生産能力計画および
ロットサイズ計画のモデル化と
ヒューリスティック解法に関する研究

平成 7 年 (1995 年) 5 月

森 川　克 己

目 次

第 1 章

序論

1.1　本研究の目的

生産計画は生産システムを効率的に運用するために作成され，広い意味では年単位の新工場建設や閉鎖といった長期的計画から，日々の生産活動における時間単位のスケジューリングまでを包含している。このような生産計画の中で，本研究では生産能力計画 (capacity planning あるいは capacity requirements planning[61]) とロットサイズ計画 (lot-sizing) に焦点をあて，それらの計画問題を数学モデルに定式化するとともに，そのヒューリスティック解法について論述する。

生産能力計画は，将来の需要予測と現有生産能力を照らし合わせ，諸制約のもとで労働者の雇用/解雇や，設備の稼働/休止といった将来の生産能力と生産水準を計画することを主要な目的とする，中期的な生産計画である。通常，このような生産能力の変更には実施に先行した準備期間が必要とされ，またロットサイズ計画やスケジューリングにおいては，生産能力があらかじめ決められていなければならないこと，必要とされる資金も多いことなどから，生産能力計画は生産計画において比較的上位に位置づけられる。需要の季節変動が 1 年の周期を持つことから，生産能力計画は，単位計画期間を月とする 1 年前後の計画期間に対して適用されることが多い[42]。このとき，生産能力を需要変動に応じて変化させることは，生産能力の変更に伴う費用が高くなるのみならず，労働者の雇用/解雇を頻繁に行うことによる労働意欲の低下を招くことなどから，通常は望ましい方策とはならない。しかしながら，生産能力を一定に保って安定した生産水準を維持し，需要の谷間には製品を在庫として保持し，需要の多い時期に引き当てる方法も，需要変動の大きい場合には多量の在庫を抱え込むことになるため，結果的には高費用となってしまう可能性がある。生産能力計画においては，この 2 つの方策を適切に融合させた生産計画を作成しなければならない。なお，生産能力計画レベルでは，生産能力を所定の期間内で生産することのできる製品数量で表す

ことが一般的で，たとえば自動車製造工場では生産台数，製鉄工場では粗鋼生産高などが用いられる[13],[46]。もし，このような共通の尺度が導入しにくい場合には，作業時間 (マン・アワー：1 人の作業者が 1 時間で処理できる仕事量) や機械時間 (マシン・アワー：1 台の機械が 1 時間で処理できる仕事量) なども用いられる。このように生産能力計画においては，実際に生産される個々の製品種類やその数量を意識しないため，生産水準という言葉を用いる。

なお，生産能力計画を広く解釈すれば，工場拡張/縮小や設備更新などの長期的な計画も含まれることになるが[13]，これらの計画は技術革新や市場動向，製品開発状況などを考慮に入れたうえでの経営上の総合的な意思決定項目としての側面が強く，単一の数学モデルによる考察は妥当とは思われないため，このような生産能力の拡張/縮小は，本研究で論述する生産能力計画よりも上位の意思決定項目と考え，本研究においては議論しない。

一方，ロットサイズ計画は，ロット生産方式を採用している工程において必要とされる計画の 1 つで，週ないし月を単位計画期間とする中・短期的な生産計画である。各製品の需要が限られているか，あるいは需要速度 (単位期間あたりの需要量) に比べて生産速度 (単位期間あたりの生産量) が大きく，かつ，比較的性質の類似した製品種類が複数ある場合には，専用の工程を個別に作らず，同一工程において段取替えしながら多品種の製品を生産する場合が多い。これをロット生産方式と呼ぶが[84]，このとき，1 回の段取替えでいくら生産するかという数量，すなわちロットサイズの決定が重要となる[86]。通常，段取替え作業に伴う時間と費用は無視できないため，あまり頻繁に段取替えをすると，時間的ならびに費用的損失が大きくなり，逆に，1 回当たりの生産量を多くして段取替えの回数を減らす方策を採用すると在庫費用が高くなってしまうため，両者を考慮したバランスのよいロットサイズの決定が必要となる。このロットサイズ計画においては，すでに上位の生産能力計画において労働力や設備能力が決められているため，大幅な生産能力の変更は認められないが，残業生産や早退など比較的小幅な生産能力の変更は計画可能であるものとする。

