



数学理解の2軸過程モデルに基づく 算数科授業改善に関する実践的研究

16530591

平成16年度～平成18年度科学研究費補助金
(基盤研究 (C)) 研究成果報告書



平成19年3月

研究代表者 小山 正孝

広島大学大学院教育学研究科助教授

は し が き

本報告書は、平成 16 年度～平成 18 年度の 3 年間、科学研究費補助金(基盤研究 (C) 課題番号 16530591 研究代表者 小山正孝)を受けて行った「数学理解の 2 軸過程モデルに基づく算数科授業改善に関する実践的研究」の研究成果を報告するものである。

(1) 本研究の目的と方法

筆者はこれまでの数学教育における理解過程に関する研究において、数学理解の「2 軸過程モデル (Two-Axes Process Model)」を理論的に構築し、このモデルに基づく算数科の授業構成の原理と方法に関する研究を行ってきた。その結果、事例研究の成果として、教師が児童の数学理解を深化させる授業を構成し実践する際に、2 軸過程モデルがその枠組みとして有効に機能し得るということが明らかになった。一方、研究課題として、この 2 軸過程モデルに基づいて算数科授業を改善することができるかどうかを長期間の実践研究によって検証する必要性が明らかになった。

そこで、本研究では、数学理解の 2 軸過程モデルに基づく算数科授業の改善の可能性を実践的研究によって明らかにすることを目的とする。そのために、まず、小学校における校内研修や授業研究において、教職経験年数の異なる複数の小学校教員を対象に、数学理解の 2 軸過程モデルに基づく算数科の授業構成の原理と方法について理論的・実践的な研修を行う。次いで、小学校においてこの授業構成の原理と方法の妥当性・有効性を長期間の算数科の授業実践を通して検討するとともに、授業改善案を作成する。そして、この算数科授業の改善案をもとに再び長期間の授業実践を行い、小学校教員の資質向上と児童の理解の深化を評価する。それによって、数学理解の 2 軸過程モデルに基づく算数科授業の改善の可能性を明らかにし、教員養成及び現職教育のあり方と具体的な方策に対する示唆を得る。

(2) 本研究の学術的な特色・独創的な点及び予想される結果と意義

本研究の特色・独創的な点として、次の 2 点を挙げることができる。

- ① 2 軸過程モデルに基づく算数科の授業改善の可能性を、長期間の授業実践を通して検証すること。
- ② 小学校教員の資質向上と児童の理解の深化を評価することによって、教員養成及び現職教育のあり方と具体的な方策に対する示唆を得ること。

本研究の予想される結果と意義として、次の 2 点を挙げるができる。

- ① 数学理解の 2 軸過程モデルに基づいて、児童の数学理解を深化させるための授業改善の原理と方法を構築できると期待される。
- ② 国内外で行われている数学教育における理解研究及び教師教育研究の進展に寄与するとともに、算数科における教授・学習の質的向上につながると考えられる。

(3) 本研究の位置づけ

本研究は、国際数学教育心理学会 (IGPME) を中心とした数学教育に関する心理学

的研究，特に，数学の理解過程に関する研究に位置づくものである。しかしながら，本研究は，心理学的アプローチによるだけでなく，あくまでも数学教育学の視座に立って算数科のカリキュラムや教材の特性を踏まえ，数学教育において有効な数学理解の過程モデルとそれに基づく授業改善の原理と方法を構築することによって，数学教育の研究と実践に寄与しようとするものである。

(4) 本研究の成果と今後の課題

《本研究の主要な成果》

①文献解釈的・理論的研究による2軸過程モデルの具体化

数学理解や算数科教師教育に関する文献解釈的・理論的研究，算数科カリキュラム分析及び算数科教材研究を通して，数学理解の2軸過程モデルを具体化し，算数科授業改善により役立つものにする事ができた。

②長期間の授業実践による2軸過程モデルの実践的検討

小学校における長期間の算数科の授業実践の分析・検討を通して，2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法の精緻化を図り，算数科授業構成の3つの原理と3つの方法を導出することができた。

③教師の資質向上と児童の算数理解の評価

小学校における継続的・体系的な算数科授業研究や小学校教師の算数教育に対する意識の変容及び児童の算数理解の変容を調査・分析することによって，教師が算数科の授業改善を行う際に2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法が一つの有用な指針となり得ることと，児童の算数理解が深まるという結果が得られた。

④教員養成や現職教師教育への示唆の導出

数学理解の2軸過程モデルとそれに基づく算数科授業構成の原理と方法は，小学校教員養成及び現職教師教育に有効に活用することができ，算数科における授業改善に寄与し得るということが明らかになった。

なお，これらの主要な研究成果の一部は，小山正孝著『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』（広島大学博士（教育学）論文，2007）に収められている。

《本研究の今後の課題》

上述のように，数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法を用いた算数科の授業改善に関する実践的研究によって，授業改善の可能性が明らかになった。今後は，こうした研究成果をより発展させるために，小学校の算数科授業から中学校・高等学校における数学科授業に視点を移し，数学理解の2軸過程モデルに基づく数学科授業の改善の可能性を実践的研究によって明らかにすることが課題である。

本研究を進めるに当たっては，研究協力校の先生方には算数科授業の観察・実施において多大なご協力をいただき，また広島大学大学院教育学研究科院生には授業記録やプロトコル分析で労を惜しまず手助けしていただいた。未筆ながら，お世話になった皆様に心より感謝の意を表したい。

平成19年3月

研究代表者 小山正孝
(広島大学大学院教育学研究科助教授)

研究組織

研究代表者： 小 山 正 孝 （広島大学大学院教育学研究科助教授）

交付決定額（配分額）

（金額単位：千円）

	直接経費	間接経費	合 計
平成 16 年度	1,000	0	1,000
平成 17 年度	900	0	900
平成 18 年度	1,000	0	1,000
総 計	2,900	0	2,900

研究発表

(1) 学会誌等

Masataka Koyama, Research on the Process of Understanding Mathematics: The Inclusion Relation among Fractions, Decimals and Whole Numbers, *Proceedings of the 28th PME Conference*, Vol.1, p.315, 平成 16 年 (2004 年) 7 月 14 日.

小山正孝, 「教科教育学の研究動向と展望—日本の数学教育学における近年の研究動向と展望—」, 『日本教科教育学会誌』, 第 27 巻第 4 号, pp.91-100, 平成 17 年 (2005 年) 3 月 30 日.

Masataka Koyama, Research on the Process of Understanding Mathematics: Ways of Finding the Sum of the Measure of Interior Angles in a Convex Polygon, *Proceedings of the 29th PME Conference*, Vol.1, p.253, 平成 17 年 (2005 年) 7 月 10 日.

小山正孝, 「数学理解の 2 軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法」, 『日本教科教育学会誌』, 第 28 巻第 4 号, pp.61-70, 平成 18 年 (2006 年) 3 月 10 日.

小山正孝, 「数学学習における理解過程の研究 (I)」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 12 巻, pp.71-81, 平成 18 年 (2006 年) 6 月 27 日.

(2) 口頭発表

Masataka Koyama, Research on the Process of Understanding Mathematics:

The Inclusion Relation among Fractions, Decimals and Whole Numbers, The 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Bergen, Bergen, Norway, 14-18 July, 2004.

Masataka Koyama, Research on the Process of Understanding Mathematics: Ways of Finding the Sum of the Measure of Interior Angles in a Convex Polygon, The 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Melbourne, Melbourne, Australia, 10-15 July, 2005.

小山正孝, 「数学学習における理解過程の研究(Ⅰ)」, 全国数学教育学会誌第22回研究発表会, 広島大学, 平成17年(2005年)6月25日~26日.

小山正孝, 「数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法」, 日本数科教育学会第31回全国大会, 北海道教育大学札幌校, 平成17年(2005年)9月3日~4日.

研究成果による工業所有権の出願・取得状況

該当なし

目 次

はしがき	i
研究組織・交付決定額（配分額）・研究発表	iii
研究成果	
I. 教科教育学の研究動向と展望 —日本の数学教育学における近年の研究動向と展望—	1
II. Research on the Process of Understanding Mathematics: The Inclusion Relation among Fractions, Decimals and Whole Numbers 算数学習における理解過程に関する研究（IV） — 第5学年における「分数と小数，整数の包摂関係」を中心に — ...	15
III. 算数学習における理解過程に関する研究（VI） — 第1学年「繰り下がりのあるひき算」における 式理解を中心に —	30
IV. Research on the Process of Understanding Mathematics: Ways of Finding the Sum of the Measure of Interior Angles in a Convex Polygon 数学学習における理解過程に関する研究（I）	41
V. 数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法	59
VI. 算数学習における理解過程に関する研究（VII） — 第1学年「繰り上がりのあるたし算」における 計算の意味理解を中心に —	72
VII. 数学理解の2軸過程モデルの規範的特性の実践的研究	84

研究成果

- I. 教科教育学の研究動向と展望
—日本の数学教育学における近年の研究動向と展望— …… 1
- II. Research on the Process of Understanding Mathematics:
The Inclusion Relation among Fractions, Decimals and
Whole Numbers
算数学習における理解過程に関する研究 (IV)
— 第5学年における「分数と小数, 整数の包摂関係」を中心に — … 15
- III. 算数学習における理解過程に関する研究 (VI)
— 第1学年「繰り下がりのあるひき算」における
式理解を中心に — …… 30
- IV. Research on the Process of Understanding Mathematics:
Ways of Finding the Sum of the Measure of Interior
Angles in a Convex Polygon
数学学習における理解過程に関する研究 (I) …… 41
- V. 数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法 …… 59
- VI. 算数学習における理解過程に関する研究 (VII)
— 第1学年「繰り上がりのあるたし算」における
計算の意味理解を中心に — …… 72
- VII. 数学理解の2軸過程モデルの規範的特性の実践的研究 …… 84

教科教育学の研究動向と展望

—日本の数学教育学における近年の研究動向と展望—

小 山 正 孝

(広島大学大学院教育学研究科)

本稿は、日本の数学教育学における近年の研究動向をレビューし、今後の研究に対する展望を述べようとするものである。日本数学教育学会の数学教育論文発表会において発表された近年(1991～2000)の論文と課題別分科会の取り組みをレビュー及び考察の対象とし、日本の数学教育学における研究動向をまとめた。そして、数学教育学の多くの研究領域に共通する展望を「統合」「共同」「批判」という3つのキーワードを用いて述べ、それらが今後の日本の数学教育学研究と教育実践の発展に大きく寄与し得ることを主張した。

キーワード：教科教育学，数学教育学，研究動向，展望，日本

1. 本稿の目的と方法

本稿は、日本の数学教育学における近年の研究動向をレビューし、今後の研究に対する展望を述べようとするものである。筆者は、これまでに、数学教育学における研究のレビューを2度行っている。1つは、「数学教育学」の今日の発展につながる過去及び現在を、数学教育学に関する学術雑誌、学位論文及び研究著書・論文を通して振り返ることによって、これからの「数学教育学」の研究課題と方法を展望するための1つの礎を築こうとしたものである(小山, 1994)。もう1つは、昭和43年度から平成12年度までに提出された、広島大学大学院教育学研究科教科教育学専攻の数学教育学(数学内容学は除く)修士論文64編を対象にして、各論文の内容と方法及び概要を整理し、それらの特徴と研究動向を明らかにし、それを基に数学教育学研究の発展と展望について述べようとしたものである(小山, 2002)。

そこで本稿では、これらとの重複を避け、かつ日本の数学教育学における近年の研究動向をできるだけ全体的に把握するために、日本の算数・数学教育関係者(研究者・大学院生や教師・実践家)の多くが所属している最大規模の学会である日本数学教育学会に焦点を当てる。この学会は算数・数学教育の学会誌(算数教育, 数学教育, 数学教育学論究)を定期的に刊行したり、研究会や論文発表会を開催したりするとともに、平成7年からはテーマを決めて年報(YEARBOOK)を出版したりしている(日本数学教育学会, 1995, 1997a, 1997b, 1999, 2004b)。本稿では、そのうちの数学教育論文発表会において発表された近年の論文と課題別分科会の取り組みをレビュー及び考察の対象として、日本の数学教育学における研究動向を把握し、今後の研究に対

する展望を述べることとする。

2. 数学教育学における近年の研究動向

日本数学教育学会は昭和 43 年から毎年 1 回、数学教育論文発表会を開催してきている。平成 13 年に開催された第 34 回数学教育論文発表会では「課題別研究部会」において、最近 10 年間(1991～2000)の研究のまとめを行い、研究の課題を明らかにすることが試みられている。そこで、本節では、『第 34 回数学教育論文発表会「課題別研究部会」発表集録—最近 10 年間(1991～2000)の研究のまとめと課題—』(日本数学教育学会, 2001)をもとに、数学教育学における近年の研究の成果と課題を研究領域ごとに見ることとする。

1991 年から 2000 年までの 10 年間に数学教育論文発表会の「論文発表の部」で発表された論文総計 786 編をいくつかの研究領域(下位領域を含む)に分け、各担当者によってそれらの論文がレビューされ、研究の成果がまとめられ課題が述べられている。その際、すべての発表論文を論究部長が分類し、22 名の専門家にレビューを依頼している。レビュー担当者も述べているように、発表論文をただ 1 つの領域に位置づけることは必ずしも容易なことではなく、しかもその位置づけが適切とは思われないものも若干ある。こうした事情はあるものの、まず各研究領域に分類されレビューされた論文数を調べてみると、次のようになる。

1. カリキュラム, 目標, 内容(合計 178 編)

- (1) カリキュラム, 目標(38 編)
- (2) 学力(5 編)
- (3) 数学的な思考(19 編)
- (4) 証明, 論証(23 編)
- (5) 数と計算, 式, 代数(27 編)
- (6) 空間と幾何(40 編)
- (7) データ処理, 確率, 統計(2 編)
- (8) 関数, 極限, 微積分, 比例, 量(24 編)

2. 教授と学習(合計 189 編)

- (1) 小学校の実践と(2) 幼稚園, 特殊教育(46 編)
- (3) 中学校の実践(37 編)
- (4) 高等学校の実践と(5) 大学教育(17 編)
- (6) 授業論, 問題解決(44 編)
- (7) 学習の様相と(8) コミュニケーション, 相互作用, 学級文化(45 編)

3. 学際的領域(その 1)(合計 201 編)

- (1) 認識論, 認知(62 編)
- (2) 情意と(3) 心理学, メタ認知(50 編)
- (4) 概念形成(53 編)
- (5) 問題解決(36 編)

4. 学際的領域(その 2)(合計 40 編)

- (1) 言語学, 人類学, 民俗学, 性別等と数学教育(40 編)

5. テクノロジーと教材開発(合計 103 編)

- (1) 小学校・中学校(32 編)
- (2) 高等学校(33 編)

(3) 大学・全体(38 編)

6. アセスメント(合計 25 編)

7. 教師論と教員養成(合計 12 編)

8. 数学教育の歴史(合計 38 編)

次いで、レビュー担当者による研究成果のまとめや課題を研究領域(下位領域を含む)ごとに引用あるいは要約すると、以下ようになる。

1. カリキュラム, 目標, 内容

(1) カリキュラム, 目標

長崎栄三(日本数学教育学会, 2001, pp.3-11)

論文の研究目的は、カリキュラムの研究、開発、評価であり、普及に関する論文はない。研究方法としては、文献をもとにした研究が多い。カリキュラムの研究の視点としては、学力に応じた算数・数学教育、社会や文化を意識した算数・数学教育、インフォメーション・テクノロジー(IT)を利用した算数・数学教育などに新しい焦点が当てられている。そして、事例研究等をもとにして、目的・目標、内容、指導法等を考慮したカリキュラムが開発されている。しかしながら、カリキュラム評価の研究は少ない。今後の課題として、カリキュラムに関する理論的・実証的な研究、教科書の研究・開発・評価、カリキュラムの継続的な評価、カリキュラムの共同研究、諸外国のカリキュラムとの比較、総合的な研究の6点が挙げられる。カリキュラムは、社会や学ぶ人々にとって価値があることを示す必要があり、それだけに総合的に行われるとともに、実証的な研究によって支えられる必要がある。(p.3)

(2) 学力

長崎栄三(日本数学教育学会, 2001, pp.12-16)

研究の目的・方法は異なるが、いずれの論文においても我が国の算数・数学の学力の特徴や問題点が明らかにされている。今後の課題として、学力の構造化、学力の実態把握、学力の諸外国との比較、学力調査の方法論の検討、学力研究の活性化の5点が挙げられる。学力は、社会の発展と個人の成長の両者にとって不可欠なものであり、学力に関する研究が今後一層活性化することが望まれる。(p.12)

(3) 数学的な思考

杉山吉茂(日本数学教育学会, 2001, pp.17-20)

論文を見るに当たって、「数学的な思考」についての研究のテーマを、おおまかに、それらの数学的な思考がどのような因子やプロセスから構成されるのか、それらの数学的な思考が発達とともにどのように育っていくのかの心理的な研究、および、それらの数学的な思考を育てるにはどのような教材を使い、どのようなプロセスを経、どのような配慮をすることがよいのか等の教育的な研究に分けて見てみている。(p.17)

心理的な研究も教育的な研究もいずれも、大切なものであるが、これからの算数・数学では、算数的活動・数学的活動を大切にしよう、数学を創造するプロセスを大事にしようと言われているとすれば数学的な思考を育てること、数学的な思考を生かした学習にもっと目を向けられる必要がある。基礎的な研究と同時に、実践に役立つ研究が増加することを期待したい。一事例で効果を評価することはできないが、いろいろな人によって行われることによって、一般化できるものが生まれてくるのではないだろうか。それが下からの学問研究のあり方だと思う。ただ結果を論ずるのではなく、他の人が真似て行うことができる形で発表されることを期待したい。(pp.19-20)

(4) 証明, 論証

小関熙純(日本数学教育学会, 2001, pp.21-26)

実践的理論の研究は、それがただちに現象としての算数・数学教育に作用しうるところにある。一方、基礎的理論は、それがただちに作用しうるわけではなく、その理論の意味を解釈することで初めて作用する。ここでは、基礎的理論を主とした研究を「基礎的研究」、実践的理論を主とした研究を「実践的研究」と呼ぶことにし、この10年間の論文を分けて整理している。(p.21)

1980年代に証明指導に関して困難点が指摘されたが、90年代になっても、相変わらず証明は中学校数学で最も指導が難しく、その効果も上がっていない教材である。これらを解決する研究が期待される。多くの実践的理論を読んで、現象面の追究の仕方に問題を感じる。今後、この面の追究の深まりを期待する。そのためには、次のような授業研究をしていく必要がある。1クラスでの算数・数学の授業を、ある期間連続して研究仲間と観察し、緻密な授業分析を行い、授業を通しての子どもの変容の追究を行い、授業研究を進めていく。そのためには、基礎的研究者と教育現場の先生が乖離状態にあってはいけない。基礎的研究者はもっと現象(学校現場で起こっている現象としての算数・数学教育)をよく観察した上で、理論発表をしてほしい。この種の研究は、教育現場の先生と大学・教育研究機関の先生が共同で、お互いの経験を交換し合っていく必要がある。(p.25)

(5) 数と計算, 式, 代数

湊三郎(日本数学教育学会, 2001, pp.27-32)

最大の課題は高校数学の研究の活性化である。

具体から抽象の過程において困難な児童・生徒の指導に関する研究が多い。引き続き重要な研究課題である。民族史的、臨床的手法の発展によって授業に関する研究の可能性も開け、小数の乗・除を採り上げていても、その根本の関心が授業等にある研究もある。勿論、その場合でも数や演算に関する知見も得られる。数学により密接な立場からの実践的・実証的研究も豊富になされることを期待したい。電卓・テクノロジーの発展に対応して、従来と違った切り口を持つ研究が期待される。研究・実践に何処の誰の理論を用いてもよく、それを前提とした研究に相当の価値は認めるとしても、特に外国研究者に対して我々は通常特段の義理立ても、目がくらむ必要もない。それらの理論を、理論的・実践的に検討し、どれだけの特性と限界を持つかを明らかにする批判的研究を期待したい。(p.30)

(6) 空間と幾何

狭間節子(日本数学教育学会, 2001, pp.33-41)

論文を内容分野と研究方法によって整理し、内容分野を論文数で見ると、「平面図形」が圧倒的に多い。10年間の後半から「空間」が増え、「平面&空間」は最初と最後にありどちらもほぼ学習指導要領告示と実施年の間にある。研究方法面では複数の研究方法によるものが多いことが分かる。教育課程関連は理論と実践の両面からの研究であることはいままでの間もない。(p.33)

研究課題としては、次の点が指摘されている。認知的側面とこれらの諸側面または諸ファクターとの関わりに焦点を当てた理論的・実践的研究。学習指導要領の枠内に限定しない広い視野からの「空間」学習をより豊かにする教材開発実践研究(含むコンピュータの利用)の蓄積。主に平面図形に関する諸学習理論が空間図形や空間の学習にも拡大適用できるのかの検証と開発研究。学習指導要領の枠内にとどまらず、小学、中学、高校の各段階独自の、および小学—中学—高校1年を通しての目的・目標

およびそれに基づくカリキュラムを、「巨人の肩に乗って、遠く(21世紀の数十年前)を見て」、「実用的」、「陶冶的」および「文化的」側面から研究し、実践すること。(pp.38-39)

(7) データ処理, 確率, 統計

澤田利夫(日本数学教育学会, 2001, p.42)

この領域の過去10年間の発表論文は2編で、研究報告は少ない。新しいカリキュラムでは、中学校から「統計」の分野が削除され、高校の数学基礎、数学B、数学Cに移行される。確率の扱いも軽減されたが、試行実験などによって、条件付き確率などの概念の理解と定着を図る有効な手だての工夫と研究がぜひ必要になる。(p.42)

(8) 関数, 極限, 微積分, 比例, 量

澤田利夫(日本数学教育学会, 2001, pp.43-44)

これまでの研究でもわかるように、小学校では「比と比例」「速さ」、中学校では「関数」、高等学校では「種々の関数」「確率」「極限」「微分積分」等の内容の理解度や定着率が低い。それは、他の領域は比較的具体的にイメージしやすいのに比して、問題の中に関係づける変数が明示されていても、その数量を対応させて見ることや、その数量の関係を式に表現することを理解しない、苦手としている児童・生徒が多い。関数概念、関数的な見方や考え方の養成の必要性は、いうまでもないことだが、子どもにそれを理解させることは容易ではない。その意味でも、この領域の各段階での実践的な調査研究が益々必要になる。(p.44)

2. 教授と学習

(1) 小学校の実践と(2) 幼稚園, 特殊教育

山下昭(日本数学教育学会, 2001, pp.45-50)

論文を研究内容によって次のような類型に分類し、類型ごとにまとめている。ただし、複数の類型に属するとして分類された論文もある。(p.45)

1)理論面に重点をおいた算数・数学の一般的な教授・学習の研究(6編)

2)実践面に重点をおいた算数・数学の一般的な教授・学習の研究(他との重複を含めて12編)

3)算数・数学の具体的内容に重点をおいた教授・学習の研究(他との重複を含めて12編)

4)教材・教具の開発やPCなどの活用に重点をおいた教授・学習の研究(2編)

5)よさ・楽しさなどの情意面に重点をおいた教授・学習の研究(3編)

6)概念形成, 思考, 問題解決などに重点をおいた教授・学習の研究(8編)

今後の課題として、次の点が指摘されている。研究の創造性や累積性を大切にする。研究目的を明確にし、焦点化する努力が必要である。実践研究で得られた結果を追認するために研究方法を明確にする。実験授業などから得られた結果(資料)とそれらを研究目的に照らし考察して得られた結果を区別しておくことが大切である。(pp.49-50)

(3) 中学校の実践

岡本光司(日本数学教育学会, 2001, pp.51-57)

1)中学校数学の授業, 学習に関する研究(12編)

2)中学校数学のカリキュラム, 教材の扱い方・開発等に関する研究(8編)

3)特定の教材についての認知, 理解, 変容等に関する研究(9編)

今後の研究課題として、以下の6点が挙げられている。①研究内容に応じて種々の方法がとられているが、「方法における科学性」とは何か、教育研究における「科学

性」ということをどうとらえていけばよいのか。授業・学習の分析・考察方法の質を高めていくために議論していきたい。②今後、数学の学習対象をどう考えていくべきか、どう広げていくべきかの議論を深めていくことが望まれる。③数学学習と「総合学習」とのかかわり、さらには数学の「総合化」ということをどう考えていけばよいのか、これらは中学校数学のカリキュラムの問題でもあり、大いに議論していくべき点である。④学習指導要領の早期改善を迫るためにも、「教授と学習」に関してどのような研究を、どのように蓄積していけばよいのか。数学教育研究者に課せられた課題といえよう。⑤関連する研究、ないしは全体一部分の関係にある研究を、相互にかかわらせ、止揚させていくにはどうすればよいのだろうか。⑥学術性の高い研究を「学問」の次元で終わらせることなく、日常的な授業実践に生かしていくには、どうすればよいのか。「教授と学習」の質を高めていくためにも、「学問」と現場の授業との連携を深めるための研究のあり方も考えてみたい。(pp.55-56)

(4) 高等学校の実践と(5)大学教育

能田伸彦(日本数学教育学会, 2001, p.58)

高等学校の実践と大学教育とをつなぐこと。出来ることなら、大学と高等学校が連携し、多くの選択可能なカリキュラムを作成し、個性豊かな人間教育が可能な環境を用意したい。(p.58)

(6) 授業論, 問題解決

中原忠男(日本数学教育学会, 2001, pp.59-65)

論文を3つに分類し、成果がまとめられている。

1) “オープン”・“構成”を基にした研究

“オープン”を基にした研究(5編): オープンエンドを出発点とするオープンという理念を基にする研究は今日、世界的に注目されるようになってきている。しかし、論文発表会ではそれほど多くの研究や積み上げ的研究はなされていない。

“構成”を基にした研究(3編): 先の“オープン”は子ども主体を外から捉えたもの、“構成”は内から捉えたもので、目指す方向は同じであるということもできる。授業や学習は複雑な要素が関わりあうので1つの主義や立場からだけではなく、多様な立場をうまく統合・調和させた研究の推進がこれからの課題であろう。

2) “問題設定”・“問題解決”を基にした研究

“問題設定”を基にした研究(9編): 問題設定についてはその意義、方略、授業への取り入れ方それに基づく授業構成、設定する問題内容等々、様々な視点からの研究がなされており、それらを活用することで有効な実践が展開できる状況になりつつある。“問題解決”を基にした研究(7編)

3) “授業観”等を基にした研究

数学観・指導観を基にした研究(10編)

指導方法に着目した研究(6編)

教材研究・教材開発に着目した研究(5編)

授業論研究の活性化のために、次のような提言が述べられている。

①授業論・授業構成論の重要性

論文発表会においては、授業論や授業構成論の研究成果は非常に乏しい状況にある。それは主として、この研究領域においては、人間観、数学観、認識論そして目的論、内容論、方法論、評価論などを総合した研究が求められることによるものであろう。それぞれの領域においては成果が上げられているので、それらを総合し、授業論や授

業構成論として体系化することが望まれる。(p.64)

②機械論と生命論の相補・調和

人間はもちろん生命体であり、自己組織化・自己成長を遂げるものである。しかし、人間はまた機械的な面をも有しており、基礎的なものは系統的に獲得していくことができる特徴を有している。そうした人間や教育の特徴を考えると、生命論－機械論を二者択一的に捉えるのではなく、両者を併存させ、相互補完的に捉える立場をこれからの授業論の基盤にすることが有効かつ必要であると考えられる。(p.65)

(7) 学習の様相と(8) コミュニケーション，相互作用，学級文化

金本良通(日本数学教育学会，2001, pp.66-72)

発表論文の研究を整理するにあたり，以下のような項目を設定し，そこに見られる特徴を明らかにし，研究課題が提起されている。(p.66)

- 1) 子どもの情意の様相・認知の特徴(7編)
- 2) 学習活動の様相・他者の視点(12編)
- 3) コミュニケーション・相互作用を生かした授業の実践(4編)
- 4) コミュニケーション・相互作用の意義(3編)
- 5) コミュニケーション・相互作用のメカニズム (10編)
- 6) 言葉・規範・文化・コミュニティ，社会的なシステムの探究(8編)

このような研究は，コミュニケーション・相互作用がなされている教室の構造を，文化・コミュニティという概念を持ち込みながら，そのコミュニケーション・相互作用とともに明らかにしようとするものである。コミュニケーション・相互作用の研究は，それが存在している文化・コミュニティと切り離すことができず，それらと一体となつてとらえつつも，その中においてコミュニケーション・相互作用がどのような機能を果たしているかを分析しようという方向へと発展している。しかも，そこにおいて，言葉・表記・シンボルという道具がいかなる役割を果たしているのかを明らかにしようとしている。(p.72)

3. 学際的領域(その1)

(1) 認識論，認知

岡田緯雄(日本数学教育学会，2001, pp.73-80)

論文は次の4つの観点から分類されている。

- A. 認知過程に関するもの(24編)
- B. 理解に関するもの(14編)
- C. 認知的コンフリクト(12編)
- D. 認識論・その他(12編)

そして，これらの論文を「目的」と「方法」とによって2次元マトリックスを作り分類する。

「目的」の項目：実態把握，理論化，指導法

「方法」の項目：面接等，文献研究，統計的手法

ある水準内の事柄を探求し尽くす時期のことを水平的進化の時期と呼ぶことにすれば，次の水準への上昇は垂直的進化と呼ぶことができる。学問研究は水平的進化が終わると垂直的進化が生じ，次の水準で再び水平的進化を繰り返すというように，水平的進化と垂直的進化との無限の連鎖ととらえることができる。

①水平的進化の時期：論文を見ると，それらの研究内容が個々バラバラである。このことは，これらの研究が水平的進化の時期にあると見ることができる。この時期に

は、思いっきり水平的進化を押し進めればよいと考える。

②垂直的進化をもたらす諸研究の関連付け：水平的進化が垂直的進化に移行するためには、少なくとも水平的進化の時期の諸研究が関連付けられることが必要である。諸研究の関連付けについては、次の2点が課題となるであろう。1つは、認識論と認知との関連付けである。認識論を「知ること」の本質ととらえるならば、子どもの思考の様相などの「認知」は「知ること」の現象ととらえることができる。この両者は関連付けられる必要がある。もう1つは、諸研究と教育実践との関連付けである。数学教育学の研究者としては、自分の興味・関心のある対象を自由に研究すれば十分である。しかし我々の研究は、それが教育実践へと還元できることを目指すべきではないのか。

③垂直的進化をもたらす研究方法：教育の真理を追究するためには、統計的手法と質的方法のジレンマに苦しむことになる。しかし水平的進化の時期にある現在では、それぞれの方法で水平的進化を押し進めればよかろう。そして、数学教育学研究あるいは人間研究が、他の学問分野の研究方法を援用することをやめ、数学教育学あるいは人間研究に固有な研究方法に気付き、活用し始めることができるようになったとき、研究方法の垂直的進化がもたらされるであろう。(pp.79-80)

(2) 情意と(3) 心理学, メタ認知

重松敬一(日本数学教育学会, 2001, pp.81-88)

発表論文は、認知10編、情意9編、メタ認知29編、その他2編である。研究のまとめについては、認知・情意・メタ認知とその他(コミュニケーションや指導)に関する研究の「基本的な枠組み」、「対象と方法」、「成果」について行われている。認知、メタ認知、情意等の概念の明確化と学習指導におけるそれぞれの機能と有効性について解明されつつある。(p.81)

(4) 概念形成

崎谷真也(日本数学教育学会, 2001, pp.89-95)

論文を3つに分け、研究がまとめられている。

1)特定の概念の形成に焦点を当てた研究(30編)

2)概念形成一般に関する研究(16編)

3)知識形成に関する研究(5編)

数学教育の改善に寄与する研究、教育現場のニーズに応える研究が期待される。つまり、数学教育の実践に役立つ研究であり、こうした研究には実践への提言が期待される(p.92)。

理論と実践の統合は、数学教育に限らず、教科教育の宿命であるが、それは口で言うほど簡単ではない。理論的アプローチをとる研究者であっても、常に実践を念頭に置き、実践をイメージしながら研究を進めており、それを論文から読み取り、実践に移してほしいという期待があろう。しかし、それは実践者に対する期待過剰のように思える。研究者の抱く実践のイメージを正確に理解し、それを的確に実行してもらうためには、研究結果を実行可能な形で提示することが必要である。その方法は提言を具体的に述べるだけとは限らない。抽象的な提言や指摘・提案であっても、その具体例をいくつか提示したり、その適用範囲、適用不適な対象や範囲を明示したりすることは実践への有効な橋渡しになろう。そして、提言や指摘・提案の有効性を授業で検証する実践研究を通して、それらの妥当性を実証していくことが今後の課題であろう。(pp.93-94)

(5) 問題解決

伊藤説朗(日本数学教育学会, 2001, pp.96-102)

論文の研究内容を4つの分野に分類して、研究の対象と得られた成果についてまとめられている。

- 1) 問題解決過程の行動(11編)
- 2) 問題解決の方略(ストラテジー)(11編)
- 3) 問題の構造・設定(8編)
- 4) 問題解決にかかわる諸能力・構え(6編)

研究課題として、次の4点が述べられている。①問題解決における解決者の一連の行動を、分析・解釈するための研究は、表象、目的・動機、精緻化、問題意識、行き詰まり、自己調整、振り返りなどに焦点を当てたものがある。しかし、行動の分析・解釈にとっては、それらを連結し統合して把握することが不可欠である。この立場からの研究が必要とされている。また、問題解決の活動を授業での教師との関わりにおいて分析・解釈するための研究がある。特に、見通し、足場の設定、複数の予想、練り上げ段階に着目したものがある。授業の展開に即した詳細な行動分析と同時に、授業全体をダイナミックに捉えた立場からの研究が望まれる。②問題解決の方略(ストラテジー)を指導することの有効性に関する調査研究が進められている。しかし、多くの方略のうち一部分しか対象になっていない。また、学習者の発達段階に対応した方略指導のプログラムが提案されていない。③問題(場面)の構造を解決者が捉えていく過程について、問題の構造や解決方法の類似性や解決の行動に伴う構造の変化という視点から追求されている。また、問題設定(作成)の方法とその意義について研究されている。新しい算数・数学教育の目指している「創造性の基礎を培う」という立場からすると、この分野での研究がさらに活発に行われるべきであろう。④問題解決において働く諸能力に関して、顕在的なものというよりも、むしろ背後にある基本的なものに着目した研究として、状況認知や構えのブレイクが取り上げられている。また、問題解決の一般的プロセスを追求するために、より適切なモデルの構築も進められている。この分野での先行研究は多数に上っており、それらの整理・まとめと研究課題の明確化から着手される必要がある。(p.101)

4. 学際的領域(その2)

(1) 言語学, 人類学, 民俗学, 性別と数学教育

岩崎秀樹(日本数学教育学会, 2001, pp.103-109)

論文の研究内容を5つの項目に分類して、研究の対象と得られた成果と課題がまとめられている。

1) エスノメソドロジー(22編): 「マクロ」と「ミクロ」という視点で研究を特徴づけるなら、エスノメソドロジーは典型的なミクロといえよう。したがって観察者が研究対象や観察者と研究対象および研究者と研究成果との間に、いかなる合理的な折り合いを付けるかが、研究上の本質的な課題になるはずである。(p.106)

2) 民族数学的研究(5編): 民族数学を契機として、開発途上国自身が、自らの数学教育の目標、内容、方法を根源から問い直す必要性が存在している。また、日本が教育分野で国際協力することは同時に、日本の近代化の過程を省察することであり、これらの知的作業を通じて日本の数学教育の長所、短所を明らかにできる。(pp.106-107)

3) 国際比較(3編): 従来の授業研究においては、国際比較という視座から、日本の授業の特徴が精緻に分析されてきたとは言い難い。日本の授業の特徴のみならず、日本の授業研究の視点や方法を分析して、それらを諸外国に向けてアピールする必要があるのではなかろうか。(p.107)

4) 社会的視点(4編):社会的視点からの研究については、構成主義、相互作用主義、社会文化主義といった認識論との関連を明確にしておくことは欠かせない。従来の研究では、各々の認識論に基づく数学教育研究が個別になされてきた傾向がある。しかし、これら3つの主義の統合あるいは協応が議論の的となってきた。こうした点の理論的解決を図りながら、数学の授業における教室文化の要因やその形成過程をどのように分析していくかが今後の課題といえよう。(pp.107-108)

5. テクノロジーと教材開発

(1) 小学校・中学校

藤井斉亮(日本数学教育学会, 2001, pp.110-116)

教授学的三角形を基本的な枠組みとして、次の3つの枠組みで論文の研究内容が整理されている。

1)学習者の道具としてのテクノロジー

2)教授の補助としてのテクノロジー

3)教材開発の道具としてのテクノロジー

量的に最も多いのは学習者にテクノロジーを道具として与えた研究である。そこでの代表的なテクノロジーはグラフ電卓と作図ツールである。これらの研究では学習活動の質的変化や教材開発に焦点が当てられているが、具体的な教材内容をみるとやや限定されている感がある。今後は領域や内容を拡大して研究していく必要があろう。コミュニケーションの様相や情報収集の実態もテクノロジーの導入により急速に変容していくであろうが、この側面の研究は僅かしかない。今後はインターネットの普及を念頭において積極的に研究を展開していく必要がある。個々の実践を積み上げてカリキュラムを構想するだけでなく、カリキュラムの全体を構築するという視点も導入する必要がある。テクノロジーを活用した発展的な学習指導とカリキュラム開発は今後の重要な研究課題の1つである。(pp.114-115)

(2) 高等学校

齋藤昇(日本数学教育学会, 2001, pp.117-120)

科目別・テクノロジー別発表件数では、高等学校数学の基礎である数学I・数学Aの発表件数が多い。領域別発表件数では、代数領域が幾何領域や解析領域に比べて2～3倍で圧倒的に多い。研究者別発表件数では、高等学校数学であることから高等学校教員等が最も多く、次いで大学教官等の順になっている。また、使用機器・ソフトウェアとしては、市販コンピュータソフトウェア、関数電卓・グラフ電卓、自作ソフトウェアがあり、それらの発表件数はほぼ同数である。今後の課題が、テクノロジーの利用目的、方法、研究領域、成果の共有の4つの側面から述べられ、幾何領域における研究の促進や研究成果のWEB上による情報交換の必要性が述べられている。(p.117)

(3) 大学・全体

町田彰一郎(日本数学教育学会, 2001, pp.121-126)

研究課題として、次の点が指摘されている。①探求の道具・探求する児童生徒を支援する環境として、②主体的で協同的な連携学習を支援する環境として、③個の多様性に応じる授業と学習を支援するネットワークの構築、④時間と距離を超えて協同的に学ぶ環境とそこでの学習(pp.123-125)。

6. アセスメント

橋本吉彦(日本数学教育学会, 2001, pp.127-130)

論文を次の5つの観点に分け、考察されている。

- 1)指導内容の分析と評価(4編)
- 2)評価基準, 評価の種類と時期(4編)
- 3)観点別学習状況評価・指導要録(9編)
- 4)いろいろなテスト形式とそれによる評価, 測定用具(7編)
- 5)調査研究(1編)

研究課題として, 次の5つが挙げられている。

①数学的な考え方ができるようになる, 関心・意欲・態度が育つというようなことを実証的に調べてみる。②絶対評価, 個人内評価が強調される中, 指導要録にどのように記載するのか。お互いのもっているものを公表し, 事例的な積み上げが可能かどうか調べてみる。絶対評価と高校入試という問題も避けて通れない話題である。③テスト問題の工夫はみられるが, 究極のところ高等学校では, 大学入学試験との関わりが問題となる。高校と大学の連携等, 望ましい姿を現実的なものとして実現可能かどうかを検討してみる。④内容・目標分析表は, 評価問題の作成に欠かすことのできないものとする(現在あるものが最上のものとは思われない)が, 分析表とそれに見合う評価問題を作成し, 調査結果との関わりで吟味し, 実際に運用できるものを考案すること。⑤研究にはなかったものとして, たとえば, ポートフォリオ評価, 数学的活動の評価など, 取り組むに値する問題も少なくない。(p.130)

7. 教師論と教員養成

國本景亀(日本数学教育学会, 2001, pp.131-134)

過去10年間に12編の発表数であり, 事の重要性を考えると, 研究発表数が少ないのが気になるところである。(p.131)

研究課題として, 次の2点から述べられている。①大学での教師養成の専門的内容: 大学での講義内容も教師の日常的教育活動に役立つものでなければならぬであろう。教師自身が適切な数学像を持っていることが重要であるとする(p.133)。②現職教師の資質向上: 今日, 数学教育における心理学的研究が授業あるいは教室を対象とするようになった。今後は, 教育思想面, 数学観, 子ども観, 教育観, 授業の目標, 内容, 評価などの幅広い側面からの授業研究が必要であろう。また, 授業研究において教師が持つ知識だけでなく, それらの知識の背景にあるメタ知識を解明することが重要であると思われる。(pp.133-134)

8. 数学教育の歴史

清水静海(日本数学教育学会, 2001, pp.135-141)

数学教育の歴史的研究の量的拡大を, 発表論文の件数の変化で見ると, 1991年以降において顕著である。数学教育学の研究対象に着目して傾向をみると, 対象は学校教育に限定されていて, 学校段階は初等学校と中等学校に集中しており, 中等学校段階を対象とするものが比較的多い。時期区分で見ると, 第二次世界大戦直後の昭和20年代を対象とした研究が最も多く, 大正期, 明治学制期, 第二次世界大戦前期と続く。ついで, 研究への問題意識, 動機の面で見ると, 内容(教材)研究が最も多く, 指導方法, 用語, 日本的改作(移入), 女子教育(ジェンダー)と続く。分野・領域別にみると, 算術(算数)に関わるものが最も多く, 教育課程, 幾何(図形), 関数(解析)と続き, 代数にかかる研究が比較的少ない。研究方法としては教科書を基本史料とし, その分析を中心としたものが圧倒的に多く, 人物を特定してその思想を検討するものがそれに続いている(p.135)。研究を前進させるためには, 史料の発掘と共有化の作業が不可欠となっている(p.140)。

3. 数学教育学における研究の展望

こうした研究のまとめと課題を受けて、平成14年と平成15年の2年間にわたって、「今後の我が国の数学教育研究」と題して「課題別分科会」が開催され、次の10の研究領域(課題)に分かれて、各オーガナイザーを中心にそれぞれの領域(課題)における数学教育研究について議論されている(日本数学教育学会, 2002, 2003)。

WG1. カリキュラム(目標, 評価)

WG2. 問題解決

WG3. 数と計算・代数

WG4. 図形・幾何/測定

WG5. 関数(数量関係)/確率・統計

WG6. 言語とコミュニケーション

WG7. 証明(説明, 論証等を含む)

WG8. テクノロジー

WG9. 数学教育史

WG10. 教師教育(現職教育と教員養成)

そして、平成16年に開催された第37回数学教育論文発表会においては、次の2つのテーマのもとに「全体シンポジウム」が開催されている(日本数学教育学会, 2004a)。

① 21世紀型の数学教育学研究のパラダイム

② 次期の学習指導要領の改訂に向けて

以上のような数学教育学における近年の研究動向を見てみると、今後の研究に対する展望が開けてくる。数学教育学研究の各研究領域に固有の展望があり、それについては各WGで議論され示唆されている。それゆえ、ここでは、数学教育学における多くの研究領域(課題)に共通する3つの展望を指摘し、それらについて述べておきたい。

それには、第1に、「統合」というキーワードを用いて表現することができるものがある。すなわち、「理論的研究と実践的研究の統合」や「基礎的研究と実証的研究の統合」などのように数学教育研究と数学教育実践、研究者と実践者をつなぐ意味での統合と、「各領域の研究相互の関連付け」や「いくつかの領域の研究成果を統合する」などのように個々の研究を相互に関連づける意味での統合の2つである。前者の意味での「統合」は数学教育学の二面性や統合性といった性格(小山, 1994, p.85)に由来するものであるが、今日その重要性が一層際立ってきている。また、後者の意味での「統合」も重要である。数学教育学における研究領域が拡大したり細分化したり、研究方法も多様化したりしてきているからである。

次いで、第2の展望は「共同」というキーワードで特徴づけることができるであろう。上のような統合は個々の研究者や実践者でも実行不可能ではないが、研究者と実践者の共同、研究者同士の共同、実践者同士の共同が必要であり有効であろう。特に、算数・数学のカリキュラム研究や教材開発研究、算数・数学教育における包括的かつ継続的な授業研究などを行う上で、「共同」は不可欠と言っても過言ではなからう。

最後に、数学教育学研究に対する第3の展望を特徴づけるキーワードとして「批判」を挙げたい。数学教育学における諸理論の特性と限界、適用範囲と不適用範囲などを明らかにする批判的研究、関連する研究を相互に関連づけ止揚する研究などが今後一層求められると考えるからである。

これら「統合」「共同」「批判」をキーワードとする展望は、今後の日本の数学教育

学研究と教育実践の発展に大きく寄与するものと確信している。

附記 本研究は、平成 16 年度科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)、研究代表者：小山正孝、課題番号 16530591）の交付を受けて行った研究成果の一部である。

引用・参考文献

- 小山正孝(1994), 「数学教育学研究に関する一考察—課題と方法を中心に—」, 広島大学教科教育学会誌『教科教育学研究』, 第 8 号, pp.85-95.
- 小山正孝(2002), 「数学教育学研究の発展と展望—研究の内容と方法—」, 広島大学教科教育学会誌『教科教育学研究』, 第 17 号, pp.77-87.
- 日本数学教育学会編(1995), 『日本の算数・数学教育 1995 数学学習の理論化へむけて』, 日本数学教育学会 YEARBOOK 1, 産業図書.
- 日本数学教育学会編(1997a), 『日本の算数・数学教育 1996 20 世紀数学教育思想の流れ』, 日本数学教育学会 YEARBOOK 2, 産業図書.
- 日本数学教育学会編(1997b), 『日本の算数・数学教育 1997 学校数学の授業構成を問い直す』, 日本数学教育学会 YEARBOOK 3, 産業図書.
- 日本数学教育学会編(1999), 『日本の算数・数学教育 1998 算数・数学カリキュラムの改革へ』, 日本数学教育学会 YEARBOOK 4, 産業図書.
- 日本数学教育学会(2001), 『第 34 回数学教育論文発表会「課題別研究部会」発表集録—最近 10 年間(1991~2000)の研究のまとめと課題—』, 日本数学教育学会.
- 日本数学教育学会(2002), 『第 35 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録—今後の我が国の数学教育研究—』, 日本数学教育学会.
- 日本数学教育学会(2003), 『第 36 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録—今後の我が国の数学教育研究—』, 日本数学教育学会.
- 日本数学教育学会(2004a), 『第 37 回数学教育論文発表会論文集』, 日本数学教育学会.
- 日本数学教育学会編(2004b), 『日本の算数・数学教育 2004 高度情報通信社会における学校数学の新たな展開』, 日本数学教育学会 YEARBOOK 5, 産業図書.

