

球関数による 3 自由度回転物体画像系列の展開と 画像補間・姿勢推定への応用

玉木 徹[†] 天野 敏之^{††} 金田 和文[†]

[†] 広島大学大学院工学研究科情報工学専攻 〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1

^{††} 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 〒630-0101 奈良県生駒市高山町 8916 番地の 5

E-mail: [†]{tamaki,kin}@hiroshima-u.ac.jp, ^{††}amano@is.naist.jp

あらまし $SO(3)$ 上の直交関数系である球関数による 3 自由度回転物体画像系列の展開方法の具体的な実装を提案し、画像補間と姿勢推定への応用について述べる。

キーワード 球関数, 3 自由度, 直交関数系, 展開係数, Gegenbauer 陪関数

Expanding images of an object under 3DOF rotation with spherical functions and its applications to image interpolation and pose estimation

Toru TAMAKI[†], Toshiyuki AMANO^{††}, and Kazufumi KANEDA[†]

[†] Department of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hiroshima University

^{††} Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology

E-mail: [†]{tamaki,kin}@hiroshima-u.ac.jp, ^{††}amano@is.naist.jp

Abstract We propose an implementation for expanding images of an object under 3DOF rotation with spherical functions, an orthonormal basis on $SO(3)$, and describe its applications to image interpolation and pose estimation.

Key words spherical functions, 3 DOF, orthonormal functions, expanding coefficients, associated Gegenbauer function

1. はじめに

1 自由度回転する物体の画像系列 $\{x_{\theta_1}, x_{\theta_2}, \dots, x_{\theta_n}\}$, ($\theta_i \in [0, 2\pi)$, $x_i \in \mathbb{R}^N$) は、一周するとまた元に戻る。つまり $x_{\theta} = x_{\theta+2n\pi}$, ($n \in \mathbb{Z}$) である。これは、画像の j 番目の画素 $\{x_{\theta_1}^j, x_{\theta_2}^j, \dots, x_{\theta_n}^j\}$ についても同様であるので、各画素は周期 2π の周期関数である、といえる。したがって、各画素について (離散) フーリエ変換を施すことができる。これを利用して、我々は 1 自由度回転する物体の画像列の補間や、画像の姿勢推定手法を提案した [1] ~ [4]。

本論文では、上記の考え方を 3 自由度回転する物体の画像系列に拡張する。つまり、ある姿勢 $R \in SO(3)$ と対応する画像 x_R が与えられた時、画像の各画素についての球関数による展開を与える。また 1 自由度の場合と同様に、球関数による展開を利用した画像列の補間や、画像の姿勢推定について議論する。

2. 球関数について

n 次元球面 $S^n = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| = 1\}$ 上の C^∞ 級連続な正規直交関数系 $Y_{\ell_1, \dots, \ell_n}$ は、球関数 [5], [6] と呼ばれる。 $n = 1$ の

球関数は複素フーリエ基底、 $n = 2$ の球関数は球面調和関数として知られている。

3 自由度回転のために必要な球関数は $n = 3$ のものである。そこで、ここではまず、一般的な球関数 ([7] 参照) の定義から、 $n = 3$ の具体的な式を書き下す。そして、それらと 3 自由度回転との関係について述べる。

2.1 S^3 上の球関数

$\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{Z}$, $\ell_1 \geq \ell_2 \geq |\ell_3|$ に対して、 S^3 上の球関数 $Y_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ は、以下で与えられる [5]。

$$Y_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} = \sqrt{b_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}} C_{\ell_1}^{1, \ell_2}(\cos \theta_1) P_{\ell_2}^{\ell_3}(\cos \theta_2) e^{-\ell_3 \theta_3 i} \quad (1)$$

ここで $C_{\ell_1}^{1, \ell_2}$ は Gegenbauer 陪関数、 $P_{\ell_2}^{\ell_3}$ は Legendre 陪関数、 $b_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}$ は係数である ([7] 参照)。また $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は S^3 上の点 $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T \in S^3 \in \mathbb{R}^4$

$$q = (\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^T \quad (2)$$

の極座標表示で、とり得る範囲は $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi, 0 \leq \theta_3 < 2\pi$ である。直交座標 $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$ から極座標 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$

への変換は以下の通りである。

$$\theta_3 = \tan^{-1} \frac{q_4}{q_1} \quad (3)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{q_3^2 + q_4^2}}{q_1} \quad (4)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{q_1} \quad (5)$$

