \cap \left(X^\omega - A\right) \neq \phi$ となる。よって、Iは必勝法を持たない。同様にして、IIも必勝法を持たない。

□

以上の定理12により、決定性公理は選択公理と両立し得ないことになる。但し、決定性公理は、可算集合上の弱い選択公理（可算選択公理：WAC）と両立することも同時に知られている。

定理　13　$AD(\omega) \Rightarrow WAC(\mathrm{R})$

〈証明〉[32]

今、$F = \{A_n | n \in \omega\}$ をR上の空でない部分集合の可算族とする。ここで、

$$B = \mathrm{R} - \left\{f \in \mathrm{R} \middle| f_0 \in A_{f(0)}\right\}$$

というゲーム$G(B)$を考える。f_0はプレーヤーIの最初のプレー。

$G(B)$ではIが必勝法を持たないので、決定性公理によりIIが必勝法τを有することになる。

今、$f_i(n) = i(n \in \omega)$となる$f_i \in \mathrm{R}$を考えると、ゲームの最初のルールから、$\left([f_i] * \tau\right)_0 = i$で、しかもこの時 $\left([f_i] * \tau\right)_0 \notin B$ である。よって、

[32]田中[21]に依る。

$$\forall i \in \omega\left(\left(\left[f_i\right] * \tau\right)_0 \in A_i\right). \tag{15}$$

ここで、$h: \boldsymbol{F} \to \bigcup_i A_i$となる$h$を$h(A_i) = \left(\left[f_i\right] * \tau\right)_0$と定義すれば、(15)式から、

$$\forall i\left(h(A_i) \in A_i\right).$$

これは、hが$\boldsymbol{F}$の選択関数であることを示している。

□

以上述べてきた決定性公理は、数学上、Lebesgue測度などの展開においても使用されているようだが、それはともかく、選択公理を否定する公理さえ存在していることが明らかとなった。決定性公理自体は、かなりキツイ命題ではあるものの、それを前提とする限り選択公理とは（可算選択公理という弱い形でしか）両立し得ないし、また、決定性公理を前提とした数学的世界も、現実に展開されている。従って、選択公理それ自体もたいへん超越的、ないしは特殊なものであると言わねばならないであろう。

さて、経済学における均衡解の存在証明は、（その一般形において）選択公理に依存したコンパクト集合の概念によってもたらされたものであった。とすれば、選択公理を否定した命題に立脚する世界、あるいは、均衡解の存在しない経済モデルの世界を構築することは、理論上可能であるはずである。だが、この点の経済理論研究は、少なくとも（位相）数学的モデルを用いた分野では、殆ど見かけないように思われる。もしも、経済理論が新たな地平を切り開く可能性があるとすれば、この方向性が一つの可能性と考えられるかも知れない。

7　結論的覚え書き

選択公理を前提とした集合論などにより、位相を扱う現代数学が著しく発展したことはまごうことなき事実である。そこでは、いわば「数学的実在」を前提とすることによって、新しい数学的分野が開拓されてきたので

ある[33]。

だが、言うまでもなく、数学的実在は現実社会における実在とは区別される必要がある。現実社会における実在は、その取り出し方がしばしば問題とされ、また実際に取り出してみせることが必要になる。私達の論理的帰結を、経験的事実や直感によって裏付けることが、経済学などの社会科学においては特に求められるからだ。しかも、それが経済システムに内在するとされる均衡点の存在証明であるとするならば、どのように取り出されるか（達成されるか）不明である選択公理を前提とした理論は、新たな課題を提起することとなった。その存在証明は、あくまでも数学的実在上の理論である限り、現実経済における実在を言っていることにはならず、それは文字通り「理屈の上」でしかない[34]。どのようにして均衡点を探し出すかは、全く別の課題となる。

経済学史上、ScarfがDebreuとの共著[7]以降、CGEモデルなどにおいて均衡点の計算アルゴリズムの開発に研究方向をシフトさせていったのは、おそらく偶然ではないだろうと私は思う。均衡点が存在するとするならば、それはどのようにして計算可能であるのか、その点を実際に示す責任を彼は感じていたに違いない。むしろ、それは健全な精神であると言えるだろう。

Debreuなどによって証明された均衡点の存在は、現実の経済を、選択公理を暗黙の前提としてコンパクト集合（Euclid空間上の有界・閉集合）を持ち込むことによってなされたものであり、どのようにしてそれを求めるのか、またそれが現実経済の中でいかなる役割を果たすものであるのかは、不明のままである。それは、あくまで数学上の実在でしかない。だが、実証上の均衡点アルゴリズムを探求したScarfも、近似によって収束させた均衡点それ自体が当該経済にいかなる意味があるのかに関しては、十分明らかにされているとは言えないだろう。