なお，本研究で議論する生産能力計画は，総合 (ないし統合) 生産計画 (aggregate production planning) と呼ばれる場合も多い[42]。これは，計画の本質を失わない範囲で個々の製品や設備などを 1 つないし複数のグループに取りまとめて扱うことを強調したものである。ことのき，総合生産計画の中にロットサイズ計画を含める場合もあるが，本研究では生産能力計画とロットサイズ計画を異なる計画レベルととらえているため，両計画問題を 1 つに統合した計画問題については考慮しないこととする。

本研究では上述の生産能力とロットサイズの計画問題を以下のような仮定のもとに論述する。

(1) 生産システムは単一工程からなるものとする。ただし，本研究で論述する生産計画問題，特に生産能力計画問題はマクロ的なレベルを議論するため，必ずしも 1 台の機械ないしは 1 つの生産ラインを意味するわけではなく，工場全体を大きくとらえて 1 つの工程と見なす場合も含まれる。また，対象工程で処理するものには，実際には次工程での部品や半完成品である場合も含まれるが，本研究ではこれらを一貫して製品と呼ぶものとする。

(2) 計画に必要とされる需要予測，費用係数，能力係数などの入力情報が確定値で与えられる決定論的問題を議論する。

(3) 月や週などを単位として計画期間を離散的な有限期間に分けた多期間計画問題を議論する。

(4) 需要は各期で必ずしも安定しておらず，各期の需要は品切れなく満足させなければならないものとする。

(5) 生産計画の目的は計画期間中の総生産費用が最小となるような各期での製品生産量，在庫量，労働力量などを決定することである。本研究で明示的に考慮する費用項目は以下のとおりである。

労働者に対する賃金　計画期間中に対象とする工程内の労働者数を増減させる場合，労働者に対する賃金を明示的に考慮する。一方，計画期間中の労働者数を固定し，必要に応じて残業生産を計画する場合には，残業時間に対する超過時間に対して割り増し賃金を支払うものとし，定時生産時間分については，たとえその上限まで作業時間が達しなくとも，作業者に対して固定賃金を支給するものとする。なお，後者の定時生産に対する固定賃金については，いかなる生産計画を作成しても必ず同一費用として発生することになる。そのため，この費用を計画モデルの中に組み入れると，総生産費用の感度が悪くなってしまい，計画の良否が論じにくくなるため，計画期間中の労働者数が一定の場合には，定時生産時間分の賃金はモデルから除外する。

労働力の変化に対する費用　需要が期によって大きく変動すると予想される場合には，労働者の雇用や解雇が 1 つの意思決定項目となりうる。ここに雇

用/解雇とは必ずしも文字どおりの意味に限定されるわけではなく，配置替えや一時帰休なども含まれるし，外注の利用も労働力の変化としてとらえることができる。このような労働力の変化に伴って，雇用，訓練，解雇費用などが必要となる。

在庫に対する費用　将来の需要に引き当てるため，必要とされる製品を前もって生産しておき，必要とされる期まで在庫しておく場合，在庫として資金の流れが拘束されること，在庫品への保険金，在庫スペースを確保することへの費用，在庫品の陳腐化や紛失などのリスクに対する費用などが発生する。

段取替えに対する費用　ロット生産方式を採用している場合，生産する製品種類を切り替えるごとにそのための設備の準備や調整，また切り替えに伴う不良品の発生などから段取費用が発生する場合が少なくない。またこの段取作業が各製品ごとに固有である場合と，直前に処理した製品種類との組合せによる，いわゆる生産順序に依存する場合がある。