球関数は、 S^3 上の関数 $f \in L^2(S^3)$ を以下のように近似する [6]。

$$\left\| f - \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{\ell_2=0}^{\ell_1} \sum_{\ell_3=-\ell_1}^{\ell_1} (f, Y_{\ell_1, \ell_2, \ell_3})_{S^3} Y_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \right\|_2 \rightarrow 0 \quad (6)$$

ここで $(\cdot)_{S^3}$ は以下で定義される S^3 上の内積である。

$$(f, g)_{S^3} = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma_{S^3}} f \bar{g} \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \quad (7)$$

ここで $\sigma_{S^3} = 2\pi^2$ は S^3 の表面積である。また式 (6) は、この内積による 2 乗ノルム $\|f\|_2 = (f, f)_{S^3}^{\frac{1}{2}}$ に関する収束である。

2.2 S^3 と $SO(3)$ の関係

q を単位四元数 $q \in Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ とみなすと、3 自由度の回転行列 $R \in SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid RR^T = I, |R| = 1\}$ との対応

$$R_q = \begin{pmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 & 2q_2q_4 + 2q_1q_3 \\ 2q_2q_3 + 2q_1q_4 & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2q_3q_4 - 2q_1q_2 \\ 2q_2q_4 - 2q_1q_3 & 2q_3q_4 + 2q_1q_2 & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

が得られる。これに式 (2) を代入すると、 S^3 上の点の極座標 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ によって回転行列 $R(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ を決めることができる。

しかし、 $R_q = R_{-q}$ であるため、この対応は対一ではない。つまり S^3 上の二つの点 $q, -q$ が一つの回転行列 R_q に対応している (二重被覆)。

2.3 $SO(3)$ 上の球関数

$SO(3)$ 上の球関数は、 S^3 上の球関数のうち半分の偶関数のものだけであり、それは $Y_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ のうち、 $\ell_1 \in 2\mathbb{Z}$ のものであり、極座標上では $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ のものである。

$\ell_1 = 2$ の場合の具体的な式を以下に示す。

$$Y_{2,0,0} = 1 + 2 \cos 2\theta_1 \quad (9)$$

$$Y_{2,1,0} = \sqrt{24} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (10)$$

$$Y_{2,1,\pm 1} = -2\sqrt{3} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 e^{\mp \theta_3 i} \quad (11)$$

$$Y_{2,2,0} = \sqrt{2} \sin^2 \theta_1 (3 \cos^2 \theta_2 - 1) \quad (12)$$

$$Y_{2,2,\pm 1} = -2\sqrt{3} \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 e^{\mp \theta_3 i} \quad (13)$$

$$Y_{2,2,\pm 2} = \sqrt{3} \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 e^{\mp 2\theta_3 i} \quad (14)$$

この $\ell_1 = 2$ に対応する 9 つの関数は、 3×3 回転行列の 9 つの要素に一対一に対応する [7]。

3. 実装上の問題点と解決策

本論文で目指すことは以下のようなものである。

ある物体の 3 自由度回転の姿勢 $R_1, R_2, \dots, R_n \in SO(3)$ とそれに対応する画像 $x_{R_1}, \dots, x_{R_n} \in \mathbb{R}^N$ が与えられたとする。これらの画像の j 番目 ($j = 1, 2, \dots, N$) の画素を表すベクトル $x^j = (x_{R_1}^j, \dots, x_{R_n}^j)^T \in \mathbb{R}^n$ を考え、これを基底である球関数の線形和に展開することを目指す。

つまり、 $SO(3)$ 上の球関数を簡略化して Y_k と表すとすると、

$$x^j \cong \sum_{k=1}^m c_k^j Y_k \quad (15)$$

となる係数 c_k^j を求めることが目的である。

ここで考えなければならない問題は、以下のことである。

- (1) 係数 c_k^j をどう求めるか?
- (2) 必要な基底の数 m はいくつか?
- (3) 基底関数をどう計算するか?