無論、数学的実在は、私達の実社会にとって何の有益性もないというこ

---

[33]数学基礎論などの分野もその一つかも知れない。

[34]数学的に証明し得たという意味では、「空論」ではないが。

とにはならない。現に、それは数学それ自体の発展に有益であったという意味で、もちろん重要であった。それ以外にも、例えば、積率法による期待値（expected value）ないしは平均値などは、現実にその平均値が存在するかどうかはともかく、ある集団の分布の特徴を示す重要なパラメータとして実社会に有用である。

だが、同時に、期待値などは、私達の経験的直感に必ずしも一致しないという意味において、注意すべき指標でもある[35]。そしてまた、期待値が現実集団の中に存在するかどうかや、求心力として作用しているかどうかなども、全くの別問題である。

上記で述べてきた経済システムにおける均衡点の存在証明についても同様で、その現実的役割は未だ不明である。そして、それは現実経済に対して実証的な示唆を与えるものではない。当然のことながら、実証的方法は別途課題として残されている。

無論、肝要なことは、コンパクト集合や位相的方法を持ち込んだ経済の数学モデルにおいて、その後如何なる（数学的）世界や可能性が開け、また、それがもたらす演繹結果が、現実の経済社会に如何なる意義あるものとなるか、である。検討してきたように、選択公理を前提とした数学モデルの世界は、その方法のはじめから現実の実現性や操作性とは異なった抽象性の高いレベルで論理が構成されている。

少なくとも言えることは、位相数学的方法による経済モデルは、その数理の中だけで（実証的方法とは違ったレベルでという意味で）演繹、解析されねばならず、他方で、そこにおける結論を現実社会に引き戻して実証する方法は全く別に考え出さねばならず、更に、その結論の意味を経済的に解釈する作業が必要となるということだ。

現代の経済学は、巷間でその有効性を疑問視されながら、学問的には大きく二つの方向性持った課題を背負い込んでいると言えるのかも知れない。

---

[35]例えば、所得分布における平均所得などは、ごく少数の高所得者の値に引きずられて平均値が高めに出てしまうことはよく知られる経験的事実である。

参考文献

[1] 荒川章義、『思想史のなかの近代経済学』、中央公論社、1999.

[2] アロー、J.K.、『社会的選択と個人的評価』、長名寛明訳、日本経済新聞社、1963.

[1] (Arrow, J.K., *Social Choice and Individual Values, 2nd ed.*, Yale University Press, 1963.)

[3] Chichilnisky, G., 'Market arbitrage, social choice and the core', *Social Choice and Welfare*, vol.14, 1997.

[4] Debreu, G., 'Extence of Competitive Equilibrium', *Handbook of Mathematical Economics*, vol.Ⅱ,edited by Arrow and Intriligator, North-Holland Publishing Company, 1982.

[5] フェルドマン、A.M.、『厚生経済学と社会選択論』、佐藤隆三監訳、マグロウヒル、1984.

[1] (Feldman, A.M., *Welfare Economics and Social Choice Theory*, Martinus Nijhoff Publishing, 1980.)

[6] Fudenberg, D. and Tirole, j., *Game Theory*, The MIT Press, 1991.

[7] Debreu, G. and Scarf, H., 'A Limit Theorem on The Core of An Economy', *International Economic Review*, vol.4, No.3, Sep., 1963.

[8] Kakutani, S., 'A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem', *Duke Mathematical Journal*, vol.8. 1941.

[9] 神谷和也・浦井憲、『経済学のための数学入門』、東京大学出版会、1996.

[10] A. カナモリ、『巨大基数の集合論』、シュプリンガー・フェアラーク東京、1998.

[11] 小山昭雄、『経済数学教室　3』、岩波書店、1995.

[12] 松坂和夫、『集合・位相入門』、岩波書店、1968.

[13] 森毅、『無限集合』、共立出版、1976.

[14] Nash, J., 'Equilibrium Points in N-Person Games', *Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A.*, vol.36, 1950.

[15] 西村和雄、『経済数学早わかり』、日本評論社、1982.

[16] Scarf, H., 'The Core of An N Person Game', *Econometrica*, vol.35, No.1, Jan., 1967.

[17] Sen, A., 'Social Choice Theory : A Re-examination', *Econometrica*, vol.45, No.1, Jan., 1977.

[18] 志賀浩二、『位相への30講』、朝倉書店、1988.

[19] 志賀浩二、『集合への30講』、朝倉書店、1988.

[20] Shoven, J. B. and Whalley, J., *Applying general equiliburim*, Cambridge University Press, 1992.

[21] 田中尚夫、「決定性公理に関する最近までの諸結果について」、『数学』、第29巻、第1号、Jan.、1977.

[22] 田中尚夫、『選択公理と数学』、遊星社、1987.