1.2　関連する従来の研究と本研究の意義

生産能力とロットサイズの計画問題に関する多数の研究の中で，本研究と密接に関係するものを取りあげ，それらの概要を述べるとともに，本研究において検討すべき問題点を明らかにする。なお，Hax と Candea (1984)[42]，Maes と Van Wassenhove (1988)[56]，Nam と Logendran (1992)[64]，Thomas と McClain (1993)[73]，Shapiro (1993)[72] は，それぞれ関連する従来の研究を広範囲に整理している。

1.2.1　生産能力計画問題

将来の各期における需要予測が与えられたもとで，各期の生産水準ならびに必要とされる労働力量を決定するための生産能力計画問題に対しては，Holt ら[44],[45] による塗料製造会社の 2 次費用モデルに対する線形決定規則 (linear decision rule) 以降，Bowman (1956)[11] による輸送計画法 (transportation method)，Bowman (1963)[12] による係数法 (management coefficients method)，Jones (1967)[47] によるパラメトリック法 (parametric production planning)，Goodman (1974)[38] による目標計画 (goal-programming) 法，Gilgeous (1989)[37] による目標探索 (goal-search) 法など，対象とする生産システムの特徴，費用構造，計画目標などに応じて多数のモデルや解法が提案

されている。さらに，対象問題をより幅広くとらえようとする研究もあり，たとえば Newson (1975)[65],[66] は，生産能力計画とロットサイズ計画の両者を考慮したモデルを取りあげている。しかしながら，前述のごとく一般的には生産能力計画はロットサイズ計画よりも上位に位置するため，このようなモデルにおいては，両者を一括して取り扱うよりも，計画レベルに対応した部分問題に分割してそれらを順々に解くという，Hax と Meal (1975)[41] の階層的アプローチが主流となっている。

本研究ではこれらの研究の中で Orr (1962)[70] のランダム・ウォーク・モデル以降注目を集めている生産スイッチング法 (production switching) に着目する。Orr は，線形決定規則などの最適化志向のアプローチが，費用最小化を達成するために各期で異なる生産水準や労働力量を解として出力することに対し，これが実際の経営者に必ずしも現実的なアプローチとは受け取られないことを指摘した。多くの生産計画担当者は，在庫水準が非常に高くなるか，あるいは非常に低くならない限り，できるだけ安定した労働力量を確保して，安定した生産水準を維持することを望むという考えのもと，Orr はランダム・ウォーク・モデルを提案した。彼の研究は，Elmaleh と Eilon (1974)[28] によるシミュレーション実験，さらに Mellichamp と Love (1978)[60] による生産スイッチング・ヒューリスティックの提案により，より洗練された方法として確立した。また，Oliff と Leong (1987)[68]，Barman と Burch (1989)[6]は，生産スイッチング法をさらに発展させた。DuBois と Oliff (1991)[23] は，生産スイッチング法が現実の企業においても妥当な生産計画法の 1 つであるとの調査結果を報告している。Barman と Tersine (1993)[7] は，生産スイッチング・ヒューリスティックと線形計画問題に定式化した総合生産計画モデルの需要予測誤差に対するパフォーマンス比較を行っている。

このように生産スイッチング法は研究上もまた実務上も大きな関心を集めているが，適用にあたって必要とされる生産水準ならびに目標在庫水準の決定法については探索法が提案されているにとどまっており，総生産費用最小化の観点からは十分とは言えない。そこで本研究では第 2 章ならびに第 3 章において，生産水準と目標在庫水準の適切な決定をめざした混合整数計画問題への定式化を提案する。

1.2.2 ロットサイズ計画問題

初期の研究として著名なのは Wagner と Whitin (1958)[80] によるロットサイズ計画問題への動的計画法の適用である。彼らは，需要が期によって異なる状況において，在庫費用と段取費用の和が最小となるようなロットサイズの計画問題に対して動的計画法を適用するにあたり，計算量の削減が可能な計画期間定理 (planning horizon theorem)