3.1 係数の求め方

係数を求めるには、連続系であれば、式 (7) による内積を用いればよい。離散系の場合は内積を離散点に制限して、離散フーリエ変換のようにベクトル同士の内積に置き換えることが考えられる。しかし、球関数の場合に、ベクトルの内積で置き換えることは実際のところ困難 (不可能) である。

一般的に、離散フーリエ変換の係数は $c_k = \sum_{m=0}^{M-1} x(m) e^{-\frac{2\pi}{M}mk}$ で定義される。つまりサンプリングは一定角度 ($\frac{2\pi}{n}$) で (等間隔に) 行われており、 k 次のフーリエ基底関数 $e^{-\frac{2\pi}{M}k}$ はこれらのサンプリング点において計算しても直交している (選点直交性を持っている)。このために、積分で定義される内積計算を、離散フーリエ変換では単純なベクトルの内積で置き換えることができる、と言ってよい。もし一定角度ではないサンプリング点において (不等間隔) 離散フーリエ変換する場合には、単純なベクトルの内積では係数を求めることはできない (注1)。

一方で、3 自由度の姿勢を等間隔に与えることはほとんど不可能である。物体を回転する場合、実用上は x 軸周りの固定角やオイラー角などを与えることがほとんどである。しかし、その姿勢に対応する回転行列 R_i を求めても、対応する S^3 上の点の極座標 $\theta_{1i}, \theta_{2i}, \theta_{3i}$ は等間隔にはならない。つまり、等間隔のサンプリング点で計算することはできず、内積をベクトルの内積で置き換えることもできなくなる。

ここでは単純に、式 (15) を連立方程式とみなし、その方程式を解くことで係数を得る。これは球面調和関数の係数を求めるために一般的に用いられている方法 [10] ~ [12] である。

つまり、

$$x_{R_i}^j = \sum_{k=1}^m c_k^j Y_k(R_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

(注1): 高速フーリエ変換を不等間隔サンプリング点を扱う拡張は、例えば [8] などを参照。不等間隔に与えられた任意の点に対する球面調和関数の係数を高速に求める問題も同様である ([9] を参照)。

表 1 異なる次数 ℓ_1 に対応する球関数 $Y_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}$ の個数

総数	個数	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
1	1	0	0	0
10	9	2	0	0
		2	1	-1, 0, 1
		2	2	-2, -1, 0, 1, 2
35	25	4	0	0
		4	1	-1, 0, 1
		4	2	-2, -1, 0, 1, 2
		4	3	-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3
		4	4	-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4
84	49	6		
165	81	8		
286	121	10		
455	169	12		
		\vdots		
$\frac{4}{3}L_1^3 + 4L_1^2 + \frac{11}{3}L_1 + 1$	$(2L_1 + 1)^2$	$2L_1$	\dots	\dots

を解く。ここで $Y_k(R_i) = Y_k(\theta_{1i}, \theta_{2i}, \theta_{3i})$ は、ある姿勢 R_i を、それに対応する極座標 $(\theta_{1i}, \theta_{2i}, \theta_{3i})^T$ に変換し、球関数を計算するものとする。

これを行列形式にして

$$\begin{pmatrix} x_{R_1}^j \\ x_{R_2}^j \\ \vdots \\ x_{R_n}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(R_1) & \dots & Y_m(R_1) \\ Y_1(R_2) & \dots & Y_m(R_2) \\ \vdots & & \vdots \\ Y_1(R_n) & \dots & Y_m(R_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^j \\ c_2^j \\ \vdots \\ c_m^j \end{pmatrix} \quad (17)$$

さらに簡略化して $\mathbf{x}^j = G\mathbf{c}^j$ と書く。

すべての画素 $j = 1, \dots, N$ に対して同様の方程式を立てれば、

$$[\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^N] = G[\mathbf{c}^1 \dots \mathbf{c}^N] \quad (18)$$

行列にしてまとめて書くと $X = GC$ となる。ここで、

$$X = [\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^N] = [\mathbf{x}_{R_1} \dots \mathbf{x}_{R_n}]^T \in \mathbb{R}^{n \times N}, \quad (19)$$

は、行 i が姿勢 R_i の画像 \mathbf{x}_{R_i} に対応し、列 j が画素 j の変化ベクトル \mathbf{x}^j に対応している。また $G = (Y_k(R_i)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ は、姿勢 R_i に対する k 番目の球関数の値を保持する基底を表す行列、 $C = (c_k^j) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ は k 番目の球関数の画素 j に対する係数を保持する行列である。