Trends and Prospects in Curriculum Research and Development: Recent Trends and Prospects in the Research on Mathematics Education in Japan

by

Masataka KOYAMA
Graduate School of Education, Hiroshima University

The aim of this paper is to review the recent trends and to suggest some

prospects in the research on mathematics education in Japan. Based on the works of specialists in each research domain/area in mathematics education, the reviews of the recent (1991-2000) research papers presented at the Annual Meeting of Japan Society of Mathematical Education for the ten years were summarized to show the recent trends, including results and issues. Then, the common prospects for some research domains/areas in mathematics education were characterized by three key-words of “integration” of theory and practice, “cooperation” between researcher and teacher, among researchers, and among teachers, and “criticism” of theories and research results through a critical analysis. The prospects with the three concepts would be expected to promote the further development of research and practice in mathematics education in Japan.

小山正孝, 「教科教育学の研究動向と展望—日本の数学教育学における近年の研究動向と展望—」, 『日本教科教育学会誌』, 第 27 卷第 4 号, 2005.3, pp.91-100 に所収

RESEARCH ON THE PROCESS OF UNDERSTANDING MATHEMATICS: THE INCLUSION RELATION AMONG FRACTIONS, DECIMALS AND WHOLE NUMBERS

Masataka Koyama

Graduate School of Education, Hiroshima University, Japan

In the research on the process of understanding mathematics, Koyama (1992) presented the so-called “two-axes process model” of understanding mathematics as a useful and effective framework for mathematics teachers. The model consists of two axes, i.e. the vertical axis implying levels of understanding such as mathematical entities, relations of them, and general relations, and the horizontal axis implying three learning stages of intuitive, reflective, and analytic at each level. By analyzing elementary school mathematics classes in Japan, Koyama (2000, 2002, 2003) suggested that a teacher should make a plan of teaching and learning mathematics in the light of “two-axes process model”, and that she/he should play a role as a facilitator for the dialectic process of individual and social constructions.

The purpose of this research is to examine closely the 40 fifth-graders' process of understanding the inclusion relation among fractions, decimals and whole numbers in a classroom at the national elementary school attached to Hiroshima University. Up to the fourth grade, these students had learned whole numbers, decimals and fractions. In order to improve their understanding of those numbers and promote their mathematical thinking, with a classroom teacher, we planned the teaching unit of “Fractions” and in total of 10 forty-five minutes' classes were allocated for the unit in the light of “two-axes process model”. Throughout the classes we encouraged students to think mathematically the inclusion relation among fractions, decimals and whole numbers. The data were collected in the way of observation and videotape-record during these classes, and analyzed it qualitatively to see the change of students' thinking and the dialectic process of individual and social constructions through discussion among them with their teacher in the classroom. First, as a result of introducing the frame \triangle/\bigcirc for their individual activities, by putting some whole numbers into the frame, students could make different fractions and classified them into three different categories. Second, as a result of the qualitative analysis of students' discussion, we found that students were interested in thinking the inclusion relation among fractions, decimals and whole numbers, and that they

could explore the mathematical reason why some fractions were not changed into finite decimals or whole numbers.

References

- Koyama, M. (1992), Exploring Basic Components of the Process Model of Understanding Mathematics for Building a Two-Axes Process Model, *Proceedings of the 16th PME Conference*, New Hampshire, USA, 2, 17-24.
- Koyama, M. (2000), A Research on the Validity and Effectiveness of “Two-Axes Process Model” of Understanding Mathematics at Elementary School Level, *Proceedings of the 24th PME Conference*, Hiroshima, Japan, 3, 159-166.
- Koyama, M. (2002), Research on the Process of Understanding Concepts of Triangle and Quadrilateral in a Classroom, *Proceedings of the 26th PME Conference*, Norwich, England, 1, 284.
- Koyama, M. (2003), Research on the Process of Understanding Mathematics: Ways of Measuring Area of Trapezoid, *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, Hawaii, USA, 1, 239.

Proceedings of the 28th PME Conference, Vol.1, p.315

The 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Bergen, Bergen, Norway, 14-18 July, 2004.

算数学習における理解過程に関する研究 (IV)

— 第5学年における「分数と小数、整数の包摂関係」を中心に —

小山 正孝 磯部 年晃 中原 忠男
赤井 利行 片桐 毅
(協力者) 岩田 耕司 今井 一仁

1. 目的と方法

本研究は、算数学習における子どもの理解過程を、理論的・実証的に解明しようとするものである。これまでの数学の理解過程に関する研究^{1),2)}によって、数学的概念や原理・法則などを理解するということは、本質的には、個々の子どもの心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、他方では、教室で行われる算数学習においては、子どもの理解過程はその子どもと教師、子ども同士の社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。そこで、本研究では、算数学習における理解過程を、これら個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて解明することを目的とする。

そのために、まず本研究の第1報³⁾では、理論的研究として、小山が構築した数学理解の2軸過程モデルについて、このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を、文献解釈的方法によって再検討した。そして、第2報⁴⁾では、その実証的研究として、「図形」領域の学習において、小学校第2学年の子どもが三角形や四角形概念を学習する際の理解過程に焦点を当て、事前調査、授業実践、事後調査を通して、これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明した。さらに、第3報⁵⁾では、「量と測定」領域の授業実践を通して、小学校第5学年の子どもが台形の面積の求め方を学習する際の理解過程を実証的に明らかにしてきた。

そこで第4報である本稿では、「数と計算」領域の授業実践を通して、小学校第5学年の子どもが分数と小数、整数の包摂関係を学習する際の理解過程を実証的に解明することを目的とする。

2. 授業の計画

(1) 計画の概要

【授業学年】 広島大学附属小学校 2部5年
(男子20名 女子20名 計40名)

①単元名 分数

②単元目標

- 単位分数のいくつ分であるかを見つけ、分数の仕組みや同分母分数の加減の仕方に関心を持ち、進んで考えていこうとする。(関心・意欲・態度)
- 単位分数をもとにして、同分母分数の加減の仕方を考えることができるとともに、整数の除法の結果を分数で表す方法や分数・小数・整数の包摂関係について考えることができる。(数学的な考え方)
- 1つの分数を、分母を変えて表すことができる。分数を小数や整数で、小数を整数や分数で表すことができる。また、整数・小数・分数を同じ数直線に表したり、大小をくらべたりすることができる。(表現・処理)
- 同分母分数の加減の仕方が分かる。整数の除法の結果が分数で表せることと、

分数・小数・整数の包摂関係が分かる。(知識・理解)

③指導計画 (全 10 時間)

第1次	大きさの等しい分数	2時間
第2次	分数のたし算・ひき算	3時間
第3次	分数と小数・整数	4時間
	・分数を小数で表そう	①
	・整数や小数を分数で表そう	①
	・1から5までの数で分数をつくって、 仲間分けしよう	本時1 ①
	・6から10までの数で分数をつくって、 仲間分けしよう	本時2 ①
第4次	まとめの練習	1時間

(2) 事前研究

① 教材分析 (単元全体について)

これまでに子どもたちは、はしたの量を表す数として小数や分数が生み出されたことを理解している。また、小数においては、整数と同じ十進位取り記数法の構造のもとで、加減乗除すべての計算が成り立っていることを理解し、整数と小数の包摂関係について追究している。

そこで、本単元では、分数の計算として、同分母分数の加法及び減法の方法を追求していく。ここでは、単位の考えを用いて考える。小数の加法及び減法で、0.1を単位として、そのいくつ分で考えたことをもとにして、分数の加法及び減法でも分子が1の分数(単位分数)を単位として、そのいくつ分で考えていくことになる。また、整数の除法の結果が分数で表せられることを理解させるとともに、分数と小数の特徴やよさについて追究させる中で分数・小数・整数の包摂関係について理解させていきたい。

具体的には、まず、単位分数の大きさを数直線を使ってとらえ、分母が大きくなるにつれて、分数の大きさは小さくなることをとらえさせる。また、大きさの等しい同値分数が存在することに気づかせたい。次に分数の加法・減法について、同分母分数の計算を単位分数のいくつ分で考えることができることを知り、分数の仕組みの理解を一層深めたい。さらに、分数と小数・整数の包摂関係について学習する。液量や長さなどの具体的な場面から抽象化を図り、整数の除法の結果が分数で表せることをとらえさせる。また、分数を小数や整数で表したり、整数や小数を分数で表したりすることができるようにさせる。このことを活用して、分数・小数・整数を同一直線上に表したり、分数と小数の混じった大小比較や計算の仕方について考えさせる。さらに、発展的な学習として、分数・小数・整数の集合の包摂関係を考察する場を設定する。それによって、今まで学習してきた分数・整数・小数の変換をもとに、分数・小数・整数の集合の間の関係について考えさせ、小学校で学習する数の全体構造から分数について考えさせたい。

② 5年生の分数概念の理解に関する事前調査

本時の授業に入る前の第5学年の子どもたちの分数(特に分数と小数、整数の包摂関係)についての理解の程度を調べるために、2部5年の子どもたちに実態調査を行った。

ア. 事前調査のねらい

この事前調査では、次のことをねらいとした。

7つの分数を分類させることを通して、学習前の子どもたちの分数概念についての理解の程度を把握する。

イ. 事前調査の問題

次の7つの分数を提示し、分類させた。なお、この問題に取り組ませる際には、1つの分類だけでなく、様々な分類を行ってよいことを告げて、行わせた。

<問題> 次の7つの分数を仲間分けしましょう。

$$\frac{8}{10} \quad 1\frac{1}{2} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{1} \quad 2\frac{1}{3} \quad \frac{6}{2}$$

ウ. 事前調査の結果

その結果、40名の子どもたちは次のような分類を行った。

子どもの反応

- ・真分数、仮分数、帯分数に分類 …… 38/40
- ・大きさが1以上のものと、1未満のものに分類 …… 4/40
- ・帯分数とそうでないものに分類 …… 5/40
- ・整数になおせるものと、そうでないものに分類 …… 22/40
- ・約分できるものと、そうでないものに分類 …… 11/40
- ・分母が奇数か偶数かで分類 …… 8/40
- ・小数に直せるもの、整数に直せるもの、そうでないものに分類 …… 5/40

このような事前調査の結果から、本時の授業に入る前の子どもたちの実態として、以下のことが明らかになった。

- 既習内容である真分数、仮分数、帯分数を観点として分類する子どもが95%もいたことから、分数をみる観点として、分数の表し方に着目している子どもが多いことがわかる。
- 整数に直せるものとそうでないものを観点として分類した子どもが55%いた。また約分できるものとそうでないものを観点として分類した子どもも8%近くいた。このことから、分母と分子の関係性に着目して分数を見ることができている子どもが多いことがわかる。
- 分母が奇数か偶数かで分類する子どもが20%いたことから、既習の数の見方を分数にも活用して判断しようとしている子どもがいることがわかる。
- 小数に直せるもの、整数に直せるもの、そうでないものに分類した子どもが全体の13%程度いた。これは未習内容ではあるが、商分数の性質をもとに分類できる子

どももいることがわかる。

3. 理解過程を重視した授業のデザイン

これらの事前調査の結果から、子どもの実態として「分数をその表記の仕方のみ」の見方が特に強いことが明らかになった。こうした子どもの分数の見方を、本時の目標である「分母と分子の大きさの関係から分数をみることで、分数と小数、整数の包摂関係を明らかにする」ことへ、特に、「分母の数から分数を判断する」ことへ変容させるとともに、その変容過程を明らかにするために、次の2点に着目して授業づくりを行った。

- ① 課題の提示と課題追求の場の工夫
- ② 多様な分数の見方を共有し、吟味することができる社会的相互作用にもとづく反省化の場の工夫

① 課題の提示と課題追求の場の工夫について

本稿で取り上げる2つの授業場面（本時1と本時2）においては、 Δ/\bigcirc というフレームを提示し、その中に、1から5までの数を入れて分数をつくる場と6から10までの数を入れて分数をつくる場の2つの場を課題とする。これら2つの分数づくりの場を通して、整数に直せる分数、小数に直せる分数、整数にも小数にも直すことのできない分数（本稿では、有限小数に表せない分数をこのように呼ぶことにする）の存在を明らかにすることができるとともに、分数と整数、小数の包摂関係について数の見方がどのように変わったかを明確にさせることができるように工夫した。

② 多様な分数の見方を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫について

子どもたちが考えた分数のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値のある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な数の見方を意味づけたり、関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして、子どもの多様な数の見方を表出させ、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得できる考えを創り出させられるように工夫した。

4. 第5学年「分数」における授業の実際と考察

(1) 本時1（第3次の3/4時「1から5までの数で分数をつくって、仲間分けしよう」）の実際と考察

<本時1の目標>

- ① Δ/\bigcirc のフレームの中に1から5までの数を入れたときにできる分数を、整数で表せるもの、小数で表せるもの、分数でしか表せないものの3つの視点から分類することができる。
- ② 分母が3のときは、例外（分子が分母の倍数）を除いて、分数は小数や整数で表せない理由を明らかにすることができる。

<本時1の授業の流れ>

[意識化]

まず、 Δ/\bigcirc という分数づくりのフレームを提示し、 Δ と \bigcirc に1から5までの数を入れるとどんな分数ができそうか、という本時の学習活動の方向性を意識し確認する

段階である。

- T 1 今日の分数の研究では、 Δ/\bigcirc の中に数を入れて、いろいろな分数をつくってみたいと思います。
- C 1 どんな数でもいいのですか。
- T 2 それだと、たくさんできすぎますね。まず、1から5までの数で、挑戦してみましょう。まず、分子の数をカードをひいてみましょう。(1から5までの数をそれぞれ3枚ずつ入れた袋を準備し、子どもに引かせる。)
- C 2 3が出ました。
- T 3 それでは、今度は分母の数を先生が引いてみるよ。(一度引いてみるが、わざと隠して) あっ、これは、失敗だからもう一回ね。
- C 3 えー、何で隠すの。
- C 4 ずるい。
- C 5 わかった。1を引いたからだ。
- T 4 どうして1を引いたと思ったのですか。
- C 6 1だと、分母が1だから、整数になって、分数にならないからだ。
- C 7 1だったら、さっき先生が分数をつくってみるって言ったのに、当てはまらないからだ。
- T 5 みんなするどいね。分母が1のときは、どんな数が分子でも、整数になるのですね。
- C 8 先生は、2か4か5が出てほしかったのでしょうか。
- T 6 今、2か4か5って言ったけど、3はいけないのですか。
- C 9 3のときも分子が3だから、整数になるでしょ。だから、3が出ても先生は失敗したって言ったと思います。
- T 7 なるほど、先生が失敗したと考えた理由を整数になるかならないかの視点で分析してくれましたね。それでは、1から5までの数を使ってできる分数は、整数になる場合を含めていくつありそうかな。
- C 10 整数になるのを含めると、20個以上できると思います。
- C 11 25個できると思います。
- T 8 それでは、1から5までの数を使うと分数は何個できるか調べてみましょう。

[操作化]

次に、1から5までの数を使って、分数を実際につくる段階である。 Δ/\bigcirc のフレームの中に1から5までの数を入れてできる分数は、25個ある。

40名の子どもたちの反応は、以下のとおりである。

子どもの反応1：25個の分数を正しく構成することができたか (N=40)

子どもの活動の実際	人数 (%)
○ 落ちや重なりがなく、25個の分数をつくることができた。	33人 (82.5%)
○ 分母と分子が同じ数になる場合(例えば3/3)を除いて、20個の分数をつくることができた。	4人 (10%)

○ 落ちや重なりが生まれ、同じ分数を複数個つくった。	3人 (7.5%)
----------------------------	--------------

子どもの反応2：子どもの分数のつくり方の実際 (N=40)

子どもの活動の実際	人数 (%)
○ 分母または分子を固定して、それにあてはまる分数をつくっていった。(例えば, $1/2$, $2/2$, $3/2$, ……)	18人 (45%)
○ ランダムに分母, 分子に数を入れて分数をつくっていった。	5人 (12.5%)
○ はじめはランダムに数を入れて分数をつくっていったが、落ちや重なりが生まれることに気づき、分母か分子を固定して分数をつくっていった。	17人 (42.5%)

[反省化]

この段階は、子どもがつくった分数について吟味し、分数でしか表せない場合についての気づきを出し合いながら、より数学的に価値ある分数の見方へと高めていく段階である。

T 9 それでは、分数は、何個できましたか。

C 12 25個できました。

C 13 20個だよ。

T 10 意見が分かれていますね。実際にどんな分数ができたのか出し合ってみましょう。

$1/1$, $2/1$, $3/1$, $4/1$, $5/1$
$1/2$, $2/2$, $3/2$, $4/2$, $5/2$
$1/3$, $2/3$, $3/3$, $4/3$, $5/3$
$1/4$, $2/4$, $3/4$, $4/4$, $5/4$
$1/5$, $2/5$, $3/5$, $4/5$, $5/5$

C 14 (できた分数をみて) なんだ、分母と分子が同じでもよかったんだ。

T 11 早速、気づきを出してくれましたね。ほかにはどんな気づきがありそうですか。出してみましよう。

C 15 分数なんだけど、整数になるものがたくさんあります。

C 16 小数になる分数の方が多と思います。

T 12 それでは、分数を仲間分けしてみましよう。

C 17 整数になる分数は10個ありました。

C 18 小数で表せる分数は11個ありました。

C 19 分数でしか表せない分数は、 $1/3$, $2/3$, $4/3$, $5/3$ の4つでした。ほかの2つに比べるととても少ないです。

T13 どうして分母が3のときは、分子が3のとき以外は、分数でしか表せないのでしょうか。

C20 わり算で考えると、3で割るときは、いつも割り切れないからだと思います。

C21 分母が2のときはいつも半分だから割り切れるし、4は半分の半分だからこれも割り切れるけど、3のときは割り切れないからだと思います。

C22 分母が5のときも、5で割ると、いつも割り切れるからいいけど、3はやっぱり割り切れないから、分母が3のときは、分子が3の段の数でないときは分数でしか表せないと思います。

[協定化]

最後は、子どもたちが新しく獲得した数の見方について整理し、次時の課題を構成する段階である。

T14 今日の研究で、発見したことには、どんなことがありますか。

C23 分数は、3つの仲間があることを見つけました。

C24 詳しく言います。分数には、整数に直せるものと、小数に直せるものと、分数で表せるものの3種類あることがわかりました。

T15 そうですね。3種類ありますね。この3種類の見分け方は、どうでしょう。

C25 分母の数で、だいたいわかります。

C26 分母が3のとき以外は、整数か小数になります。

C27 でも入れる数が1から5の数じゃないときは、分数でしか表せない分数はもっとたくさんできると思います。

T16 たとえば分母がどんなときですか。

C28 7のときです。

C29 9のときも分数でしか表せないと思います。

T18 それでは、次の研究で、1から5以外の数のときはどうなるか調べてみましょう。

<本時1の授業の考察>

① 課題の提示と課題追求の場の工夫について

本時1では、 Δ/\bigcirc というフレームを提示し、この中に1から5までの数を入れると、いくつ分数ができるかを課題とした。子どもたちのC3～C9の発言から明らかのように、この段階において子どもたちは、整数に直せる分数が存在することに気づくことができたといえる。また、これらの発言は分母と分子の関係性に注目していることの表れであると考えられる。分子が3のとき1や3が分母に入ると整数になるという気づきは、分数をみる視点として、分母と分子の関係に着目していくという新たな視点をもとに、分数を理解しようとする姿であるともいえる。また、C10やC11の発言から、子どもたちは分数づくりへの大まかな見通しをもつことができたと考えられる。

以上のことから、 Δ/\bigcirc のフレームに1から5までの数を入れて分数をつくることを課題として提示したことは、分母と分子の関係をみていくという新たな分数の見方を子どもが獲得することにつながったと言える。さらに、この課題を設定したことは、それが簡単な数を入れてみる活動であったことから、その後の分数をつくって仲間分けする活動への見通しをもたせる上でも有効であったと言えよう。

② 社会的相互作用の場の工夫について

反省化の段階におけるC15, 16, 17, 18, 19の発言をみると、25個の分数を他の

整数や小数で表せるかということについて議論が進んでいることがわかる。そして、その後の議論の中では、教師のT13の発問と子どものC20の発言を契機に、分母が3のときとそうでないときの違いについて考察が始まっている。その結果、分母と分子の関係から分数をみていく見方から分母の数だけをもとに分数を判断していこうとする見方へと変容していった子どもたちの様子がわかる。これは、単に分母が3のときに小数や整数に直せないということだけを明らかにしたのではなく、その理由までも追及させ、3以外の数が分母に入ったときにはどうなるかを考えたことによるものであると言ってよいであろう。

このように、本時1の授業において、子どもの分数の理解の仕方は、事前調査の時点での「分数をその表記の仕方のみ見る」見方から、「分母と分子の関係をみる」見方へ、さらに「分母をもとに判断する」見方へと変容してきたことがわかる。そこで以下では、本時1の次時として設定した本時2の授業の実際を取り上げることにより、子どもの理解過程をさらに詳しくみていくことにする。

(2) 本時2 (第3次の4/4時「6から10までの数で分数をつくって、仲間分けしよう」) の実際と考察

<本時2の目標>

- ① \triangle/\circ のフレームの中に6から10までの数を入れたときにできる分数を、整数で表せるもの、小数で表せるもの、分数でしか表せないものの3つの視点から分類することができる。
- ② 分母が3, 6, 7, 9のとき、例外(分子が分母の倍数)を除いて、分数は小数や整数で表せない理由を発展的に明らかにすることができる。

<本時2の授業の流れ>

[意識化]

まず、前時と同様に、 \triangle/\circ という分数づくりのフレームを提示し、 \triangle と \circ に6から10までの数を入れたときに、分数でしか表せない分数にはどんな特徴がありそうか、という本時の学習活動の方向性を意識化し確認する段階である。

T1 今日の分数の研究では、 \triangle/\circ の中に入れる数(1から5までの数)を変えて調べてみたいと思います。どんな数を入れるといいかな。

C1 分母が6のときや7のときは、整数や小数には直せないよ。

C2 9もそうだよ。

C3 8は、整数や小数に絶対に直せると思います。

T2 それでは、今日の研究では、1から5までの数から発展させて、今みんなが言ってくれたように、6から10までの数を入れて挑戦してみましょう。何個の分数ができるかな。

C4 昨日と一緒に5つの数があるから、25個の数ができると思います。

C5 でも、昨日と違って1がないから、整数は少ししかできないと思います。

T8 それでは、6から10までの数を使うと分数は何個できるのか、そして分数でしか表せない数は何個できるか調べてみましょう。

[操作化]

次に、6から10までの数を使って、分数を実際につくる段階である。

40名の子どもたちの反応は、以下のとおりである。

子どもの反応3：25個の分数を正しく構成することができたか (N=40)

子どもの活動の実際	人数 (%)
○ 落ちや重なりがなく、25個の分数をつくることができた。	39人 (97.5%)
○ 落ちや重なりが生まれ、同じ分数を複数個つくった。	1人 (2.5%)

子どもの反応4：子どもの分数のつくり方の実際 (N=40)

子どもの活動の実際	人数 (%)
○ 分母を固定して、それにあてはまる分数をつくっていった。 (例えば、 $6/6$, $7/6$, $8/6$, ……)	36人 (90%)
○ はじめはランダムに数を入れて分数をつくっていったが、落ちや重なりが生まれることに気づき、分母を固定して分数をつくっていった。	4人 (10%)

[反省化]

この段階は、子どもがつくった分数について吟味し、分数でしか表せない場合についての気づきを出し合いながら、より数学的に価値ある分数の見方へと高めていく段階である。

T9 それでは、分数は何個できましたか。

C6 やっぱり25個できました。

T10 この前の研究をもとに、みんな分数のつくり方を工夫していましたね。それでは、気づきを出してみましよう。

C7 整数に直せる分数は、 $6/6$, $7/7$, $8/8$, $9/9$, $10/10$ の5つしかありませんでした。

C8 逆に分数でしか表せないものがたくさんありました。

C9 分母に6と7と9を入れると、分母と分子が同じ数のときと $9/6$ のとき以外は、全部分数でしか表せない数になりました。

T11 いい気づきがたくさん出てきましたね。ところで、どうして分母が6, 7, 9のときは分数でしか表せない数になるのでしょうか。それでは、昨日の研究の数と合わせて考えてみましよう。

整数や小数で表せる分数の分母 1, 2, 4, 5, 8, 10

分数でしか表せない分数の分母 3, 6, 7, 9

C全体 (難しそうに考え込む)

C10 7がなかったら、分かるのにな。

T12 どういうことかな。

C11 7がなかったら、分数でしか表せない分数の分母は3, 6, 9だから3の段の数が分母になったら、整数や小数で表せない数ができると言えます。

C12 7は特別な数だと思います。

C13 でも、もっと数を大きくしたら、たぶん14や21を分母にしても分数でしか表せない数になると思います。

T13 3の段の数と7の段の数に何かヒントがありそうですね。それでは、今度は逆に整数や小数で表せる分数の分母を見てみるとどうなりますか。

C14 わかった。今度は2, 4, 8, 10で2の段の数があります。1は当たり前だけど、2の段の数と5の段の数が分母にきたら、整数や小数に表せると思います。

C15 でも6も2の段の数だよ。2の段の数って言えないんじゃないですか。

T14 それでは、10だけを今度は見てみるよ。10についてはどうかな。

C16 10は2の段の答えになります。でもこれではさっきと変わりません。

C17 あっ、10は 2×5 です。わかった。2と5でできてる数だ。

T15 どういうことかな。

C18 かけ算で2と5でできる数が小数や整数で表せる数です。4は 2×2 だし、8は $2 \times 2 \times 2$ だし、10は 2×5 でできるから、4や8や10が分母のときは小数や整数で表せると思います。

C全体 (納得したような様子)

[協定化]

本時の最後は、子どもたちが新しく獲得した数の見方について整理し、次時の課題を構成する段階である。

T14 今日の研究で、発見したことには、どんなことがありますか。

C19 分数を仲間分けするときは、分母の数を見て仲間分けするとすぐにできることを発見しました。

C20 1, 2, 4, 5, 8, 10のように、1と2と5のかけ算でできている数は全部小数や整数で表せるけど、分母に3や7のかけ算の数が入ると小数や整数では表せません。

T15 それでは、10より大きな数になったら、小数や整数で表せる分数の分母にはどんな数があるかな。11から20までの数で考えてみよう。

C全体 (ノートに数を書いて、どんな成り立ちになるかを調べる。)

C21 次は16です。それ以外の数は2と5のかけ算でできません。

<本時2の授業の考察>

① 課題の提示と課題追求の場の工夫について

本時2では、前時に引き続いて Δ/\bigcirc というフレームを提示し、この中に6から10までの数を入れると、分数でしか表せない数はいくつできるかを課題とした。本時の意識化の段階における子どもたちのC1~C3の発言から、この段階において子どもたちは、今までのわり算の経験や前時での学習によって、分数でしか表せない分数の分母の数に気づくことができたことがわかる。また、これらの発言は、前時の学習で観られた、分数を分母と分子の関係性に着目してみる見方からその分母のみを考察の対象としてみようとする見方への変容を、顕著に表していると考えられる。

次に課題追求の場においては、前時の経験をもとに、分数のつくり方について見直しをもって取り組むことができている。そのことは、 \triangle/\circ というフレームの中に1から5までの数を入れて分数をつくる活動（前時）に対する子どもの反応1・2と本時の6から10までの数を入れて分数をつくる活動に対する子どもの反応3・4をそれぞれ比較してみると、より一層明らかである。このことは、分数をつくりそれらを分類するという前時からの連続した活動を通して、分母に着目して分数をみていく子どもの分数理解の変容ととらえられるであろう。

② 社会的相互作用の場の工夫について

本時の反省化の段階におけるC10～C18の議論の様子を見ると、子どもは分母が3, 6, 7, 9のときなぜ小数や整数で表せないのか考えていることがわかる。このことは、分母に着目して分数を判断しようとする子どもたちの姿であり、事前調査の段階と比べて、子どもの分数理解の仕方が大きく進展し、深まっているととらえられる。ここでの議論においては、T13で2, 4, 5, 8, 10が分母のときなぜ小数や整数で表せるのかと観点の変更を促したり、T14で数10の構成の仕方に焦点化して考えさせたりする教師の発問が有効に機能したと考えられる。

このように、本時1と2の学習によって、子どもの分数の理解の仕方が、事前調査の時点での「分数をその表記の仕方のみ見る」見方から、「分母と分子の関係をみる」見方へ、さらには「分母をもとに判断する」見方へと変容したことがわかる。そして、子どもたちは、分数づくりの活動と社会的相互作用によって、分数が小数や整数で表される場合と分数でしか表せない場合の見分け方に気づくことができたのである。

5. 結論

本稿では、「数と計算」領域の学習において、小学校第5学年の子どもが分数と小数、整数の包摂関係を学習する際の理解過程を実証的に解明することを目的とした。

そこでまず、本時の授業に入る前の40名の子どもたちの実態を把握するために、分数（特に分数と小数、整数の包摂関係）の理解についての簡単な調査を行った。その結果、子どもの実態として、「分数をその表記の仕方のみ見る」子どもが多い（95%）こと、「分母と分子の関係性に着目してみる」ことのできる子どもも多い（83%）ことなどが明らかになった。こうした子どもたちの分数の見方を、「分母と分子の大きさの関係から分数をみることで、分数と小数、整数の包摂関係を明らかにする」ことへ、特に、「分母の数から分数を判断する」ことへ変容させ、その変容過程を明らかにするために、本単元の分数の発展的な学習として、本時1と2で分数をつくって仲間分けする算数的活動を行うこととした。

その際、課題の提示と課題追求の場と多様な分数の見方を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場を工夫することで、子どもの理解過程を重視した算数科授業を構成することを考えた。具体的には、課題の提示と課題追求の場の工夫として、 \triangle/\circ というフレームを提示し、その中に、1から5までの数を入れて分数をつくる場（本時1）と6から10までの数を入れて分数をつくる場（本時2）の2つの場を課題とした。これら2つの分数づくりの場を通して、整数に直せる分数、小数に直せる分数、整数にも小数にも直すことのできない分数の存在を明らかにすることができるとともに、分数と整数、小数の包摂関係について数の見方がどのように変わったかを明確にさせることができると考えたからである。また、多様な分数の見方を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫として、子どもたちが考えた分数の

とらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値のある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な数の見方を意味づけたり、関連づけたりすることが大切であると考え、そのための手だてとして、子どもの多様な数の見方を表出させ、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得できる考えを創り出させられるように工夫した。

その結果、本時1の授業において、 \triangle/\circ というフレームの中に1から5までの数を入れて分数をつくる活動を通して、子どもたちは整数に直せる分数が存在することに気づき、分母と分子の関係性に着目して分数をみることができるようになった。また、社会的相互作用を通して、子どもたちの分数の見方が、分母と分子の関係性に着目して分数をみていく見方から分母の数だけをもとに分数を判断していこうとする見方へと変容していった。さらに、本時2の授業において、前時に引き続いて \triangle/\circ というフレームの中に6から10までの数を入れて分数をつくり、分数と小数、整数の関係について考えることで、子どもたちは分母に着目して分数を判断しようとし、分数が小数や整数で表される場合と分数でしか表せない場合の見分け方にも気づくことができた。その際、本時2の反省化の段階では、2, 4, 5, 8, 10が分母のときなぜ小数や整数で表せるのかと観点の変更を促したり、数10の構成の仕方に焦点化して考えさせたりする教師の発問が、こうした子どもたちの分数の理解の深化に有効に機能したと考えられる。

以上のように、本時1と2の授業によって、子どもの分数の理解の仕方が、事前調査の時点での「分数をその表記の仕方のみる」見方から、「分母と分子の関係をみる」見方へ、さらには「分母をもとに判断する」見方へと変容した。そして、子どもたちは、分数づくりの活動と社会的相互作用によって、分数が小数や整数で表される場合と分数でしか表せない場合の見分け方に気づくことができたのである。このような事例研究からも、本研究の第2報と第3報の事例研究と同様に、算数学習において個人的構成と社会的構成の両方の活動が行われてはじめて、教室における個々の子どもや子どもたちの理解が深化し得るということが示唆される。

本研究ではこれまでに小学校算数科における「図形」領域（第2報）、「量と測定」領域（第3報）、そして「数と計算」領域（本稿：第4報）に焦点化して、算数学習における理解過程に関する実証的研究を行ってきた。そこで、今後はもう一つの「数量関係」領域の学習における子どもの理解過程を実証的に解明することが課題である。

参考文献

- 1) 小山正孝 (1997) 「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 2) Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol.5, pp.21-33.
- 3) 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文 (2000) 「算数学習における理解過程に関する研究 (I) - 数学理解の2軸過程モデルの理論的再検討 -」, 『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』, 第28号, pp.117-123.
- 4) 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 中村武司 (2002) 「算数学習における理解過程に関する研究 (II) - 第2学年における三角形と四角形を中心に

に－」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第 30 号, pp.89-98.

- 5) 赤井利行, 小山正孝, 中原忠男, 中村武司, 磯部年晃 (2003) 「算数学習における理解過程に関する研究 (Ⅲ) - 第 5 学年における「台形の面積の求め方」を中心に－」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第 31 号, pp.115-122.

広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第 32 号, 2004. 3, pp.181-188 に所収

算数学習における理解過程に関する研究 (VI)

— 第1学年「繰り下がりのあるひき算」における式理解を中心に —

小山 正孝 磯部 年晃 中原 忠男
赤井 利行 今村 孝子
(協力者) 今井 一仁 阿部 好貴

1. 目的と方法

本研究は、算数学習における子どもの理解過程を、理論的・実証的に解明しようとするものである。これまでの数学の理解過程に関する研究^{1),2)}によって、数学的概念や原理・法則などを理解するということは、本質的には、個々の子どもの心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、他方では、教室で行われる算数学習においては、子どもの理解過程はその子どもと教師、子ども同士の社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。そこで、本研究では、算数学習における理解過程を、これら個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて解明することを目的とする。

そのために、まず本研究の第1報³⁾では、理論的研究として、小山が構築した数学理解の2軸過程モデルについて、このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を、文献解釈的方法によって再検討した。そして、第2報⁴⁾では、その実証的研究として、「図形」領域の学習において、小学校第2学年の子どもが三角形や四角形概念を学習する際の理解過程に焦点を当て、事前調査、授業実践、事後調査を通して、これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明した。また、第3報⁵⁾では、「量と測定」領域の授業実践を通して、小学校第5学年の子どもが台形の面積の求め方を学習する際の理解過程を実証的に明らかにしてきた。さらに、第4報⁶⁾では、「数と計算」領域の授業実践を通して、小学校第5学年の子どもが分数と小数、整数の包摂関係を学習する際の理解過程を実証的に解明してきた。そして、第5報⁷⁾では「量と測定」領域における理解過程について、第3学年「重さ」の概念形成を中心に解明してきた。

そこで、第6報である本稿では、これまでの研究の成果を生かし、低学年における「数と計算」領域の授業実践を通して、小学校第1学年の子どもがきまりを見つけ活用していく際の理解過程を実証的に解明することを目的とする。

2. 授業の計画

(1) 計画の概要

【授業学年】 広島大学附属小学校 1部1年
(男子18名 女子19名 計37名)

① 単元名 ひきざん(2)

② 単元目標

- 具体物を用いながら、進んで繰り下がりのある減法の計算の方法を考えたり、計算をしようとしたりすることができる。
- 既習の減法の考え方をもとにして、繰り下がりのある計算のしかたを工夫して考えることができる。

- (十何) - (1位数) の減法で、繰り下がりのある計算が正しくできる。
- (十何) - (1位数) の減法で、繰り下がりのある計算の意味やその方法を理解できる。
- 1つの数を他の数の和や差としてみることができる。

③ 指導計画 (全13時間)

第1次	くりさがりのあるひきざん	7
第2次	くりさがりのあるひきざんれんしゅう	3
第3次	まとめの練習	1
第4次	どんなきまりが見つかるかな?	2 (本時1/2)

(2) 事前検討

① 教材分析

本単元は、1位数と1位数の和が10より大きい数になる加法の逆算である減法について、計算の仕方を考えることができるようにするとともに、繰り下がりのある計算が確実にできるようにすることがねらいである。

減法について、児童は、「ひきざん(1)」において、被減数が10以下のひき算について学習してきている。また、「たしざん(2)」において、1位数+1位数で繰り上がりのあるたし算について学習してきている。本単元では、それらの既習内容をもとに減法の用いられる場面を拡張するとともに計算のしかたを確実に理解できるようにする。

また、今回の実践的研究をとおして、理解した計算の仕方を活用していく場が設定できるかどうか追究していきたい。なぜならば、理解したことをさらに高次の場で活用していくことで、子どもの理解はより深まっていくからである。

そこで、本単元では、一つの数を他の数の和や差としてみることといった関数の考えを生かす場を設定する。具体的には、同じ差になるひき算の式に着目して、差が変化すると式はそれに伴ってどう変化するかを追究していく。この場をとおして理解した計算のしかたを活用し、きまりを見いだし、ひき算の式の理解を深めるようにする。

② 児童の実態

本学級の児童は、具体物を使った算数的活動をもとに、加法における計算の場面を理解するとともに、計算の仕方を考えることができている。例えば、 $8+6$ の繰り上がりのある加法の計算では、被加数の8を4と4に分解して、 $8+6=4+(4+6)$ としたり、加数の6を2と4に分解して $8+6=(8+2)+4$ としたり、さらに被加数・加数ともに分解して $8+6=3+(5+5)+1$ と計算したりするような、柔軟に計算の方法を工夫することができている。また、工夫して問題解決することに対して意欲的な子どもが多い。具体的には、数量の変化に対する着眼が鋭く、例えば1位数+1位数で和が11になるたし算は8つできるから、和が12になる場合は、どうなるのか追究したいといった着眼や意欲を有する子どもが多い。

このような子どもの実態を生かし、本単元では、繰り下がりのある減法の計算の仕方を多様に考えることができるようにするとともに、数や式の見方をより確かなものへとしていきたい。

3. 理解過程を重視した授業のデザイン

これらの事前検討を受けて、②で述べたように子どものきまりへの着眼を生かす授業展開を考えていく必要がある。そのためには、本単元で学習する繰り下がりのあるひき算の計算をもとにして、さらに数の構成や計算の意味理解を深化・発展させるも

のとして、教材「同じ差になる式の中のきまり」を開発する。これは、差が9になるひき算の式の中に潜む法則性をもとに、差が8の場合や7の場合を考えることで、ひき算の式に対する理解を深めていく場である。

そこで、ひき算の式に潜む規則性に着目できる課題提示の工夫が重要になる。また、子どもたちが同じ差になるいくつかのひき算の式から、気づきを出し合う中できまりを見つけだし、見いだしたきまりを活用して問題を解決することのできる課題追究の場の工夫が重要になる。つまり、次の点に着目して授業づくりを行っていくことで、子どもの理解過程を大切にしたい授業づくりを行うことができると考える。

課題の提示と課題追究の場の工夫

4. 第1学年「ひき算(2)」における授業の実際と考察

(1) 本時(第4次の1/2時)の実際と考察

<本時の目標>

同じ差になるひき算の式の仕組みに関心を持ち、多様なきまりをみつけ、他の差になるひき算の式づくりにも活用していくことができる。

<観点別評価基準>

○ 関心・意欲・態度

同じ差になるひき算の仕組みに関心を持ち、その理由を考えようとする。

○ 数学的な考え方

被減数と減数の大きさの関係に着目して、同じ差になるひき算のきまりを考えることができる。

○ 表現・処理

被減数と減数の大きさの関係を考えることによって、同じ差になるひき算の式をつくることができる。

○ 知識・理解

一つの数を他の数との差で見ることとおして、被減数と減数、差の関係を明らかにすることができる。

<本時の授業の流れ>

[課題の意識化]

まず、差が9になるひき算の式をランダムに提示し、同じ差になるひき算には、きまりがあることに気づかせる。そして、差が8の場合はそのきまりはどう変化するかを考えさせ、本時の学習活動の方向性を意識し確認する段階である。

T 今から先生は、くり下がりのある計算のミニカードを見せるよ。

T (11-2のカードを提示) はい、この差はいくつかな?