を示した。その後，このモデルの拡張と計算量の削減に関する研究は Zabel (1964)[83] や Eppen ら (1969)[29] などに続く多くの研究があり，近年では Federgruen と Tzur (1991)[30] が大幅な計算量の削減が可能な方法を提案している。しかしながら，計算量削減に伴う手続きの複雑化や今日のコンピュータの高速化などの背景のもとでは，Wagner と Whitin の基本的解法が理論的のみならず実用上も最も重要であると思われる。

さて，上述の一連の研究は生産能力制約のない単一工程のロットサイズ計画問題として位置づけられる。生産能力制約がないとは，各期での生産可能量に上限がなく，必要量が常に生産できることを意味する。このような仮定は必ずしも現実的ではないため，単一工程において生産能力制約のある環境に対するロットサイズ計画問題の研究も始まり，主として 2 つの流れがある。1 つは段取時間が無視できる場合であり，もう 1 つは段取時間が無視できない場合である。

前者の段取時間が無視できる場合，問題は固定費を伴う輸送問題[4] となり，最適解を求める手法として，たとえばBarany ら (1984)[5] は，問題を再定式化することで，汎用の混合整数計画用のパッケージにより解を求める方法を提案している。しかしながら，一般的に小規模な問題を除いては最適解を見つけることは困難なため，近似最適解を求める方法として，たとえば Walker (1976)[81] はシンプレックス法に基底の選択手順を一部変更して局所最適解を見つけ，次に端点を探索することで最良解を見つける方法を提案している。また，簡潔なヒューリスティック手続きも Eisenhut (1975)[27], Dogramaci ら (1981)[22]，Maes と Van Wassenhove (1986)[55] をはじめとして多くの提案がある。

一方，段取時間が無視できない場合の研究は，Manne (1958)[58] の研究を発端とする線形計画問題への定式化が重要な成果として挙げられる。定式化における基本的な概念は，優勢系列 (dominant sequence) であり，これは各期における生産量を零ないしは当該期から当該期を含む将来のある期までの累積需要量に等しくした生産系列を表すものである。この考え方により，対象問題を線形計画問題として取り扱うことができるため，シンプレックス法によって近似最適解が得られるという利点があるが，製品種類数や計画期間数の増加に伴い急激に問題規模が大きくなるため，Dzielinski と Gomory (1965)[24] は Dantzig と Wolfe の分解原理 (decomposition principle) を，また Lasdon と Terjung (1971)[52] は列生成法 (column generation procedure) の適用を発表している。Bahl ら (1987)[3] はこれらに関連した一連の研究を整理しており，Florian ら (1980)[34] は，問題の解きにくさを整理している。また，簡潔なヒューリスティック

手続きも Trigeiro (1989)[75] より提案されている。

このようなアプローチとは別に，1970 年代から 80 年代にかけてもう 1 つのアプローチが提案された。Geoffrion (1974)[36] が名付けたとされるラグランジュ緩和 (Lagrangean ないし Lagrangian relaxation) アプローチである。これは，整数計画問題や混合整数計画問題などにおいて，一部の制約式にラグランジュ乗数をかけて目的関数に組み込み，当該制約式を除去した緩和問題が，原問題に比べて解きやすくなる場合があることを利用し，緩和した問題を繰り返し解きながら，ラグランジュ乗数を更新させて，近似最適解を見つけようとするものである。このアプローチの利点は，制約式を緩和することで得られる部分問題が通常容易に解けるため，特殊なプログラムを作成しなくてもよいことにある。さらに，最適解に対する下界値も得られるため，得られた近似最適解の解の精度も検討可能である。主として理論的な展開がなされている論文としては Geoffrion (1971)[35]，Held ら (1974)[43]，Fisher ら (1975)[31]，Bazaraa と Goode (1979)[9]，Fisher (1981)[32]，Guignard と Rosenwein (1989)[40]などがある。