この連立方程式を解くには、 G の一般化逆行列 G^+ を用いて $C = G^+X$ とすると、すべての画素の係数 C を求めることができる。

3.2 基底の数

与えられた画像列を表現するために必要な基底の数 m は、連続であれば画像列の周波数特性、離散であれば画像列がなす部分空間の次元などに依存する。 n 枚の画像が与えられたときに、それを直交基底を用いて完全に表現するためには、一般的には

n 個以上の基底 (つまり $m \geq n$) を用いればよい。

$SO(3)$ 上の球関数の数を表 1 に示す。 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 の組が異なれば、基底 $Y_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}$ もまた異なる。そこでこの表は、 ℓ_1, ℓ_2 を固定したときに ℓ_3 がとり得る値と、 ℓ_1 を固定したときの異なる基底の個数を示している。 ℓ_1 は球関数の基となる多項式の次数を表しており、次数 ℓ_1 を固定したとき、異なる基底の数は $(\ell_1 + 1)^2$ である。

ℓ_1 を 0 から $2L_1$ まで変化させたときの異なる基底の総数は次式で求められる。

$$m(L_1) = \sum_{\substack{\ell_1=0, \\ \ell_1 \in 2\mathbb{Z}}}^{2L_1} \sum_{\ell_2=0}^{\ell_1} \sum_{\ell_3=-\ell_1}^{\ell_1} 1 \quad (20)$$

$$= \sum_{\substack{\ell_1=0, \\ \ell_1 \in 2\mathbb{Z}}}^{2L_1} (\ell_1 + 1)^2 = \sum_{n=0}^{L_1} (2n + 1)^2 \quad (21)$$

$$= \frac{4}{3}L_1^3 + 4L_1^2 + \frac{11}{3}L_1 + 1 \quad (22)$$

それではどのくらいの次数にすればよいのであろうか。一例として、G. Peters [13] による “Dwarf” や “Tom” の人形の画像群はそれぞれ 2500 枚の画像からなる。 $m(11) = 2299, m(12) = 2924$ であるので、これらをすべて記述する場合、 $m(L_1) \geq 2500$ を満たす最小値は $L_1 = 12$ であり、次数 $\ell_1 = 0, 2, 4, \dots, 24$ の球関数を用いればよい。

しかし、実際にはより多くの基底を必要とする。前述したように、与えられたサンプル点 R_i において球関数 $Y_k(R_i)$ が直交しているわけではないので、たとえ基底の数 m が学習画像枚数 n に比べて大きい (つまり $m \geq n$) としても、基底行列 G はフルランクにはならず $\text{rank}(G) < n$ になる場合が多い^(注2)。このとき連立方程式の解は最小二乗解となり、式 (16) には近似誤差が含まれてしまう。そのため、元の画像列 X を完全に表現してはいない。今のところ、 $\text{rank}(G) = n$ になる十分な大きな m ($m > 10n$ 程度) をとることしか、この問題を解決する方法はない。

3.3 基底関数の実装方法

$SO(3)$ 上の球関数 Y_k は、前述したように「係数 \times Gegenbauer 倍関数 \times Legendre 倍関数 \times 複素数」である。しかし前述したように、離散的なサンプル点 (サンプル姿勢) で球関数を計算したベクトルには直交性がなく、連立方程式を解いて係数を求めなければならない。そのため、展開係数が内積によって求められるという正規直交基底の利点は、すでに使うことはできない。逆に、基底行列 G の各列には正規性がなくても問題がない、とも言える。そこで、本研究は以下のように計算上都合のよいように簡略化する。

まず、式 (1) の係数 $\sqrt{b_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}}$ は省略する。この係数は球関数のノルムを正規化するためのものであり、省略しても方程式を解く上では問題ない。

次に、複素数の計算を扱わないようにする。つまり、複素数

(注2): これは球面調和関数の場合でも同様であり、 $G^T G$ が特異 ($|G^T G| = 0$) になりやすい傾向があることが知られている [10], [14]。

$e^{-\ell_3\theta_3}$ を二つの実数 $\sin(\ell_3\theta_3)$ と $\cos(\ell_3\theta_3)$ に置き換える。ただし $\ell_3 = 0$ のときだけは $\cos(0) = 1$ とし、 \sin は用いない。

Legendre 倍関数は、球面調和関数にも必要であるため、すでに実装されたものが利用可能である。本研究における実装では、GSL (Gnu Scientific Library) [15] の `gsl_sf_legendre_sphPlm_e()` 関数を用いる。この関数は特に球面調和関数のために「正規化された」Legendre 倍関数である。その正規化係数は式 (1) の係数 $\sqrt{b_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}}$ とは異なるが、係数倍の違いは問題にはならない。