C 11-2=9です。

T そうですね。では、次にいくよ(14-5のカードを提示)。

C 14-5=9です。

T それでは、3問目いくよ。

C 16-7=9です。

C 先生、あの～。

※ この時点で、差が同じひき算を提示していることに気づいた子どもは4名いた。

T ちょっとまってね、それでは、次いくよ。

(15-9のカードを提示)

C $15-6=9$ です。

C 気づきがあります。

※ この時点で、差が同じひき算を提示していることに気づいた子どもは18名いた。

T あれ、これ(15-9のカード)をだした瞬間に、たくさんのお友達が気づきがあるって言っているね。4枚目のカードで、どんな気づきがあるのかな？

C 11-2とか、14-5とか、1の次が2になって、4の次が5になるカードを先生が出しています。

T まとめて言うとうなるのかな？

C 引かれる数の一の位より、引く数の方が1大きな引き算がでています。

C それだったら、まだでてないけど12-3もいいと思います。

T 鋭いね。先生は、12-3のカードも用意してたんですよ(12-3のカードを貼る)。

C まだ他にもあります。

T どうぞ。

C 先生が出した計算カードは、答えが全部9になっています。

T 今まで出したカードは、そういわれてみたら全部差が9になっているんだね。さて、先生は、まだカードを持っているんだけどこのカードは差が9のカードだと思う？

C 思う。

C 先生、残りは何枚あるのですか。

T あと3枚です。

C (黒板に出たカードの枚数を調べて)それなら、差が9のカードだと思います。

T じゃあ残り3枚のカードは、どんなカードだと思うかな？ カードを見せるよ。(18-9のカードを見せる)

C やっぱりそうだ、 $18-9=9$ です。

T 次見せるよ。(13-4のカードを提示)

C $13-4=9$ です。

T さて、先生は、最後の1枚のカードを持っているけど、このカードには、どんな式が書いてあると思うかな？

C わかるよ。

C えー。わかんない。

T わかるよって言う人は、どうしてわかるのかな？ 先生にこっそり教えてよ。

C (授業者の耳元で) ひかれる数が、11, 12, 13, 14, とならべていったら、17だけのこるから、 $17-8$ だと思う。

T すごいね！ 先生が持っている最後の1枚のカードの式を言ってくれたよ。そして、どうして、その式なのかわけも言ってくれているよ。

C 僕も言えるよ。

T じゃあ、こっそり教えてくれる。

T みんなすごいね。でも、先生わかんないよって言う人もいるね。正直に手を挙げ

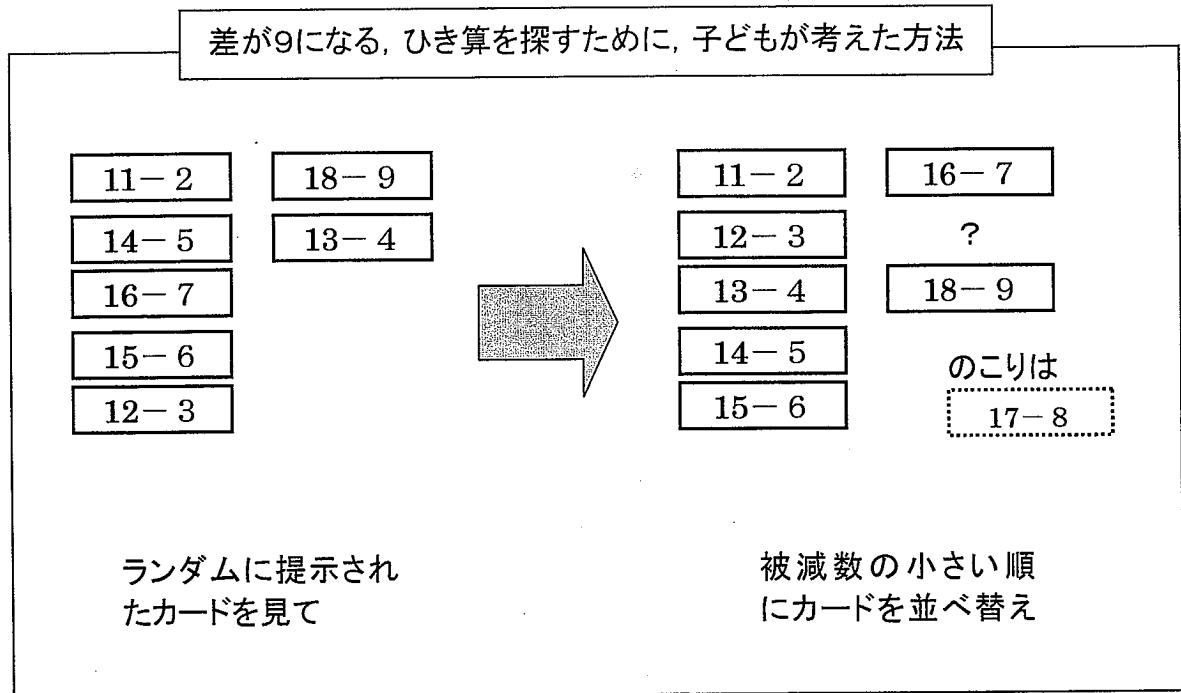
てごらん。

※ この時点で、残り1枚のカードの式が分からない子どもは4名いた。

T 正直でいいよ。じゃあみんな、わからないよって思っているみんなのために、このカードを何とかしてわかるようにするヒントが出せないかな？

C できます。

T では、やってみましょう。



C カードを並べ替え始める。(被減数の小さい順に)

C 同じです。

C わかった。

※ この時点で、残りの1枚のカードの式がわからないと発言した4名の子ども全員が式を特定できた。

T わかったって言う人がいるね。では、最初はわからないって言っていた〇〇君がわかったって言ったから、残りのカードを並べてみてごらん。

C 残りのカードを並べ始める。

C 先生わかったよ。

T では、最後のカードは何かな？

C $17-8=9$ です。

C 同じです。

T どうして、みんなは、カードを並べただけでわかったのかな？

C だって、11から順にひかれる数は11, 12, 13, 14, 15, となっているし、ひく数は2, 3, 4, 5, 6とこっちも順番になっているからです。

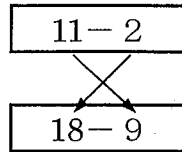
T ここまでをまとめてみるよ。差が9のひき算は8個できるね。それでは、この8個の式から、気づいたことはないかな？

差が9になるひき算の気づき

11-2
12-3
13-4
14-5
15-6
16-7
17-8
18-9



その1 上下2枚のカードをセットにして考えると・・・
ひかれる数とひく数を斜めにたすと20になる。



例： $11+9=20$
 $18+2=20$

その2 ひかれる数とひく数の増え方を見ると・・・
ひかれる数が11, 12, 13, 14, ...と1ずつ
大きくなるにつれて、ひく数も2, 3, 4, ...
と1ずつ大きくなっている。

その3 ひかれる数とひく数の間を見ると・・・
ひかれる数の一の位よりひく数の方が1
大きい。

- T たくさんの気づきが生まれてきましたね。では、もし差が8のひき算をみんなで探したら、何個できるかな？ みんなで予想してみよう。
- C 7個です。
- T 差が8のひき算は7個できるはずだと思っているんだね。どうしてそう思ったのかな？
- C 差が9のひき算は8個だから、差が8になったら、9よりも差が1小さいから、できる数も8個から1個小さくなるはずだと思うからです。
- C 付け加えます。差が9から8, 7, 6, と小さくなると、できる引き算の数も小さくなっていくはずだと思います。だって今までも、数が1つ小さくなったら、いっしょに小さくなったからです。
- T それでは、今日の研究では、差が8のひき算は本当に7個なのか調べてみましょう。

[操作化]

この段階は、差が8になるひき算は7個できるという予想をもとにして、実際に差が8になるひき算を追究する段階である。また、ここでのひき算は、被減数が11から18までの数、減数が0から9までの数でできる、繰り下がりのあるひき算である。子どもたちが追究していった方法は、次のとおりである。

差が8になるひき算を見つける方法(予想)

11-2
12-3
13-4
14-5
15-6
16-7
17-8
18-9

差が9の
ひき算の
見つけ方
をもとに

その1 ひかれる数を決めて考えてみる。

例： $11 - \bigcirc = 8$ になるひき算を考える。

その2 逆算で考えてみる。

$\bigcirc - \triangle = 8$ だから、逆に考えて、 $8 + \triangle$ を考えてみると、ひき算ができる。

その3 ひかれる数とひく数の間を考える。

差が8になるひき算は、ひかれる数の一の位よりひく数の方が2大きいはずだ。

最初に、子どもたちに差が8になるひき算をどのように追究していくか予想させた。すると、上記のように、①ひかれる数を決めて、②逆算で、③ひかれる数とひく数の間を見る、の3つの方法が出てきた。①は差が9のひき算を考える際のカード並べから、②は繰り下がりのあるひき算と繰り上がりのあるたし算の関係から、③は差が9になるひき算の気づきから、それぞれ考えついたものである。

この3つの方法をもとに追究していったが、事後のノート分析から、子どもが選択した方法は、次のようになった。

差が8になるひき算を調べた活動の実際(37名中)

11-2
12-3
13-4
14-5
15-6
16-7
17-8
18-9

差が9の
ひき算の
見つけ方
をもとに

その1 ひかれる数を決めて考えてみる。:18名

例： $11 - \bigcirc = 8$ になるひき算を考える。

その2 逆算で考えてみる。:6名

$\bigcirc - \triangle = 8$ だから、逆に考えて、 $8 + \triangle$ を考えてみると、ひき算ができる。

その3 ひかれる数とひく数の間を考える。:13名

差が8になるひき算は、ひかれる数の一の位よりひく数の方が2大きいはずだ。

[協定化]

この段階は、差が8になるひき算を確認するとともに、気づきを出し合い、差が9と8に共通するきまりから、新たな課題を構成する段階である。

T 差が8になるひき算を発表してください。

(中略)

T 差が8になるひき算は、最初に予想していたとおりに7個になりましたね。それでは、差が8になるひき算を並べてみるよ。これを見るとどんなきまりが見つかるかな？

差が8になるひき算の気づき

11-3

12-4

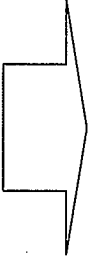
13-5

14-6

15-7

16-8

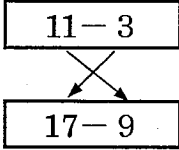
17-9



その1 上下2枚のカードをセットにして考えると・・・
ひかれる数とひく数を斜めにたすと20になる。

11-3

17-9



例： $11+9=20$
 $17+3=20$

その2 ひかれる数とひく数の増え方を見ると・・・
ひかれる数が11, 12, 13, 14, ...と1ずつ大きくなるにつれて、ひく数も3, 4, 5, ...と1ずつ大きくなっている。

その3 ひかれる数とひく数の間を見ると・・・
ひかれる数の一の位よりひく数の方が2大きい。

T それでは、差が9のときと8のときを調べたから、今度は差が7のときはどうなると思うかな？

C 差が7のときは6個絶対できます。そのわけは、差が9のときは8個で、差が8のときは7個で、差より1つだけ小さい数できるからです。

T すごいね。では、どんな式ができるかな？

C いっぱいあるけど、1つだけですか。

T そうですよ。

C それでは、 $11-4=7$ です。

T どうして、 $11-4$ だと思ったのですか。

C だって、差が9のときは、 $11-2$ が最初で、差が8のときは $11-3$ が最初だから、差が7になると $11-4$ が最初になると思いました。

C 付け加えます。ひかれる数とひく数の1の位の間が、今度は3になるからです。

T 今度は、1の位だけを比べると差が3になるのですか？

C だって、差が9のときは1で、差が8のときは2だから、差が7になると3になるはずですよ。

T すごいね！ 今までに学習したことを、どんどん使っていくと、まだやっていない差が7のときも予想ができるんですね。

<本時の授業の考察>

本時では、差が9になる繰り下がりのあるひき算の式にある規則性をもとに、考察の対象となるひき算の差を8に変化させて、より一般性のある規則を見つけだすことができるか学習した。

まず、課題の意識化の段階では、差が9になるひき算の式をいくつかランダムに提示していった。この提示の段階における、差が9になるひき算の式についての子どもたちの気づきの変容は以下のとおりである。

提示枚数	気づきが生まれた子どもの数
1枚提示	0名(37名中)
2枚提示	0名(37名中)
3枚提示	4名(37名中)
4枚提示	18名(37名中)

このことから、子どもたちが差が9になるひき算であることへの理解は、4枚目の提示から大幅に増えてきていることがわかる。また、残りのひき算を考える際には、子どもの中から、カードを被減数の小さい順に並べる方法が生み出された。それによって、子どもたちは、残りのひき算を特定することができた。

次に、差が9のひき算の式をみて気づいたきまりを出し合わせることで、本時の追究のもとになる規則を3つ明らかにすることができた。これは、差が8のひき算にも規則があるかを追究する原動力となるものであり、本時における式理解の基礎となるものである。

さらに、操作化の段階では、差が8になるひき算を追究する際、差が9のひき算の場面で獲得した、式を順に並べたり、被減数の1の位と減数の大きさを比較したりする方法が子どもから生み出された。これは、子どもたちの課題意識の連続性を示すものであり、差が9のひき算の理解をもとに方法を柔軟に工夫する姿であるといえる。

最後に、協定化の段階では、差が8のひき算におけるきまりについて考えた。子どもたちの気づきを見ると、差が9の場合のきまりを差が8の場合にも適応させて考えていることがわかる。このような気づきが生まれた背景には、差が9の場合のひき算の式を見る見方があるといえる。

以上のことから、差が9の場合をもとに、差が8の場合のひき算の式を考える場の設定は、子どものこれまでのひき算の理解をもとに、式の仕組みへと着目させ、新たなきまりを創発させる上で有効であったと考えられる。

5. 結論

本稿では、低学年の「数と計算」領域の学習において、小学校第1学年の子どもが式の規則性をみつけ活用していく際の理解過程を実証的に解明することを目的とした。

その際、課題の提示と課題追究の場と多様な数のとらえ方を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場を工夫することで、子どもの理解過程を重視した算数科授業を構成することを考えた。具体的には、課題の提示と課題追求の場の工夫として、差が9の繰り下がりのあるひき算の式が書かれたカードをランダムに提示する場と、そこでの気づきをもとに差が8の場合を考える場の2つの場を課題とした。これら2つの差に着目したひき算の式づくりを追求する場をとおして、被減数、減数、差の関係を明らかにすることができた。また、多様な式への気づきを共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫として、子どもたちが考えた式の中に数学的知識を発見させ、より価値のある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な気づきを吟味する場を重視することが大切であり、子どもの多様な式の見方を表出させ、共通点や相違点を吟味させることで、全員が納得できる考えを創り出すことができるということが明らかになった。このような事例研究からも、本研究の第2報～第5報の事例研究と同様に、算数学習において個人的構成と社会的構成の両方の活動が行われてはじめて、教室における個々の子どもや子どもたちの理解が深化し得るといことが示唆される。

本研究ではこれまでに小学校算数科における低学年の「図形」領域（第2報）、高学年の「量と測定」領域（第3報）、高学年の「数と計算」領域（第4報）、そして中学年の「量と測定」領域（第5報）に焦点化して、算数学習における理解過程に関する実証的研究を行ってきた。そこで、今後は、他の学年段階の「数量関係」領域の学習における子どもの理解過程を実証的に解明することが課題である。

参考文献

- 1) 小山正孝 (1997) 「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 2) Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education, Vol.5, pp.21-33.*
- 3) 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文 (2000) 「算数学習における理解過程に関する研究 (I) - 数学理解の2軸過程モデルの理論的再検討 -」, 『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』, 第28号, pp.117-123.
- 4) 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 中村武司 (2002) 「算数学習における理解過程に関する研究 (II) - 第2学年における三角形と四角形の内容を中心にして -」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第30号, pp.89-98.
- 5) 赤井利行, 小山正孝, 中原忠男, 中村武司, 磯部年晃 (2003) 「算数学習における理解過程に関する研究 (III) - 第5学年における「台形の面積の求め方」を中心にして -」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第31号, pp.115-122.
- 6) 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 片桐毅 (2004) 「算数学習における

理解過程に関する研究 (IV) - 第 5 学年における「分数と小数, 整数の包摂関係」を中心に - , 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第 32 号, pp.181-188.

- 7) 片桐毅, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 磯部年晃 (2005) 「算数学習における理解過程に関する研究 (V) - 第 3 学年における「重さ」の概念形成を中心に - 」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第 33 号, pp.217-223.

広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第 34 号, 2006. 3, pp.327-332 に所収

RESEARCH ON THE PROCESS OF UNDERSTANDING MATHEMATICS: WAYS OF FINDING THE SUM OF THE MEASURE OF INTERIOR ANGLES IN A CONVEX POLYGON

Masataka Koyama

Graduate School of Education, Hiroshima University, Japan

This is a part of the series of research on the process of understanding mathematics based on the “two-axes process model” that consists of two axes, i.e. the vertical axis implying levels of understanding such as mathematical entities, relations of them, and general relations, and the horizontal axis implying three learning stages of intuitive, reflective, and analytic at each level (Koyama, 2000, 2003, 2004). The purpose of this research is to closely examine the 40 fifth-graders’ process of understanding the sum of the measure of interior angles in a convex polygon in a classroom at the national elementary school attached to Hiroshima University.

In order to improve their understanding of the sum, with a classroom teacher, we planned the teaching unit of “The Sum of the Measure of Interior Angles” and in total of 8 forty-five minutes’ classes were allocated for the unit in the light of “two-axes process model”. Throughout the classes we encouraged students to think the sum in a various and logical/mathematical way. The data collected in the observation and videotape-record during the classes were analysed qualitatively to see the change of students’ thinking and the dialectic process of individual and social constructions through discussion among them with their teacher in the classroom.

As a result, the teaching unit starting from the tessellating congruent triangles to the finding/explaining ways for the sum of the measure of interior angles in quadrilaterals, pentagons, and hexagons could improve the students’ mathematical understanding and logical thinking. Especially, their whole classroom discussion on the various way of finding the sum in a hexagon was effective for the students to share with and reflect on their ideas leading to the general formula for the sum in a convex polygon with n sides.

References

- Koyama, M. (2000), A Research on the Validity and Effectiveness of “Two-Axes Process Model” of Understanding Mathematics at Elementary School Level, *Proceedings of the 24th PME Conference*, Hiroshima, Japan, 3, 159-166.
- Koyama, M. (2003), Research on the Process of Understanding Mathematics: Ways of Measuring Area of Trapezoid, *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, Hawaii, USA, 1, 239.
- Koyama, M. (2004), Research on the Process of Understanding Mathematics: The Inclusion Relation among Fractions, Decimals and Whole Numbers, *Proceedings of the 28th PME Conference*, Bergen, Norway, 1, 315.

Proceedings of the 29th PME Conference, Vol.1, p.253

The 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Melbourne, Melbourne, Australia, 10-15 July, 2005.

数学学習における理解過程に関する研究（Ⅰ）

—中学校第2学年「星形多角形の研究」の授業を事例として—

小 山 正 孝

(広島大学大学院教育学研究科)

0. はじめに

児童・生徒の数学理解が深化する過程を解明するためには、①数学理解はどのような水準に沿って深化するか、②ある水準において、どのように思考が展開するか、という2つの点を明らかにすることが重要である。このような認識のもとに、筆者（Koyama, 1993; 小山, 1997; Koyama, 1997）は、児童・生徒の数学理解の深化の過程を解明し、その深化を促進するための1つの理論的枠組みとして、5つの階層的水準と3つの学習段階をそれぞれ縦軸と横軸にもつ数学理解の「2軸過程モデル」を構築し、その妥当性と有効性に関する研究を行ってきた。その結果、小学校算数科における事例研究によって、教師が児童の算数理解を深化させる授業を構成し実践する際に2軸過程モデルがその枠組みとして有効に機能し得るということが明らかになった。しかしながら、中学校数学科における理解過程に関する事例研究は十分ではない。

そこで、本稿では、数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法（小山, 2005）を具体化するための事例研究の1つとして、中学校数学科の授業を分析・検討することによって、数学学習における生徒の理解過程について考察することを目的とする。そのため、以下では、まず、数学理解の2軸過程モデルの概要を述べる。次に、本稿で分析・検討する中学校第2学年「星形多角形の研究」の授業のプロトコルを示す。そして、この授業にみられる観察可能な生徒の理解過程について考察し、数学科授業における学習指導への示唆を導出することとする。

1. 数学理解の2軸過程モデル

1-1. 数学理解の過程モデルの具備すべき特性

(1) 過程モデルの「記述性」と「規範性」

数学教育の研究においてこれまでに提案された理解のモデルの多くは、児童・生徒が算数・数学をどのように理解しているかということの説明すること、すなわち理解の様相や過程を説明することにその力点が置かれているように思われる。それらは、児童・生徒の算数・数学の理解にはどのような種類があるかを記述したり、理解という内面的な現象がどのように起こっているかを記述したりできるという意味で、「記述性 (descriptive characteristic)」を備えたものであると言える。

しかしながら、数学教育においては、このような児童・生徒の理解の様相や過程の実態を把握するだけでは十分とは言えない。なぜなら、数学教育は、本来、教師が教えるという活動と児童・生徒が学ぶという活動の2つ、すなわち教授活動と学習活動によって成立するものだからである。したがって、数学理解の過程モデルが、「教授＝学習」活動としての数学教育において真に有効なものであるためには、記述性だけでなく「規範性 (prescriptive characteristic)」, すなわち児童・生徒に算数・数学

を理解させるにはどのような状況を設定すればよいか、また、理解をどのような方向に深化させればよいか、などに対する教授学的原理を示唆し得るような特性をも備えていなければならないと考える（小山，1992）。

(2) 反省的思考による理解の深化

筆者は、これら両方の特性を備えた、数学理解の過程モデルを構築しようと試みている。その際、注目すべきは、児童・生徒の数学理解の深化における「反省的思考 (reflective thinking)」の役割である（中原，1995，pp.160-178）。筆者は、《反省的思考とは、学習者が自らの活動や操作に注意を向け、それらやその結果を意識化して、図や言葉によって表現することを目的とする思考である。》ととらえ、次の3点が重要であると考え。①反省的思考は、学習者自身による活動や操作をその前提とする、②反省的思考の対象は、その活動や操作およびその結果である、③反省的思考の目的は、自らの活動や操作を意識化し、それを表現することである。このような反省的思考は、数学理解の階層的水準の上昇に必要不可欠であり、算数・数学の学習における児童・生徒の理解の深化（van Hiele, 1958; Pirie & Kieren, 1989）にとって重要な役割を果たすと考える（小山，1995）。

1-2. 数学理解の2軸過程モデルの概要

このような考え方に立って、筆者（Koyama, 1993; 小山，1997）は、児童・生徒の数学理解の深化の過程を解明し、その深化を促進するための1つの理論的枠組みとして、理解のいくつかの階層的水準と各水準における学習段階をそれぞれ縦軸と横軸にもつ、数学理解の「2軸過程モデル (two-axes process model)」を構築した。

このモデルの「縦軸 (vertical axis)」は理解水準に関するもので、数学的対象の理解、対象間の関係の理解、関係の一般性の理解などのいくつかの階層的水準から成る。一方、このモデルの「横軸 (horizontal axis)」は学習段階に関するもので、各理解水準における以下のような直観的段階、反省的段階、分析的段階の3つの学習段階から成る（Wittmann, 1981）。必ずしも直線的にはないが、これらの段階を経て、児童の理解水準はある水準から次の水準へと上昇し得ると考えられる。

- (1) 直観的段階 (Intuitive Stage)とは、学習者が具体物あるいは概念や性質などの数学的対象を操作する、直観的思考 (intuitive thinking) を働かせる段階である。
- (2) 反省的段階 (Reflective Stage)とは、学習者が自らの活動や操作に注意を向け、それらやその結果を意識化して、図や言葉などによって表現することを目的とする、反省的思考 (reflective thinking) を働かせる段階である。
- (3) 分析的段階 (Analytical Stage)とは、学習者が表現したものをより洗練して数学的に表現したり、他の例で確かめたり、それらのつながりを分析したりすることによって、統合を図ることを目的とする、分析的思考 (analytical thinking) を働かせる段階である。

この「2軸過程モデル」は、教材や児童・生徒の実態に応じてさらに精緻化する必要があるが、教師が算数・数学科の授業を構成したり実践したりする際に、算数・数学の学習における児童・生徒の理解過程をとらえ、理解を深化させるための1つの視点になり得ると考えている。

2. 中学校第2学年「星形多角形の研究」の授業の展開

2-1. 本授業の位置づけとねらい

本稿で取り上げる授業は、中学校第2学年の生徒（39名）を対象にして、単元「三角形と四角形」の最後に課題学習として行われた「星形多角形の研究」の授業の1時間分である（富永，2003）。したがって、生徒にとって平行線の性質，多角形の内角や外角の和，二等辺三角形の性質，円周角の定理，平行四辺形の性質などは既習事項である。

本時の授業を行った教師の教材観や指導観は，その学習指導案の中に以下のように述べられている。

《本時は課題学習として，正 n 角形において k 個隣の頂点を順に結んだときにできる図形を題材に取り上げ，その性質を調べる活動を行う。この図形は n が k で割きれない場合には星形多角形となる。また， k が n の $1/2$ を超えない範囲では，「先端の角」（次頁の図を参照）と呼ぶことにした角の大きさは k の1次関数となり，その変化の割合は $360^\circ/n$ である。このことは n や k を変化させたいくつかの場合について調べ，その結果を検討することで予想することができる。

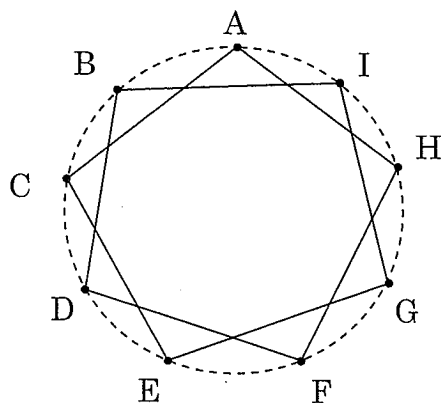
この課題のよさは，得られる予想が複数あり，なおかつその難易度がいくつかの段階にわかれることである。したがって，個々の生徒の理解度に応じた発見があり，正 n 角形の内角の大きさを表す式と先端の角の大きさを表す式の関係， k が n の $1/2$ を超えた場合にも適用できるように角の大きさについての解釈の方法を考えることなど，発展的な課題を提示することもできる。この課題のよさをいかすため，机間指導やノート点検を利用して生徒の学習の状況を観察し，個々の生徒に適切な課題を提示するなど，個に応じた学習を進めていきたい。

さらに，この課題学習において k や n を一般化した場合のことを考え，その結果を証明することを通して，一般化することの意味について考える機会をもたせ，数学的な見方や考え方のよさを感じ取らせたい。また，このような学習経験を積み重ねることで，生徒の課題に取り組む姿勢を育てられると考えている。》（富永，2003，p.1）

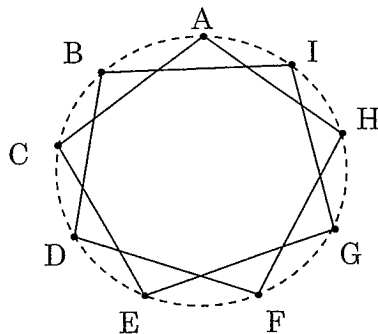
本授業は数学理解の2軸過程モデルに基づいて構成されたものではない。しかしながら，本授業が「星形多角形における先端の角の大きさの求め方を理解させる」，「課題を一般化したときの結果を調べることを通じて，数学的な見方や考え方のよさを感じ取らせ，主体的に課題に取り組む態度を養う」ことを目標としていることから，本稿での分析・検討の対象とする。以下では，この授業のビデオ記録とそのプロトコルをもとに観察可能な生徒の理解過程について考察してみよう。

2-2. 本授業のプロトコル

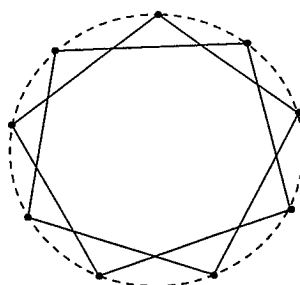
本授業の導入で教師によって星形多角形のかき方の復習が行われた後，本時の課題として，「下図のように，正九角形において2個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角の大きさはいくらか。」という課題1が提示された。



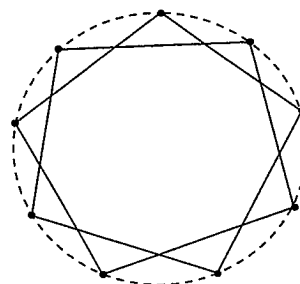
SS : (3名の生徒が板書を終える。) (図1)



$$180 - (40 + 40) = 100$$



$$\begin{aligned} 180 \times (9 - 2) \div 9 &= 140 \\ (180 - 140) \div 2 &= 20 \\ 140 - 20 \times 2 &= 100^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 360 - 180 \times (9 - 2) \\ &= 360 + 540 \\ &= 900 \quad 900 \div 9 = 100 \end{aligned}$$

図1 3名の生徒の板書

生徒の自力解決中に教師は机間指導をして、生徒の解答におよそ3パターンあることに気づき、生徒S1、生徒S2、生徒S3の3名を指名して、それぞれの解答を板書させた(図1)。そして、以下のように、これら3名の生徒に順次、各自の解答を説明させた。

S1 : (教師に向かって小声で) ここ(△AJK)が二等辺三角形っていうこと、みんなに言わなくてもいい?(図2 : S1の板書を参照。ただし点の名前(JとK)は

記録者が便宜上つけたものである。)

T: うん, 二等辺三角形。いやいや, ちゃんとみんなに言わないと。私がこっちに行こうか, みんなの方に。(生徒たちの側に移動する。)

S1: はい, ここの三角形 ($\triangle AJK$) が,

T: (小聲で何やら言う。)

S1: 二等辺三角形だから, ここ ($\angle AJK$) を $\angle a$ とすると, ここ ($\angle IJC$) が $180 - a$, $180 - a$ だから, で, この, この内側の九角形の, 1つの内角が, 180 かけ 7 で, 180×7 , 割る 9 で, 140 度だから, $180 - 140$ 度っていうことになって, $a = 40$ 度。さっき言ったように, ここ ($\triangle AJK$) が二等辺三角形だから, ここ ($\angle AKJ$) も a で, 三角形の内角の和が 180 ひく, 40 , 40 , 100 度になりました。

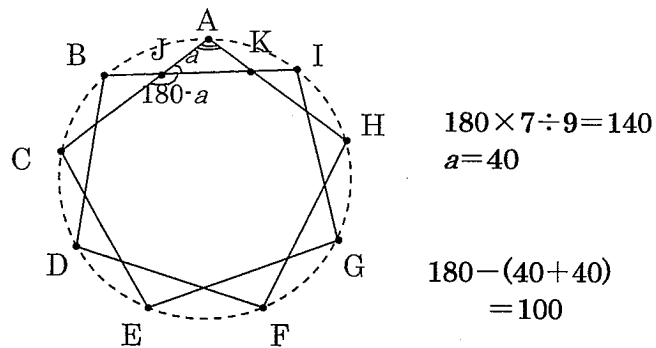


図2 生徒S1の板書

S2: (図3: S2の板書を参照) ここの最初の式は, 外側の点線の, 九角形の1つの内角で, この三角形 ($\triangle AHI$) に注目して, ここ ($\angle AIH$) が 140

T: それはさっきの説明と一緒にだ。九角形...

S2: それでオレンジの三角形 ($\triangle AHI$) が二等辺三角形だから, ここ ($\angle IAH$) とここ ($\angle IHA$) が 20 度で, それでこの三角形 ($\triangle ABI$) も同じように, この三角形 ($\triangle AHI$) と同じだから, ここ ($\angle AIB$) とここ ($\angle ABI$) が 20 度になって, んで, ここから, この 140 度から, 20 度かける 2 を引いたら, 100 度になりました。

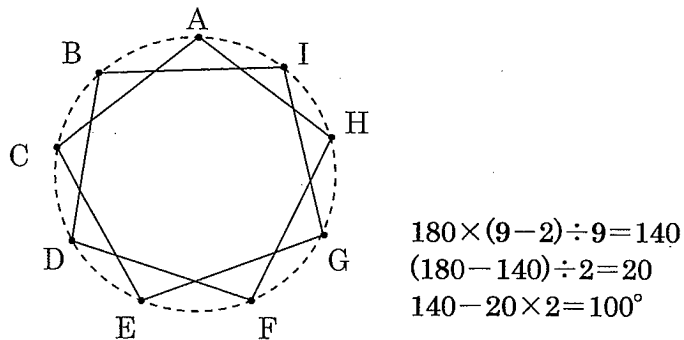
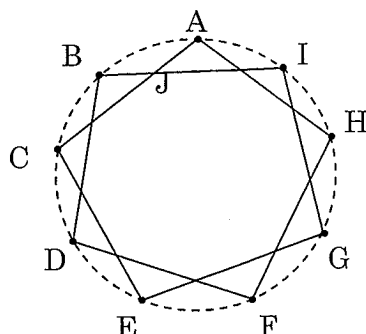


図3 生徒S2の板書

S3: (平行線 AB と CI を引く。図4を参照) ここの小さい三角形 ($\triangle ABJ$) と, この三角形 ($\triangle CJI$) が...だったら, 対頂角で, ここ ($\angle AJB$ と $\angle CJI$) が, 同じ角になるから, えーと, ここの角 ($\angle JIC$ と $\angle JCI$) をこっち側 ($\angle BAJ$ と \angle

ABJ)へ移して、ここに一個五角形が出来ます(五角形 ABDFH をなぞる)。それで、…ここに四角形ができるから(四角形 CEGI をなぞる)、この、えー、この、全部の角は、360 度たす、540 で、900 になって、全部、角は同じ大きさだから、900 割る 9 で 100 度…。



$$\begin{aligned}
 &360 + 180 \times (5 - 2) \\
 &= 360 + 540 \\
 &= 900 \quad 900 \div 9 = 100
 \end{aligned}$$

図4 生徒 S3 の板書

教師は、上述のように生徒S1が先端の角の大きさの求め方を説明した後に、「生徒S1の背中で見えにくかった人もいるかもしれませんから、もう一回復習するな。」と言って、生徒S1の説明を繰り返し確認していった。そして、上述の3名の生徒の説明が終わった後に、「解き方はいろいろあるけれども、…どれを使っても100度」となるということを行い、「納得? 納得できん?」と生徒たちに問いかけた。それに対して、生徒たちから納得できないという声は聞かれなかった。

そこで、教師は、次の課題2「正九角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 $k=1, 2, 3, 4$ の場合について調べ、わかったことをまとめよう。」を提示した。そして、「いつも言っているけど、分からないときは相談してもいいよ。相談した方が分からないことが見えてくる。でも、他人に任せっきりではいけないよ。自分も一緒になって考えてね。」と言って、相談しながら課題2について考えてもよいことを生徒たちに告げた。

生徒が解決中に教師は机間指導しながら、 $k=1$ のときは正九角形になり140度、 $k=3$ のときは正三角形になって60度であることを確認した。

そして、教師は「さあ問題です。 $k=4$ のとき。なんて複雑な形でしょう(図5を参照)。さあ、これどうでしょうか。」と問い、生徒S4を指名して求め方を説明させた。

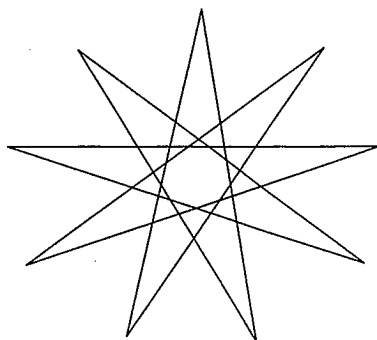


図5 $k=4$ のときの図形

S4: これ ($k=4$ の時の図形) のまわりに円があるとすするじゃないですか、
T: まわりに円があると考える。あー、最初コンパスを使いたくなかったのはなあ、
それが、コンパスで描くのを見られたとき、一発でこの、解法でてくるからなあ。
描きたくなかったんだけど、気づかれてはしょうがない。はい。で、円を描く(図
5の図形の周りに円を描く)。はい、そうすると?
S4: えー、円の中心から、
T: うん。円の中心から?はい。
S4: 1つの頂点に向かって、線を描く。
T: はい、はい、はい。まあ例えば、この場合は、こことここを狙うんだらうな。
はい、それで?
S4: で、えっと、まあこの中心角は、
T: まあこの中心角は?はい。
S4: えっと、360度割る9で40度。
T: うんうん、中心角は、360度割る9で40度。はい、それで。
S4: (何か小声で言う。)
T: 円周角は、
S4: (何か小声で言う。)
T: うん、そうだな。中心角は、円周角のちょうど2倍になりますから、逆に言え
ば、円周角は中心角の半分ですよっていうことだから、はい。円周角は、40度割
る2で20度と。はいオッケー、いいですね。S4, 正解。

このように生徒 S4 は、円周角と中心角の関係を利用して、先端の角の大きさが 20 度になることを説明しようとしたようだが、教師は生徒 S4 の発表の途中で割り込んで発言し、最終的には、生徒 S4 の言おうとしていることをくみ取って、教師が先端の角の大きさは 20 度であることを述べた。

その後、教師は「表を見て、気づいたことわかったこと、ないですか?」と生徒たちに問いかけた。それに対して、以下のように、生徒 S5 は 40 ずつ減っていること、生徒 S6 は先端の角の大きさが 20 の倍数になっていることを答えた。

S5: えっと、40 ずつ。
T: 40 ずつ。
S5: 減っている。

k	1	2	3	4
先端の角の大きさ	140	100	60	20

正 n 角形
 k 個隣り

k の値が 1 増えるごとに……減っている

図6 正 n 角形 k 個隣りの先端の角の大きさ

T: 減っている。はい。 k の値が 1 増えるごとに、40 度ずつ、減っているんですね。
(板書: k の値が 1 増えるごとに……減っている、と図6の表の下に書く。) は
い。まあ、大なり小なり、これに気がついてくれた人がほとんどだと思うんです
が、他にも気づいたことある人?これ言ってくれるとうれしいんだけどなってい
うのが、幾つか答えがあるんですが、さあどうですか?

S6: えっと, 20 を基準にして, $\dots 60$ が 3 倍で, 100 が 5 倍で, 140 が 7 倍だから...

T: ふんふんふん, はいはいはい. 140 度は, えーと, これは, 20 度かける 7, それで, 100 は 20 度かける 5 だと. こっちは 20 度かける 3 だ, これは 20 度かける 1 だってね. だから, 1, 3, 5, 7 っていうときに, あの一, まあ奇数だね, がずっと続きますよっていうことに気がついたんですね. オッケー. これも 1 つ立派な性質でございますね. 他にない? もうない?

T: はい. じゃえーっと, ちょいと, 話を. これ 40 ずつ減っているっていうけど, この 40 度って, なんで 40 なんだろうね? なんで 40 なの? あるいはこういうようなことが考えられる. 40 度ずつ減ってる. これ, 九角形だけかな? 八角形や例えば十角形や, あるいは六角形, 十二角形, もっといや二十四角形もある. そんな中で調べていったらいったいどうなるんだろうか? 考え出せばいくらでもありそうですけども. ちょっと話を... これ 40 度. なんで九角形なら 40 度なんかな? えー, (一番前の一人の生徒を指しながら)

S: (照れながら嫌がる.)

T: 九角形ってどういう意味? 何か意味ありそう? なさそう? お, はい. S7.

S7: 中心角?

T: 中心角. 中心角が 40 度だ. お, 確かに中心角が 40 度だな. 中心角が 40 度だったら, それで, ここではどういう形で出てくるんだろうか. 確かに中心角が 40 度. だからまあ, もっと言えば, 360 を九角形で, 9 で割っているから 40 度. なんか関連性がありそうだね. だからこの中心角が, ここの先端の角, どういう形に関わってくるのか. これもまた 1 つ魅力的なテーマであるな. いろんなことが考えられるんだけど, はいはいはい. 残念ながらもう時間があとちょっとしかございませんので, はい, それじゃあ課題の 3 に行きましょう. はい. いいですか一, はい, 行きます. 問題. 正 n 角形. 正 n 角形において, k 個隣, 分かる? 正 n 角形で k 個隣, だから, 具体的な数字じゃないんだ. (正 n 角形, k 個隣と板書する. 図 6 を参照) はい, で, 結んでできる図形の, 先端の角の大きさを, n と k の式で表しましょう. はい, これが, 今日の \dots になります. もう今まで考えられるだけの素地をみんなに提供してあるはずだから, 考えてもらって.

このように, 教師は, 先端の角の大きさが 20 の倍数になっているという生徒 S6 の気づきに対して「これも 1 つ立派な性質でございますね。」と評価した後, 「40 度ずつ減ることと九角形との間に何か関連性がないか」と生徒たちに問いかけた. そして, 生徒 S7 は少し自信なさそうに「中心角?」と答えた. それに対して教師は「だからこの中心角が, ここの先端の角, どういう形に関わってくるのか. これもまた 1 つ魅力的なテーマであるな。」というように, 明確な回答はせず, 1 つの考えてみる価値のある魅力的なテーマであることに言及するに留めた. そして, 授業時間が残り少ないこともあって, 課題 3 「正 n 角形において, k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを, n と k の式で表しましょう。」を提示した.

3. 本授業にみられる生徒の理解過程についての考察

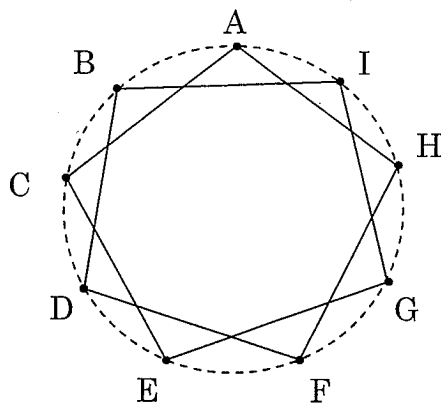
本時の授業は, 概略, 上述のように展開した. そこで, 本節では, この授業にみられる観察可能な生徒の理解過程について考察してみよう.