ロットサイズ計画問題にラグランジュ緩和法を適用した研究には Kleindorfer と Newson (1975)[50]，Graves (1982)[39]，Thizy と Van Wassenhove (1985)[74]，Billington ら (1986)[10]，Trigeiro ら (1989)[76]，Lozano ら (1991)[54]，Diaby ら (1992)[18],[19]，Millar と Yang (1993)[62] などがある。これらの研究成果は，ロットサイズ計画問題に対してラグランジュ緩和法が有効な近似最適化手法の 1 つであることを明らかにしたが，問題の緩和手法にはまだ検討の余地も残されていると思われる。さらに，緩和問題から得られる解を原問題の実行可能解とするためには，何らかのヒューリスティックな計画改善手続きが必要とされるが，この点に関して確立した手法はまだ見当たらない。そこで本研究では第 4 章と第 6 章において，それぞれ段取時間が無視できる場合と無視できない場合におけるロットサイズ計画問題に対し，ラグランジュ緩和法による近似最適化手続きの新たな提案を行う。

一方，第 5 章におていはロットサイズ計画問題に対してアニーリング (simulated annealing) 法[2],[49] の適用を検討する。アニーリング法は確率的最適化手法の 1 つであり，長時間の計算を必要とするが，幅広い組合せ最適化問題に対して容易に適用できるという特徴がある。ロットサイズ計画問題も，問題の簡単化を行えば組合せ最適化問題の 1 つと考えることができるが，アニーリング法を適用した研究は，Kuik と Salomon (1990)[51]による生産能力制約を考慮しない多段階工程への適用が見られる程度で，ロットサイズ計画問題に対するアニーリング法の有効性検討はまだ十分なされていない。そこで第 5 章において解の精度ならびに所要計算時間についての検討を行う。

さて，ロットサイズ計画問題を解くと，通常は各期に複数種類の製品を生産する計画が得られるが，これらを当該期でどの順番に生産するかの決定は下位のスケジューリングにおける決定項目としており，ロットサイズ計画レベルでは考慮しない。ところが，たとえば連続する 2 期間でともに同一製品を生産する場合，前の期の最後と，次の期の最初に同じ製品をスケジュールすれば，段取作業を 1 回分減らすことが可能であり，これはロットサイズ計画との一貫性が保たれないことを意味している。そこで Fleischmann (1990)[33]，Magnanti と Vachani (1990)[57]，Salomon ら (1991)[71]，Cattrysse ら (1993)[14]は，計画期間をより細分化し，各期において生産できる製品種類数を 1 つに限定し，生産量を零か生産能力一杯とするロットサイズ計画とスケジューリングの問題を提案しており，興味ある成果を示している。しかしながら，段取時間と段取費用が製品の生産順序に依存する場合への対応は難しく，まだ研究途上にある。スケジューリング問題においては，Conway ら (1967)[17] も論じているように，段取時間が生産順序に依存するときの総段取時間最小化問題が (非対称) 巡回セールスマン問題 ((asymmetric) traveling-salesman problem) に対応することより，分枝限定 (branch-and-bound) 法や動的計画法 (dynamic programming) が当初より試みられている。巡回セールスマン問題は，たとえば Miller と Pekny (1991)[63]にみられるように，近年では数千都市の規模問題まで最適に解きうることが報告されているが，ロットサイズ計画問題は各期での生産品種も決定項目であることから，問題はより複雑なものとなっている。Dilts と Ramsing (1989)[20]は，従来のロットサイズ計画を発展させ，段取費用が生産順序に依存する環境に対する検討を行っているが，生産時間制約を考慮しておらず，また問題も小規模にとどまっている。Dobson (1992)[21] は段取作業が生産順序に依存する環境におけるロット・スケジューリングを論じているが，需要が一定の仮定を設けており，これは必ずしも受け入れられない。そこで第 7 章において，段取時間と段取費用が製品の生産順序に依存する環境におけるロットサイズ計画問題と順序付け問題に対する 1 つのヒューリスティック解法を提案する。

1.3 本研究の概要

第 2 章と第 3 章では生産能力計画問題を論述する。1.1節で述べたように，生産能力計画においては，需要ならびに生産能力を共通の尺度に一元化し，将来の生産水準を決定するとともに，必要とされる労働力量を明らかにすることが要求されている。第 2 章と第 3 章では，比較的需要変動が大きく，労働力量の増減や設備の稼動/休止が重