一方で Gegenbauer 倍関数は、一般的ではないため、実装されたものはない。しかし特殊関数としての Gegenbauer 関数は GSL でも `gsl_sf_gegenpoly_n_e()` が利用可能である。そこで、Gegenbauer 関数の微分に関する以下の関係式 [16, p.87] を用いることにする^(注3)。

$$\frac{d^m}{dx^m} C_n^\nu(x) = 2^m \nu(\nu+1) \cdots (\nu+m-1) C_{n-m}^{\nu+m}(x) \quad (23)$$

$SO(3)$ 上の球関数のために必要なものは

$$C_{\ell_1}^{1, \ell_2}(x) = (1-x^2)^{\frac{\ell_2}{2}} \frac{d^{\ell_2}}{dx^{\ell_2}} C_{\ell_1}^1(x) \quad (24)$$

だけであるので、これらの係数を省略して $x = \cos \theta_1$ とした

$$\sin^{\ell_2} \theta_1 C_{\ell_1 - \ell_2}^{1 + \ell_2}(\cos \theta_1) \quad (25)$$

を用いることにする。

以上はすべて、正規直交系である球関数の正規性をあきらめる実装方法である。球関数が張る空間と同じ空間をはるのであれば、直交性をあきらめた斜行基底を用いることも考えられる。そのひとつは、 $a+b+c+d = \ell_1$ となる全ての組み合わせの多項式 $\sum q_1^a q_2^b q_3^c q_4^d$ を ℓ_1 次の基底関数とするものである。ここで指数は $0 \leq a, b, c \leq 4$ である整数とする。ただし d のみ、 $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$ を満たすために $q^2 = 1 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$ を代入して消去するため、 $d = 0, 1$ とする。この斜行基底は Legendre や Gegenbauer を必要としないため実装が容易であり、球面調和関数に対しては Penna と Dines [12] が有効性を示しているため、今後の採用を検討している。

3.4 行列 G の構築と係数 C の算出

求めたい係数行列 C を求めるために、上記の実装により基底行列 G を以下の手順で構築する。

姿勢 R_1, R_2, \dots, R_n とそれに対応する画素数 N の画像 x_{R_1}, \dots, x_{R_n} が与えられたとする。

(1) 姿勢 R_1, R_2, \dots, R_n に対応する単位四元数 q_1, q_2, \dots, q_n を求める^(注4)。

(2) 球関数の最大次数 $2L_1$ を与え、 $m = m(L_1)$ とする。

(注3): Gegenbauer 関数の特殊な場合である C_n^1 と第2種 Chebyshev 多項式 U_n との間には $C_n^1(x) = U_n(x)$ という関係 [17, p.779] がある。そのため C_n^1 を U_n に置き換えても、 S^3 上の球関数を書くことができる。Matheny と Goldgof [18, App. A.4] は、 U_n の微分式を用いて4次元(3D空間+時間)の球面調和関数を導出している。しかし、ここで示したような Gegenbauer 関数の微分と同様の有用な微分公式が U_n にはないことが実装上の問題点であり、その意味では本稿で示した Gegenbauer 陪関数を用いる定式化のほうが好ましい。

(注4): 最初から姿勢を単位四元数で与えるほうが便利である。

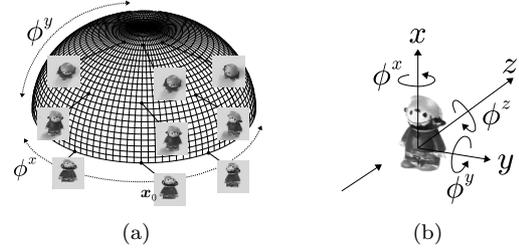


図1 実験に用いた Dwarf 画像 [13]。(a) 撮影カメラ位置。(b) Dwarf 画像の姿勢と回転軸の対応関係

(3) 行列 G の各行 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して、

(a) q_i に対応する $\theta_{1i}, \theta_{2i}, \theta_{3i}$ を求める。

(b) 各列 $k = 1, 2, \dots, m$ に対して、3.3節で述べた実装により $Y_k(\theta_{1i}, \theta_{2i}, \theta_{3i})$ を計算し、行列 G の ik 要素とする。