この授業では、次の3つの課題が教師から提示されている。

課題1：「下図のように、正九角形において2個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形(トリステラゴン)の頂点の先端の角の大きさはいくらか。」

課題2：「正九角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 $k=1, 2, 3, 4$ の場合について調べ、わかったことをまとめよう。」

課題3：「正 n 角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 n と k の式で表しましょう。」(注1)



このような課題を教師が提示したのは、本時の目標として、次の2点が設定されていたからであろう。

目標1：星形多角形における先端の角の大きさの求め方を理解させる。

目標2：課題を一般化したときの結果を調べることを通じて、数学的な見方や考え方のよさを感じ取らせ、主体的に課題に取り組む態度を養う。

授業の実際の展開では、課題1と課題2の解決に多くの時間が費やされ、課題3は次時の学習課題として残されることになった。したがって、以下では、課題1と課題2を解決していった際の観察可能な生徒の理解過程について考察することとする。

この授業で最初に教師から生徒に提示された課題1は、数学理解の2軸過程モデルの縦軸における「数学的対象(正九角形において2個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角の大きさ)の理解」の水準に位置づくものである。この課題1については、教師が数学理解の2軸過程モデルの横軸を成す3つの学習段階を意図的に設定しなくても、教師に指名された3名の生徒(S1, S2, S3)はそれまでの学習によって理解したことを活用し、先端の角の大きさが 100° になることを論理的推論によって求め、説明することができている。しかしながら、これら3名の生徒の着眼点は次のように異なっている。

生徒S1：3つの線分AC, AH, BIで囲まれた三角形($\triangle AJK$)が二等辺三角形であるという点(図2の板書を参照)

生徒S2：3つの線分AH, AI, IHで囲まれた三角形($\triangle AHI$)が二等辺三角形であるという点(図3の板書を参照)

生徒S3：平行線ABとCIを引いてできる小さい2つの三角形($\triangle ABJ$ と $\triangle CJI$)において、 $\angle JIC$ と $\angle JCI$ を $\angle BAJ$ と $\angle ABJ$ へ移して1つの五角形(ABDFH)に変形する点(図4の板書を参照)

生徒S1と生徒S2の着目している三角形は異なっているが、両者とも「二等辺三角形の両底角は等しい」とことと「正九角形の1つの内角の大きさは 140° である」とい

うことを根拠にして、先端の角の大きさが 100° になることを求めている。それに対して、生徒S3の考え方はユニークで、上記の着眼点による角度の移動をうまく利用して、星形九角形を五角形と四角形に分けて内角の和 900° を求め、先端の9つの角の大きさが等しいことから、それを9で割って先端の角の大きさが 100° になることを求めている。このように、最終的には 100° という同じ結果になるが、それを導く方法は異なっている。その意味で、これら3名の生徒は課題1の「数学的対象の理解」の水準に達しているが、その理解の仕方は異なっていると言える。このことから、一般的に数学理解について考えるときには、当然のことながら、単に最後の答えの正誤で理解できているかどうかを判断するのではなく、その答えに至る過程が重要であり、授業においてそのことを大切にすることが示唆される。この授業で生徒の3つの異なる解法を取り上げて説明させていることから、教師はその重要性を十分に意識していると考えられる。

しかしながら、生徒S1が教師に向かって小声で言った「ここ($\triangle AJK$)が二等辺三角形っていうこと、みんなに言わなくてもいい？」という呟きの背後にあると考えられる生徒S1の不安を、教師は十分に察知できなかったようである。 $\triangle AJK$ が二等辺三角形であることは図からは明らかであるが、生徒S1はそのことを証明することなく根拠としてよいか、不安に感じていたのであろう。これとは逆に、生徒S3は線分ABとCIが平行であることを、何の不安を感じることもなく当然のこととして説明しているようであった。このように、課題1の解法の相違は教師にもとらえられるが、その背後にある生徒の心理的不安や自信までもとらえることは授業を行っている教師には難しいのかもしれない。さらに、上述の3名の生徒の説明が終わった後に、教師は「解き方はいろいろあるけれども、どれを使っても100度」になるということを言い、「納得？納得できん？」と生徒たちに問いかけ、それに対して生徒たちから納得できないという声が聞かれなかったことから、課題2を提示した。確かに発表した3名の生徒は課題1の先端の角の大きさの求め方をそれぞれの仕方理解していたであろうが、発表しなかった他の生徒たちはどうであっただろうか。このことは授業の録画記録だけでははっきりせず、教師が授業の限られた時間の中でそのことを把握することは難しいであろう。

さて次に、課題2が提示された後の観察可能な生徒の理解過程をみていこう。この課題2は数学理解の2軸過程モデルの縦軸における「対象間の関係(正九角形において k 個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角の大きさの関係)の理解」の水準に位置づくもので、それは生徒たちの理解の深化をねらった課題であると言える。こうした課題2について、まず、生徒たちは「正九角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形」が $k=1, 2, 3, 4$ の場合どのような図形になるかを考えている。 k の値が変化するとそれに伴ってできる図形がどのように変わるかを確認する必要があったからであろう。このことから、この時点での生徒たちの理解の焦点は、一時的ではあっても、先端の角の大きさの求め方から図形へと移動していると考えられる。それは、Pirie & Kieren (1989)の数学理解の「超越的再帰モデル」における「イメージづくり」の水準への折り返し現象であり、こうした現象は理解を力動的な過程としてとらえる場合にはしばしば起こり得るものである(Koyama, 1995)。

では、なぜ、ここでこのような折り返し現象が起こったのであろうか。一つには、大多数の生徒にとって課題1($k=2$ のとき)で考え理解したことをそのまま形式化し適用することが困難であったからであると考えられる。この授業の対象者が中学校2

年生であったことから、ごく自然な理解の過程をたどったとも言える。また、これとは別に、このような折り返し現象が起こったのは教師の提示した課題の内容と提示の仕方にその理由があるとも考えられる。この授業では上述のように課題1, 課題2の順で提示されたが、これらの課題を次の課題1', 課題2'のように変更して提示していたら、生徒の理解過程は本時の授業でみられたものとは異なったものになったであろう。

課題1': 「正九角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形は、どのような形か。」

課題2': 「そのときできる図形の先端の角の大きさを調べ、わかったことを表にまとめよう。」

課題1'と課題2'は、Pirie & Kieren (1989) の数学理解の「超越的再帰モデル」ではそれぞれイメージづくりと性質認知を促すものとして特徴づけられるが、数学理解の2軸過程モデルでは「対象間の関係の理解」の水準へ生徒の理解を深化させることが目標であり、そのため学習段階としては課題1'による「直観的段階」、課題2'による「反省的段階」と「分析的段階」を設定する必要があると考えられるからである。一般に教師が授業を構成する際には目標を設定することはもちろん大切なことであるが、たとえ同じ目標であってもそれを達成するために教師が設定する学習状況(課題の内容や提示の仕方、学習形態など)は多様に考えら得る。それゆえ、生徒の数学理解の実態を考慮し、生徒の数学理解の深化を促すにはどのような学習状況を設定するのがより効果的かを教師は判断しなければならない。

さて、最後に、生徒S4が $k=4$ のときに円周角と中心角の関係を利用して先端の角の大きさが求められるということを発表し、 $k=1, 2, 3, 4$ のそれぞれ場合の先端の角の大きさを整理した表を見て気づいたことを発表する場面以後の観察可能な生徒の理解過程についてみていこう。ここでは、教師に促されて、生徒S5は40ずつ減っていること、生徒S6は先端の角の大きさが20の倍数になっていることを答えた。これらの生徒は k の値と先端の角の大きさの値との変化や対応のきまりには気づいていたが、もとの形が正九角形であることとそれらのきまりを関係づけようとはしていなかった。

そこで、教師は「なんで九角形なら40度なんかな?」と発問した。この発問は生徒たちの理解をさらに深化させるためのものであり、深化の方向を指示する働きを担ったものであると考えられる。しかしながら、実際は生徒S7が少し自信なさそうに「中心角?」と答えたただけであった。確かにこの生徒S7の呟きは教師の発問に対する答えとしては不十分であるが、生徒S7がこのように答えることができたのは、その前に生徒S4が $k=4$ のときに円周角と中心角の関係を利用して先端の角の大きさを求めるという考えを発表したのを聞いていたからであろう。ここに、一つの教室で教師と多くの生徒たちが数学を学びあうこと、つまり社会的相互作用することの意義を看取することができる。

本時の授業では授業時間が残り少ないこともあって教師は急いで課題3を提示したが、この課題を提示するよりもむしろ、正九角形の場合について分かったことを整理し、関連づけることに残りの時間を使ってもよかったであろう。なぜなら、課題3「正 n 角形において k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 n と k の式で表しましょう。」は数学理解の2軸過程モデルの縦軸における「関係の一般性(正 n 角形において k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大き

さという関係の一般性)の理解」の水準に位置づくもので、これによって課題2をさらに一般化する方向で生徒の理解の水準を上げるためには、一般化する前の正九角形について生徒が行ったことを反省し、気づいたことを分析し、統合する活動が必要であると考えられるからである。つまり、このことは数学理解の2軸過程モデルの横軸を成す「反省的段階」と「分析的段階」における生徒の活動や理解を重視することであり、それにはかなりの時間を要するからである。

本時の授業のプロトコルによると、課題3を提示した後、教師は「もう今まで考えられるだけの素地をみんなに提供してあるはずだから、考えてもらって」と言い、しばらく机間指導をして、授業終了のチャイムが鳴った後、「はい、何人かの人にはできているな。」と言っていることから、先端の角の大きさを n と k の式で表すことができた生徒も何人かはいたようである。このような生徒たちは、短時間の内に「分析的段階」で正九角形の場合の先端の角の大きさと k の値との関係に気づき、その関係の一般性(正 n 角形における先端の角の大きさと k の値との関係)を理解できた生徒であろう。しかしながら、短時間では、他の多くの生徒たちはこうした関係やその一般性を理解することはできなかったようである。したがって、こうした生徒たちに対しては、生徒S4の発言をヒントにして、 $k=1, 2, 3, 4$ の場合それぞれの先端の角の大きさと中心角の大きさを再度とらえ直させることが有効であろう。

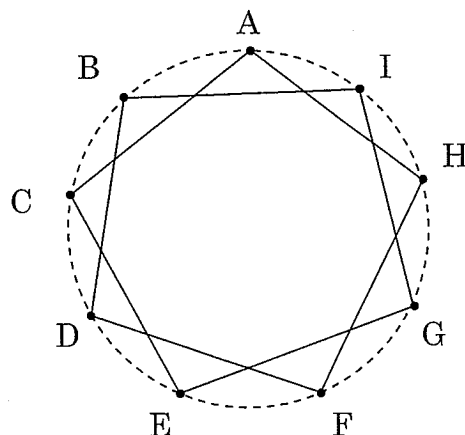
4. おわりに

本稿では、数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法を具体化するための事例研究の1つとして、中学校数学科の第2学年における「星形多角形の研究」の授業を分析・検討することによって、その授業にみられる観察可能な生徒の理解過程について考察した。この授業は、単元「三角形と四角形」の最後に課題学習として行われたもので、生徒がそれまでに学習し理解したことを深化させるねらいをもった授業であった。そのために教師は、次のような3つの課題を順次提示していった。

課題1:「下図のように、正九角形において2個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形(九角星)の頂点の先端の角の大きさはいくらか。」

課題2:「正九角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 $k=1, 2, 3, 4$ の場合について調べ、わかったことをまとめよう。」

課題3:「正 n 角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 n と k の式で表しましょう。」



こうした授業にみられる観察可能な生徒の理解過程を分析した結果、主として以下の点が明らかになり、生徒の数学理解の深化を意図した数学科授業における学習指導に対する示唆を導出することができた。

第一に、課題1は数学理解の2軸過程モデルの縦軸における「数学的対象（正九角形において2個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角の大きさ）の理解」の水準に位置づくもので、その課題1の解答を発表した3名の生徒は「数学的対象の理解」の水準に達していると言えるが、その着眼点は異なっていた。その意味で課題1におけるこれら3名の生徒の理解の仕方は異なっていると言える。このことから、一般的に数学理解について考えるときには、当然のことながら、単に最後の答えの正誤で理解できているかどうかを判断するのではなく、その答えに至る過程が重要であり、授業においてそのことを大切にすることが示唆される。

第二に、課題2は数学理解の2軸過程モデルの縦軸における「対象間の関係（正九角形において k 個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角の大きさの関係）の理解」の水準に位置づくもので、それは生徒の理解の深化をねらった課題であると言える。この課題2の解決において、生徒たちの理解の焦点は、一時的ではあっても、先端の角の大きさの求め方から図形へと移動し、「イメージづくり」の水準への折り返し現象がみられた。その理由としては2つのことが考えられるが、その1つとして教師が提示した課題の内容と提示の仕方が考えられる。それゆえ、生徒の理解の実態を考慮し、生徒の数学理解の深化を促すにはどのような学習状況を設定するのがより効果的かを教師は判断しなければならないということが示唆される。

第三に、教師は生徒たちの理解を深化させ、深化の方向を指示する意図の発問（「なぜ九角形なら40度なの？」）をした。それに対する生徒の眩き（生徒S7の「中心角？」）は不十分であったが、その眩きは別の生徒（生徒S4）が発表したことを聞いていたからであろうと推察される。このことから、一つの教室で教師と多くの生徒たちが数学を学びあうこと、つまり社会的相互作用の重要性が示唆される。

第四に、課題3「正 n 角形において k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 n と k の式で表しましょう。」は、数学理解の2軸過程モデルの縦軸における「関係の一般性（正 n 角形において k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさという関係の一般性）の理解」の水準に位置づくものであると言える。この課題3によって課題2をさらに一般化する方向で生徒たちの理解の水準を上げるためには、数学理解の2軸過程モデルの横軸を成す「反省的段階」と「分析的段階」を設定し、生徒が一般化する前の課題2で行ったことを反省したり（「反省的段階」の活動や理解）、気づいたことを分析し、統合したりすること（「分析的段階」の活動や理解）を重視する必要があるということが示唆される。

これらのことから、数学理解の2軸過程モデルの縦軸に沿って「数学的対象の理解」から「対象間の関係の理解」へ、さらに「関係の一般性の理解」へというように生徒の理解を深化させることをねらうのであれば、例えば以下のような4つの課題を用いて2軸過程モデルの横軸を成す学習段階を設定することが、本稿で分析した授業の1つの改善案として考えられる。

課題1'：「正九角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形は、どのような形か。」

課題2'：「そのときできる図形の先端の角の大きさを調べ、わかったことを表にまとめよう。」

課題3'：「正十二角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを調べ、わかったことを表にまとめよう。」

課題4'：「正 n 角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 n と k の式で表しましょう。」

この改善案では、まず、生徒の数学理解を「数学的対象（正九角形において k 個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角の大きさ）の理解」の水準から「対象間の関係（正九角形において k 個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角の大きさの関係）の理解」の水準へと深化させることを目標にして、課題1'による「直観的段階」、課題2'による「反省的段階」と「分析的段階」の学習段階を設定する。そして、その「対象間の関係の理解」をさらに「関係の一般性（正 n 角形において k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさという関係の一般性）の理解」の水準へと深化させることを目標にして、課題3'による「直観的段階」と「反省的段階」、課題4'による「反省的段階」と「分析的段階」を設定する。このような授業構成による2時間の数学科授業を通して、生徒の理解を「関係の一般性の理解」の水準まで深化させようとするものである。

今後は、以上のことを踏まえて、数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法（小山，2005）のさらなる具体化を図るとともに実践的・実証的な研究を行うことが課題である。

附記

本稿は、平成17年度科学研究費補助金基盤研究(C)「数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業改善に関する実践的研究」（研究代表者小山正孝，課題番号16530591）の研究費補助を受けて行われた研究の成果の一部である。

注

1) 課題3「正 n 角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 n と k の式で表しましょう。」の解答は、以下のとおりである。

先端の角の大きさを t とすると、

$$t = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \times k$$

と表される。

上記の課題3で $k=1$ のときは、正 n 角形ができる。

したがって、先端の角の大きさは内角の大きさのことであるから、

$$t = 180^\circ \times (n - 2) \div n$$

となる。これは既習事項である。

この式を変形すると、

$$\begin{aligned} t &= 180^\circ \times (n - 2) \div n \\ &= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \end{aligned}$$

となり、課題3の関係式において、 $k=1$ のときと同じであることがわかる。

引用・参考文献

- 小山正孝 (1992), 「数学教育における理解のモデルについて」, 岩合一男先生退官記念出版会編『数学教育学の新展開』, 聖文社, pp.172-184.
- 小山正孝 (1995), 「反省的思考について」, 中原忠男『算数・数学教育における構成的アプローチによる授業構成論の実証的研究』, 平成6年度科学研究費補助金一般研究C (課題番号05680219, 代表者中原忠男) 研究成果報告書, pp.30-38.
- 小山正孝 (1997), 「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 小山正孝 (2005), 「数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法」, 『日本教科教育学会誌』, 第28巻, 第4号, pp.61-70.
- 富永和宏 (2003), 「中学校数学科学学習指導案」, 平成15年度広島大学附属中学校・高等学校教育研究大会, 公開授業 (2003年11月14日) 学習指導案.
- 中原忠男 (1995), 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社.
- Koyama, M. (1993), Building a Two-Axes Process Model of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 1, pp.63-73.
- Koyama, M. (1995), Characterizing Eight Modes of the Transcendent Recursive Model of Understanding Mathematics, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第1巻, pp.19-28.
- Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 5, pp.21-33.
- Pirie, S. & Kieren, T. (1989), A Recursive Theory of Mathematical Understanding, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No. 3, pp.7-11.
- van Hiele, P. M. & van Hiele-Geldof, D. (1958), A Method of Initiation into Geometry at Secondary Schools. In Freudenthal, H. (Ed.), *Report on Method of Initiation into Geometry*, Groningen Wolters, pp.67-80.
- Wittmann, E. (1981), The Complementary Roles of Intuitive and Reflective Thinking in Mathematics Teaching, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, pp.389-397.

Research on the Process of Understanding in Learning Mathematics (I): Analysis of the Lesson on “Stellar Polygon” at Second Grade in Lower Secondary School

Masataka KOYAMA
Graduate School of Education, Hiroshima University

Abstract

This is a part of the series of research on the process of understanding mathematics based on the “two-axes process model” that consists of two axes, i.e. the vertical axis implying levels of understanding such as mathematical entities, relations of them, and general relations, and the horizontal axis

implying three learning stages of intuitive, reflective, and analytic at each level (Koyama, 1993, 1997). The purpose of this paper is to analyse the process of understanding in the lesson on “stellar polygon” at 2nd Grade in a lower secondary school attached to Hiroshima University in order to see the development of students’ understanding of the properties of “stellar polygon” and to get some implications for the teaching and learning of mathematics in lower secondary school. The objectives of the lesson on “stellar polygon” were to improve students’ understanding of how to find out the measure of an angle in a stellar polygon and to promote their mathematical thinking and attitude toward mathematics through generalising the mathematical tasks on regular polygons to regular stellar polygons.

As a result of qualitative analysis of the data collected in the observation and videotape-record during the lesson, we found out the four suggestions for improving the students’ understanding of mathematics in lower secondary school. First, there were three different approaches to the same task 1 in a regular nine-pointed star polygon. It means that mathematics teacher should pay attention not only to the correctness of the answer to a task but also to the process of reasoning to the answer in mathematics lesson. Second, when the students worked on the complicated task 2 in a regular nine-pointed star polygon they folded back to the image-making level. This fact suggests us the importance of teacher’s decision making on what kinds of learning situation should be set up for helping students improve their mathematics understanding. Third, a questing about the reason by the teacher and the response by a student changed the development of the lesson to a higher level of understanding. It suggests the importance of social interaction among a teacher and students in mathematics classroom. Finally, the students had difficulties when they worked on the more generalised task 3 in a regular n -pointed star to formulate the measure of an angle. The fact suggests that students should reflect what they have done in the task 2 (reflective stage) and do more activities for integrating them (analytic stage) in the “two-axes process model” of understanding mathematics. Being based on these suggestions, when a teacher intends to help students develop their understanding, according to the levels of understanding and three learning stages involved in the “two-axes process model”, it is suggested to set additionally the alternative tasks such as task 1’ of the geometrical figures in a regular nine-pointed star polygon, task 2’ of the measure in a regular nine-pointed star polygon, and task 3’ in a regular 12-pointed star polygon before posing the generalised task 4’ in a regular n -pointed star for asking students to formulate the measure of an angle in general.

小山正孝, 「数学学習における理解過程に関する研究 (I)」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 12 卷, 2006.6, pp.71-81 に所収

数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法

小山 正孝

(広島大学大学院教育学研究科)

《要約》

本稿の目的は、算数・数学科の授業において児童・生徒の理解の深化を促すために、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を構築することである。

これまでの数学理解に関する理論的研究及び実践的研究の成果を踏まえて、まず、授業構成の原理として、P1 [複雑な力動的過程としての理解過程]、P2 [理解の階層的水準と学習段階の設定]、P3 [個人的構成と社会的構成の重視] を挙げた。そして、授業構成の方法として、M1 [理解の階層的水準の明確化]、M2 [理解の程度の実態把握]、M3 [理解の学習段階の具体化] を提案した。

キーワード： 数学教育，数学理解，2軸過程モデル，授業構成，原理と方法

1. はじめに—本稿の目的と方法—

筆者は数学教育における理解過程に関する研究において、5つの階層的水準と3つの学習段階をそれぞれ縦軸と横軸にもつ数学理解の「2軸過程モデル (Two-Axes Process Model)」を理論的に構築し、その妥当性と有効性に関する研究を行っている (小山, 1992; Koyama, 1993; 小山, 1997; Koyama, 1997)。その結果、教師が児童・生徒の数学理解を深化させる授業を構成し実践する際に2軸過程モデルがその枠組みとして有効に機能し得るということが明らかになった。他方で、数学教育における構成主義的認識論に立つ2軸過程モデルを、他の社会文化主義的認識論や相互作用主義的認識論などによって補完するとともに、算数・数学科の授業で扱う教材に応じてより具体化する必要性があることも明らかになった。

そこで、本稿では、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を構築することによって、算数・数学科の授業において児童・生徒の理解を深めるための、教師にとって有効な視点を提案することを目的とする。そのために、以下では、まず、理解研究における前提とねらい、数学理解の2軸過程モデルの概要を述べる。そして、これまでの数学理解に関する理論的研究及び実践的研究の成果を踏まえて、そのモデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を提案する。

2. 理解研究における前提とねらい

(1) 理解の基本的なとらえ方

児童・生徒が算数・数学を理解するとはどういうことか。また、どのようなメカニズムで理解は深化するのか。これらの問いは理解研究において解明すべき究極的な問

題で、かなり以前から精力的に研究されてきた数学教育研究の主要な問題の1つである。最近の数学教育研究では、認知心理学的なアプローチによってこの問題を解明しようとするものがその主流となっている。

筆者は、理解に関する認知心理学的研究の成果をもとに、「理解 (understanding)」を次のようにとらえ、これらを理解研究の前提としている。

- (1) あることを理解するとは、それを既存のスキーマあるいは認知構造と認知的に関係づけることである。
- (2) 理解は本質的には個人的な心的活動であり、複雑で力動的な現象である。
- (3) 算数・数学の理解にはいくつかの階層的水準がある。

(2) 理解のモデル化の必要性

理解するということは児童・生徒の内面的な複雑な活動であるから、それをとらえるためには、この内面的で直接見ることのできない理解という現象を、何らかの方法によって顕在化させることが必要である。その方法としては、例えば、児童・生徒に理解体験を記述させる想起法、認知的コンフリクトによる方法、問題解決過程を観察する方法、面接者が個別に質問などして応答を引き出すインタビュー法、発語思考法やプロトコル分析法などがある。

これらのいろいろな方法を用いて多面的なアプローチを試みるのが重要であるが、いかなる方法によっても、理解を直接とらえることはほとんど不可能であると言ってもよい。そのため、理解の構造や機能を間接的にとらえるための理論的・解釈的枠組みが必要になる。その枠組みは、原型としての理解の構造や機能をよりとらえやすくするものであるから、それを「理解のモデル (model of understanding)」と呼ぶことができる。そして、理解のモデルを構築すること、つまり理解のモデル化は、児童・生徒の数学理解を解明するために必要不可欠であると考えられる。

(3) 理解のモデル化の観点

これまで、数学教育研究において理解のモデル化が試みられてきた。その結果いろいろなモデルが提案されているが、それらはモデル化の観点の違いから大きく2つの類型に分けられる。

第1の類型は、ある時点において児童・生徒が理解している状態、すなわち理解の様相を記述しようとするもので、「様相モデル (aspect model)」と呼ばれる。それに対して、第2の類型は、児童・生徒が理解しつつある過程を記述しようとするもので、「過程モデル (process model)」と呼ばれる。

さらに、数学理解のモデル化においては、理解する対象は何かということが重要なので、理解する対象が数学的内容(手続き、概念、性質、関係)である場合と、数学的形式(具体的表現、操作的表現、図的表現、言語的表現、記号的表現)である場合とに分けることができる。また、児童・生徒の主として頭の中の変化、つまり認知構造の変容に焦点を当てる場合と、主として観察可能なものの変化、つまり行動の変容に焦点を当てる場合とがある。

3. 数学理解の過程モデルの具備すべき特性

(1) 過程モデルの「記述性」と「規範性」

これまでに提案された過程モデルの多くは、算数・数学を理解するという内面的な現象がどのように起こっているかを記述できるという意味で、「記述性 (descriptive characteristic)」を備えたものである。しかし、数学教育においては、このような

数学理解の過程の実態を把握するだけでは十分とは言えない。なぜなら、数学教育は、本来、教師の教える活動と児童・生徒の学ぶ活動の2つ、すなわち教授活動と学習活動によって成立するものだからである。したがって、数学理解の過程モデルが、「教授＝学習」活動としての数学教育において真に有効なものであるためには、上で述べた「記述性」だけでなく「規範性 (prescriptive characteristic)」, すなわち児童・生徒に算数・数学を理解させるにはどのような状況を設定すればよいか、また、理解をどのような方向に深化させればよいか、などに対する教授学的原理を示唆し得るような特性をも備えていなければならない。

(2) 反省的思考による理解の深化

筆者は、これら両方の特性を備えた、数学理解の過程モデルを構築しようと試みた。その際、注目すべきは児童・生徒の数学理解の深化における「反省的思考 (reflective thinking)」の役割であり、特に次の3点が重要であると考えられる。①反省的思考は、学習者自身による活動や操作をその前提とする、②反省的思考の対象は、その活動や操作およびその結果である、③反省的思考の目的は、無意識的な活動や操作を意識化し、それを表現することである。このような反省的思考は、数学理解の階層的水準の上昇に必要不可欠であり、算数・数学の学習における児童・生徒の理解の深化にとって重要な役割を果たす。

4. 数学理解の2軸過程モデルの概要

上述のような意味での「記述性」と「規範性」の両方を兼ね備えた数学理解の過程モデルを構築するためには、①数学理解はどのような水準に沿って深化するか、②ある水準において、どのように思考が展開するか、という2つの点を明らかにすることが重要である。このような考え方に立って、筆者は、児童・生徒の数学理解の深化の過程を解明し、その深化を促進するための1つの理論的枠組みとして、理解のいくつかの「階層的水準」と各水準における「学習段階」をそれぞれ縦軸と横軸にもつ、数学理解の「2軸過程モデル」を構築した。

このモデルの縦軸は理解水準に関するもので、数学的対象の理解、対象間の関係の理解、関係の一般性の理解などのいくつかの階層的水準から成る。一方、このモデルの横軸は学習段階に関するもので、各理解水準における以下のような3つの学習段階から成る。数学理解は必ずしも直線的にはないが、これらの段階を経て、ある水準から次の水準へと上昇（深化）し得ると考えられる。

- (1) 直観的段階 (Intuitive Stage) : 学習者が具体物あるいは概念や性質などの数学的対象を操作する。直観的思考を働かせる段階。
- (2) 反省的段階 (Reflective Stage) : 学習者が自らの無意識的な活動や操作に注意を向け、それらやその結果を意識化して、図や言葉などによって表現する。反省的思考を働かせる段階。
- (3) 分析的段階 (Analytical Stage) : 学習者が表現したものをより洗練して数学的に表現したり、他の例で確かめたり、それらのつながりを分析したりすることによって、統合を図る。分析的思考を働かせる段階。

こうした2軸過程モデルのイメージを図に表すと図1のようになる。基本的には、縦軸の「階層的水準」は算数・数学科の1単元に対応し、各水準における横軸の「学習段階」は1～3時間程度の授業に適用できる。したがって、このモデルは、算数・数学科の教材や児童・生徒の実態に応じてさらに精緻化・具体化しなければならない

が、教師が算数・数学科の授業を構成し実践する際、算数・数学の学習における児童・生徒の理解過程をとらえ、理解を深化させるための1つの有力な視座になり得ると考えている。

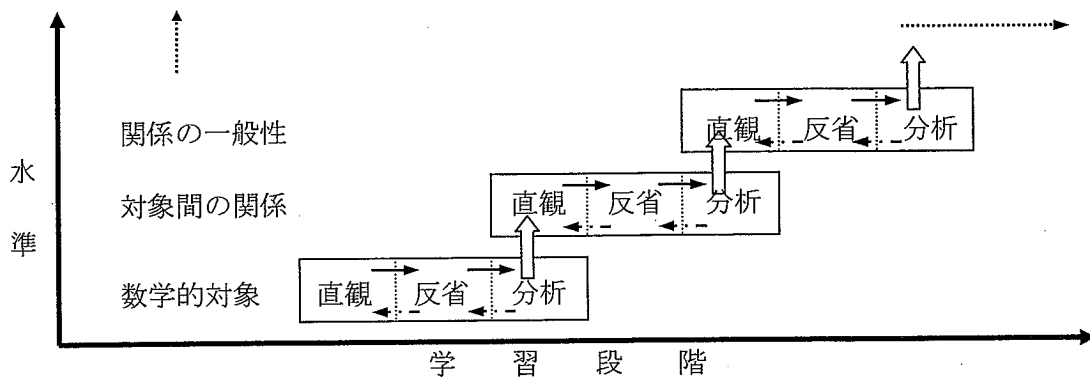


図1 2軸過程モデルのイメージ

5. 2軸過程モデルに基づく授業構成の原理

このような数学理解の2軸過程モデルに基づいて算数・数学科における授業構成を行うことによって、児童・生徒の数学理解の深化を促進することを考える。その授業構成の「原理(principles)」として、筆者がこれまでに行ってきた理論的研究と実証的研究(小山, 1997; 小山他, 2002; 2003)の結果, 次のP1~P3を挙げることができる。

- P1: 算数・数学の理解を、全か無かというように二者択一的にではなく、複雑な力動的過程としてとらえる。[複雑な力動的過程としての理解過程]
- P2: 算数・数学の理解の深化を促進するために、理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定する。[理解の階層的水準と学習段階の設定]
- P3: 教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業においては、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を重視する。[個人的構成と社会的構成の重視]

(1) 原理P1について

まず、原理P1は、数学理解の2軸過程モデルに基づいて算数・数学科の授業構成を考える際の前提であり、算数・数学を理解するとはいかなることかについての基本的立場を述べたものである。算数・数学の学習における児童・生徒の理解について考えるとき、児童・生徒がある数学的な概念や性質などを完全に理解しているという状態は考えられないし、逆に、全く理解していないという状態も考えにくい。ある時点における児童・生徒の数学的な概念や性質などの理解はこれら両極の間のどこかに位置し、その理解は常に成長しつつあると考えられるのである。

例えば、数学教育における「理解論争」の契機となったSkemp (1976) の「関係的理解」と「用具的理解」の区別に示唆されるように、縦の長さが L 、横の長さが B の長方形の面積 A を求めるとき、例えば、ある児童が単に面積を求める公式 $A=L \times B$ に当てはめて面積を求めることができた(用具的理解)としても、その児童が長方形の面積を完全に理解しているとは言えない。なぜなら、その児童は長方形の面積 A を求めるのになぜ $L \times B$ でよいのかが分かって(関係的理解)いないかもしれないから

である。逆に、別の児童が長方形の面積 A を求めることができなかつたとしても、その児童が長方形の面積を全く理解していないとは必ずしも言えない。なぜなら、その児童は長方形の面積を求める公式を忘れて求められなかつただけで、2つの大きさの異なる長方形の面積を比べることはできるかもしれないからである。

また、算数・数学の理解が常に成長しつつある複雑な力動的過程であるということについては、例えば、Pirie & Kieren (1989)の数学的理解の「超越的再帰モデル」に関する研究で例証されている。Pirie & Kierenのモデルは、①する、②イメージをつくる、③イメージをもつ、④性質に気づく、⑤形式化する、⑥観察する、⑦構造化する、⑧創案するという8つの水準から成るが、このモデルを用いて生徒の数学的理解の成長が再帰的現象であり、決して直線的ではないものとして記述されているのである (Koyama, 1995)。

以上のことから、P1「算数・数学の理解を、全か無かというように二者択一的にではなく、複雑な力動的過程としてとらえること」を、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の第1の原理とする。

(2) 原理P2について

次に、原理P2は数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成にとってまさに中心的な原理である。算数・数学の学習において児童・生徒の理解の深化を促進するためには、どのような方向に深化させればよいか、また、どのような学習状況を設定すればよいか、が最も重要なこととなる。前者の目指すべき方向に関することが理解の階層的水準としての縦軸であり、後者の設定すべき学習状況に関することが各理解水準における学習段階としての横軸である。したがって、児童・生徒の算数・数学の理解を深化させるための授業構成においては、これら階層的水準と学習段階の2軸を設定する必要があると考えられる。

まず、数学理解の階層的水準としての縦軸を設定することの必要性は、数学的思考の特質による。例えば、van Hiele (1986)の「学習水準理論」においては、幾何学習における5つの階層的な思考水準(具体物、図形、図形の性質、命題、論理)が示されており、潜在的秩序を直観したとき思考水準は飛躍し、その結果、考察の対象が変化するという「方法の対象化」と呼ばれる数学的思考の特質がとらえられている。このvan Hieleの理論から、数学的对象(数や図形など)、数学的对象の性質、数学的性質の関係としての命題、命題の関係としての形式論理というように、数学理解においてはいくつかの階層的水準があることが分かる。また、Sfard (1991)は、数や関数のような抽象的な数学的概念は2つの基本的に異なった仕方(構造的と操作的)ととらえられることを述べ、数学的概念作用(mathematical conception)の二重性に着目し、特に代数的思考の本性と成長の過程をその歴史的観察に基づいて認識論的に分析することによって、操作的概念作用が構造的な概念作用に先行すること、そしてこれら2つの概念作用が循環しながら数学的概念が発達する(具体物の集合、自然数、正の有理数、正の実数、実数、複素数)ことを明らかにしている。これら2つの理論が示している階層的水準は長期間の算数・数学の学習にみられるものである。したがって、それよりも短期間の算数・数学の学習においては、教材分析を通してさらに細かな階層的水準を明らかにし、それを縦軸に設定する必要がある。

次に、児童・生徒の数学理解の深化、つまり水準を上昇させるために、数学理解の各水準に学習段階としての横軸を設定することが必要となる。数学理解の2軸過程モデルにおいては、数学的思考の生産的で確実な展開に必要な不可欠な直観と論理の相補

性という関係に着目して「直観的段階」と「分析的段階」を設定し、それらの段階をつなぐものとして「反省的段階」を設けて反省的思考の重要な役割を反映させている。なぜなら、必ずしも直線的ではないが、これらの段階を経て、学習者である児童・生徒の数学理解の水準が上昇すると考えられるからである。これら3つの段階は、van Hieleのいう「方法の対象化」を促すものであり、Sfardの言葉を借りれば「内面化、圧縮、具象化」の3つの階層的な段階を経ることに対応する。

以上のことから、P2「算数・数学の理解の深化を促進するために、理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定すること」を、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の第2の原理とする。

(3) 原理P3について

そして、原理P3は教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業において必要不可欠な原理である。数学教育における理解過程に関するこれまでの研究や構成主義的認識論、社会文化主義的認識論及び相互作用主義的認識論とそれらに基づく研究 (Sierpiska & Lerman, 1996; 中原, 1999; 小山, 2001) から、数学的概念や原理・法則などを理解するということは本質的には個々の児童・生徒の内面で生起する心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、独自の文化をもった教室で行われる算数・数学の教授学習においては、ある児童・生徒の理解過程はその教室の中の教師や他の児童・生徒との社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。

したがって、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成においては、数学的知識は伝達によって受動的に受け取られるものではなく認識主体によって能動的に構成されるものであるとする構成主義的認識論に立脚し、個々の児童・生徒の個人的構成活動を基本とする。そして、個々の児童・生徒をある文化や社会的状況の中に置かれている者とみて、数学的知識は社会的に生産され常に変化し得る社会的価値と結びついた社会的に統制される社会的知識であるとする社会文化主義的認識論、及び数学的知識の源と成長の過程としての発達を相互作用とは不可分なものであるとする相互作用主義的認識論の立場から補完することを考える。そして、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成においては児童・生徒同士や教師との相互作用を通しての社会的構成活動を組み込むこととする (小山他, 2000)。上述の原理P2の3つの学習段階との対応で言えば、児童・生徒の個人的構成活動は直観的段階、反省的段階、分析的段階のいずれの段階でも必要であるのに対して、社会的構成活動は反省的段階と分析的段階における個人的構成活動をよりよく促進するのに必要であると言える。

以上のことから、P3「教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業においては、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を重視すること」を、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の第3の原理とする。

6. 2軸過程モデルに基づく授業構成の方法

以上のような3つの原理を基に、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成を行っていくことになるが、そのときの授業構成の方法としては、筆者がこれまで行ってきた理論的研究と実証的研究 (小山, 1997; 小山他, 2002; 2003) の結果、次のM1~M3を提案したい。

M1: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容について、算数・数学科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することによって、数学理解の階層的

水準を明らかにする。〔理解の階層的水準の明確化〕

M2: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容に対する理解の程度について、学習内容に応じた診断的評価や事前調査などを行うことによって、その実態を把握する。〔理解の程度の実態把握〕

M3: 数学理解の階層的水準と児童・生徒の理解の程度の実態把握を基に、算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての教材研究を行い、3つの学習段階を具体化し、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を授業に位置づける。〔理解の学習段階の具体化〕

(1) 方法M1について

まず、方法M1は算数・数学科の授業が目指すべき方向を明らかにすることである。それは、算数・数学科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することによって、長期的にみれば児童・生徒が学習する数学的内容の体系を明確にすることであり、短期的には算数・数学科の単元や1時間ごとの授業のねらいを明確にすることにつながる。

ここでは、その具体例として、小学校算数科と中学校数学科における「図形」学習に焦点化し、「図形」領域の学習指導要領（文部省，1999a; 1999b）を分析することによって、児童・生徒の数学理解の深化の目指すべき方向を明らかにしてみよう。算数・数学科における「図形」学習のねらいは、①基本的な平面図形や空間図形についての理解を深める、②論理的に考察し表現する能力を伸ばすことである。そして、「図形」領域の学習において児童・生徒の数学理解の深化の目指すべき方向は、図2のように整理できる。

小学校1年：	身近な立体 〈観察，構成〉	→	ものの形
小学校2年：	ものの形 〈観察，構成〉	→	図形 〔三角形，四角形〕 〈かく，作る〉
小学校3年：	ものの形 〈観察，構成〉	→	図形を構成する要素 〔正方形，長方形，直角三角形〕 〈かく，作る，敷き詰める〉
小学校4年：	図形 〈観察，構成〉	→	図形を構成する要素 〔二等辺三角形，正三角形〕 〔円，球〕 〈かく，作る，敷き詰める〉
小学校5年：	図形の構成要素 及びそれらの 位置関係 (平面図形) 〈観察，構成〉	→	直線の平行や垂直 基本的な平面図形 〔平行四辺形，台形，ひし形〕 基本的な図形の簡単な性質 円周率 〈考察〉 〈かく，作る，敷き詰める〉
小学校6年：	図形の構成要素 及びそれらの 位置関係 (立体図形) 〈観察，構成〉	→	基本的な立体図形 〔立方体，直方体〕 (見取図，展開図) 直線や平面の平行及び垂直 角柱及び円柱 〈考察〉 〈かく，作る〉

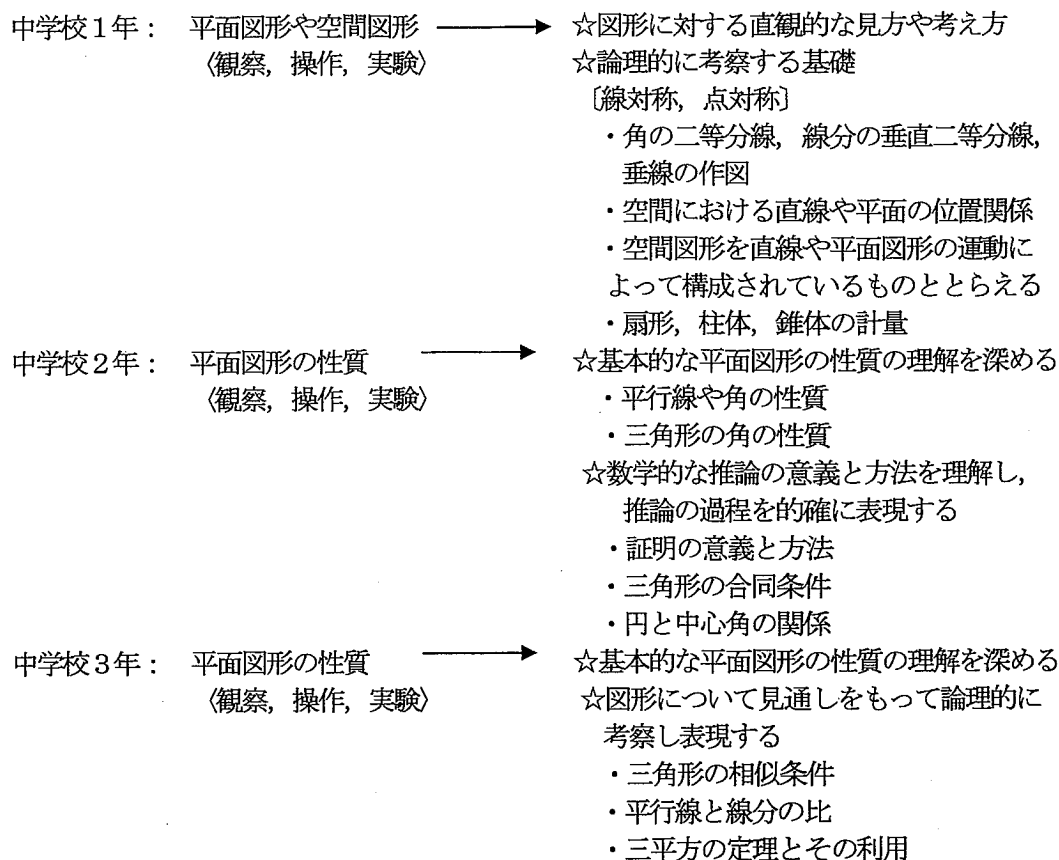


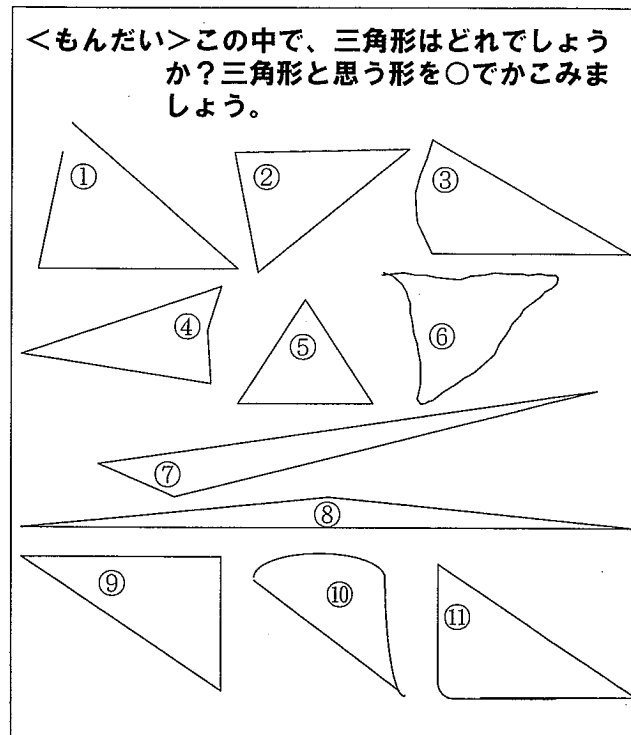
図2 「図形」領域の学習における数学理解の深化の方向

(2) 方法M2について

次に、方法M2は、方法M1によって明確になった数学理解の深化の目指すべき方向を考慮し、算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての診断的評価や事前調査などを行うことによって、児童・生徒のその内容に関わる理解の程度などの実態を把握し、それを次の方法M3によって学習段階を具体化するための判断材料とすることである。児童・生徒の理解の実態にそぐわなければ、算数・数学科の授業において設定される学習状況があまりにも平易すぎたり逆にあまりにも困難すぎたりして、児童・生徒の理解の深化に寄与しないということが考えられるからである。もちろん、児童・生徒によって理解の程度に差があることは十分に考えられる。すでに述べたように、理解は本質的には個人的な心的活動であり、複雑で力動的な現象であるから、むしろ、児童・生徒の理解の程度や理解の仕方に差があるのは自然なことであると言ってもよい。したがって、児童・生徒の数学理解の実態に応じて、一斉、小集団、個別のどの学習指導形態を採用するか、あるいはそれらをどのように組み合わせていくかが決められなければならない。いずれの学習指導形態を採用しようとも、大切なことは個々の児童・生徒に応ずる学習指導を行い、数学理解の深化を促すことである。

ここでは、その具体例として、小学校算数科における第2学年の「三角形と四角形」の学習に焦点化し、その学習に入る前に児童の三角形についての理解の程度を調べるために行った事前調査の方法とその結果から明らかになったことをみてみよう(小山他, 2002, p.90)。

質問紙法により、下図のような 11 個の図形を第 2 学年の児童 38 名に提示し、三角形の同定を行わせた。



その結果、学習前の児童の実態として、以下のことが明らかになった。

- ア. 図形③、⑥、⑩を選択した児童が 1 名もないことから、すべての児童が三角形を直線で構成されているものと理解している。
- イ. 図形①、⑪を選択した児童が 2、3 名いることから、3 本の直線で構成されている場合には完全に閉じていない図形でも、あるいは 1 つの角が多少丸みをおびている図形でも、それを三角形であると判断する児童が少しいる。
- ウ. 図形②、⑨を選択した児童が 30 余名で、数名の児童が選択しなかったということから、図形の向きによっては（特に、典型的な上向きに置かれていない場合には）、それを三角形と判断できない児童が数名いる。
- エ. 図形⑦、⑧を選択した児童が 60% 余で、約 40% の児童が選択しなかったことから、図形の大きさによっては（特に、最も長い辺に対する高さが極端に小さく細長い場合には）、それを三角形と判断できない児童が 4 割近くいる。
- オ. 図形④の凹四角形を選択した児童が約 30% いることや、図形⑦、⑧の細長い三角形を選択しなかった児童が約 40% いることから、児童が図形を同定する際の視点としては、頂点や辺などの構成要素の数よりも「概形としてのかたち」という全体的な見えの方が優位である。

(3) 方法 M3 について

そして、方法 M3 では、数学理解の階層的水準と児童・生徒の理解の程度の実態把握を基に、算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての教材研究を行い、3 つの学習段階を具体化し、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を授業に位置づける（中原, 1995, pp.322-328）。実際の算数・数学科の授業はこれ

ら3つの段階に沿って直線的に展開するとは限らないので、1つの単元の学習においてこれら3つの段階が繰り返されながら児童・生徒の数学理解が深化していくように授業を構成していかなければならない。

ここでは、その具体例として、上述の事前調査によって明らかになった小学校第2学年の児童の三角形についての理解の実態を踏まえて行われた、単元「三角形と四角形」の授業構成を以下に述べる（小山他, 2002, pp.90-92）。

指導計画（全11時間）

第1次	ジオボードで形をつくろう	……	2時間
第2次	三角形・四角形を調べよう	……	5時間
第3次	直角のある図形をつくろう	……	4時間

(1) 第1次の2/2時の授業構成

実態調査から明らかになった「図形を概形で見える見方」から、本単元の目標である「図形を構成要素の数で見える見方」へと、児童の図形理解の深化を促すために、次の2つの点に着目して授業構成を行う。

- ①第1学年で獲得した、図形をその機能で見える見方や概形で見える見方といった現在の自分自身の図形に対する認識をもとに、図形を分類・操作することができるような課題追究の場（学習状況）を工夫すること〔主として個人的構成活動〕
- ②図形の多様な認識のよさを共有し、吟味することができるような社会的相互作用の場（学習状況）を工夫すること〔主として社会的構成活動〕

1) 課題の提示と課題追究の場の工夫

本時（第1次の2/2時）においては、前時までのジオボード、ジオペーパーによる図形の構成活動〔直観的段階〕で作りだされた多様な三角形、四角形の分類の仕方を課題として取り上げる。この段階における図形のとらえ方は児童によって個々ばらばらであり、そのズレは児童の今までの図形の見方の違いである、と考えられる。図形の多種多様な分類の仕方を課題として取り上げることで、図形の見方を児童自身にはっきりと意識させ〔反省的段階〕、授業後に、新たに加わった見方は何か、それによって図形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせる〔分析的段階〕ことができるようにする。

2) 図形の多様な認識を共有し、吟味することができる

社会的相互作用の場の工夫

児童が分類する図形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値ある数学的知識へと高めさせていくためには、児童から出てくる多様な分類の視点を意味づけたり、関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして、児童に多様な図形分類の視点を表出させ〔反省的段階〕、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得いく考えを創り出させる〔分析的段階〕ことが考えられる。

(2) 第2次の3/5時の授業構成

児童の凹四角形の理解の深化を促すために、自分自身の図形に対する認識を明らかにすることができる課題追究の場（学習状況）と、図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場（学習状況）の2つに着目して、以下のようにして授業構成を行う。

1) 課題の提示と課題追究の場の工夫

ア. 児童に共有させる課題提示の場の工夫

本時（第2次の3/5時）においては、前時までのジオボードによる三角形や四角

形の構成活動〔直観的段階〕でつくりだされた凹四角形のとらえ方を課題として取り上げる。この図形のとらえ方は児童によって個々ばらばらであり、そのズレは児童の図形の見方の違いである、と考えられる。凹四角形のとらえ方を課題として取り上げることで、図形の見方を児童自身にはっきりと意識させ〔反省的段階〕、授業後に、新たに加わった見方は何か、それによって図形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせる〔分析的段階〕ことができるようにする。

イ. 多様な学習具による課題追究活動の場の工夫

児童に「凹四角形は三角形か四角形か」という課題について、自分自身の図形の見方をはっきりさせるためには、学習具を限定せずに追究させる〔直観的段階〕ことが大切である。例えば、辺の数に着目した児童にとっては、辺の数がよく分かる数え棒で図形をつくりかえることで自分の見方をはっきりするであろう。また、課題の条件にあう他の図形を構成しようとする児童にとっては、頂点の位置を自由に变えて図形をつくることのできる「ジオボード」や「ジオペーパー」という学習具をつかった方が分かりやすいであろう。このように、多様な学習具を児童が自己選択できるように場を工夫することで、自身の図形のとらえ方を明確にさせることができる。

2) 多様な凹四角形の認識を共有し、新たな図形認識の観点から凹四角形を吟味することができる社会的相互作用の場の工夫

児童が意味づける凹四角形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値ある数学的知識へと高めさせていくためには、児童から出てくる多様な発想を意味づけたり、関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして、児童に図形の多様なとらえ方を表出させ〔反省的段階〕、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得いく考えを創り出させる〔反省的段階〕ことが考えられる。

7. おわりに

本稿では、教師にとって有効な視点として、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理(P1~P3)と方法(M1~M3)を提案した。

《授業構成の原理》

- P1: 算数・数学の理解を、全か無かというように二者択一的にではなく、複雑な力動的過程としてとらえること〔複雑な力動的過程としての理解過程〕
- P2: 算数・数学の理解の深化を促進するために、理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定すること〔理解の階層的水準と学習段階の設定〕
- P3: 教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業においては、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を重視すること〔個人的構成と社会的構成の重視〕

《授業構成の方法》

- M1: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容について、算数・数学科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することによって、数学理解の階層的水準を明らかにすること〔理解の階層的水準の明確化〕
- M2: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容に対する理解の程度について、学習内容に応じた診断的評価や事前調査などを行うことによって、その実態を把握すること〔理解の程度の実態把握〕
- M3: 数学理解の階層的水準と児童・生徒の理解の程度の実態把握を基に、算数・

数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての教材研究を行い、3つの学習段階を具体化し、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を位置づけること〔理解の学習段階の具体化〕

これらの原理と方法の妥当性と有効性は、これまで筆者が行ってきた理論的研究と実証的研究によってある程度例証されているが、まだ限られた数の事例研究にとどまっている。したがって、事例研究の数を増やしてこれらの原理や方法の有効性を実証的・実践的に検討し、より具体的でより精緻なものにすることが今後の課題である。

附記 本稿は、平成17年度科学研究費補助金基盤研究(C)「数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業改善に関する実践的研究」(研究代表者 小山正孝, 課題番号 16530591)の研究費補助を受けて行われた研究の成果の一部である。

引用・参考文献

- 小山正孝(1992), 「数学教育における理解のモデルについて」, 岩合一男先生退官記念出版会編『数学教育学の新展開』, 聖文社, pp.172-184.
- 小山正孝(1997), 「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 小山正孝(2001), 「教科教育学研究パラダイムの検討—数学教育学を事例として—」, 日本教科教育学会編『新しい教育課程の創造—教科学習と総合的学習の構造化—』教育出版, 2001, pp.164-174.
- 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文(2000), 「算数学習における理解過程に関する研究(I)—数学理解の2軸過程モデルの理論的再検討—」, 広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制『研究紀要』, 第28号, pp.117-123.
- 小山正孝, 磯部年晃, 中原忠男, 赤井利行, 中村武司(2002), 「算数学習における理解過程に関する研究(II)—第2学年における三角形と四角形の内容を中心に—」, 広島大学学部・附属学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第30号, pp.89-98.
- 小山正孝, 赤井利行, 中原忠男, 中村武司, 磯部年晃(2003), 「算数学習における理解過程に関する研究(III)—第5学年における「台形の面積の求め方」を中心に—」, 広島大学学部・附属学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第31号, pp.115-122.
- 中原忠男(1995), 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社.
- 中原忠男(1999), 「数学教育における構成主義的授業論の研究(II)—「数学学習の多世界パラダイム」の提唱—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第5巻, 1999, pp.1-8.
- 文部省(1999a), 『小学校学習指導要領解説—算数編—』, 東洋館出版社.
- 文部省(1999b), 『中学校学習指導要領(平成10年12月)解説—数学編—』, 大阪書籍.
- Koyama, M. (1993), Building a Two-Axes Process Model of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 1, pp.63-73.
- Koyama, M. (1995), Characterizing Eight Modes of the Transcendent Recursive Model of Understanding Mathematics, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』,

- 第1巻, pp.19-28.
- Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 5, pp.21-33.
- Pirie, S. & Kieren, T. (1989), A Recursive Theory of Mathematical Understanding, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No. 3, pp.7-11.
- Sfard, A. (1991), On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.22, 1-36.
- Sierpinska, A. and Lerman, S. (1996), Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In Bishop, A. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, pp.827-876.
- Skemp, R. R. (1976), Relational Understanding and Instrumental Understanding, *Mathematics Teaching*, No.77, pp.20-26.
- van Hiele, P. M. (1986), *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press.

Principles and Methods for Designing Mathematics Lessons Based on the Two-Axes Process Model of Understanding Mathematics

by

Masataka KOYAMA

Department of Mathematics Education, Hiroshima University

The purpose of this paper was to identify the principles and methods for designing mathematics lessons based on the Two-Axes Process Model of understanding mathematics. As a result of theoretical and practical studies, three principles (Ps) and three methods (Ms) were identified for designing lessons to facilitate and deepen students' understanding mathematics as follows. P1: recognizing mathematics understanding as a dynamic process, P2: setting up levels of understanding and learning stages at a level, and P3: incorporating students' individual constructions and social constructions. M1: making clear levels of understanding related to a certain mathematical topic, M2: assessing and evaluating students' understanding as a readiness, and M3: planning in detail three learning stages as a dialectic process of individual and social constructions in a lesson.

小山正孝, 「数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法」, 『日本数
科教育学会誌』, 第28巻第4号, 2006.3, pp.61-70 に所収

算数学習における理解過程に関する研究 (VII)

— 第1学年「繰り上がりのあるたし算」における計算の意味理解を中心に —

小山 正孝 今村 孝子 中原 忠男
磯部 年晃 榎野 純
(協力者) 今井 一仁 阿部 好貴 真野 祐輔

1. 目的と方法

本研究は、算数学習における子どもの理解過程を、理論的・実証的に解明しようとするものである。これまでの数学の理解過程に関する研究^{1),2)}によって、数学的概念や原理・法則などを理解するということは、本質的には、個々の子どもの心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、他方では、教室で行われる算数学習においては、子どもの理解過程はその子どもと教師、子ども同士の社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。そこで、本研究では、算数学習における理解過程を、これら個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて解明することを目的とする。

そのために、まず本研究の第1報³⁾では、理論的研究として、小山が構築した数学理解の2軸過程モデルについて、このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を、文献解釈的方法によって再検討した。そして、第2報⁴⁾では、その実証的研究として、「図形」領域の学習において、小学校第2学年の子どもが三角形や四角形概念を学習する際の理解過程に焦点を当て、事前調査、授業実践、事後調査を通して、これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明した。また、第3報⁵⁾では、「量と測定」領域の授業実践を通して、小学校第5学年の子どもが台形の面積の求め方を学習する際の理解過程を実証的に明らかにした。さらに、第4報⁶⁾では、「数と計算」領域の授業実践を通して、小学校第5学年の子どもが分数と小数、整数の包摂関係を学習する際の理解過程を実証的に解明した。第5報⁷⁾では「量と測定」領域における理解過程について、第3学年「重さ」の概念形成を中心に解明した。そして、第6報⁸⁾では、「数と計算」領域において、第1学年「ひきざん」の概念形成について、きまりを見つけ活用していく際の理解過程に焦点を当て解明してきた。

そこで、本研究の第7報である本稿では、これまでの研究成果をもとに、小学校第1学年の子どもが「繰り上がりのあるたし算」の学習において、和と式の間関係をいかに理解するか、その理解過程を実証的に解明することを目的とする。

2. 授業の計画

(1) 計画の概要

【授業学年】 広島大学附属小学校 2部1年
(男子20名 女子20名 計40名)

① 単元名 たしざん(2)

② 単元目標

○具体物を用いたりして、進んで繰り上がりのある加法の計算の方法を考え、計算

をしようとすることができる。

- 既習の加法や、10のかたまりの考え方をもとにして、繰り上がりのある計算のしかたを工夫して考えることができる。
- （1位数）＋（1位数）の加法で、繰り上がりのある計算が正しくできる。
- （1位数）＋（1位数）の加法で、繰り上がりのある計算の意味やその方法を理解できる。

③ 指導計画（全13時間）

第1次	くりあがりのあるたしざん	7
第2次	くりあがりのあるたしざんのれんしゅう	3
第3次	けいさんげえむ	1（本時）
第4次	けいさんれんしゅう	2

(2) 事前検討

① 教材分析

本単元では、答えが10より大きい数になる繰り上がりのある加法の計算について、既習の繰り上がりのない加法の計算原理を基に、繰り上がりのある加法の計算のしかたを考え、計算が確実にできるようにすることがねらいである。

加法について、児童は、「たしざん（1）」において、和が10以下の1位数同士の加法について学習してきている。本単元では、それらの既習内容をもとに加法の用いられる範囲を拡張するとともに、繰り上がりの計算のしかたを確実に理解できるようにする。

今回の実践的研究では、和が一定の式を筋道立てて説明する場を設定する。このことにより1年生の児童が、計算の仕組みをどのように理解していくのか明らかにしたい。また、単なる計算の仕組みとして解明するだけではなく、学習したことを活用する場を設定し、考えを確かめたり、表現したりする中で、子どもは加法の計算を柔軟にとらえることができ、加法の意味理解はより深まっていくことを実証したい。

本単元では、繰り上がりのあるたし算の和に着目させ、和が17、18になる計算のカードはなぜ枚数が少ないのかを明らかにしていく。和が同じ計算を、加数と被加数の関係から関連づけて考察したり、また、和の違いと種類の数のきまりに着目して和と計算の数の違いについて考えたりしていく。具体的には、和が18、17と1つ少なくなる度に、計算の種類が1つ少なくなることに着目して、和が18の計算はどうして他の種類がないのかを明らかにしていく。この場を通して、見つけたきまりをもとに、計算の仕組みを考察する。そのことにより、繰り上がりのあるたし算の式の理解を深めることができると考える。

② 児童の実態

本学級の児童は、これまで加法や減法の意味については、具体物を用いたり、全身を使って表現したりすることを通してほぼ理解できている。繰り上がりのない計算についてはどの子も習熟している。また、繰り上がりのない加法や減法の計算の仕組みについて考える中で、きまりを見つけることに意欲的な子どもが多かった。具体的には、数の並びに着目して、関連づけてとらえたり、「 $5 - 2 = 3$ 」は「 $5 = 2 + 3$ 」にも変えられると式を柔軟にとらえたりして、たし算とひき算相互の関係を明らかにすることができた。

このような子どもの実態を生かし、本単元では、繰り上がりのある加法の計算のしかたを、きまりをもとに考えさせることで、低学年から数や式を関数的にみる見方も養っていく。

3. 理解過程を重視した授業の構想

これらの事前検討を受けて、②で述べたように、子どもの表現を重視した授業展開を考えていく必要がある。そのためには、本単元で学習する繰り上がりのあるたし算の計算の仕組みをもとにして、さらに数の構成や計算の意味理解を深化・発展させるためには、和と計算カードの枚数の関係に関連づけて考えることができる学習課題を設定することが重要となる。和と枚数の関係を児童自らが追求したくなる課題を生み出す場として、教材「じゅうじびんごげえむ」を開発する。これは、図1のような十字型の5マスの欄に、繰り上がりのあるたし算の答えの中から5つの数字を前もって書き入れておき、ランダムに計算カードを引いてその答えでビンゴを行うゲームである。5個の数字を選ぶため、児童が計算の答えを予想する必然が生まれる。また、カードを並べて比較すると、どのような数がよく出て、どの数が多いのかということが明らかになる。このようにゲームを行うことで、同じ和になる加法の式に着目させることができると考えられる。

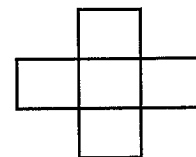


図1

はじめは、大きい答えから順に欄を数字で埋めるといいと考えたり、どの数字でもいいと考えたりする児童もいると予想される。このゲームの結果から、自分の選んだ和が大きいカードは出てきにくいのはなぜだろうという疑問が生まれてくる。その疑問を追求していく中で、繰り上がりのある加法の仕組みの理解が深められていく。

次の点に着目して授業づくりを行っていくことで、子どもの理解過程を大切にしたい授業づくりを行うことができると考える。

課題の提示と課題追究の場の工夫

4. 第1学年「たし算(2)」における授業の実際と考察

(1) 本時(第3次の1/2時)の実際と考察

<本時の目標>

繰り上がりのある加法の計算において、和が同じになるたし算の式に関心を持ち、きまりを見つけ、繰り上がりのあるたし算の仕組みを理解することができる。

<観点別評価基準>

○関心・意欲・態度

和が同じたし算の仕組みに関心を持ち、その理由を考えようとする。

○数学的な考え方

答えと被加数の関係に着目して、和が同じたし算のきまりを考えることができる。

○表現・処理

被加数と加数の大きさを考えながら、繰り上がりのある計算をすることができる。

○知識・理解

繰り上がりのある加法の式を比較して、被加数と加数と答えの関係が分かる。

<本時の授業の流れ>

[課題の意識化]

まず、ビンゴゲームの説明と約束の確認をした後、枠の中に11から18までの任意の数字を書かせゲームを行った。実際にゲームを行うと、16, 13, 11, 14, 15, 18, 16, 12, 14といった数が教師の予想に反して出た。しかし、17だけが出なかったという結

果をもとに話し合うことで、本時の学習課題が意識された。児童A（抽出児CA）は、17を入れたためにビンゴにはなっていない。

T ビンゴにならなかった人は、どんな数を書いたのかな。

C (図2)

C やっぱり。

C 同じ。

CA 1個違い。

T 惜しかったね、あと1個だったのにね。

(CA ぼくもあと1個。17。)

T ほかにできなかった人はどんな人がいる？

C 一番上が11で、真ん中が17で一番下が16で、左が15で、右が18です。(図3)

T あら、また17が出なかったんだね。

(CA はい。)

C 17のせいだ。

T (ビンゴにならなかったのは) 17が出なかったからだよね。なんで17が出ないのかなあ。

C 運が悪いからだと思うな。

C 先生がカードをなくした。

	18	
14	17	16
	15	

図2

	11	
15	17	18
	16	

図3

※ ビンゴゲームの結果を提示して比較することで、和が17になるカードが出ないことがビンゴにならなかった原因であることが児童Aに強く意識されている。しかし、この時点では、結果にのみ着目するだけで終わっている。児童だけでは、なぜ17は出ないのだろうかという根拠を探ろうとする疑問へと結びついてはいない。17になるカードが出なかったのはなぜかという教師の発問によって、はじめて本時の学習課題が意識化された。

[操作化]

この段階は、和が17になるたしざんを追究する段階である。予想を立て、実際にカードを調べる中で、和が17になるカードは2枚しかないことを確認する。

T 17のカードは入っていないの？探してみてあげるけど、答えが17になるカードって何なんでしょ。

C $9+8$ 。

C $19-2$

C ひき算カードは入っていません。

C $8+9$ です。

C $10+7$ です。

C でも出てこない。

T どうして出てこないの。

C だって算数カードの中にはありません。

CA この計算カードの中には一桁の数字しかないからです。しかも、9より上なのは答えだけです。

※ ここで、児童Aは、本時で扱っている加法では、9より上なのは答えだけだと、1位数同士の加法に限定されることは理解できている。しかし、和が17になる式については語っていない。

T もうないの？

C あります。

T カードをめくって探してもいいよ。

C あった。

C $9+8$ です。

C 同じです。

C 反対にただけです。

(CA 反対にしても答えが一緒ということは・・・)

※ 児童Aは、2枚のカードを比較して、加数と被加数が逆になっているという意見に対して、自分なりに、加数と被加数を逆にしても答えは同じということをし、繰り返して自分に意味を問いかけて理解しようとしている。

C たし算じゃないんだけど、ほかにもあります。

T たしざんの学習だから、たしざんだけにしてください。

※ この時、児童Aは「 $19-2$ なんてことないよねえ。」とつぶやく。ひき算の方は17になる式を簡単に見つけられている。このことから、繰り上がりのあるたし算の計算は、児童Aにとって理解することが困難であることが分かる。

C もうない。

T 2枚しかないの？

(CA $1+2+3+4+5+6+7+8+9$)

※ 児童Aは、2枚しかないことに対して、反対したいが思いつかないため計算の羅列をしている。しかし、この発言が、次の児童の、3口のたしざんというアイデアを生み出すもとになっている。

C $1+2+14$ 。

T (この2枚かどうか) 確かめてみるよ。この2枚が入ってなかったらどうしよう。

CA 先生のミス。

C みんなに笑われるよ。

C 17, あった, あった, あった。

C 11, 11, ...12, 12, 15, 17。

C あった, 1個だけじゃない。

C 11, 12, 12, 12, 12, 15, 17。

C でも, 2枚しかない。

CA なんで当たらなかったのか分かった。

CA ちゃんと分かった。

CA えっと, 2枚しかないということは, 当たる確率も下がるわけだから, 2枚しか

ないのはたまたま運で偶然に当たるだけです。

T 納得ですか。みんな。

C やっぱり、答えが17のカードは少ないから当たらないと思います。

(CA ぼくと同じ意見だ。)

※ この時点で、児童Aは、全部のカードの答えを1枚ずつ調べた結果、和が17のカードは2枚しかないことを理解することができ、自分のビンゴができなかった理由がはじめて納得できている。また、友達の意見を聞き、同じ意見であることを確認している。

[媒介化]

和が17のカードが2枚で少ないことが実感を伴って理解できたことで、児童Aから枚数が少ないカードの場合は運であるという考えが生み出された。しかし、その意見が、次のように、 $9+9$ は1枚しかないのになぜ出たのかという疑問へと結びついていく。このことにより、17だけでなく、そのほかの和になるカードの枚数へと話題が広がった。そこで、和が18、17になるカードを並べて板書し、児童の意識を焦点化させた。

C それなら $9+9$ は18ですよ。1枚しかない。

(CA $9+9=18$ だ。)

※ 児童Aは、自分の意見への反対意見であるため、相手の意見を確かめながら聞いている。

C それで、多い数で1枚しかないのになんで当たるの。

CA なんで (和が18のカードは) 1枚しかないか分かった。

※ 児童Aの意識は、なぜ当たるのかよりも、18のカードは1枚であることに向いている。

C でも、10 (繰り上がりのない加法のビンゴゲームの時の枚数が多い数) はいっぱいありました。

T この前の勉強を思い出したんだね。(児童Aが挙手。) だから大きい数がよく出るんだと思ったんだ。

CA 理由がちゃんとある。

T それなのに今、18のカードは1枚しかないと言ったね。本当？

CA はい。何でも分かる。

T 他にはないの？

CA ほかにない。何でも分かる。

※ 児童Aは、 $9+9$ は1枚であることに根拠と確信を持っている様子である。

C カードを真ん中からしか引いてなかったから、17のカードは最後の方だったかもしれない。

(CA 質問!)

- T 今みんなが話しているのは、答えが18のカードが1枚しかなかったということだ
けど、どうして1枚しかないのかな。
- C $9 + 9$ は同じ数字だから1枚しかない。
(CA それ理由じゃない。)
- C 他の言い方があります。
- C このたしざんでは9とかいうあんまり大きいカードはあんまりでないと思います。
(CA そうじゃない。)
- C なぜかという、あまりたすカードが大きく答えがなることがあんまりないから
です。
(CA 意見。なんで $9 + 9$ しかないか。)
- T 他にほんとにないの。
- C 10のカードがないので $9 + 9$ は1枚しかない。
- T 10のカードがなければ、9とか8とかでいいのではないかな。
- C 分かりやすく言うと、だんだんだんだん減っていく。
- C $9 + 9$ とか数字が大きいカードは、10のまとまりのもとができています。例
えば $9 + 9$ はあと1つで10になるじゃないですか。
(CA 同じです。)
- C 1個の9の1をもう1個の9の方のあげたら、10ができるじゃないですか。そし
たら、9は8になって、それを合わせると18です。でも、 $7 + 8$ とかは・・・
(CA $7 + 8$?)
- C $7 + 8$ とかは、8に2をあげると10のまとまりと5のまとまりができて15じゃな
いですか。それで、9とかは大きいから10のもとができています。
(CA 同じです。それをもうちょっと詳しくした方がいい。)

※ 児童Aは、自分の考えをもとに、友達の見解を聞き、比較しながら、分かりやすく表現しようと考えている。発言した児童も繰り返しの仕組みをもとに、説明しようとしている。1年生の児童は、表現力が不十分なため、被加数が10までであることに着目してはいるが、まだこの段階では、確実に説明はできていない。しかし、「10のもとができやすい」と、10に近い数だから被加数や加数を変化をさせることが難しいということ、十進法の仕組みを利用して説明しようとしている。

- T これはちょっとあげるだけで10ができるんだよね。
(CA 1だけで。)
- C 9は1個だけあげるけど、8にはあと2だから1よりもっといっぱいあげるから。
- T 答えが17のカードは2枚と分かったよ。18は1枚だよ。じゃあ答えが16のカードは何枚あるのかな。
- CA $1 + 1 + 1 + \dots$ 。

※ 児童自らが、数の範囲を拡張できなかつたので、教師の側から和が16を投げかけた。児童Aはこの時点で16になるカードを見つけるために、1を16回たすことを考えている。このことから、17、18など個別の知識にとどまり、他の和になるカードの枚数の関係までは、意識できていないことが分かる。そこで、探さなくても分かる人がいることを取り上げた。

T 探さなくても分かる人はいるの？

C カードの式は分からないけど、カードの枚数なら分かります。

T えっなんでだろう。

C 秘密がある。

T 今の秘密分かった人。

CA ほんのちょっとだけ、分かった。

※ 児童Aは分かったと言っているが、姿勢が崩れている。自分が思いつかないのでやる気のない様子が見て取れる。

C ちょっとは分かった。

T 何枚か聞いてみようか。

C 答えが16のカードは3枚です。

T どうしてこんなふうに考えたのかな？

(CA たぶん・・・)

C 例えばカードの枚数にたとえると答えの最高の18が1枚だったら、17は2枚。17より1つ少ない16は2から1つ多い3枚だと思います。数字の並びだと思います。

※ 規則性に着目して、類推している。

C 違う考えがあります。

C なるほど。なるほど。なるほど～。

C 本当だ。3枚ある。

C 18だったら、 $9+9$ だから、9に1あげたら、10になるから、その1で1枚になる。 $8+9$ だったらその2で2枚だったから。

C $10+7$ がつかれないから3枚ある。

(CA $10+7$?)

C 違う考えがあります。

T 式を出してみよう。

(C 式全部分かる。)

C $8+8$ です。

C $9+7$ です。

T ほかに何があるかな。

(CA 3じゃない。)

※ 児童Aは、3じゃないとつぶやく。自分で他のカードを見つけようとは考えていない。

C $7+9$ です。

- C もうないですか。
- C これで発見したことがあります。
- T よく発見するね、いいことだよ。
- C 答えが18。
- CA すみません。その数字1なんですか、6なんですか。ちゃんとしていませんよ。
- C 18は、 $9+9$ で数が同じですよ。この次はもう、18の次は下の数は17ですよ。この時にはもう、反対でしなきゃ、もうできる数がないんですよ。そして、また次にいくと、今度は同じ数でできるたしざんがあります。それにして、15は、 $\dots 15$ の数のたしざん、ちょっと言ってください。
- (CA 15のたしざん?)
- CA $7+5$ 。
- C $7+5$ は12です。
- CA まちがえた、まちがえた。
- C $8+7$ 。
- C あっ。 $8+7$ は15です。
- CA $9+6$ 。
- C $6+9$ 。
- CA $9+6$ 。

※ 児童Aは、分かった式だけを何度も繰り返し叫んでいる。

- C $10+5$ 。
- CA $10+5$?
- C $7+8$ 。
- T 何枚ですか。
- C 4枚です。
- C 次の14は \dots 。
- C $9+9$ のように、もう同じ数の次は、同じ数じゃあない、そういうふうになっていく。
- T 分かった(加数と被加数が)同じ数はここ(和が15)には出てこないということだね。
- [協定化]
- 加数と被加数が10を越えない加法であるから、答えが18になるカードは1枚しかないこと、和が1つ少なくなる度に、枚数が1枚ずつ増えていくことを確認した。その後で、もう一度ビンゴゲームをしたら、どの数字を書くか考えさせ、和が11になるカードの枚数が多いことを意識づけた。
- C 和が18になるこの式は1つありますよね。それでカードが1枚。和が17になるこの式は2つありますよね。で、カードは2枚。和が16になるこの式は3枚になります。
- T ちょっと聞いてみるけど、次にビンゴゲームをする時も同じ数を書くかな。
- C いやだ。
- (CA ほんまじゃ。10の数をのけたら3枚しかない。)

※ この時点で、児童Aは、並べた式を確認したことにより、和が16になる式は3つで、カードは3枚しかないことが納得ができています。

T 今度書くんだったら何の数書くかな

C 11。

※ 児童Aは、自信を持って挙手している。

C 11, 12, 13, 14。

T 時間がないので、本当はもう一度するつもりだったんだけど、この次の時間にすることにして、ビンゴゲームの数字だけ書いておきましょう。

T 書きましたか。

※ A児は、ビンゴの欄に11から15までの数を書き込んでいる。それだけでなく、周りの児童の数字が気になったのか、後ろを振り向いて友達のカードをのぞき込んでいた。その際、「11, 12, 13, 14, 15, 同じだ。」とつぶやいている。このことから、記入した段階では、確信までは持っていなかったことが分かる。

T 誰かに書いてもらおう。

(CA 挙手)

C (図4)

T 同じでしたか？

C 全然違う。

C そこ(真ん中)13なの？

T 真ん中が13みたいだよ。

C 真ん中は11だよ。

※ 和が11になる答えが一番多いが、運にも左右されるため、厳密に同じ数字を入れている必要はない。実際に、今日でなかった17が出る確率が高いと予想した児童もいた。ただ、この時点で大きい数から入れた児童は、いなかった。このことより、和が大きい数の種類が少ないため、ゲームでは答えは出にくいことが理解できている。

T この次の時間にもう一度ビンゴゲームをしましょう。

※ A児は、両手を挙げて、ガッツポーズをした。その他の児童と同じ考えだったことから、自分の考えに自信を深めたことが分かる。

	11	
15	13	12
	14	

図4

<本時の授業の考察>

本時では、和が17になる繰り上がりのあるたし算は2種類しかないことに気づき、式にある規則性をもとに、考察の対象となるたし算の和17を変化させて、きまりを見つけだすことができるか学習した。その時に、どのような理解過程をたどっていくのか、特に1人の抽出児童Aに焦点を当てて検証する。

まず、課題の意識化の段階では、約半数の児童は枚数を意識せずに数字を入れている。児童Aも、根拠なく大きい数を入れている。和が同じ計算の式は何種類あるかということは意識されておらず、教師が加法の計算をゲーム化し焦点化することで、はじめて自己の課題として意識されたことが分かる。

操作化の段階では、絵や図を使って課題を追究しようとする児童はみられなかった。絵や図は、意識して提示しなければ、計算が具体化されないことが分かる。また、児童Aが和が17になるカードは2枚しかない理由を話し合う場面では、2枚しかないことに確信が持てていなかった。このことから、繰り上がりという計算の困難さが窺える。つまり、繰り上がりの計算はできるが、分かったとはいえない状態であることが明らかになった。すべての答えを調べて、確信を持った後、2枚しかない理由が分かれると述べている。このようなことから、児童にとっては単に考えるだけではなく、実際に確かめてみるのが重要であることが分かる。

媒介化の段階では、児童自らが数の範囲を拡張していくことはなったが、子ども同士の相互作用により、友達の考えを自分の中に取り入れて理解をしようとしている姿が窺える。相互作用によって、考えが深まり、またより詳しく説明することの大切さにも気づくことができた。

協定化の段階では、学習したことのまとめを行い、定着できているかを確認した。計算カードの枚数の関係に着目して、児童が数字を選択したことが分かった。しかし、その時点では、児童Aは自分の考えに確信までは持てていないが、他の児童の考えを聞くことで、考えが強化されることが明らかになった。

5. 結論

本稿では、低学年の「数と計算」領域の学習において、小学校第1学年の子どもが、繰り上がりのある加法の仕組みを見つけ理解していく過程を実証的に解明することを目的とした。子どもの理解過程を重視した算数科授業を構成するため、課題提示と課題追究の場を工夫した。

本実践において、最初の段階では児童自らは加法の仕組みについて意識していないことが明らかになった。そこで、社会的相互作用の場を工夫することで、児童の課題意識が生み出され、仕組みへの着眼が生まれたのである。この課題意識をもとに説明することができたのである。このことから、児童が多様な考えを出し合い、様々な視点から児童が繰り上がりのある加法の計算をとらえ、その規則性を見いだしていく中で、計算の意味についての理解を深めることができたといえる。

このような事例研究からも、本研究の第2報～第6報の事例研究と同様に、算数学習において個人的構成と社会的構成の両方の活動が行われてはじめて、教室における個々の子どもや子どもたちの理解が深化し得るということが示唆される。

本研究ではこれまでに小学校算数科における低学年の「図形」領域（第2報）、高学年の「量と測定」領域（第3報）、高学年の「数と計算」領域（第4報）、中学年の「量と測定」領域（第5報）、そして低学年の「数と計算」領域（第6報）に焦点化して、算数学習における理解過程に関する実証的研究を行ってきた。さらに多数の抽出児の継続的な観察記録をとり、子どもの理解過程を実証的に解明することが今後の課題である。

参考文献

- 1) 小山正孝 (1997) 「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 2) Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol.5, pp.21-33.