(4) 行列 G の各列 $(Y_k(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{31}), \dots, Y_k(\theta_{1n}, \theta_{2n}, \theta_{3n}))^T$ のノルム $norm_j$ が1になるように正規化する。その際、各列の正規化前のノルムを $N_G = (norm_1, \dots, norm_m)$ として保存しておく。

以上で計算された G の特異値分解を $G = UDV^T$ として、 $G^+ = VD^{-1}U$ を一般化逆行列とする。もし D 内の特異値が 10^{-10} 程度より小さい場合には、対応する D^{-1} の対角要素は0とする。

最終的に係数行列 C は $C = G^+ X$ で求める。

4. 画像系列の再構成

前節で述べた方法により求めた基底関数の行列 G と係数行列 C を用いて、3自由度の回転姿勢が変化する画像系列の展開を行った。

4.1 実験環境

実験には G. Peters [13] による “Dwarf” 人形の画像群を用いた。これらの画像は、物体を中央に固定し、それを取り囲むように半球格子状にカメラを配置して撮影したものである。図1(a)に、カメラ配置位置を示す半球と、各カメラ位置で撮影された画像のいくつかを示す。方位角 $\phi^x = 0 \sim 360[\text{deg}]$ (100ステップ)、仰角 $\phi^y = 0 \sim 90[\text{deg}]$ (25ステップ)の刻み幅は $3.6[\text{deg}]$ で、合計2500枚の画像からなる。図中の x_0 と示してある基準画像を撮影した位置が $\phi^x = \phi^y = 0[\text{deg}]$ のカメラ位置である。

4.2 姿勢の与え方

図1(b)に、画像と姿勢の回転軸との対応を示す。今回の実験では、人形を固定してカメラ位置を半球状に与える代わりに、カメラを固定して人形を x, y, z 軸回りの順にそれぞれ ϕ^x, ϕ^y, ϕ^z だけ回転したものとみなす。ここで x 軸は物体の鉛直方向、 y 軸はカメラから見て右方向、 z 軸はカメラの光軸(奥行き)方向とする。 ϕ^x が方位角に対応し、 ϕ^y が仰角に、 ϕ^z は光軸回りの回転角に対応する。

回転軸 $n = (n_1, n_2, n_3)^T$ 回りに θ 回転する3次元回転を表す単位四元数は、次式で与えられる [19]。

表 2 球関数の最高次数 $2L_1$ と行列 G のランク

$2L_1$	2	4	6	8	10	12
rank(G)	9	25	35	45	50	50

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)(n_1i + n_2j + n_3k), \quad \|n\| = 1 \quad (26)$$

そこで、方位角 ϕ_j^x 、仰角 ϕ_j^y のカメラ位置から撮影された画像をさらに画面内で ϕ_j^z だけ回転した x_j の姿勢を表す四元数 q_j を、以下のように与える。

$$q_j^x = \cos(\phi_j^x/2) + \sin(\phi_j^x/2)(i + 0j + 0k) \quad (27)$$

$$q_j^y = \cos(\phi_j^y/2) + \sin(\phi_j^y/2)(0i + j + 0k) \quad (28)$$

$$q_j^z = \cos(\phi_j^z/2) + \sin(\phi_j^z/2)(0i + 0j + k) \quad (29)$$

$$q_j = q_j^z q_j^y q_j^x \quad (30)$$

4.3 使用した画像系列

係数計算のために用いた画像系列は、方位角 $\phi^x = 0, 36, 72, \dots, 324$ [deg] の 10 ステップ、仰角 $\phi^y = 0, 18, 36, 54, 72$ [deg] の 5 ステップ、合計 50 枚の画像を用いた。この場合は $\phi^z = 0$ [deg] であるが、実際には頂点 ($\phi^y = 90$ [deg]) において光軸周りの回転と同等の効果が起きている。そのため、実質的に 3 自由度の姿勢変化が画像系列に含まれていることになる。

4.4 展開を用いた画像の再構成結果

球関数の最高次数を $2L_1 = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ に取って、50 枚の画像系列を式 (15) により再構成した結果の一部を図 2 に示す。それぞれの場合の表 2 に行列 G のランクを示す。 $2L_1 \leq 8$ のときは G がフルランクではないため、画像を近似的にしか再構成できず、ぼやけた画像になっている。しかし $2L_1 = 10, 12$ のときは完全に元の画像を再構成できている。