- 3) 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文 (2000) 「算数学習における理解過程に関する研究 (I) - 数学理解の2軸過程モデルの理論的再検討 -」, 『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』, 第28号, pp.117-123.
- 4) 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 中村武司 (2002) 「算数学習における理解過程に関する研究 (II) - 第2学年における三角形と四角形を中心に -」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第30号, pp.89-98.
- 5) 赤井利行, 小山正孝, 中原忠男, 中村武司, 磯部年晃 (2003) 「算数学習における理解過程に関する研究 (III) - 第5学年における「台形の面積の求め方」を中心に -」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第31号, pp.115-122.
- 6) 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 片桐毅 (2004) 「算数学習における理解過程に関する研究 (IV) - 第5学年における「分数と小数, 整数の包摂関係」を中心に -」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第32号, pp.181-188.
- 7) 片桐毅, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 磯部年晃 (2005) 「算数学習における理解過程に関する研究 (V) - 第3学年における「重さ」の概念形成を中心に -」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第33号, pp.217-223.
- 8) 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 今村孝子 (2006) 「算数学習における理解過程に関する研究 (VI) - 第1学年「繰り下がりのあるひき算」における式理解を中心に -」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第34号, pp.327-332

広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第35号, 2007. 3, pp.135-142 に所収

数学理解の2軸過程モデルの規範的特性の実践的研究

本章では、数学理解の2軸過程モデルの「規範的特性」についての実践的研究を行う。そのため、まず、算数科授業において児童の数学理解を深化させるための教師にとって有効な視点として、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法を導出する。次いで、これらの原理と方法を活用して、小学校算数科における授業構成の具体化として2つの授業構成例を示し、算数科授業改善の方向性を提案することとする。

第1節 2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法

まず本節では、これまで筆者ら（小山, 1997; 小山他, 2000; 赤井他, 2003, 磯部他, 2002, 2004, 2006; 片桐他, 2005）が行ってきた、算数学習における理解過程に関する理論的研究と実践的研究の結果を踏まえて、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法（小山, 2006）を導出する。

1. 1 2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理

数学理解の2軸過程モデルに基づいて算数科における授業構成を行うことによって、児童の数学理解の深化を促進することを考える。そのための算数科授業構成の「原理 (principles)」として、これまで筆者ら（小山, 1997; 小山他, 2000; 赤井他, 2003, 磯部他, 2002, 2004, 2006; 片桐他, 2005）が行ってきた理論的研究と実践的研究の結果、次の3つの原理P1, P2及びP3を挙げるができる。

《算数科授業構成の3つの原理》

P1: 数学理解を、全か無かというように二者択一的にではなく、複雑な力動的過程としてとらえること。

[複雑な力動的過程としての理解過程]

P2: 数学理解の深化を促進するために、理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定すること。

[理解の階層的水準と学習段階の設定]

P3: 教室で行われる算数の教授学習活動としての授業においては、個々の児童の個人的構成と児童たちや教師との社会的構成の両方の活動を重視すること。

[個人的構成と社会的構成の重視]

1. 原理P1 [複雑な力動的過程としての理解過程] について

まず、算数科授業構成の原理P1は数学理解の2軸過程モデルに基づいて算数科の授

業構成を考える際の前提であり、算数を理解するとはいかなることかについての基本的立場を述べたものである。算数の学習における児童の理解について考えるとき、児童がある数学的な概念や性質、原理・法則などを完全に理解しているという状態は考えられないし、全く理解していないという状態も考えにくい。ある時点における児童の数学的な概念や性質、原理・法則などの理解はこれら両極の間のどこかに位置し、その理解は常に成長しつつあると考えられるのである。

例えば、算数・数学教育における「理解論争」の契機となったSkemp (1976)の「関係的理解」と「道具的理解」の区別に示唆されるように、縦の長さが L 、横の長さが B の長方形の面積 A を求めるとき、例えば、ある児童が単に面積を求める公式 $A = L \times B$ に当てはめて面積を求めることができた（道具的理解）としても、その児童が長方形の面積を完全に理解しているとはいえない。なぜなら、その児童は長方形の面積 A を求めるのになぜ $L \times B$ でよいのかが分かって（関係的理解）いないかもしれないからである。他方、ある児童が長方形の面積 A を求めることができなかつたとしても、その児童が長方形の面積を全く理解していないとは必ずしもいえない。なぜなら、その児童は長方形の面積を求める公式を忘れて求められなかつただけで、2つの大きさの異なる長方形の面積を比べることはできるかもしれないからである。

また、第1章第4節で検討したように、数学理解が常に成長しつつある複雑な力動的過程であるということについては、例えば、Pirie & Kieren (1989, 1994)の数学理解の「超越的再帰モデル」に関する研究で例証されている。Pirie & Kierenのモデルは①初源的認識、②イメージづくり、③イメージ所有、④性質認知、⑤形式化、⑥観察、⑦構造化、⑧発明（創案）という8つの水準からなるが、このモデルを用いて児童・生徒の数学理解の成長が再帰的現象であり、決して直線的ではないということが記述されている（Pirie & Kieren, 1989, 1994; Koyama, 1995; 小山, 1995）。

以上のことから、「数学理解を、全か無かというように二者択一的にではなく、複雑な力動的過程としてとらえること」を、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の第一の原理P1〔複雑な力動的過程としての理解過程〕とする。

2. 原理P2〔理解の階層的水準と学習段階の設定〕について

次に、算数科授業構成の原理P2は数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科の授業構成にとってまさに中心的な原理である。算数の学習において児童の理解の深化を促進するためには、どのような方向に深化させればよいか、また、どのような学習状況を設定すればよいか最も重要なこととなる。第2章第3節で述べたように、前者の目指すべき方向に関することが2軸過程モデルの縦軸で、(V1) 数学的対象の理解、(V2) 数学的対象間の関係の理解、(V3) 数学的関係の一般性の理解の3つの水準をひとまとまりとする階層的水準である。そして、後者の設定すべき学習状況に関することが2軸過程モデルの横軸で、各水準における(H1) 直観的段階、(H2) 反省的段階、(H3) 分析的段階の3つの段階をひとまとまりとする学習段階である。したがって、児童の数学理解を深化させるための授業構成においては、これらの階層的水準と学習段階の2軸を設定する必要がある。

数学理解の階層的水準を縦軸に設定するのは、数学的思考の発達とともにその対象がシフトするという数学の特質による。例えば、第2章第3節で詳述したvan Hiele (1986)の「学習水準理論」においては、幾何学習における5つの階層的な思考水準（具体物、図形、図形の性質、命題、論理）が示されており、潜在的秩序を直観したとき思考水準は飛躍し、その結果、考察の対象が変化するという「方法の対象化」と

呼ばれる数学的思考の発達の特質がとらえられている。このvan Hieleの理論から、数学的対象（数や図形など）、数学的対象の性質、数学的性質の関係としての命題、命題の関係としての形式論理というように、数学理解においては数学的思考の対象のシフトに応じていくつかの階層的水準があることがわかる。また、Sfard (1991) は、数や関数のような抽象的な数学的概念は2つの基本的に異なった仕方（構造的と操作的）でとらえられることを述べ、数学的概念作用（mathematical conception）の二重性に着目し、特に代数的思考の本性と成長の過程をその歴史的観察に基づいて認識論的に分析することによって、操作的概念作用が構造的な概念作用に先行すること、そしてこれら2つの概念作用が循環しながら数学的概念が発達する（具体物の集合、自然数、正の有理数、正の実数、実数、複素数）ことを明らかにしている（小山, 2002）。これら2つの理論が示している階層的水準は長期間の算数・数学の学習にみられるものである。したがって、それよりも短期間の算数・数学の学習においては、数学理解の2軸過程モデルに基づく教材研究を通して、さらに細かな階層的水準として（V1）数学的対象の理解、（V2）数学的対象間の関係の理解、（V3）数学的関係の一般性の理解の3つの水準をひとまとまりとする階層的水準を明らかにし、それを縦軸に設定する必要がある。

それとともに、算数科授業において児童の数学理解を深化させるために、数学的思考の質に着目して、数学理解の各水準における学習段階を横軸に設定することが必要となる。数学理解の2軸過程モデルにおいては、数学的思考の生産的で確実な展開に必要な直観的思考と論理的思考の相補性という関係と、それらをつなぐ反省的思考の重要な役割を反映させるように、数学理解の各水準における（H1）直観的段階（直観的思考を働かせる段階）、（H2）反省的段階（反省的思考を働かせる段階）、（H3）分析的段階（分析的思考を働かせる段階）の3つの段階をひとまとまりとする学習段階を横軸に設定している。なぜなら、必ずしも直線的ではないが、これらの段階を経て、学習者である児童の数学理解の水準が上昇し、深化するからである。これら3つの学習段階を経ることはvan Hiele (1986) のいう「方法の対象化」を促すものであり、Sfard (1991) の言葉を借りれば「内面化、圧縮、具象化」の3つの階層的な段階を経ることに対応する。

以上のことから、「数学理解の深化を促進するために、理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定すること」を、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の第二の原理P2 [理解の階層的水準と学習段階の設定] とする。

3. 原理P3 [個人的構成と社会的構成の重視] について

そして、算数科授業構成の原理P3は教室で行われる算数の教授学習活動としての算数科授業において必要不可欠な原理である。第3章第2節で述べたように、算数・数学教育における理解過程に関するこれまでの研究や構成主義的認識論、社会・文化主義的認識論及び相互作用主義的認識論とそれらに基づく研究（Sierpinska & Lerman, 1996; 中原, 1999; 小山, 2001）によって、数学的概念や性質、原理・法則などを理解するということは本質的には個々の児童・生徒の内面で生起する心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、独自の文化をもった教室での算数・数学の教授学習活動としての授業における児童・生徒の理解過程はその教室という環境の中の他の児童・生徒や教師との社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。

したがって、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科における授業構成においては、数学的知識は伝達によって受動的に受け取られるものではなく認識主体によって

能動的に構成されるものであるとする構成主義的認識論に立脚し、個々の児童の個人的構成活動を基本とする。そしてそれを、個々の児童をある文化や社会的状況に置かれている者とみて、数学的知識は社会的に生産され常に変化しうる社会的価値と結びついた社会的に統制される社会的知識であるとする社会・文化主義的認識論、及び数学的知識の源と成長の過程としての発達は相互作用と不可分なものであるとする相互作用主義的認識論の立場から補完することを考える。このような考えに立って、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科における授業構成においては、個々の児童の「個人的構成活動」と児童たちや教師との相互作用を通しての「社会的構成活動」の両方を組み込むことが重要である（小山他，2000）。上述の原理P2〔理解の階層的水準と学習段階の設定〕の3つの学習段階との対応でいえば、個々の児童の個人的構成活動は直観的段階、反省的段階、分析的段階のいずれの段階でも必要であるのに対して、児童たちや教師との相互作用を通しての社会的構成活動は反省的段階と分析的段階における個人的構成活動をよりよく促進するために必要である。

以上のことから、「教室で行われる算数の教授学習活動としての授業においては、個々の児童の個人的構成と児童たちや教師との社会的構成の両方の活動を重視すること」を、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の第三の原理P3〔個人的構成と社会的構成の重視〕とする。

1. 2 2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の方法

これら3つの原理に則って、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業を構成していくことになる。その際の算数科授業構成の「方法 (methods)」として、これまで筆者ら（小山，1997；小山他，2000；赤井他，2003，磯部他，2002，2004，2006；片桐他，2005）が行ってきた理論的研究と実践的研究の結果、次の3つの方法M1，M2及びM3を挙げることができる。

《算数科授業構成の3つの方法》

M1: 算数科の授業で児童が学習する内容について、算数科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することにより、数学理解の階層的水準を明らかにすること。

[理解の階層的水準の明確化]

M2: 算数科の授業で学習する内容に対する児童の理解の程度について、学習内容に応じた事前調査や診断的評価、形成的評価などを行うことによって、その実態を把握すること。

[理解の程度の実態把握]

M3: 数学理解の階層的水準と児童の理解の程度の実態把握を基にして、算数科の授業で児童が学習する内容についての教材研究を行い、3つの学習段階を具体化し、個々の児童の個人的構成と児童たちや教師との社会的構成の両方の活動を位置づけること。

[理解の学習段階の具体化]

1. 方法M1 [理解の階層的水準の明確化] について

まず、算数科授業構成の第一の方法 M1 [理解の階層的水準の明確化] は、算数科授業における児童の数学理解を深化させるべき方向を明らかにすることである。それは、数学理解の 2 軸過程モデルの縦軸に設定されている「(V1) 数学的対象の理解、(V2) 数学的対象間の関係の理解、(V3) 数学的関係の一般性の理解の 3 つの水準をひとまとまりとする階層的水準」を視点として算数科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することによって、長期的にみれば児童が学習する数学的内容の体系を明確にすることであり、短期的には算数科の単元や 1 時間ごとの授業のねらいを明確にすることである。

ここでは、その具体例として、小学校算数科と中学校数学科における「図形」領域に焦点化し、その「図形」領域の目標や指導内容に関する学習指導要領(文部省, 1999a; 1999b) の記述を分析することによって、児童・生徒の数学理解の深化が目指すべき方向を明らかにしてみよう。算数・数学科における「図形」学習の大きなねらいは①基本的な平面図形や空間図形についての理解を深めること、②論理的に考察し表現する能力を伸ばすことの 2 つにまとめられるが、小学校算数科と中学校数学科の「図形」領域の学習を長期的にみた場合、児童・生徒の数学理解の深化が目指すべき方向は図 4-1 のように整理することができる。この図の各学年における矢印(→)は、数学的思考の対象がその矢印の左側から右側へシフトすることを表しており、その学年での算数・数学科授業において児童・生徒の数学理解の深化が目指すべき方向を示唆している。この図を「図形」領域の学習において数学的思考の対象が学年の進行とともにいかにシフトしているかという観点からみると、わが国の「図形」領域の数学的内容は長期的には van Hiele (1986) の「学習水準理論」の階層的な思考水準(具体物, 図形, 図形の性質, 命題, 論理)に沿って体系的に組織化されていることがわかる。しかしながら、算数科の各単元や 1 時間ごとの授業において児童の数学理解を深化させるべき方向を定めるためには、こうした数学的内容の大きな体系を視野に入れたうえで、各学年の矢印(→)の両端にある数学的思考の対象に応じて、「(V1) 数学的対象の理解、(V2) 数学的対象間の関係の理解、(V3) 数学的関係の一般性の理解の 3 つの水準をひとまとまりとする階層的水準」を明確にしていかなければならない。

2. 方法 M2 [理解の程度の実態把握] について

次に、算数科授業構成の第二の方法 M2 [理解の程度の実態把握] は、方法 M1 によって明確になった数学理解の深化の目指すべき方向を考慮し、算数科授業において児童が学習する内容についての事前調査や診断的評価、形成的評価などを行うことによって、児童のその内容に関わる理解の程度などの実態を把握することである。それは次の授業構成の方法 M3 によって学習段階を具体化するための重要な判断材料を得ることになる。児童の数学理解の実態にそぐわなければ、算数科授業において設定される学習状況があまりにも平易すぎたり困難すぎたりして、児童の数学理解の深化に寄与しないということが考えられるからである。もちろん、児童によって理解の程度に差があることは十分に考えられる。すでに第 2 章第 1 節で述べたように、数学理解は本質的には個人的な心的活動であり、複雑で力動的な現象であるから、むしろ、児童の数学理解の程度や仕方に差があるのは自然なことであるといってもよい。したがって、児童の数学理解の実態に応じて、一斉、小集団、個別のどの学習指導形態を採用するか、あるいはそれらをどのように組み合わせていくかが決められなければならない。いずれの学習指導形態を採用しようとも、大切なことは個々の児童に応ずる学習

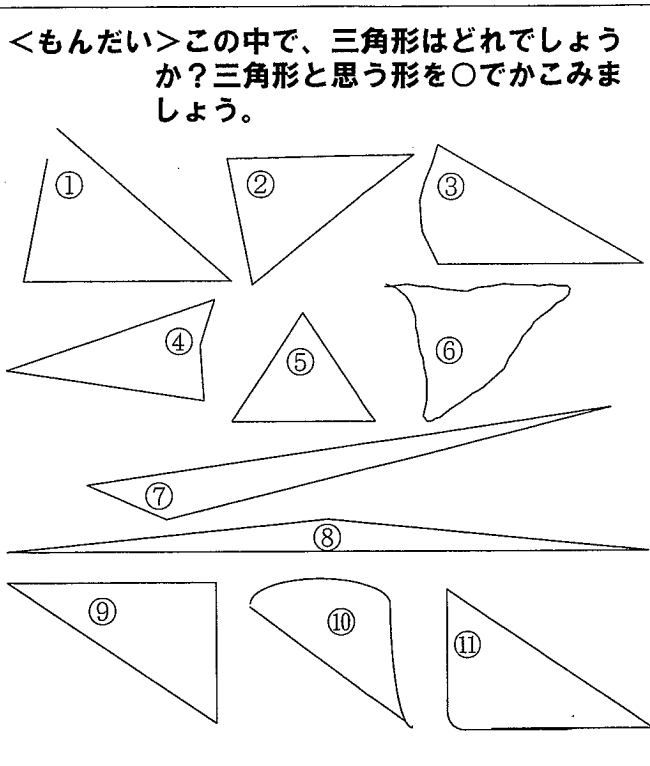
小学校1年：身近な立体 〈観察, 構成〉	→	ものの形
小学校2年：ものの形 〈観察, 構成〉	→	図形 〔三角形, 四角形〕 〈かく, 作る〉
小学校3年：ものの形 〈観察, 構成〉	→	図形を構成する要素 〔正方形, 長方形, 直角三角形〕 〈かく, 作る, 敷き詰める〉
小学校4年：図形 〈観察, 構成〉	→	図形を構成する要素 〔二等辺三角形, 正三角形〕 〔円, 球〕 〈かく, 作る, 敷き詰める〉
小学校5年：図形の構成要素 及びそれらの 位置関係 (平面図形) 〈観察, 構成〉	→	直線の平行や垂直 基本的な平面図形 〔平行四辺形, 台形, ひし形〕 基本的な図形の簡単な性質 円周率 〈考察〉 〈かく, 作る, 敷き詰める〉
小学校6年：図形の構成要素 及びそれらの 位置関係 (立体図形) 〈観察, 構成〉	→	基本的な立体図形 〔立方体, 直方体〕 (見取図, 展開図) 直線や平面の平行及び垂直 角柱及び円柱 〈考察〉 〈かく, 作る〉
中学校1年：平面図形や空間図形 〈観察, 操作, 実験〉	→	☆図形に対する直観的な見方や考え方 ☆論理的に考察する基礎 〔線対称, 点対称〕 ・角の二等分線, 線分の垂直二等分線, 垂線の作図 ・空間における直線や平面の位置関係 ・空間図形を直線や平面図形の運動に よって構成されているものととらえる ・扇形, 柱体, 錐体の計量
中学校2年：平面図形の性質 〈観察, 操作, 実験〉	→	☆基本的な平面図形の性質の理解を深める ・平行線や角の性質 ・三角形の角の性質 ☆数学的な推論の意義と方法を理解し, 推論の過程を的確に表現する ・証明の意義と方法 ・三角形の合同条件 ・円と中心角の関係
中学校3年：平面図形の性質 〈観察, 操作, 実験〉	→	☆基本的な平面図形の性質の理解を深める ☆図形について見通しをもって論理的 に考察し表現する ・三角形の相似条件 ・平行線と線分の比 ・三平方の定理とその利用

図4-1. 「図形」領域の学習における数学理解の深化の方向

指導を行い、数学理解の深化を促すことである。

ここでは、その具体例として、第3章第1節で取り上げた小学校算数科における第2学年の「三角形と四角形」の学習に焦点化し、その学習に入る前に児童の三角形についての理解の程度を調べるために行った事前調査の方法とその結果から明らかになったことをみてみよう（磯部他, 2002, p.90）。

質問紙法により、右図のような11個の図形を第2学年の児童38人に提示し、三角形の同定を行わせた。その結果、学習前の児童の実態として、以下のことが明らかになった。



ア. 図形③、⑥、⑩を選択した児童が1人もいないことから、すべての児童が三角形を直線で構成されているものと理解している。

イ. 図形①、⑪を選択した児童が2、3人いることから、3本の直線で構成されている場合には完全に閉じていない図形でも、あるいは1つの角が多少丸みをおびている図形でも、それを三角形であると判断する児童が少しいる。

ウ. 図形②、⑨を選択した児童が30余人で、数人の児童が選択しなかったということから、図形の向きによっては（特に、典型的な上向きに置かれていない場合には）、それを三角形と判断できない児童が数人いる。

エ. 図形⑦、⑧を選択した児童が60%余で、約40%の児童が選択しなかったことから、図形の大きさによっては（特に、最も長い辺に対する高さが極端に小さく細長い場合には）、それを三角形と判断できない児童が4割近くいる。

オ. 図形④の凹四角形を選択した児童が約30%いることや、図形⑦、⑧の細長い三角形を選択しなかった児童が約40%いることから、児童が図形を同定する際の視点としては、頂点や辺などの構成要素の数よりも「概形としてのかたち」という全体的な見えの方が優位である。

3. 方法M3 [理解の学習段階の具体化] について

そして、算数科授業構成の第三の方法 M3 [理解の学習段階の具体化] は、これまでの数学理解の階層的水準の明確化と児童の理解の程度の実態把握を基にして、算数科授業で児童が学習する内容についての教材研究を行い、数学理解の2軸過程モデルの横軸に設定されている「(H1) 直観的段階、(H2) 反省的段階、(H3) 分析的段階の3つの段階をひとまとまりとする学習段階」を具体化し、個々の児童の個人的構成と児童たちや教師との社会的構成の両方の活動を授業に位置づけることである（中原, 1995, pp.322-328）。算数科授業は必ずしもこれら3つの段階に沿って直線的に展

開するとは限らないので、1つの単元の学習においてこれら3つの段階をひとまとまりとする学習段階が繰り返され、児童の数学理解が深化していくように授業を構成していかなければならない。

ここでは、その具体例として、第3章第1節で取り上げたが、上述の事前調査によって明らかになった児童の三角形についての理解の実態を踏まえて行われた小学校第2学年の単元「三角形と四角形」の授業構成をみてみよう(磯部他, 2002, pp.90-92)。

指導計画(全11時間)

第1次 ジオボードで形をつくろう . . . 2時間

第2次 三角形・四角形を調べよう . . . 5時間

第3次 直角のある図形をつくろう . . . 4時間

(1) 第1次の2/2時の授業構成

本時(第1次の2/2時)の授業においては、児童の実態調査から明らかになった「図形を概形で見る見方」から「図形を構成要素の数で見る見方」へと児童の図形理解の深化を促す[数学的対象の理解水準]。そのために、次の2つの点に着目して授業構成を行う。

- ① 第1学年で獲得した、図形をその機能で見る見方や概形で見る見方といった現在の自分自身の図形に対する認識をもとに、図形を分類・操作することができるような課題追究の場(学習状況)を工夫すること。[主として個人的構成活動]
- ② 図形の多様な認識のよさを共有し、吟味することができるような社会的相互作用の場(学習状況)を工夫すること。[主として社会的構成活動]

①課題の提示と課題追究の場の工夫

本時(第1次の2/2時)の授業においては、前時までの児童のジオボード、ジオペーパーを用いた図形の構成活動[直観的段階]で作り出されたいろいろな三角形や四角形の分類の仕方を課題として取り上げる。この段階における図形のとらえ方は児童によって個々ばらばらであり、そのズレは児童の今までの図形の見方の違いであると考えられる。そこで、図形の多種多様な分類の仕方を課題として取り上げることで、図形の見方を児童自身にはっきりと意識させ[反省的段階]、授業後には、新たに加わった見方は何か、それによって図形のとらえ方がどう変わったかを明確にさせる[分析的段階]ことができるようにする。

②図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫

児童が分類する図形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、それをより価値のある数学的知識へと高めていくためには、児童から出される多様な図形の分類の視点を意味づけたり関連づけたりすることが大切である。そこで、そのための手だてとして、児童に多様な図形の分類の視点を表出させ、学級全体での話し合いによってそれらの共通点や相違点を吟味する[反省的段階]ことを通して、児童全員が納得のいく図形の見方についての考えを創り出す[分析的段階]ことができるようにする。

(2) 第2次の3/5時の授業構成

本時(第2次の3/5時)の授業においては、それまでの児童の三角形と四角形の理解を踏まえて、それらに関係づけて理解し、はっきりとした根拠をもって三角形と四角形を見分けることができるように児童の図形理解の深化を促す[対象間の関係の理解水準]。そのために、次の2つの点に着目して授業構成を行う。

- ① 凹四角形について考えることによって、図形を構成要素の数で見る見方によ

る三角形と四角形についての自分自身の認識を明らかにすることができるような課題追究の場（学習状況）を工夫すること。[主として個人的構成活動]

- ② 凹四角形の多様な認識を共有し、新たな図形認識の観点から凹四角形を吟味することができるような社会的相互作用の場（学習状況）を工夫すること。[主として社会的構成活動]

①課題の提示と課題追究の場の工夫

ア. 児童に共有させる課題提示の場の工夫

本時（第2次の3/5時）の授業においては、前時までの「数学的对象の理解水準」における児童のジオボードを用いた三角形や四角形の構成活動「直観的段階」で児童がつくり出した凹四角形を取り上げる。この時点での児童の三角形と四角形の見方には、依然としてズレがみられるからである。そこで、「凹四角形は三角形か四角形か」を課題とすることによって、三角形と四角形の見方を児童自身にはっきりと意識させ「反省的段階」、授業後には、新たに加わった見方は何か、それによって三角形と四角形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせる「分析的段階」ことができるようにする。

イ. 多様な学習具による課題追究活動の場の工夫

児童に「凹四角形は三角形か四角形か」という課題について、自分自身の図形の見方をはっきりさせるためには、「対象間の関係の理解水準」において学習具を限定せずに追究させる「直観的段階」ことが大切である。例えば、辺の数に着目した児童にとっては、辺の数がよく分かる数え棒で図形をつくりかえることで自分の見方をはっきりするであろう。また、課題の条件にあう他の図形を構成しようとする児童にとっては、頂点の位置を自由に変えて図形をつくることのできる「ジオボード」や「ジオペーパー」という学習具を使った方がわかりやすいであろう。そこで、多様な学習具を児童が自己選択できるようにこの課題追究の場を工夫する。

②多様な凹四角形の認識を共有し、新たな図形認識の観点から凹四角形を吟味することができる社会的相互作用の場の工夫

児童が意味づける凹四角形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、それをより価値のある数学的知識へと高めていくためには、児童から出される多様な発想を意味づけたり関連づけたりすることが大切である。そこで、そのための手だてとして、児童に「凹四角形は三角形か四角形か」についてのいろいろな根拠を表出させ、学級全体での話し合いによってそれらの根拠を吟味する「反省的段階」ことを通して、児童全員が納得のいく三角形と四角形の見分け方についての考えを創り出す「分析的段階」ことができるようにする。

以上のように本節では、算数科授業において児童の数学理解を深化させるための教師にとって有効な視点として、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の3つの原理（P1～P3）と3つの方法（M1～M3）を導出した（図4-2）。

《算数科授業構成の3つの原理》

P1: 数学理解を、全か無かというように二者択一的にではなく、複雑な力動的過程としてとらえること。

[複雑な力動的過程としての理解過程]

P2: 数学理解の深化を促進するために、理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定すること。

[理解の階層的水準と学習段階の設定]

P3: 教室で行われる算数の教授学習活動としての授業においては、個々の児童の個人的構成と児童たちや教師との社会的構成の両方の活動を重視すること。

[個人的構成と社会的構成の重視]

《算数科授業構成の3つの方法》

M1: 算数科の授業で児童が学習する内容について、算数科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することにより、数学理解の階層的水準を明らかにすること。

[理解の階層的水準の明確化]

M2: 算数科の授業で学習する内容に対する児童の理解の程度について、学習内容に応じた事前調査や診断的評価、形成的評価などを行うことによって、その実態を把握すること。

[理解の程度の実態把握]

M3: 数学理解の階層的水準と児童の理解の程度の実態把握を基にして、算数科の授業で児童が学習する内容についての教材研究を行い、3つの学習段階を具体化し、個々の児童の個人的構成と児童たちや教師との社会的構成の両方の活動を位置づけること。

[理解の学習段階の具体化]

図4-2. 数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法

第2節 算数科における授業構成の具体化

本節では、これらの原理と方法を活用して、算数科における授業構成の具体化として2つの授業構成例を示し、算数科授業改善の方向性を提案する。

2. 1 小学校第1学年「繰り下がりのあるひき算」の授業構成例

まず、第一の事例研究として、小学校第1学年の児童（1クラス37人）を対象にした「繰り下がりのあるひき算」の授業（磯部他, 2006）の1時間分を取り上げ、その授業にみられる児童の数学理解の過程を分析・考察することによって、小学校低学年の算数科「数と計算」領域における授業構成例を示す。

1. 小学校第1学年「繰り下がりのあるひき算」の授業構成例

(1) 本時の授業の位置づけとねらい

ここで取り上げる算数科授業は、小学校第1学年の児童(37人)を対象にして、単元「ひきざん(2)―繰り下がりのあるひき算―」の第4次に位置づけられた「どんなきまりが見つかるかな?」の授業の1時間分である。したがって、児童にとって20までの数の意味や表し方、1位数と1位数の加法(繰り上がりのあるたし算)及び減法(繰り下がりのないひき算)は既習事項である。

この単元「ひきざん(2)」の基本的なねらいは、1位数と1位数の和が10より大きい数になる加法の逆算である減法について、その計算の仕方を考えるとともに、繰り下がりのあるひき算が確実にできるようにすることであるが、数の構成やひき算の式の理解を深化させることが重要であると考えられる。そこで、以下のように、第1学年の全13時間の単元「ひきざん(2)」の中に「どんなきまりが見つかるかな?」を位置づけ、授業の計画を立てて実践することとした。

(1) 授業計画の概要

①単元名 「ひきざん(2) ―繰り下がりのあるひき算―」

②単元目標

- 具体物を用いながら、進んで繰り下がりのある減法の計算の仕方を考えたり、計算をしようとしたりすることができる。(関心・意欲・態度)
- 既習の減法の考え方をもとにして、繰り下がりのある計算の仕方を工夫して考えることができる。(数学的な考え方)
- (十何)―(1位数)の減法で、繰り下がりのある計算が正しくできる。(表現・処理)
- (十何)―(1位数)の減法で、繰り下がりのある計算の意味やその仕方を理解できる。(知識・理解)
- 1つの数を他の数の和や差としてみるができる。(数学的な考え方)

③指導計画(全13時間)

第1次	繰り下がりのあるひき算	7時間
第2次	繰り下がりのあるひき算の練習	3時間
第3次	まとめの練習	1時間
第4次	どんなきまりが見つかるかな?	2時間

(分析・考察対象の授業)

(2) 事前研究

①教材分析

本単元は、1位数と1位数の和が10より大きい数になる加法の逆算である減法について、計算の仕方を考えることができるようにするとともに、繰り下がりのある計算が確実にできるようにすることがねらいである。児童は減法について、「ひきざん(1)」において、被減数が10以下のひき算について学習してきた。また、「たしざん(2)」において、1位数と1位数で繰り上がりのあるたし算について学習してきた。本単元では、それらの既習内容をもとに減法の用いられる場面を拡張するとともに計算の仕方を確実に理解できるようにする。さらに、本実践的研究では、第1学年の児童たちが理解した計算の仕方を活用していく場を設定することができるかどうかを明らかにする。なぜならば、理解したことをさらに高次の場で活用していくことで、児童の理解はより深まっていくと考えるからである。

そこで、本単元では、1つの数を他の数の和や差としてみるという関数の考えを生かす場（第4次）を設定することとする。具体的には、同じ差になるひき算の式に着目して、差が変化すると式はそれに伴ってどう変化するかを追究する場をとおして、理解した計算の仕方を活用し、きまりを見いだし、ひき算の式の理解を深められるようにする。

②児童の実態把握

本学級の児童は、具体物を使った算数的活動をとおして、加法における計算の場面を理解するとともに、計算の仕方を考えることができるようになってきている。例えば、 $8 + 6$ の繰り上がりのある加法の計算では、被加数の8を4と4に分解して、 $8 + 6 = 4 + (4 + 6)$ としたり、加数の6を2と4に分解して $8 + 6 = (8 + 2) + 4$ としたり、さらに被加数の8を5と3に分解し、加数の6を5と1に分解して $8 + 6 = 3 + (5 + 5) + 1$ と計算したりするような、柔軟に計算の仕方を工夫することができている。また、工夫して問題解決することに対して意欲的な児童が多い。実際、数量の変化に対する着眼が鋭く、例えば、「1位数と1位数の和が11になるたし算は8つできるから、和が12になる場合はどうなるか追究したい」といった着眼や意欲をもつ児童が多い。

したがって、このような本学級の児童の実態を踏まえ、児童の着眼や意欲を生かせば、本単元で、繰り下がりのある減法の計算の仕方を多様に考えるとともに、数の構成やひき算の式の理解をより深めていくことが可能であると判断する。

(3) 理解過程を重視した授業構成

こうした教材や児童の実態についての事前研究を踏まえて、児童たちのきまりへの着眼を生かす授業を構成し、展開していくことにする。そこで、本単元で学習する繰り下がりのあるひき算の計算をもとにして、さらに数の構成やひき算の式の理解を深化させるために、第4次の「どんなきまりが見つかるかな？」（2時間）の授業を計画し、その評価規準を次のように定める。

- 同じ差になるひき算の仕組みに関心を持ち、その理由を考えようとする。（関心・意欲・態度）
- 被減数と減数の大きさの関係に着目して、同じ差になるひき算のきまりを考えることができる。（数学的な考え方）
- 被減数と減数の大きさの関係を考えることによって、同じ差になるひき算の式をつくることができる。（表現・処理）
- 1つの数を他の数の差としてみることをとおして、被減数と減数、差の関係を明らかにすることができる。（知識・理解）

特に本時（第4次の1/2時）の授業の教材として、「同じ差になるひき算の式のきまり」を開発した。これは、差が9になるひき算の式の中に潜むきまり（規則性）をもとに差が8の場合や7の場合を考えることで、ひき算の式に対する児童の理解を深めようとするものである。

その際、児童がひき算の式に潜むきまり（規則性）に着目できるような課題の提示の工夫が重要になる。また、児童たちが同じ差になるいくつかのひき算の式から、気づきを出し合う中できまりを見いだし、その見いだしたきまりを活用して問題を解決することのできる課題追究の場の工夫が重要になる。したがって、課題の提示と課題追究の場を工夫することによって、児童の理解過程を重視した授業を構成する必要がある。

(2) 本時の授業のプロトコル

本時(第4次の1/2時)の授業の目標は、「同じ差になるひき算の式のきまり(規則性)に関心をもち、多様なきまりをみつけ、他の差になるひき算の式づくりにも活用していくことができる」であった。以下に、この授業が実際にどのように展開したかを示す。

T1: 今から先生は、繰り下がりのある計算のミニカードを見せるよ。

(11-2のカードを提示) はい、この差はいくつかな?

C1: 11-2は9です。

T2: そうですね。では、次にいくよ。

(14-5のカードを提示)

C2: 14-5は9です。

T3: それでは、3問目いくよ。

(16-7のカードを提示)

C3: 16-7は9です。

C4: 先生、あの～。

※ この時点で、差が同じひき算を提示していることに気づいた児童は4人いた。

T4: ちょっと待ってね、それでは、次いくよ。

(15-6のカードを提示)

C5: 15-6は9です。

C6: 気づきがあります。

※ この時点で、差が同じひき算を提示していることに気づいた児童は18人いた。

T5: あれ、これ(15-6のカード)を出した瞬間に、たくさんのお友達が「気づきがある」って言っているね。4枚目のカードで、どんな気づきがあるのかな?

C7: 11-2とか、14-5とか、1の次が2になって、4の次が5になるカードを先生が出しています。

T6: まとめて言うと、どうなるのかな?

C8: ひかれる数の一の位より、ひく数の方が1大きなひき算が出ています。

C9: それだったら、まだ出てないけど12-3もいいと思います。

T7: 鋭いね。先生は、12-3のカードも用意してたんですよ。

(12-3のカードを貼る)

C10: まだ他にもあります。

T8: どうぞ。

C11: 先生が出した計算カードは、答えが全部9になっています。

T9: 今まで出したカードは、そう言われてみたら全部、差が9になっているんだね。さて、先生はまだカードを持っているんだけど、このカードは差が9のカードだと思う?

C12: 思う。

C13: 先生、残りは何枚あるのですか。

T10: あと3枚です。

C14: (黒板に貼り出したカードの枚数を調べて) それなら、差が9のカードだと思います。

T11: じゃあ、残り3枚のカードは、どんなカードだと思うかな?

- カードを見せるよ。(18-9のカードを見せる)
- C15: やっぱりそうだ, 18-9は9です。
- T12: 次見せるよ。(13-4のカードを提示する)
- C16: 13-4は9です。
- T13: さて, 先生は, 最後の1枚のカードを持っているけど, このカードにはどんな式が書いてあると思うかな?
- C17: わかるよ。
- C18: えー。わかんない。
- T14: わかるよって言う人は, どうしてわかるのかな?
先生にこっそり教えてよ。
- C19: (授業者の耳元で) [ひかれる数が, 11, 12, 13, 14, . . . と並べていったら, 17だけ残るから, 17-8だと思う。]
- T15: すごいね! 先生が持っている最後の1枚のカードの式を言ってくれたよ。
そして, どうして, その式なのかわけも言ってくれているよ。
- C20: 僕も言えるよ。
- T16: じゃあ, こっそり教えてくれる。
[ある児童が授業者の耳元で小さな声で言う。]
- T17: みんなすごいね。でも, 先生わかんないよって言う人もいるね。正直に手を挙げてごらん。
- ※ この時点で, 残り1枚のカードに書かれた式が分からない児童は4人いた。
- T18: 正直でいいよ。じゃあみんな, わからないよって思っているみんなのために, このカードを何とかしてわかるようにするヒントが出せないかな?
- C21: できます。
- T19: では, やってみましょう。
- C22: (カードをひかれる数(被減数)の小さい順に並べ替え始める。) (図1)

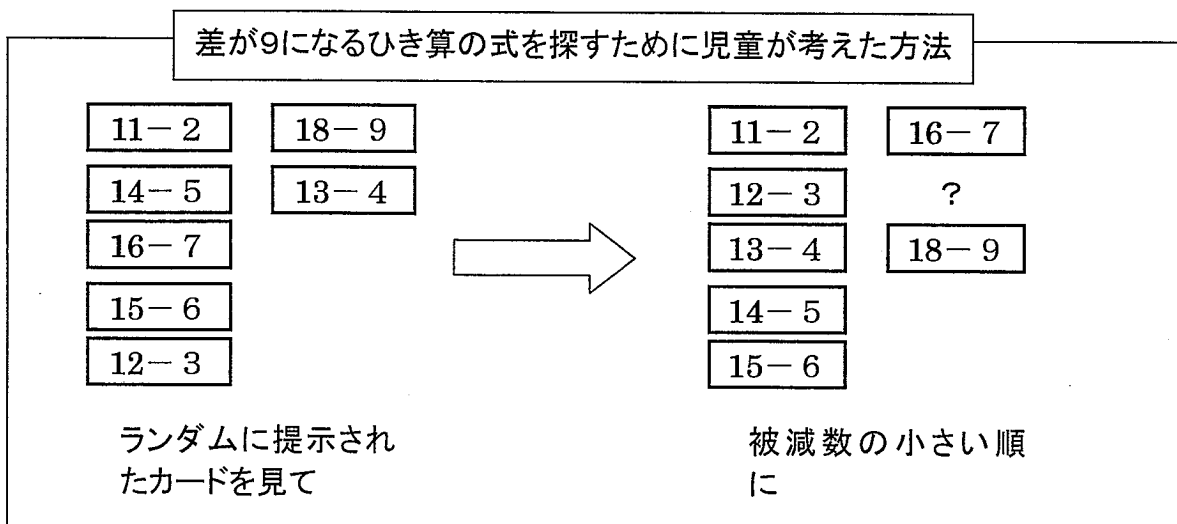


図1

- C23: 同じです。
- C24: わかった。
- ※ この時点で, 残りの1枚のカードに書かれた式がわからないと発言していた4

人の児童を含めて、全員の児童が式を特定できた。

T20：わかったって言う人がいるね。

では、最初はわからないって言っていた〇〇君がわかったって言ったから、残りのカードを並べてみてごらん。

C25：（残りのカードを並べ始める。）

C26：先生わかったよ。

T21：では、最後のカードは何かな？

C27： $17 - 8 = 9$ です。

C28：同じです。

T22：どうして、みんなは、カードを並べただけでわかったのかな？

C29：だって、11から順にひかれる数は11, 12, 13, 14, 15となっているし、ひく数は2, 3, 4, 5, 6とこっちも順番になっているからです。

T23：ここまでをまとめてみるよ。差が9のひき算は8個できるね。それでは、この8個の式から気づいたことはないかな？

C30：（児童たちは図2のような3つの気づきを発表した。）

T24：たくさんの気づきが生まれてきましたね。

では、もし差が8のひき算をみんなで探したら、何個できるかな？
みんなで予想してみよう。

C31：7個です。

T25：差が8のひき算は7個できるはずだと思っているんだね。どうしてそう思ったのかな？

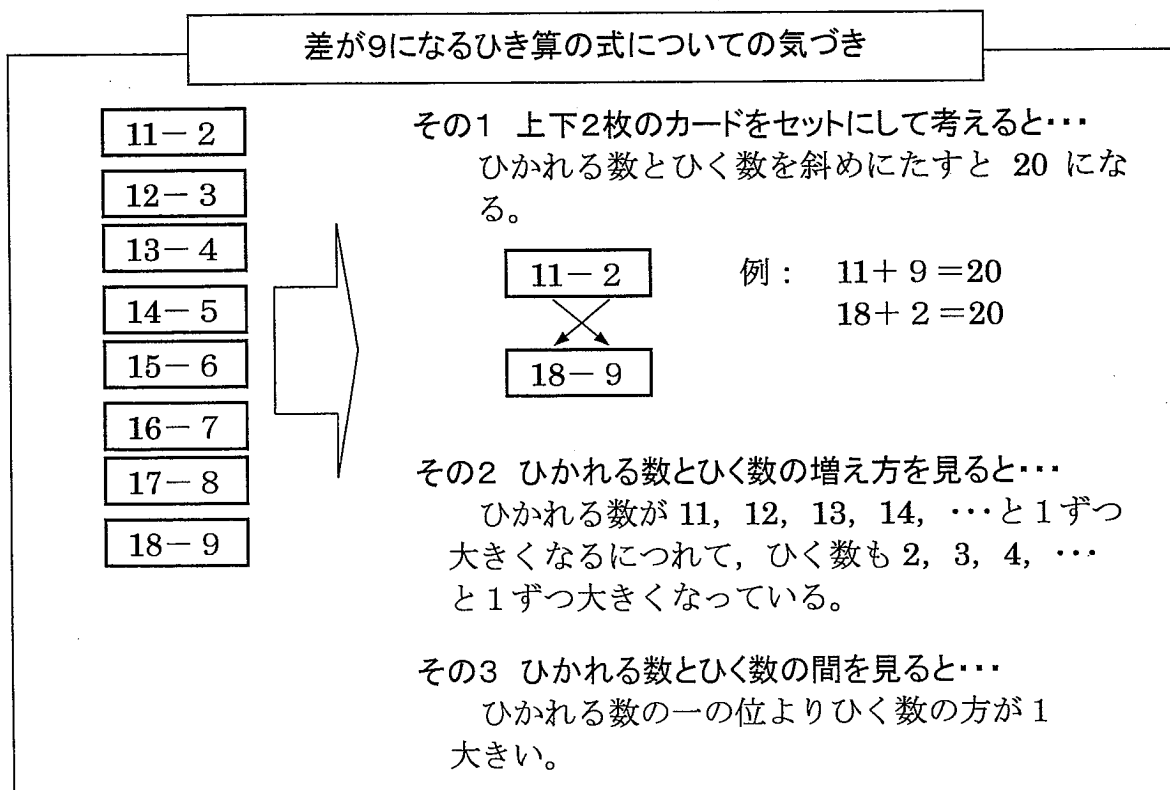


図 2

C32 : 差が9のひき算は8個だから、差が8になったら、9よりも差が1小さいから、できる数も8個から1個小さくなるはずだと思うからです。

C33 : 付け加えます。差が9から8, 7, 6と小さくなると、できるひき算の数も小さくなっていくはずだと思います。だって今までも、数が1つ小さくなったら、いっしょに小さくなったからです。

T26 : それでは、今日の研究では、差が8のひき算は本当に7個なのか調べてみましょう。

C34 : (児童たちは各自の見通しをもって、自力解決を行った。) (図3)

差が8になるひき算の式を見つける方法についての見通

$11-2$
 $12-3$
 $13-4$
 $14-5$
 $15-6$
 $16-7$
 $17-8$
 $18-9$

}

差が9のひき算の見つけ方をもとに

その1 ひかれる数を決めて考えてみる。
 例 : $11-\bigcirc=8$ になるひき算を考える。

その2 逆算で考えてみる。
 $\bigcirc-\triangle=8$ だから、逆に考えて、 $8+\triangle$ を考えてみると、ひき算ができる。

その3 ひかれる数とひく数の間を考える。
 差が8になるひき算は、ひかれる数の一の位よりひく数の方が2大きいはずだ。

図3

差が8になるひき算の式についての気づき

$11-3$
 $12-4$
 $13-5$
 $14-6$
 $15-7$
 $16-8$
 $17-9$

}

その1 上下2枚のカードをセットにして考えると…
 ひかれる数とひく数を斜めにたすと20になる。

$11-3$
 $17-9$

例 : $11+9=20$
 $17+3=20$

その2 ひかれる数とひく数の増え方を見ると…
 ひかれる数が11, 12, 13, 14, …と1ずつ大きくなるにつれて、ひく数も3, 4, 5, …と1ずつ大きくなっている。

その3 ひかれる数とひく数の間を見ると…
 ひかれる数の一の位よりひく数の方が2大きい。

図4

- T27：差が8になるひき算を発表してください。
- C35：11－3，12－4，13－5，14－6，15－7，16－8，17－9です。
- T28：差が8になるひき算は，最初に予想していたとおりに7個になりましたね。
 それでは，差が8になるひき算を並べてみるよ。これを見るとどんなきまりが見つかるかな？
- C36：（児童たちは図4のような3つの気づきを発表した。）
- T29：それでは，差が9のときと8のときを調べたから，今度は差が7のときはどうなると思うかな？
- C37：差が7のときは6個絶対できます。そのわけは，差が9のときは8個で，差が8のときは7個で，差より1つだけ小さい数できるからです。
- T30：すごいね。では，どんな式ができるかな？
- C38：いっぱいあるけど，1つだけですか。
- T31：そうですよ。
- C39：それでは， $11 - 4 = 7$ です。
- T32：どうして，11－4だと思ったのですか。
- C40：だって，差が9のときは11－2が最初で，差が8のときは11－3が最初だから，差が7になると11－4が最初になると思いました。
- C41：付け加えます。ひかれる数の一の位とひく数の間が，今度は3になるからです。
- T33：今度は，一の位だけを比べると差が3になるのですか？
- C42：だって，差が9のときは1で，差が8のときは2だから，差が7になると3になるはずですよ。
- T34：すごいね！ 今までに学習したことを，どんどん使っていくと，まだやっていない差が7のときも予想ができるのですね。

(3) 本時の授業の考察

このように，本時の授業で児童たちは，差が9になる繰り下がりのあるひき算の式に潜むきまり（規則性）を見つけ，それを活用して差が8になるひき算の式を調べ，より一般的なきまりを見いだす学習を行っている。

まず，課題提示の段階では，教師は児童たちに，差が9になる繰り下がりのあるひき算の式が書かれたミニカードをランダムに1枚ずつ提示していった（「11－2」，「14－5」，「16－7」，「15－6」，・・・）。このようにしてカードを1枚ずつ提示していった際に，それらは差が9になるひき算の式であるということに気づいた児童の数は，次のように増えていった。このことから，差が9になるひき算である

提示枚数	差が9というきまりに気づいた児童の数
1枚目（11－2）提示後	0人（37人中）
2枚目（14－5）提示後	0人（37人中）
3枚目（16－7）提示後	4人（37人中）
4枚目（15－6）提示後	18人（37人中）

ことに気づいた児童の数は、4枚目のカードを提示した段階で大幅に増えていることがわかる。そして、残り1つのひき算の式（「17-8」）を考える際に、児童たちは提示されたひき算の式が書かれた7枚のカードをひかれる数（被減数）の小さい順に並べる方法によって、残り1つのひき算の式を特定することができている。

次に、差が9の繰り下がりのあるひき算の式を見て気づいたきまりを出し合わせることで、本授業における追究のもとになるきまりを3つ明らかにすることができた（図2）。これは、本授業における繰り下がりのあるひき算の式の理解の基礎となるものであり、差が8のひき算の式を見つけるための原動力となるものである。

差が8になる繰り下がりのあるひき算の式を追究する自力解決の段階では、差が9になるひき算の式について考えた方法（ひき算の式を被減数の小さい順に並べる方法）や見つけたきまり（被減数の一の位より減数の方が1大きい）などを児童たちが自発的に活用している姿が見られ、授業後の児童のノートからもこのことが確認された（図5）。このことは、本授業における児童たちの課題意識の連続性を示すものである。

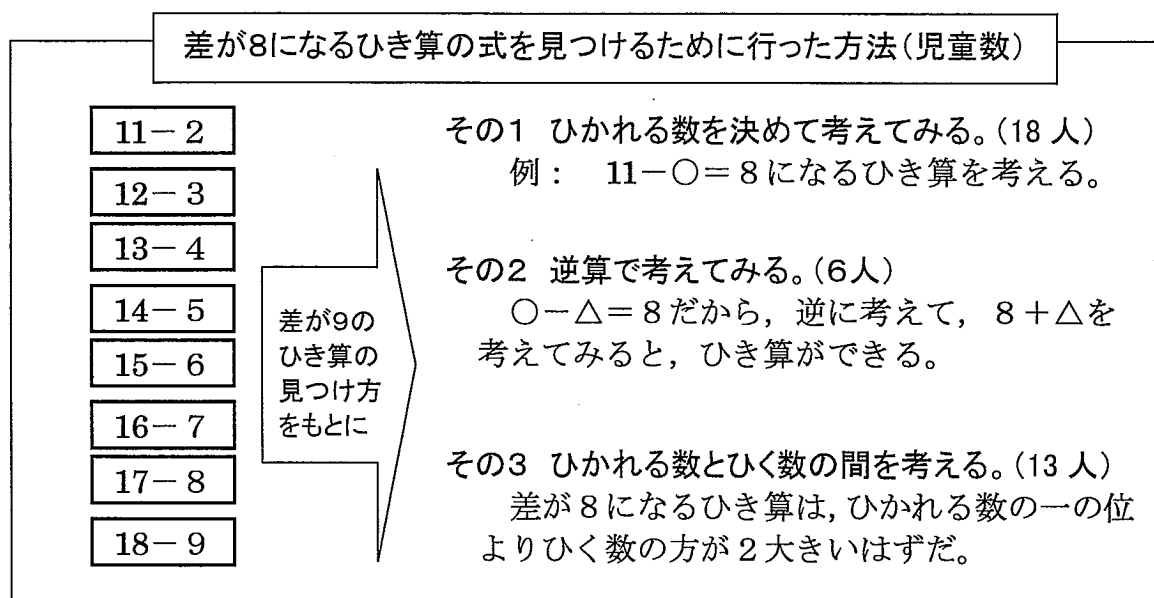


図5

そして、本時の授業の最後の段階では、差が8のひき算の式についてのきまりを見い込ませている。児童たちの気づき（図4）を見ると、差が8のひき算の場合にも差が9の場合と同様のきまりに気づいたことがわかる。このような気づきが生まれた背景には、差が9の場合のひき算の式を見る見方があるといえる。

以上のことから、差が9の場合をもとに差が8の場合のひき算の式を考える場の設定は、児童たちにこれまでの繰り下がりのあるひき算の学習による理解をもとにして、数の構成やひき算の式の仕組みに着目させ、きまりを発見させる上で有効であったと考えられる。

2. 本時の授業にみられる児童の数学理解の過程

以下では、数学理解の2軸過程モデルに基づいて、この授業にみられる観察可能な児童の数学理解の過程について考察してみよう。

本学級の児童は、第1学年の単元「ひきざん(2)―繰り下がりのあるひき算―」に入るまでに、20までの数の意味や表し方、1位数と1位数の加法(繰り上がりのあるたし算まで)及び減法(繰り下がりのないひき算)を学習している。そして本単元においては、本時(第4次の1/2時)の授業に入るまでの合計11時間の学習によって、児童は(十何)―(1位数)の繰り下がりのあるひき算の仕方を考え、計算が確実にできるようになっている。また、多くの児童は、(1位数)+(1位数)の繰り上がりのあるたし算の学習において、多様な計算方法を工夫することに興味をもち、さらに「1位数と1位数の和が11になる繰り上がりのあるたし算の式は8つできるから、和が12になる場合はどうなるか追究したい」というような着眼や意欲をもって学習してきている。こうした児童の実態を踏まえて、本時の授業においては、(十何)―(1位数)の繰り下がりのあるひき算(つまり、被減数は11から18までの数で減数は2から9までの数の繰り下がりのあるひき算)の式についてのきまりを見つけさせることによって、数の構成やひき算の式についての児童の理解を深めることがねらわれている。

実際、本時の授業において、児童たちは教師からランダムに1枚ずつ提示されたミニカードに書かれた繰り下がりのあるひき算の式に興味をもち、それらを見て、「ひかれる数の一の位よりひく数が1大きい」(C7, C8)ことや「答えが全部9になっている」(C11)ことに気づいた。そして、残りのカードが1枚になった時点で33人の児童が、それは「 $17-8$ 」であることに気づいていた。他方、4人の児童はそのカードに書かれたひき算の式が分からないようであった。そこで、提示された7枚のカードを被減数の小さい順に並び替えればよい(図1)というアイデアが児童から出され(C22)、それによってその4人の児童も含めてすべての児童が残り1枚のカードに書かれたひき算の式が「 $17-8$ 」であることを確信するに至っている。この時点で、教師の「どうして、みんなは、カードを並べただけでわかったのかな?」(T22)との問いかけに対して、児童は「だって、11から順にひかれる数は11, 12, 13, 14, 15となっているし、ひく数は2, 3, 4, 5, 6とこっちも順番になっているからです」(C29)と、順序よく並び替えられた7つの式において被減数と減数がともに1ずつ大きくなっているということとその理由として述べている。

このようにして、差が9になる繰り下がりのあるひき算の式が8つあることを確認した後で、教師は「それでは、この8個の式から気づいたことはないかな?」(T23)と問いかけることによって、差が9の繰り下がりのあるひき算の8つの式に児童たちを着目させている。すなわち、差が9のひき算の式のきまりに気づかせようとしたのである。その結果、児童たち(C30)は気づきとして次のような3つのきまりを発表した(図2)。

きまり①: 上下2枚のカードをセット(例えば、 $11-2$ と $18-9$)にして、ひかれる数とひく数を斜めにたす($11+9$, $18+2$)と20になる。

きまり②: ひかれる数が11, 12, 13, 14, …と1ずつ大きくなるにつれて、ひく数も2, 3, 4, …と1ずつ大きくなっている。

きまり③: ひかれる数の一の位よりひく数の方が1大きい。

そこで、教師は「たくさんの気づきが生まれてきましたね。では、もし差が8のひき算をみんなで探したら、何個できるかな?」と児童たちに問いかけた。このとき、児童は即座に「7個できる」(C31)ということ予想し、かなりの自信をもって「差が9のひき算は8個だから、差が8になったら、9よりも差が1小さいから、できる

数も8個から1個小さくなるはずだと思うからです」(C32)とその理由を述べている。

こうした児童の発言を受けて、「それでは、今日の研究では、差が8のひき算は本当に7個なのか調べてみましょう」(T26)と、本時の追究すべき課題が設定された。この課題に対して、児童たちは次の3つのいずれかの方法によって追究していった(図3, 図5)。

方法①: ひかれる数を決めて差が8になるひき算の式を順々に考える(例えば, $11 - \bigcirc = 8$)。

方法②: $\bigcirc - \triangle = 8$ だから, その逆算 $8 + \triangle$ を考えていけば, ひき算の式ができる。

方法③: 差が8になるひき算は, ひかれる数の一の位よりひく数の方が2大きいはずということに着目する。

そして, 児童たちは各自の方法で, 差が8のひき算の式は7つということを確認できている。そこで, 教師は差が9の場合と同様に, 「それでは, 差が8になるひき算を並べてみるよ。これを見るとどんなきまりが見つかるかな?」と問いかけ, 差が8のひき算の式についてのきまりを見いださせようとした。その結果, 児童たち(C36)は気づきとして次のような3つのきまりを発表した(図4)。

きまり①': 上下2枚のカードをセット(例えば, $11 - 3$ と $17 - 9$)にして, ひかれる数とひく数を斜めにたす($11 + 9$, $17 + 3$)と20になる。

きまり②': ひかれる数が11, 12, 13, 14, …と1ずつ大きくなるにつれて, ひく数も3, 4, 5, …と1ずつ大きくなっている。

きまり③': ひかれる数の一の位よりひく数の方が2大きい。

このことから, 児童たちは差が8のひき算の場合にも差が9の場合と同様のきまりに気づいたことがわかる(きまり①ときまり①', きまり②ときまり②', きまり③ときまり③'がそれぞれ対応する)。そして, 児童たちはこのような気づきをもとに, 教師の「それでは, 差が9のときと8のときを調べたから, 今度は差が7のときはどうなると思うかな?」という問いかけに対して「差が7のときは6個絶対できます。そのわけは, 差が9のときは8個で, 差が8のときは7個で, 差より1つだけ小さい数できるからです」(C37)と理由をはっきりと言っていて答えている。さらに, 教師の「では, どんな式ができるかな?」(T30)という問いかけに対しては「(1つだけ挙げるとすると) $11 - 4 = 7$ です」(C39), 「だって, 差が9のときは $11 - 2$ が最初で, 差が8のときは $11 - 3$ が最初だから, 差が7になると $11 - 4$ が最初になると思いました」(C40), 「付け加えます。ひかれる数の一の位とひく数の間が, 今度は3になるからです」(C41), 「だって, 差が9のときは1で, 差が8のときは2だから, 差が7になると3になるはずですよ」(C42)と, 差が9の場合と差が8の場合に気づいたきまりを意識して答えられるまでに至っている。

こうした本時(第4次の1/2時)の授業における学級集団としての児童の繰り下がりのあるひき算の理解の変容を数学理解の2軸過程モデルを用いて記述すれば, 以下のように説明することができる。ここでの児童たちの数学理解の水準[縦軸]は, 第1学年における20までの数や1位数と1位数の加法(繰り上がりのあるたし算)及び減法(繰り下がりのないひき算)についての理解を基に, 本単元の第1次の(十何) - (1位数)の繰り下がりのあるひき算という「数学的対象」についての理解水準を踏まえ, 繰り下がりのあるひき算の式を関係づけてそのきまりを理解する「数学的対象間の関係」の理解水準に位置づけられる。そして, 本時の授業で, 繰り下

がりのあるひき算の式のきまりについての児童の理解は、差が同じ（9や8の）ひき算の式において2つの式の被減数と減数を斜めにたすと和が同じになること（きまり①ときまり①'）や被減数が1ずつ大きくなるにつれて減数も1ずつ大きくなること（きまり②ときまり②'）、差が9になるひき算の式では被減数の一の位の数よりも減数の方が1大きく、差が8になるひき算の式では被減数の一の位の数よりも減数の方が2大きいということ（きまり③ときまり③'）を理解するなど、この「数学的対象間の関係」の水準において広がりを見せている。さらに、差が7になる繰り下がりのあるひき算の式の個数を予想する場面では、「差が9のとき8個で差が8のとき7個というように、差が1小さくなれば式の個数も1少なくなっているので、差が7のときは6個できる」と自信をもって言っていることから、児童の繰り下がりのあるひき算の式への理解には「数学的関係の一般性」の理解水準への深化の萌芽が認められる。

このように本時の授業で児童の繰り下がりのあるひき算の理解が広がりとし深まりを見せたのは、第1学年の本単元に入るまでの児童の学習や本単元のそれまでの「数学的対象」の理解水準における学習を踏まえて、教師が児童たちとともに繰り下がりのあるひき算の式について「どんなきまりが見つかるかな？」という学習課題を設定したからである。はじめに、差が9になるひき算の式が書かれたミニカードを教師からランダムに1枚ずつ提示されたとき、児童は被減数の一の位よりも減数の方が1大きいことや差が9になるという共通性に気づき、残り1枚のカードに書かれたひき算の式を、提示された7枚のカードを被減数の小さい順に並び替えること（図1）によって言い当てている〔直観的段階〕。そして、なぜその式を言い当てることができるかの理由を考えたり、それら8つのひき算の式を見てきまり（図2）を見いだしたりしている〔反省的段階〕。次いで、差が9の場合の方法やきまりを活用（図3）して、差が8になるひき算の式は何個できるか調べて7つあることを確認し〔直観的段階〕、差が8になるひき算の式を見てきまり（図4）を見いだしている〔反省的段階〕。その後、「差が7のときはひき算の式が何個できるか」との問いに対して、差が9のときと差が8のときのひき算の式について見いだしたきまり（図2と図4）をもとに、その理由を伴って「6個絶対できます」と言ったり、差が7になるひき算の式の1つが「 $11-4$ 」であることを明確な理由を述べて言ったりしている〔分析的段階〕。

3. 本時の授業をもとにした授業改善案

これまで、数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法を具体化するための事例研究の1つとして、小学校算数科の第1学年における「繰り下がりのあるひき算」の授業を分析・検討することによって、その授業にみられる観察可能な児童の理解過程について考察してきた。その結果、上述のように、本時の授業において児童の繰り下がりのあるひき算の理解は差が同じになるひき算の式を関係づけてみる「数学的対象間の関係」の理解水準において広がりを見せるとともに、それによって見いだしたきまりを一般化しようとする「数学的関係の一般性」の理解水準への深化の萌芽が認められた。それゆえ、小学校第1学年の単元「ひきざん(2)―繰り下がりのあるひき算―」の授業実践は、3つの学習段階を経ることによって、その学級の児童たちの20までの数の構成とひき算（特に繰り下がりのあるひき算）の理解を広げ深めることに大きく寄与しているといえる。

このように児童の数学理解を深化させうる算数科授業を構成するためには、算数科の授業で児童が学習する内容について、算数科の学習指導要領などのカリキュラム

を分析することによって数学理解の階層的水準を明らかにするとともに、児童の数学理解の実態を踏まえて、3つの学習段階を具体化し、個々の児童の個人的構成と児童たちや教師との社会的構成の両方の活動を位置づけることが重要である。その際、課題の提示と課題追究の場を工夫し、社会的相互作用を組み込むことによって、児童の理解過程を重視した算数科授業を構成する必要があるといえる。特に本時の授業のように繰り下がりのあるひき算についての児童の数学理解を深化させるには、まず課題提示の場において、差が9になる繰り下がりのあるひき算の式が書かれたミニカードをランダムに提示することによって、児童の好奇心を喚起し、差が9になるひき算の式についての気づきをもとに差が8になるひき算の式を調べようという課題意識を児童にもたせる。そして、児童がこれら2つの差が同じになる繰り下がりのあるひき算の式について考えるような課題追究の場を工夫し、被減数、減数、差の関係に着目できるようにする。また、こうした課題追究の場に、児童たちが数の構成や繰り下がりのあるひき算の式についての多様な気づきを共有し、吟味することのできる社会的相互作用を組み込む必要がある。

これらの点を考慮して構成した本時の授業では、児童の繰り下がりのあるひき算の理解は差が同じになるひき算の式を関係づけてみる「数学的対象間の関係」の理解水準において広がりを見せるとともに、それによって見いだしたきまりを一般化しようとする「数学的関係の一般性」の理解水準への深化の萌芽が確かに認められた。しかしながら、児童の数学理解の深化は十分とはいえず、本授業実践の分析・考察によって明らかになった本時の授業における児童の気づきをもとにすればさらなる深化が期待できる。

本時の授業においては、(十何) - (1位数) の繰り下がりのあるひき算の学習をひととおり終えた後に、児童に繰り下がりのあるひき算の式に着目させ、それらを関係づけてきまりを理解することがねらわれている。このことは、計算の仕方を考えたり計算の確かめをしたりすることに生かされるだけでなく、その後の第2学年で学習する乗法に関して成り立つ性質(乗数が1増えれば積は被乗数分だけ増える)を見いだし活用すること(文部省, 1999, p.81)や第4学年で学習する除法に関して成り立つ性質(被除数と除数に同じ数をかけても同じ数で割っても商は変わらない)を見いだし活用すること(文部省, 1999, p.111)にもつながりうるものである。したがって、第1学年の繰り下がりのあるひき算の学習においてひき算の式に着目させ、それらを関係づけてひき算のきまりを理解させることは重要で意義のあることである。

実際、本時の授業では、この学級の児童たちは差が9になる繰り下がりのあるひき算の式のきまりとして次のような3つのきまりに気づいている(図2)。

きまり①: 上下2枚のカードをセット(例えば, $11-2$ と $18-9$)にして、ひかれる数とひく数を斜めにたす($11+9$, $18+2$)と20になる。

きまり②: ひかれる数が11, 12, 13, 14, ...と1ずつ大きくなるにつれて、ひく数も2, 3, 4, ...と1ずつ大きくなっている。

きまり③: ひかれる数の一の位よりひく数の方が1大きい。

さらに、児童たちは差が8になる繰り下がりのあるひき算の式のきまりとして次のような3つのきまりにも気づいている(図4)。

きまり①': 上下2枚のカードをセット(例えば, $11-3$ と $17-9$)にして、ひかれる数とひく数を斜めにたす($11+9$, $17+3$)と20になる。

きまり②': ひかれる数が11, 12, 13, 14, ...と1ずつ大きくなるにつれて、ひ

く数も 3, 4, 5, …と1ずつ大きくなっている。

きまり③' : ひかれる数の一の位よりひく数の方が2大きい。

本時の授業における教師の主眼が「差が9から8に、さらに7へと1ずつ小さくなると、できるひき算の個数も8個, 7個, 6個というように1つずつ少なくなる」ということへの理解にあつたため、上記のような児童たちが気づいたきまりの理解が浅いままに止まっている。したがって、児童の理解を数学理解の2軸過程モデルの縦軸に沿って「数学的対象間の関係」の理解水準から「数学的関係の一般性」の理解水準へと深化させることをねらうのであれば、次時の授業を以下のように構成することが1つの提案として考えられる。

次時の授業では、まず、前時の授業で児童が気づいたきまりを、ひき算の式が書かれたミニカードを図6のように整理して貼ることによって振り返ることから始める。

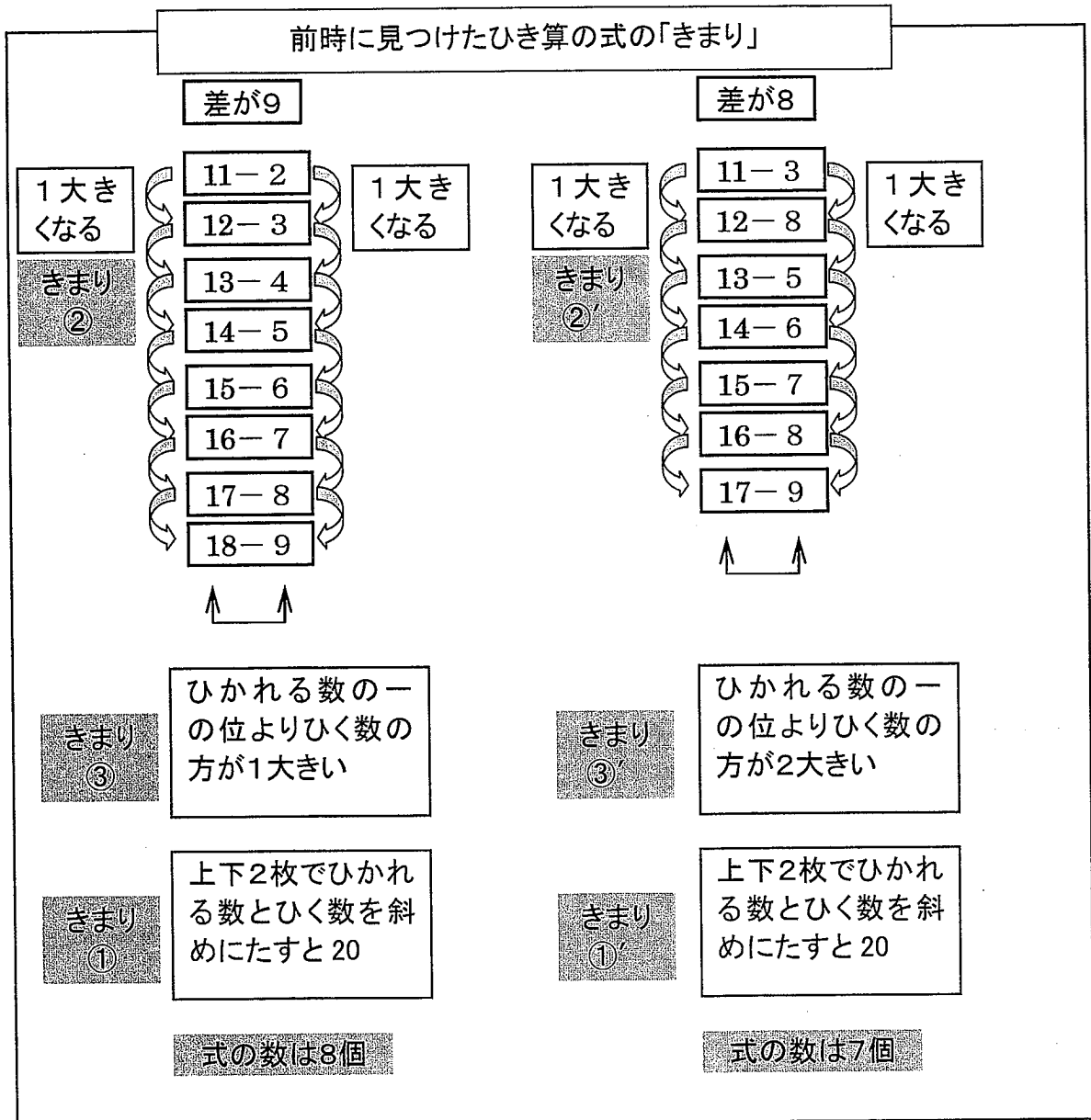


図6

前時の授業において、こうした気づきをもとに、(十何) - (1位数)の繰り下がりのあるひき算(つまり、被減数は11から18までの数で減数は2から9までの数の繰り下がりのあるひき算)では、ひき算の差の大きさと式の個数との関係に児童たちが着目することを促す教師の発問によって、差が9から8へと1小さくなるとできるひき算の式の数も8個から7個へと1少なくなるということに気づいている。そして、前時の授業の最後には、差が7の場合にはひき算の数が6個になるということを確認をもって予想している児童もいた。

そこで、差が7になるひき算の式の数が6個になることを実際に確かめ、続いて差が6の場合、5の場合と差を1ずつ小さくしていった差が2の場合まで、どのようなひき算の式が何個できるか児童たちに調べさせる。そして、その結果を表1のように整理する[直観的段階]。

表1

差が9	差が8	差が7	差が6	差が5	差が4	差が3	差が2
11-2	11-3	11-4	11-5	11-6	11-7	11-8	11-9
12-3	12-4	12-5	12-6	12-7	12-8	12-9	
13-4	13-5	13-6	13-7	13-8	13-9		
14-5	14-6	14-7	14-8	14-9			
15-6	15-7	15-8	15-9				
16-7	16-8	16-9					
17-8	17-9						
18-9							
8個	7個	6個	5個	4個	3個	2個	1個

次に、この表1を見て、前時の授業で児童たちが気づいたきまり(図6)が成り立つかどうか考えさせる[反省的段階]。そうすれば児童たちから次のような気づきが発表され、それらについての話し合いが行われるであろう[分析的段階]。

- (1) 差が7のときも、上下2枚のカードをセット(例えば、11-4と16-9)にして、ひかれる数とひく数を斜めにたす(11+9, 16+4)と20になる。このように、上下2枚のカードをセットにして、ひかれる数とひく数を斜めにたすと答え(和)が同じになる。(きまり①ときまり①'について)
- (2) 差が7のときも、ひかれる数が11, 12, 13, ...と1ずつ大きくなるにつれて、ひく数も4, 6, 6, ...と1ずつ大きくなっている。差が6のときも5のときも同じようになっている。(きまり②ときまり②'について)
- (3) 差が7のときは、ひかれる数の一の位よりひく数の方が3大きい。このように、差が1ずつ小さくなると、ひかれる数の一の位とひく数の間が1ずつ大きくなっている。(きまり③ときまり③'について)

こうした気づきについての話し合いの中で、表1の縦に並んだひき算の式を上から下への方向に見て、「ひかれる数とひく数に同じ数をたしても、差は変わらない」と、上記の(2)のきまりをさらに一般化して言う児童もいるであろう。それに触発されて、逆に、表1の縦に並んだひき算の式を下から上への方向に見て、「ひかれる数とひく数から同じ数をひいても、差は変わらない」と言う児童もいるであろう。また、表1の横に並んだひき算の式を左から右への方向に見て、「ひく数を大きくすると、

その分だけ差が小さくなる」ということや、逆に右から左への方角に見て、「ひく数を小さくすると、その分だけ差が大きくなる」という、前時の授業では気づかなかった新たなきまりに気づく児童もいるであろう。

この時点で、表1のひき算の式の並べ方を少し変更した表2を児童たちに見せるとよい。なぜなら、表1はひく数と差の関係に気づきやすい並びになっているのに対して、表2はひかれる数と差の関係に気づきやすいと考えられるからである。この表2の横に並んだひき算の式を左から右への方角に見て、「ひかれる数を小さくすると、その分だけ差が小さくなる」ということや、逆に右から左への方角に見て、「ひかれる数を大きくすると、その分だけ差が大きくなる」という新たなきまりに気づく児童がいると期待される。

表2

差が9	差が8	差が7	差が6	差が5	差が4	差が3	差が2
11-2							
12-3	11-3						
13-4	12-4	11-4					
14-5	13-5	12-5	11-5				
15-6	14-6	13-6	12-6	11-6			
16-7	15-7	14-7	13-7	12-7	11-7		
17-8	16-8	15-8	14-8	13-8	12-8	11-8	
18-9	17-9	16-9	15-9	14-9	13-9	12-9	11-9
8個	7個	6個	5個	4個	3個	2個	1個

これらのきまりは、繰り下がりのあるひき算についてのみならず、第2学年以降で学習する桁数の大きい数のひき算についても成り立つきまりである。その上、ひき算を工夫して行うときに、有効に活用できるものでもある。したがって、第1学年の20までの数の繰り下がりのあるひき算の学習をする段階で、児童がこうした一般的なひき算のきまりを見だし、活用できるような算数科授業を構成し、児童のひき算についての数学理解を深化させることは重要である。ただし、児童の数学理解の実態によっては、「ひかれる数とひく数から同じ数をひいても、差は変わらない」、「ひく数を大きくすると、その分だけ差が小さくなる」などのひき算のきまりを式や言葉だけでは実感できない場合が考えられる。そのような場合には、前単元までの学習においてひき算の仕方を考えたときのように、児童に具体物を用いた活動を実際に行わせたり、図を用いて説明させたりする機会(図7)を授業中に設ける必要がある。

いずれにしても、以上のように、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法を活用して、第1学年の児童の「繰り下がりのあるひき算」の理解を、2軸過程モデルの縦軸に沿って「数学的対象間の関係」の理解水準から「数学的関係の一般性」の理解水準へと深化させることをねらうのである。こうした小学校第1学年における単元「繰り下がりのあるひき算」の算数科授業構成のイメージを図に表すと図4-3のようになる。

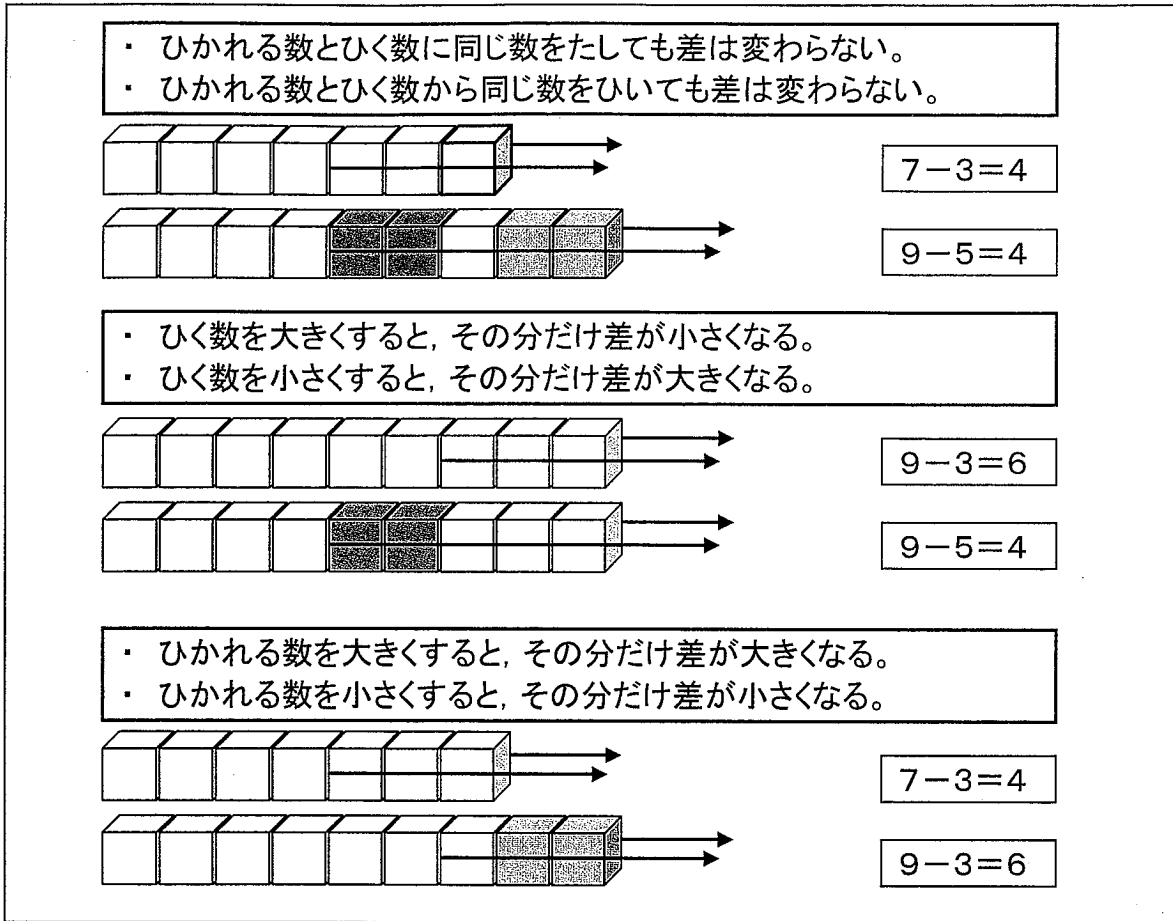


図 7

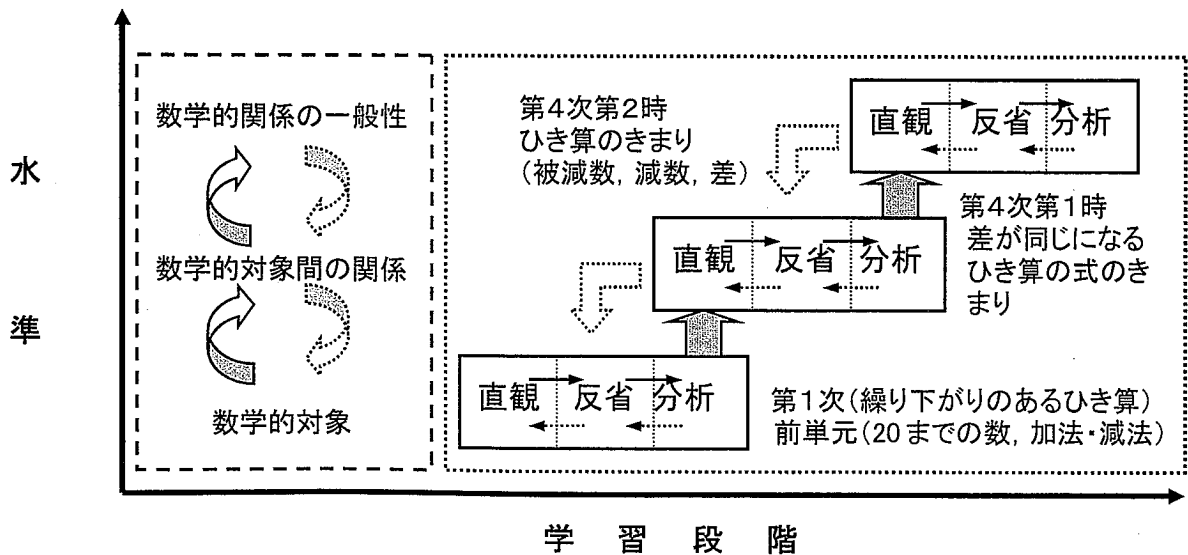


図 4-3. 数学理解の 2 軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法による小学校第 1 学年「繰り下がりのあるひき算」の算数科授業構成のイメージ図

2. 2 小学校第5学年「図形の面積の求め方」の授業構成例

次いで、第二の事例研究として、小学校第5学年の児童（1クラス39人）を対象にした「図形の面積の求め方」の授業（赤井他, 2003）の1時間分を取り上げ、その授業にみられる児童の数学理解の過程を分析・考察することによって、小学校高学年の算数科「数量関係」領域における授業構成例を示す。

1. 小学校第5学年「図形の面積の求め方」の授業構成例

(1) 本時の授業の位置づけとねらい

ここで取り上げる算数科授業は、小学校第5学年の児童（39人）を対象にして、単元「図形の面積の求め方」の第4次に位置づけられた「台形の面積の求め方」の授業の1時間分である。したがって、児童にとって正方形や長方形の面積（第4学年で学習）、三角形や平行四辺形の面積など（本単元の第2次と第3次で学習）は既習事項である。

台形の求積公式そのものは平成10年告示の学習指導要領（平成14年度実施）では削除された内容であるが、台形の面積の求め方を児童自ら工夫して考えることは価値のある学習である。そこで、以下のように、第5学年の全15時間の単元「図形の面積の求め方」の中に「台形の面積の求め方」を位置づけ、授業の計画を立てて実践することとした。

(1) 授業計画の概要

①単元名 「図形の面積の求め方」

②単元目標

- 図形の求積に必要な部分の長さに着目して、計算で面積を求めようとする。
(関心・意欲・態度)
- 既習の求積方法を基にして、倍積変形・等積変形などの操作を通して公式にまとめることができる。(数学的な考え方)
- 求積公式を適切に活用し、図形の面積を求めることができる。(表現・処理)
- 三角形・平行四辺形・ひし形・台形の面積の求め方や求積公式の意味がわかる。
(知識・理解)

③指導計画（全15時間）

- 第1次 面積の求め方の工夫 …………… 1時間
- 第2次 三角形の面積 …………… 4時間
- 第3次 平行四辺形・ひし形の面積 …… 4時間（習熟度別編成）
- 第4次 台形などの面積 …………… 3時間
 - 第1時 台形の面積の求め方（分析・考察対象の授業）
 - 第2時 台形の求積公式
 - 第3時 五角形の面積
- 第5次 辺の長さとの面積の関係 ……… 2時間
- 第6次 まとめの練習 …………… 1時間

(2) 事前研究

①教材分析

本単元は、既習の図形の求積方法を基に、三角形や平行四辺形などの四角形の面積を求めることが主なねらいである。児童たちは、第4学年において正方形や長方形などの簡単な平面図形の面積の求め方を学習している。そこで本単元では、既に学習し

た図形を活用して三角形や平行四辺形、台形などの新たな図形の面積を求める算数的活動を行う。この算数的活動では、既習の求積可能な図形の面積の求め方を基にして考えたり、求積公式をつくり出したりする。そして、この活動の過程で一般化の考え方や論理的な考え方など数学的な考え方を育成することが重要である。したがって、新たに面積を求める図形に対して既習の図形の求め方を活用するなど、面積を求める過程を重視して学習する必要がある。また、このような数学的な考え方を身に付けることで、一般の四角形や五角形などの様々な図形に対して、児童は自らの考えに基づいて工夫し、面積を求めることができると考えられる。

特に本時（第4次の1/3時）においては、平行四辺形や三角形の面積の求め方を活用して台形の面積の求め方を考えるという算数的活動を行う。その意味で、本時の学習は平行四辺形や三角形の面積の求め方の発展的内容の学習という位置づけである。したがって、本時は児童の既習の学習を生かし、児童自身が学習を構成していくという展開を進めていく。そうすることによって、児童たちは既習の求積可能な図形の面積の求め方に基づいて新たな図形の面積の求め方をイメージすることができる。そして、このイメージを基に数学的なコミュニケーションをもつことで、個々の児童の求積に対する数学的な考え方が高まり、理解もより深まると考えられる。

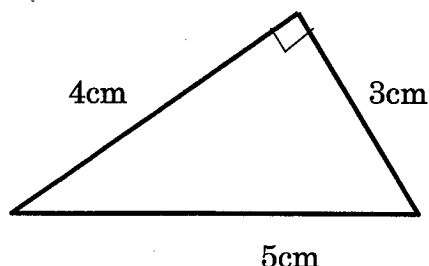
したがって、本単元では、個々の児童の既習事項を活用した考えと、数学的なコミュニケーションに基づく社会的相互作用による理解過程を重視し、図形の面積の求め方についての知識・技能、数学的な考え方を高めていく授業を展開していく。

②児童の実態把握

そこで、本時の授業を実践する前に、本学級の児童（39人）の理解の実態を把握するために、既習の三角形と平行四辺形の求積問題について簡単な事前調査を行った。その調査の問題と結果は以下のとおりである。

【三角形の求積】（39人中 33人正答・6人誤答）

次の三角形の面積を求めなさい。



〈誤答〉

$5 \times 4 \div 2 = 10$ (3人)

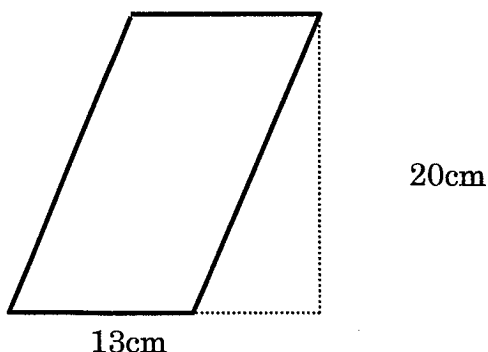
$5 \times 3 \div 2 = 7.5$ (1人)

$3 \times 5 = 15$ (1人)

35 (1人)

【平行四辺形の求積】（39人中 33人正答・6人誤答）

次の平行四辺形の面積を求めなさい。



〈誤答〉

$13 \times 20 \div 2 = 130$ (4人)

$13 \times 20 = 200$ (1人)

無答 (1人)

この結果から、8割以上の児童が三角形と平行四辺形の求積については理解しているということがわかった。他方で、両問とも間違っている児童が3人おり、この3人は本単元の第3次の平行四辺形・ひし形の習熟度別指導では「じっくりコース」の児童たちである。したがって、こうした理解が不十分な児童に対してはさらに重点的な指導が必要であるということが明らかになった。

(3) 理解過程を重視した授業構成

①既習事項の確認

算数科授業では、児童が新しい数学的概念や性質、原理・法則を学習するとき、学習の仕方がわからず、どのように取り組めばいいのか迷い、手がつけられずに終わることがある。その理由としては、新しい数学的概念や性質、原理・法則を学習する際に既習の学習内容を再構成して取り組むことができないことや、児童自身が理解している内容を意識化できないということが考えられる。

したがって、理解過程を重視した算数科授業では、数学的概念や原理・法則を理解しようとする個々の児童の算数的活動を保障するために、学習目標に対して、自分が何を理解しているのか、どのような考え方を活用できるのかなど、児童にその時点での自身の理解を意識化させておく必要がある。そこで、本時の授業では、まず児童たちに平行四辺形の面積がそれを三角形に分割することによって求められたことを想起させ、この既習の図形に分割するという考え方を基にして台形の面積の求め方を考えさせることにする(図1)。

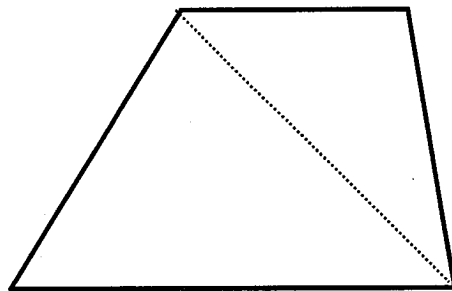


図1

②数学的な考え方を生かした発展的内容の学習

第5学年の単元「図形の面積の求め方」の学習では、三角形や四角形の求積方法を理解することがねらいである。その際、四角形としては平行四辺形やひし形を取り扱うが、台形の面積を求めることは現行の学習指導要領(文部省, 1999a)では求められていない。

しかし、本時の授業では、台形の面積の求め方、特に、台形を既習の図形に分割する学習を取り扱うことにする。このような発展的な内容を取り扱うことは、既習の学習内容を活用して児童自らが新たな問題を解決するという、面積の求め方を理解する過程において重要な児童の算数的活動を促すと考えるからである。児童の算数的活動を促す際には、単に問題を難しくしたり、次の学年の問題を提示したりするのではなく、児童が学習し理解している数学的な考え方が活用できるようにし、数学的な考え方の活用を通して、児童の数学理解を深めることにつながるようにすることが大切である。

したがって、発展的内容の学習指導のねらいは次の2つである。1つ目は、算数教育の目標である「数学的な考え方」の1つである「発展的な考え方」の育成にある。

2つ目は、発展的内容の学習を通して、基礎・基本を含め既習の学習内容の理解を深めることとその定着にある。つまり、発展的内容の指導について次のようにとらえることが重要であると考え。発展的な内容を児童自身が既習の数学的な考え方を活用して考え、問題を解決していく。その結果、児童は発展的に考える態度を身に付け、発展的内容を理解する。さらに、児童は発展的な考え方を深化・拡張していく。

それゆえ、本授業実践では、三角形・平行四辺形の求積の発展的内容として、台形の求積方法を取り扱うこととする。ここでは、三角形・平行四辺形の求積方法、とりわけ倍積変形・等積変形による求め方という数学的な考え方を活用して、台形を変形するという発展的な考え方を深化・拡張させ、児童の理解を深めることをねらうのである。

③児童の理解度に応じた学習指導

児童たちには学習内容に対する理解度に大きな差異が見られる。この差異の克服に向けて、今日の小学校では、算数科授業を中心に少人数授業やティームティーチングに向けた加配教員など新しい授業スタイルが模索されている。本単元では、第3次の平行四辺形とひし形の求積の学習指導において、「じっくりコース」と「かけ足コース」の習熟度別コースを設定し、習熟度別授業を試みることにする。