画像の再構成が球関数のどの次数までで近似できているのかをみるために、低次の球関数から徐々に和をとっていった結果を図 3 に示す。この図は、再構成の式

$$x^{j'} \cong \sum_{k=1}^{m'} c_k^j Y_k \quad (31)$$

において用いた球関数の数 m' を徐々に大きくしていった場合の再構成画像 x' を示している。

$2L_1 = 2, 4, 6, 8$ においては、どの再構成画像においても高周波成分が目立っており、画像の近似に対する寄与は低次でも高次でも変化がなく、低次の球関数で大まかな近似ができているとは言いがたい。このため、一度にすべての次数の球関数を用いて係数を決定するのではなく、まず低次の球関数で近似しておいて、近似できない差分を高次の球関数で近似するという段階的な処理を行う必要があるかもしれない。これは球面調和関数に対して Shen と Chung [11] が提案しており、球関数に対しても有効であるかもしれない。

一方 $2L_1 = 10, 12$ においては、低次の球関数ですでにぼやけた画像ができており、大まかに近似されている。この差は基底行列 G のランクに明らかに関係しているが、詳細は今後の検討課題である。

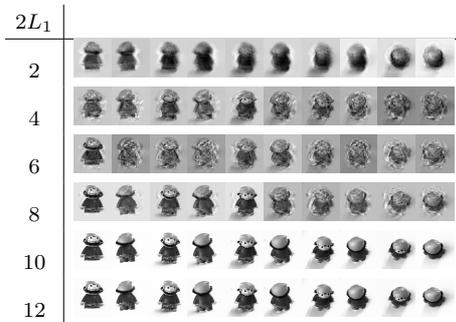


図 2 画像系列の再構成

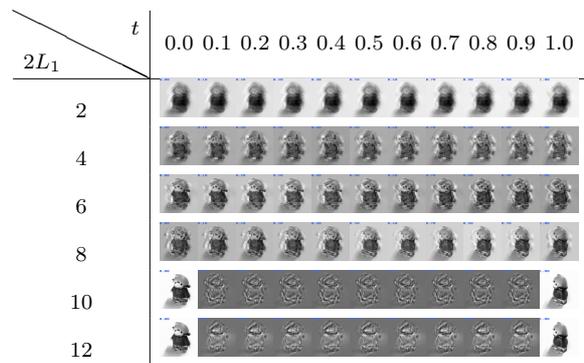


図 4 画像系列の補間

5. 画像系列の補間

求めた係数 C を用いて、与えられた画像系列の画像を補間することを考える。1 自由度の場合 [1], [3] は、補間する姿勢 θ に対応してフーリエ基底関数の位相をずらして画像を構築している。それと同様に、3 自由度の場合は補間する姿勢 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ に対応して球関数の位相をずらして、画像の補間を試みる。

2 つの姿勢 R_1 と R_2 の補間には、SLERP (球面線形補間) [20], [21] を用いる。 R_1 と R_2 に対応する単位四元数 q_1, q_2 に対して、中間的な姿勢 q_t は

$$q_t = \frac{\sin((1-t)\omega)}{\sin(\omega)} q_1 + \frac{\sin(t\omega)}{\sin(\omega)} q_2 \quad (32)$$

ここで ω は q_1 と q_2 のなす角度 $\cos \omega = q_1^T q_2$ である。

この補間された姿勢 q_t に対応する角度 $\theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}$ を求め、球関数の値 $Y_t = (Y_1(\theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}), \dots, Y_m(\theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}))$ を計算する。これは基底行列 G の列に相当するので、 Y_t に係数行列 C をかけることで画像を生成することができる。ただし行列 G と同じ正規化をする必要があるので、 Y_t の要素毎に N_G の対応する要素を用いて正規化し (つまり $Y_1/norm_1, \dots, Y_m/norm_m$ とする) 画像を $\hat{x}_t = Y_t C$ で生成する。

球関数の最高次数を $2L_1 = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ としたときの、画像の補間結果を図 4 に示す。 $2L_1 = 0 \sim 8$ では、二つの姿勢の画像がぼやけたような補間画像が生成されており、1 自由度の場合 [3] と同様な結果が得られている。しかし $2L_1 = 10, 12$ では、二つの姿勢から少しでも離れると補間画像は高周波成分のみを含むような画像になっている。この違いも、基底行列 G のランクに関係しており、今後の検討課題である。