この習熟度別少人数指導ではいずれのコースにおいても、平行四辺形の求積を学習する際には、平行四辺形を既習の三角形や長方形にいかに変形するかを重視して指導する。ただし、「じっくりコース」では、平行四辺形をどのように分割するか目標を決めて、その分割の方法を学級全体で1つ1つ丁寧に確認し、既習の学習とのつながりを確かなものにする。他方、「かけ足コース」では、平行四辺形の分割の方法を1つ1つ取り上げるのではなく、個々の児童が自らそれらの分割方法を見だし、その方法を学級全体で分析し、比較検討する。さらに、ひし形の求積の学習においては、対角線の位置をずらして、たこ形などの図形を発展的に取り扱う(図2)。

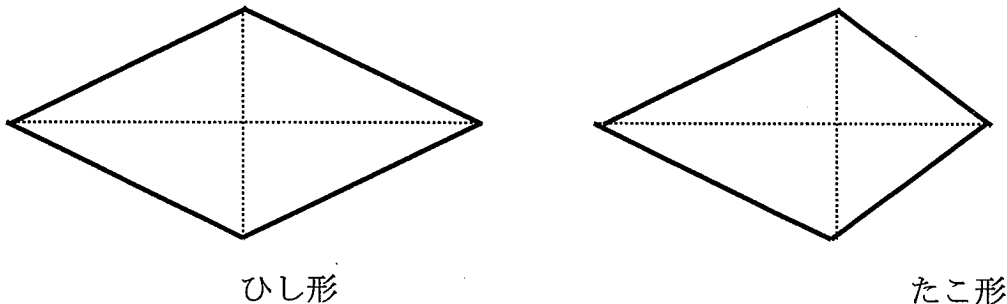


図2

(2) 本時の授業のプロトコル

本時(第4次の1/3時)の授業の目標は「台形を既習の図形に変形したり、倍積変形の仕方を工夫したりして、台形の面積の求め方を考えることができる」であり、その授業は以下のように展開した。

C1: この前の時間の、台形と円とアメーバのようにぐしゃぐしゃな形について、どの順で授業をするかということについて、今まで、三角形・四角形をしてきたので、台形を抜かして円やアメーバをするよりも、台形を終わらせてから、円やアメーバの形をすればよいと思う。(図3)

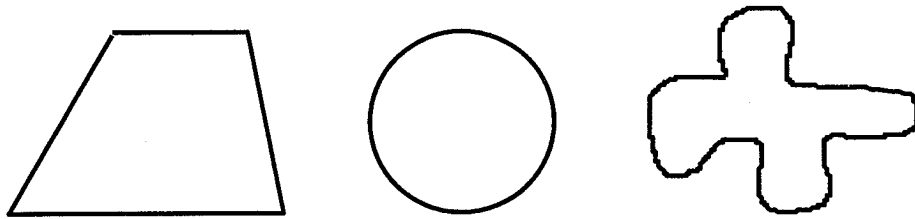


図 3

C2 : 私は、台形、円、アメーバの形がいいと思うのだけど、前の時間にたこ形をしているので、台形をした方がいいと思う。

T1 : じゃ、今日は、台形の面積を求めます。(図 4 を板書する。)

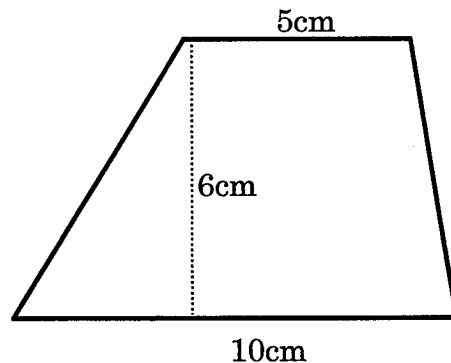


図 4

T2 : 台形の面積を求めるのに、使える考え方は何でしょう。

C3 : 平行四辺形の求め方。

C4 : 三角形の求め方。

C5 : 長方形の求め方。正方形とひし形の求め方。

T3 : 面積を求めるのに、求め方は、自分の中で、どういう求め方、どんな形にするのか、自分たちが知っているどれを使いますか。

T4 : どういうふうに変形しますか。

C6 : 台形を 2 つに分ける。

C7 : その面積を倍にする方法。

T5 : 倍にするのは、どういう形になるのかわかりますか。

C8 : はい。(うなずいている。)

T6 : 等積は、いくつの方法がありますか。

C9 : 1 つある。

T7 : 1 通りしかない？

C10 : 2 つある。

T8 : わかるかな？

C11 : (台形を斜めに、左から右、右から左へと切るジェスチャーを行ってみせる。)

T9 : これで、倍積変形と合わせて、3 つの考え方があるのですね。

T10 : 倍にするのは、どのような形になりますか。

C12 : 平行四辺形です。(図5)

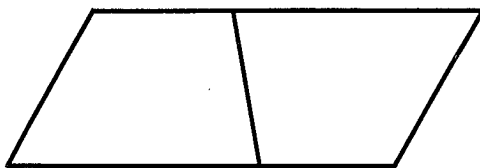


図5

T11 : 2つに切るのは、三角形ですね。(図6)
それ以外の形を考えることはできませんか。

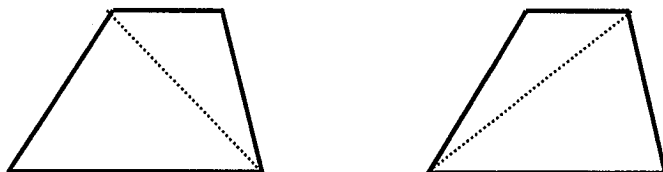


図6

T12 : 自分が形を変形して、面積を求められる形に変えることができないかな？
T13 : 3通りみつけた人は、その3通りをかきなさい。もっとみつけた人は、その4番目の求め方からかきなさい。

C13 : (求め方をノートにかく。)

T14 : (机間指導をする。)

T15 : (黒板に掲示する考え方を児童たちに指示する。)

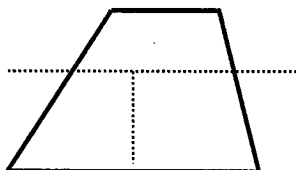


図7

T16 : 左から、右下に切った考え方ですね。(図8)

T17 : 次のこれは、先生がするとは思っていなかった考え方です。

T18 : 説明してもらう前に、見てください。

C14 : 四角形と三角形に分けています。(図8)

C15 : 下の所は、真ん中なのですか。

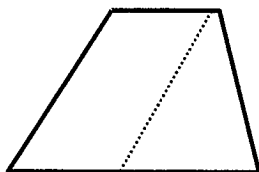


図8

T19 : フリーハンドでかいているけれど、これはどんな形になっているかな？

C16 : 平行四辺形です。

- C17 : 上底の 5 cm を使って、下におろしているところがいい。
 C18 : 三角形と平行四辺形という、習っていることを生かしているのがいい。
 T20 : この形で、面積を求めてみよう。
 T21 : 次の考えを説明してください。
 C19 : 台形を上下に半分に切って、台形の上の部分 (ア) を切ると下の部分 (イ) とちょうど面積が等しくなって、それを動かすと 2 つの長方形になって面積をだすことができる。(図 9)

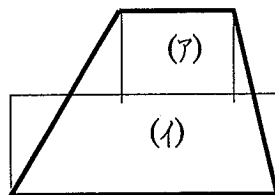


図 9

- T22 : この方法で、面積を出してみよう。
 T23 : 次の方法の人、発表してください。
 C20 : (H児) 縦に切って、長方形と 2 つの三角形に分ける。すると、この長方形の面積がでて。

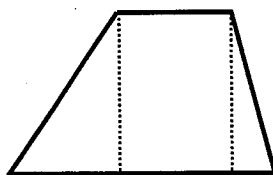


図 10

- T24 : そこで、待ってください。この長方形の部分の面積がでるのでですね。
 (図 10 をもとに確認をする)
 C21 : 30cm^2 です。
 T25 : この三角形の面積を求めることができるのかな？
 C22 : できる。
 T26 : 面積は出るけれど、求められない人？
 C23 : (数人挙手をする。)
 T27 : どうしたら、求められるのかな？
 C24 : (N児) この三角形とこの三角形の底辺を合わせたら、5 cm で、高さが 6 cm だから求まります。
 C25 : (S児) 長方形をぬいて、2 つの三角形をひっつけたらできます。(図 11)

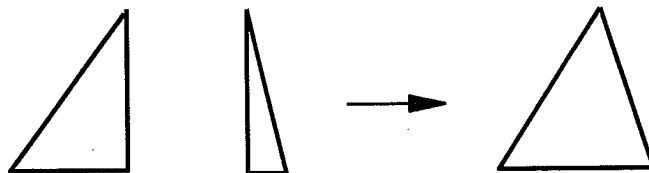


図 11

- C26 : うわあー。

C27 : すごい!

T28 : N君の考え方を説明しますね。

T29 : 何をしようとしているのか, わかるかな?

C28 : やっぱりだ!

T30 : すごいね。習った考え方をうまく使っているね。

C29 : 上の辺が 5 cm で, 結果的に三角形の底辺の長さが 5 cm だけど, 左側の底辺を□で, 右側を○にたとえたら,

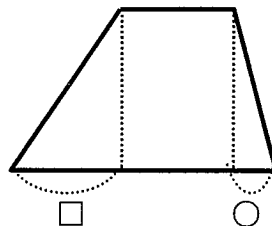


図 12

T31 : (図 12 に記号を書き入れる。)

C30 : (H君) 計算したら, 左側は $\square \times 6 \div 2$, 右側は $\circ \times 6 \div 2$

結果的に, $(\square + \circ) \times 6 \div 2 = 5 \times 6 \div 2 = 15$

T32 : 他の計算もかいてください。

C31 : (黒板にかく。)

T33 : まだ, ないかな?

C32 : 上の辺を右側に伸ばして, たこ形にする。そして, 右側の辺に高さを求めて面積を求めるといい。

C33 : たこ形の求め方を使っていい。

C34 : 台形は, たこ形に似ているとっていたのでこの考え方はいい。

C35 : でも, この斜めの辺の長さがわからないので求められない。(発表者自身が気づく。)

C36 : 等積でも倍積でもないのだけど, 上の辺を伸ばして, 横が 10cm の長方形にして, 三角形の部分を引けばいい。(図 13)

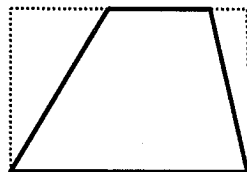


図 13

C37 : H君の考え方に似ている。

T34 : H君はどうしているの?

C38 : たしているけれど, これは引いている。

T35 : 次の人。

C39 : 僕は, この台形を同じ三角形 3 つに分けて, $5 \times 6 \div 2 \times 3$ をして, 求めました。(図 14)

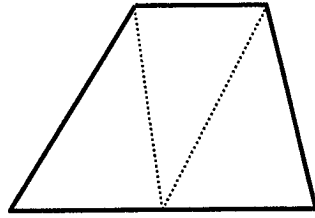


図 14

T36 : この考え方にあるものを加えました。

T37 : 思い出さない？ 4枚の色板で勉強したこと。

C40 : (ノートを見て、確認する。)

T38 : 特別なときだけですよ。(図 15)

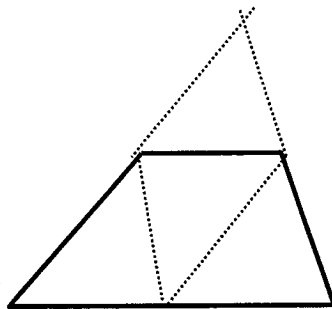


図 15

C41 : 敷き詰めだ。

T39 : (図示する。)

T40 : この面積は、どうして求めるのかな？

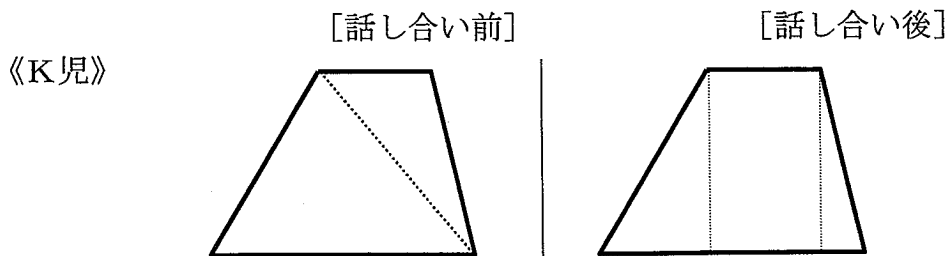
C42 : 大きな三角形から、小さい三角形を引けばいい。

T41 : こんな風に考えたら、わかりやすいね。ここで、終わります。

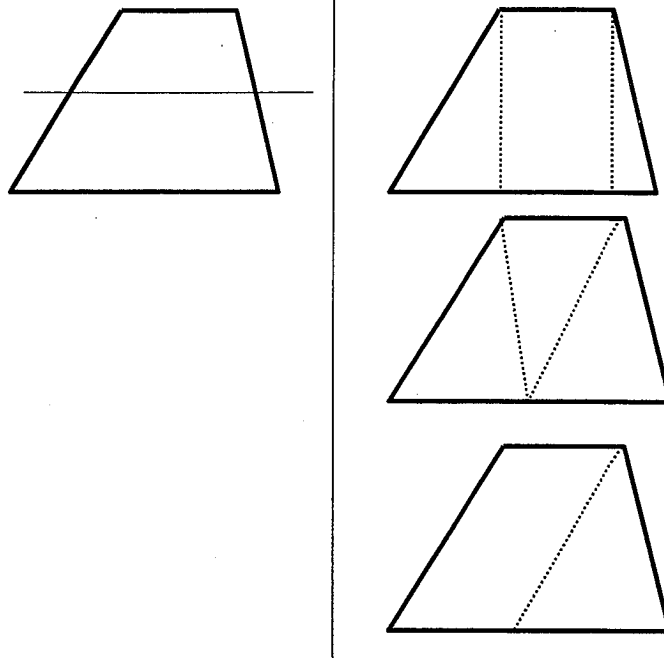
(3) 本時の授業の考察

(1) 児童の考えの変容について

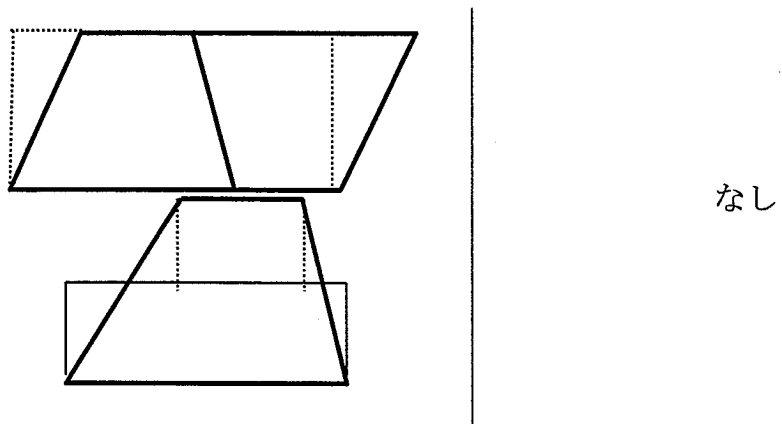
このように本時の授業は展開したが、事前調査で三角形と平行四辺形の求積の問題の2問とも誤答した3人の児童(K児, H児, M児)に注目して変容を見てみると、それぞれの児童が本時の授業で話し合う前に気づいていた台形の分割と話し合い後に理解した分割は次のようであった。



《H児》



《M児》



全体的にこの学級の児童たちにとって、台形を長方形に変形することと台形を三角

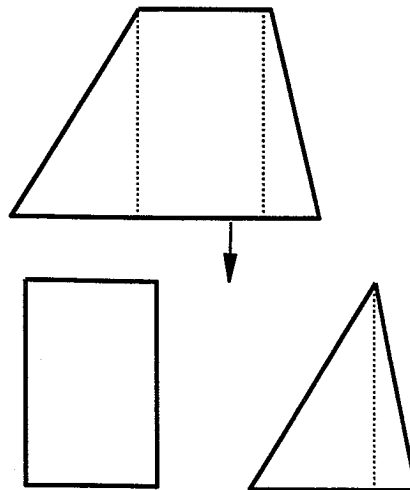


図 16

形に分割することは理解しやすかったが、台形を1つの長方形と2つの三角形に分割すること(図16)はなかなか気づけなかったようである。しかしながら、三角形を動かすなど、授業中に視覚的な活動があったため、この図16の分割は児童たちにとって印象的な分割であったようである。実際、上記の2人の児童(K児、H児)以外にも15人の児童(合計17人の児童)が授業後に、台形を1つの長方形と2つの三角形に分割する方法を好みの方法として挙げている。このことから、この学級の多くの児童は、単に台形の面積を求める計算の簡単な分割よりも、印象に残る動的な活動を伴う考え方の方に着目する傾向にあるといえる。

(2) 既習事項の確認について

本時(第4次の1/3時)の授業における学習のねらいは、台形を既習の図形に分割して、その面積を求める方法を考えることであった。この時点での既習事項は、長方形、三角形、平行四辺形の求積方法であったが、こうした既習事項の確認については、次の2つの方法が考えられる。1つは、長方形、三角形、平行四辺形の図形を児童たちに見せて、それぞれの求積公式を確認するという方法である。もう1つは、それらを学習したときの様子を見せ、児童たちに思い浮かべさせて、その分解の方法を確認することである。

本時の授業においては後者の方法を採用し、分割の方法をイメージする形態をとった。このことは、単に求積公式を想起させるだけでなく、その時に学習した内容を思い起こさせ、既習事項を活用して台形の面積の求め方を児童自ら作り出す算数的活動を促すことにつながった。さらに、なぜ台形の面積を求めるのかという課題を児童なりに納得させるために、台形、円、アメーバ形のどの図形の求積を考えるかという問いについて、児童なりの説明を求めた。この説明の段階で、児童たちは既習の学習を思い浮かべ、その既習事項とどの図形との関連性が強いかを判断していた。その結果、児童たちは、学習の目標を明確に持つとともに、その学習に必要な既習事項を確認することができたといえる。

(3) 発展的内容の指導について

本時の授業では、台形を既習の長方形、三角形、平行四辺形に変形して、台形の面積を計算で求めることができるかが課題であった。この課題は、第5学年の算数科の発展的内容に位置づくもので、既習の図形を基に発展的に複雑な図形を考察するという数学的な考え方を活用できるものである。実際、このような既習の学習を発展させるという立場に立って計画・実施した本時の授業において、児童たちは台形の面積のいろいろな求め方(図5～図14)を考えることができた。

また、発展的内容の指導は、基礎・基本と反対のベクトルではなく、既習事項の理解の定着を図る指導、つまり基礎・基本を充実させる指導にもなっているのである。本時の取り組みは、単に発展的に考えるという方向だけでなく、既習の三角形や平行四辺形の求積方法を新たな場面で活用することによって既習の学習内容の理解を深めるものでもあった。

2. 本時の授業にみられる児童の数学理解の過程

以下では、数学理解の2軸過程モデルに基づいて、この授業にみられる観察可能な児童の数学理解の過程について考察してみよう。

本時(第4次の1/3時)の授業に入る前の児童たちの理解の実態を把握するために、既習の三角形と平行四辺形の求積問題について簡単な事前調査を行っている。その結

果、これらの図形の求積については 39 人中 33 人の児童が正しく理解しているが、他方で 3 人の児童が両問ともに間違っていることが明らかになった。こうした児童の実態を踏まえて、本時の授業においては、台形の面積の求め方を考えるということを学習課題として取り上げている。なぜなら、この台形の面積の求め方を考えるという課題は三角形や平行四辺形の面積の求め方の発展的内容に位置づくが、既習事項を生かし、児童自身が学習を構成していくという授業展開によって、次のことが可能になると考えたからである。

(1) 児童たちは、既習の求積可能な図形の求め方を基に、新たな図形の面積の求め方を考え出すことができる。

(2) それを基にして数学的なコミュニケーションをすることで、個々の児童の求積に対する数学的な考え方が高まり、理解もより深まる。

児童の理解過程を重視した算数科授業では、新たな数学的概念や性質、原理・原則を理解する個々の児童の算数的活動を保障するために、学習目標に対して、自分自身が何を理解しているのか、どのような考え方が使用できるのかなど、児童たちが現在の自分自身の理解を意識化しておくことが必要である。このような認識に立って、本時の授業では、平行四辺形の面積はそれを三角形に分割することによって求めることができたということを見習いに想起させることから導入し、この既習の図形に分割するという考え方を基に台形の面積の求め方を考えさせている。そうすることによって、三角形や平行四辺形の求積方法とりわけ、倍積変形・等積変形の求め方という数学的な考え方を活用して、台形を変形するという発展的な考え方を深化・拡張させ、児童の理解を深めることをねらっているのである。

実際、本時の授業において、児童たちは三角形や平行四辺形の求積方法について学習したときに身に付けた倍積変形や等積変形による求め方という数学的な考え方を活用して、台形をいろいろな既習の図形に変形することができた。より詳しく見てみると、児童たちは個々の活動で、台形を 2 つつなげて平行四辺形をつくる方法(図 5)、台形を対角線で 2 つの三角形に分ける方法(図 6)は比較的容易に考え出すことができた。他方で、台形を 1 つの長方形と 2 つの三角形に分割する方法(図 10)にはなかなか気づけなかったようである。このことはある意味、自然なことのように思われる。なぜなら、台形の面積を計算で求めることだけが学習のねらいであったなら、台形を 1 つの長方形と 2 つの三角形に分割する方法よりも、台形を 2 つつなげて平行四辺形をつくったり、台形を対角線で 2 つの三角形に分けたりする方法の方がはるかに簡単だからである。

しかしながら、教師の「3通りみつけた人は、その3通りをかきなさい。もっとみつけた人は、その4番目の求め方からかきなさい」という指示(T13)も手伝って、この学級の児童たちにとっては、台形の面積を1通りの方法で求めることよりも、いろいろな求め方を考え出すことの方が興味あることのようにであった。実際、発表の場面で、台形の上底の両端から下底に2本の垂線を引いて、台形を1つの長方形と2つの三角形に分割する方法(図 10)がある児童(H児)から発表されると、それが契機となって、なぜそのような方法で面積が求められるかについてN児やS児を中心にして活発な議論が行われている(図 11)。この方法は、「うわぁー」「すごい!」という児童たちの感嘆の声に顕著なように、多くの児童たちにとって大変印象的なものようであった。このことは、事前調査で三角形と平行四辺形の求積の問題に2問とも誤答した2人の児童を含む合計17人の児童が話し合いの後に台形を1つの長方形

と2つの三角形に分割する方法を好みの方法として挙げていることからわかる。

こうした本時（第4次の1/3時）の授業における学級集団としての児童の図形の面積の求め方の理解の変容を数学理解の2軸過程モデルを用いて記述すれば、以下のように説明することができる。ここでの児童たちの数学理解の水準〔縦軸〕は、第4学年における正方形や長方形の面積という「数学的対象」についての理解水準を踏まえ、本単元の第2次の三角形の面積や第3次の平行四辺形・ひし形の面積の求め方についての理解を基にして、台形の面積の求め方を既習の長方形・三角形・平行四辺形の面積の求め方と関係づけて理解する「数学的対象間の関係」の理解水準に位置づけられる。そして、本時の授業で児童の図形の面積の求め方の理解は、この「数学的対象間の関係」の水準において広がりを見せるとともに、平面図形の面積は倍積変形・等積変形によって既知の求積可能な図形に分割したり変形したりすることによって求めることができ、その求積方法を公式化できるということを理解する「数学的関係の一般性」の理解水準への深化の萌芽が認められる。

このように本時の授業で児童の図形の面積の求め方の理解が広がりと深まりを見せたのは、第4学年における「数学的対象」の理解水準や本単元のそれまでの「数学的対象間の関係」の理解水準における児童の学習を踏まえて、教師が児童たちとともに「台形の面積の求め方を考えよう」という学習課題を設定したからである。その学習課題に取り組む中で、個々の児童が三角形や平行四辺形の求積方法について学習したときに身に付けた倍積変形や等積変形による求め方を活用して、台形をいろいろな既習の図形に変形している〔直観的段階〕。その後、児童が考えた台形の面積のいろいろな求め方について話し合い〔反省的段階〕、台形を平行四辺形と三角形に分割する方法（図8）、台形の高さを2等分して2つの長方形に変形する方法（図9）、台形の上底の両端から下底に2本の垂線を引いて、台形を1つの長方形と2つの三角形に分割する方法（図10）、台形の高さと下底を2辺とする長方形から2つの三角形を取り除く方法（図13）、台形を3つの三角形に分割する方法（図14）のそれぞれについて、台形（図4）の面積を実際に求めて確認している〔分析的段階〕。

3. 本時の授業をもとにした授業改善案

これまで、数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法を具体化するための事例研究の1つとして、小学校算数科の第5学年における「台形の面積の求め方」の授業を分析・検討することによって、その授業にみられる観察可能な児童の理解過程について考察してきた。その結果、上述のように、本時の授業において児童の図形の面積の求め方の理解は「数学的対象間の関係」の水準において広がりを見せるとともに、平面図形の面積は倍積変形・等積変形によって既知の求積可能な図形に分割したり変形したりすることによって求めることができ、その求積方法を公式化できるということを理解する「数学的関係の一般性」の理解水準への深化の萌芽が認められた。それゆえ、小学校第5学年の「台形の面積の求め方」の授業実践は、3つの学習段階を経ることによって、その学級の児童たちの図形の面積（特に台形の面積）の求め方の理解を広げ深めることに大きく寄与しているといえる。

ここで、次の点に注意したい。それは、本時の授業の「反省的段階」において、ある児童（H児）から「台形の上底の両端から下底に2本の垂線を引いて、台形を1つの長方形と2つの三角形に分割する方法（図10）」が発表され、それが契機となって、なぜそのような方法で面積が求められるかについて、N児やS児を中心にして活発な議論が行われた（図11）場面についてである。台形を1つの長方形と2つの三角形

に分けるとする方法のおもしろさは、それを発表しかけた H 児を受けて次のように N 児 C24 や S 児 C25 が指摘しているように、分けられた 2 つの三角形をあわせて 1 つの三角形にすれば、台形の面積が求められるという点である。

C24 : (N 児) この三角形とこの三角形の底辺を合わせたら、5 cm で、高さが 6 cm だから求まります。

C25 : (S 児) 長方形をぬいて、2 つの三角形をひっつけたらできます。(図 11)

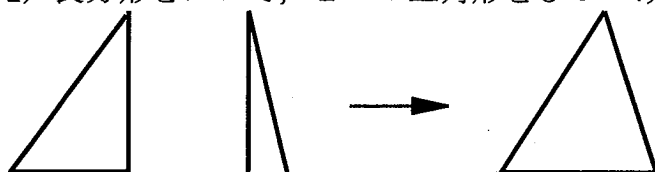


図 11

多くの児童がこの方法(図 11)に対して「うわあー」「すごい!」と感嘆の声を上げたのは、図 10 のように分けると 2 つのバラバラな三角形の面積を求めることができないように思われたのに、N 児や S 児の説明を聞いて、面積が求められるということに納得できたからであろう。この時点で、この学級の児童の図形の面積の求め方の理解は、確かに「対象間の関係」の理解水準において広がりを見せている。

しかしながら、注目すべきは次のように H 児 C29 が記号(□と○)を用いてその方法を説明したことである。なぜなら、こうした説明は、台形の面積の求め方を公式化できるということを児童が理解することに、つまり「数学的関係の一般性」の理解水準への深化につながっていくと考えられるからである。

C29 : 上の辺が 5 cm で、結果的に三角形の底辺の長さが 5 cm だけど、左側の底辺を□で、右側を○にたとえたら、

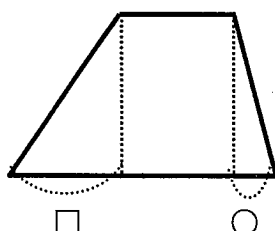


図 12

T31 : (図 12 に記号を書き入れる。)

C30 : (H 児) 計算したら、左側は□×6÷2、右側は○×6÷2

結果的に、(□+○)×6÷2=5×6÷2=15

この説明は、図 4 のような台形の面積についてのものである。

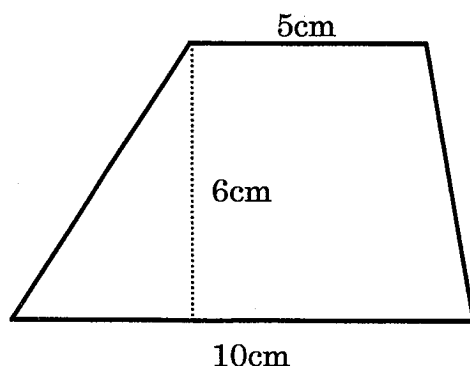


図 4

図 12 の長方形の面積については、C21 「30cm²です」と確認されている。したがって、この台形の面積は、次のように計算によって求められる。

$$\begin{aligned} & 5 \times 6 + \{(\square + \circ) \times 6 \div 2\} \\ &= 30 + (5 \times 6 \div 2) \quad (\because \square + \circ = 10 - 5) \\ &= 30 + 15 \\ &= 45 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

これを、上底、下底、高さという言葉を用い、上底<下底として、言葉の式で表すと次のようになる。

$$\text{上底} \times \text{高さ} + \{(\text{下底} - \text{上底}) \times \text{高さ} \div 2\} \quad \dots\dots (A)$$

これを変形すると、

$$= \text{上底} \times \text{高さ} \div 2 + \text{下底} \times \text{高さ} \div 2 \quad \dots\dots (B)$$

$$= (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高さ} \div 2 \quad \dots\dots (C)$$

となって、いわゆる台形の求積公式が得られる。

本時の授業でこの学級の児童たちが考えたいろいろな方法には、こうした台形の求積公式 (C) につながるものが多い。それゆえ、次の時間の授業において、児童の理解を数学理解の2軸過程モデルの縦軸に沿って「数学的対象間の関係」の理解水準から「数学的関係の一般性」の理解水準へと深化させることをねらうのであれば、その授業を以下のように構成することが1つの提案として考えられる。

次の時間の授業においては、台形の求積公式について学習する。そのためには、前時の授業で児童が考え出したいろいろな方法について、それぞれを言葉の式で表すなどして公式化していくことが重要である。その際、小学校第5学年の児童にとって、具体的な台形について考えることが公式化の助けとなると考えられるので、図4の台形（上底5cm、下底10cm、高さ6cm）では（下底-上底）が5cmとなり上底5cmと同じ値になるので、図17のように下底の長さを12cmに変更したものを提示する。

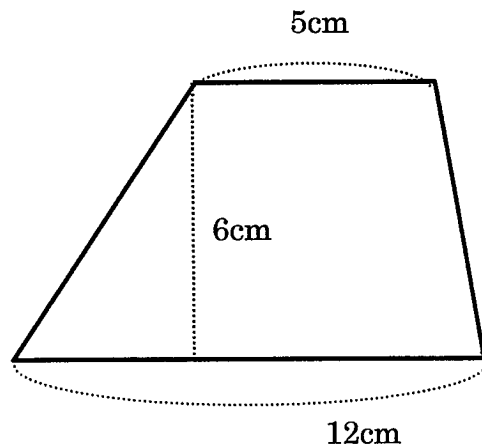


図 17

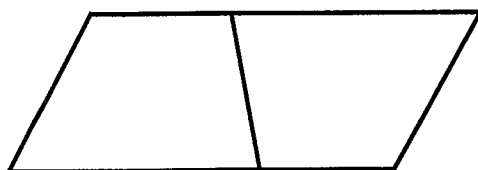


図 5

底辺 17cm (5cm+12cm)、高さ 6cm の平行四辺形の半分と考えると、
 $\{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高さ}\} \div 2$ 〈上記 (C)〉

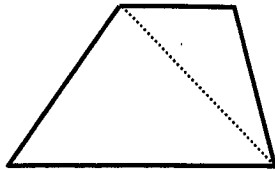


図 6

底辺 5cm, 高さ 6cm の三角形と底辺 12cm, 高さ 6cm の三角形の和と考えると,
 $上底 \times 高さ \div 2 + 下底 \times 高さ \div 2$ (上記 (B))

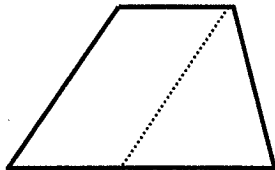


図 8

底辺 5cm, 高さ 6cm の平行四辺形と底辺 7cm (12cm-5cm), 高さ 6cm の三角形の和と考えると,
 $上底 \times 高さ + \{(下底 - 上底) \times 高さ \div 2\}$ (上記 (A))

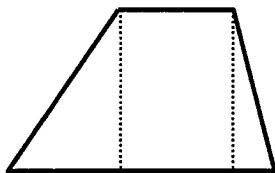


図 10

横 5cm, 縦 6cm の長方形と底辺 7cm (12cm-5cm), 高さ 6cm の三角形の和と考えると,
 $上底 \times 高さ + \{(下底 - 上底) \times 高さ \div 2\}$ (上記 (A))

そして、この図 17 の台形を手がかりにして、例えば次のように、前時の授業で児童が考え出した台形の面積のいろいろな求め方を言葉の式で表させる [直観的段階]。次に、それらの言葉の式を見較べて、相違点や類似点について話し合わせる「反省的段階」。そして、そこでの気づきをもとに、それらの言葉の式を関係づけさせる [分析的段階]。このような 3 つの学習段階を設定することによって、児童の台形の面積の求め方の理解を「数学的関係の一般性」の理解水準へと深化させることをねらうのである。

その際、台形を 1 つの平行四辺形と 1 つの三角形に分けて面積を求める方法 (図 8) と台形を 1 つの長方形と 2 つの三角形に分けて面積を求める方法 (図 10) は、考え方は少し異なるが、言葉の式に表すと同じ式になるということに驚く児童も少なくないであろう。さらに、台形と平行四辺形の相互関係について、台形の上底と下底の長さが等しいときそれは平行四辺形であるということを児童が理解していれば、次のように、台形の面積を求める式と平行四辺形の面積を求める式との相互関係 (一般と特殊の関係) を理解することも期待できる。上記 (A) の台形の面積を求める式「 $上底 \times 高さ + \{(下底 - 上底) \times 高さ \div 2\}$ 」は、台形の上底と下底の長さが等しいとき(下底 - 上底) = 0 であるから、「 $上底 \times 高さ$ 」となり、これは平行四辺形の面積を求める式である。

以上のように、数学理解の 2 軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法を活用して、第 5 学年の児童の「台形の面積の求め方」の理解を、数学理解の 2 軸過程モデルの縦軸に沿って「数学的対象間の関係」の理解水準から「数学的関係の一般性」の理解水準へと深化させることをねらうのである。こうした小学校第 5 学年における単元「図形の面積の求め方」の算数科授業構成のイメージを図に表すと図 4-4 のようになる。

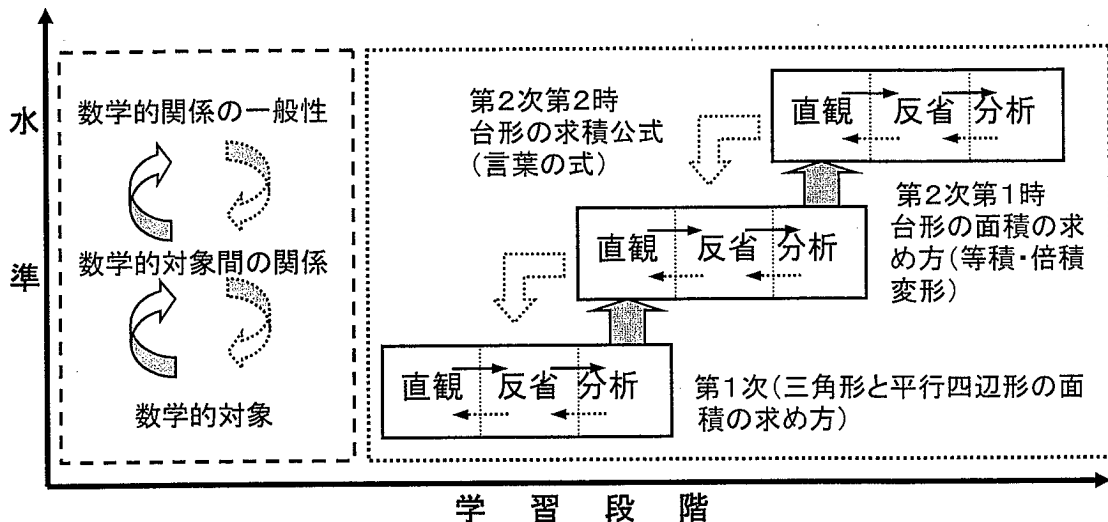


図4-4. 数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法による小学校第5学年「図形の面積の求め方」の算数科授業構成のイメージ図

第3節 第4章のまとめ

本章においては、数学理解の2軸過程モデルの規範的特性の実践的研究を行った。第1節では、算数科授業において児童の数学理解を深化させるための教師にとって有効な視点として、次のような数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の3つの原理(P1~P3)と3つの方法(M1~M3)を導出した(図4-2)。

次いで、第2節では、これらの原理と方法を活用して、算数科における授業構成の具体化として2つの授業構成例を示し、算数科授業改善の方向性を提案した。

まず、小学校算数科における第一の事例研究として、小学校第1学年の「繰り下がりのあるひき算」の授業を取り上げることによって授業構成例を示し、その授業改善の方向性を提案した。そして、小学校算数科における第二の事例研究として、小学校第5学年の「図形の面積の求め方」の授業を取り上げることによって授業構成例を示し、その授業改善の方向性を提案した。

以上のように、第2節では、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法を活用して、授業構成の具体化として第1学年と第5学年の2つの授業構成例を示し、算数科授業改善の方向性を提案した。これらの改善案によって児童の数学理解がさらに深化しうるかどうかについては今後の実践的研究によって検証する必要があるが、本節で行った事例研究によって、数学理解の2軸過程モデルが算数教育において規範的特性を備えていることが例証されたといえる。

このような算数科授業構成は、第1学年の「繰り下がりのあるひき算」や第5学年の「図形の面積の求め方」に限らず、児童が数学的概念や性質、原理・法則などを理解することをねらう授業においては可能であると考えられる。しかしながら、数学理解の2軸過程モデルとそれに基づく授業構成の原理と方法を活用して、より多くの算数科授業を構成・実践し、児童の数学理解が深化するかどうかを分析することによって、算数教育における数学理解の2軸過程モデルとそれに基づく算数科授業構成の原理と方法のさらなる精緻化・具体化を図ることは今後の課題として残されている。

《算数科授業構成の3つの原理》

P1: 数学理解を，全か無かというように二者択一的にではなく，複雑な力動的過程としてとらえること。

[複雑な力動的過程としての理解過程]

P2: 数学理解の深化を促進するために，理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定すること。

[理解の階層的水準と学習段階の設定]

P3: 教室で行われる算数の教授学習活動としての授業においては，個々の児童の個人的構成と児童たちや教師との社会的構成の両方の活動を重視すること。

[個人的構成と社会的構成の重視]

《算数科授業構成の3つの方法》

M1: 算数科の授業で児童が学習する内容について，算数科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することにより，数学理解の階層的水準を明らかにすること。

[理解の階層的水準の明確化]

M2: 算数科の授業で学習する内容に対する児童の理解の程度について，学習内容に応じた事前調査や診断的評価，形成的評価などを行うことによって，その実態を把握すること。

[理解の程度の実態把握]

M3: 数学理解の階層的水準と児童の理解の程度の実態把握を基にして，算数科の授業で児童が学習する内容についての教材研究を行い，3つの学習段階を具体化し，個々の児童の個人的構成と児童たちや教師との社会的構成の両方の活動を位置づけること。

[理解の学習段階の具体化]

図4-2. 数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科授業構成の原理と方法

第4章の引用・参考文献

赤井利行，小山正孝，中原忠男，中村武司，磯部年晃（2003），「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅲ）—第5学年における「台形の面積の求め方」を中心に—」，広島大学学部・附属学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第31号，pp.115-122.

磯部年晃，小山正孝，中原忠男，赤井利行，中村武司（2002），「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅱ）—第2学年における三角形と四角形の内容を中心に—」，広島大学学部・附属学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第30号，pp.89-98.

磯部年晃，小山正孝，中原忠男，赤井利行，片桐毅（2004），「算数学習における理解

- 過程に関する研究 (IV) —第 5 学年における「分数と小数, 整数の包摂関係」を中心に—, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『学部・附属学校共同研究紀要』, 第 32 号, pp.181-188.
- 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 今村孝子 (2006), 「算数学習における理解過程に関する研究 (VI) —第 1 学年「繰り下がりのあるひき算」における式理解を中心に—, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『学部・附属学校共同研究紀要』, 第 34 号, pp.327-332.
- 片桐毅, 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行 (2005), 「算数学習における理解過程に関する研究 (IV) —第 3 学年における「重さ」の概念形成を中心に—, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『学部・附属学校共同研究紀要』, 第 33 号, pp.217-223.
- 小山正孝 (1995), 「数学理解の超越的再帰理論に関する一考察」, 『広島大学教育学部紀要』, 第 43 巻第 2 部, pp.63-72.
- 小山正孝 (1997), 「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 小山正孝 (2001), 「教科教育学研究パラダイムの検討—数学教育学を事例として—」, 日本教科教育学会編『新しい教育課程の創造—教科学習と総合的学習の構造化—』教育出版, pp.164-174.
- 小山正孝 (2002), 「数と計算・代数の認識に関わる基礎理論の検討」, 日本数学教育学会『第 35 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録—今後の我が国の数学教育研究—』, pp.84-88.
- 小山正孝 (2006), 「数学理解の 2 軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法」, 『日本教科教育学会誌』, 第 28 巻第 4 号, pp.61-70.
- 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文 (2000), 「算数学習における理解過程に関する研究 (I) —数学理解の 2 軸過程モデルの理論的再検討—」, 広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制『研究紀要』, 第 28 号, pp.117-123.
- 中原忠男 (1995), 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社.
- 中原忠男 (1999), 「数学教育における構成主義的授業論の研究 (II) —「数学学習の多世界パラダイム」の提唱—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 5 巻, pp.1-8.
- 文部省 (1999a), 『小学校学習指導要領解説—算数編—』, 東洋館出版社.
- 文部省 (1999b), 『中学校学習指導要領(平成 10 年 12 月)解説—数学編—』, 大阪書籍.
- Koyama, M. (1995), Characterizing Eight Modes of the Transcendent Recursive Model of Understanding Mathematics. *Journal of JASME: Research in Mathematics Education*, Vol. 1, pp.19-28.
- Pirie, S. and Kieren, T. (1989), A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No. 3, pp.7-11.
- Pirie, S. and Kieren, T. (1994), Growth in Mathematical Understanding: How can We Characterise it and How can We Represent it? *Educational Studies in Mathematics*, Vol.26, pp.165-190.
- Sfard, A. (1991), On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, Vol.22, 1-36.
- Sierpinska, A. and Lerman, S. (1996), Epistemologies of Mathematics and of

- Mathematics Education. In Bishop, A. et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, pp.827-876.
- Skemp, R. R. (1976), Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, No.77, pp.20-26.
- van Hiele, P. M. (1986), *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.

小山正孝著, 『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』, 広島大学博士(教育学)論文, 2007, pp.222-275 に所収