要な意思決定項目となっている場合を取りあげている。言うまでもなく，需要の増減に応じて生産水準を細かく変更し，それに応じて労働力量も増減させるという方策は，必ずしも現実的とは言えない。むしろ，在庫水準が非常に高くなるか，あるいは非常に低くならない限り，現在の生産水準と労働力量を一定に保持させる方策が現実的と思われる。生産スイッチング法は，このような背景のもと，取りうる生産水準をいくつかに限定し，在庫水準の挙動に基づいて生産水準と労働力量を切り替えるという簡便で現実的な生産計画法である。この生産スイッチング法を用いるにあたっては，選定する生産水準とそれに対応した労働力量，そして切り替えの基準となる目標在庫水準の決定が重要となる。

そこで第 2 章では従来の探索法に代えて，対象問題を線形近似し，生産スイッチング法を混合整数計画問題に定式化して解くことにより適切な値を求める手法を提案するとともに，塗料製造会社の問題に適用して，従来法との比較を行っている。

一方，第 3 章では生産環境の制約により，選択可能な生産水準とそれに対応する労働力量がいくつかの離散値しか取りえない環境における生産スイッチング法である生産スイッチング規則を論述する。第 2 章では決定項目となっていた生産水準が，ここでは選択可能な離散値の中からの選択問題に変わるため，問題を混合整数計画問題に定式化するとともに，問題の特徴を生かしたヒューリスティック解法を提案している。

第 4 章から第 7 章まではロットサイズ計画問題を論述している。ここでは労働力量は上位の生産能力計画によって与えられたものと仮定し，定時生産時間で対応できない場合には必要に応じて残業生産が計画できる環境を想定している (ただし第 7 章は定時生産のみが計画可能としている)。定時生産に対しては，たとえ終業時刻以前に仕事を打ち切っても固定給が支給される場合が一般的であるため,「定時生産時間に余裕がある期に，需要に先行して製品を生産して在庫させて将来の需要に引き当てるか，それとも残業費用を認めて需要の発生期に生産するか」という選択，すなわち，在庫費用と残業費用のトレードオフと,「当該期の需要分を生産するか，それとも，将来のある期までの需要分を一度に生産するか」という，在庫費用と段取費用のトレードオフが本質的な問題となっている。段取作業に関しては，段取費用のみならず，段取時間が大きな影響を与える場合があり，利用可能な生産時間に上限がある場合においては，実行可能な生産計画を求めなければならないという難しさも含まれている。

第 4 章では段取時間は無視できるほど短いが段取費用は無視できない環境を対象とし，段取費用を目的関数の中に組み込んだ問題を議論している。この場合，問題は固定費付き問題となるが，その近似最適化手法としてラグランジュ緩和法を提案し，数

値計算例よりその有効性を議論している。

第 5 章では段取費用に加えて段取時間も加味した問題を取りあげている。定式化した問題はより一段と取り扱いにくいものとなるため，組合せ最適化問題に簡単化するとともに，近似最適化手法としてアニーリング法に基づくヒューリスティック手続きを適用し，数値計算例よりその有効性を論じている。

第 6 章では第 5 章とほぼ同じ問題設定において，特に製品種類数が 100 以上の大規模問題を対象とし，ラグランジュ緩和法に基づく近似最適化手続きを提案している。このとき，各繰り返しにおいて得られるロットサイズ計画問題の解の実行可能化を目的としたヒューリスティック手続きに，問題の大規模性を反映させている。

第 7 章では段取時間と段取費用が製品の生産順序に依存する環境を対象としている。この場合，製品の生産量のみならず，製品の生産順序も同時に決定しなければならないため，その最適化は非常に困難である。ここでは，簡潔なロットサイズ決定規則のもとでのヒューリスティック解法を提案し，数値計算例よりこの解法の特徴を論じるとともに，部分的にアニーリング法による結果との比較検討も行っている。

最後に第 8 章において本研究の成果をまとめるとともに，今後の課題についても論述する。

第 2 章

生産スイッチング法の混合整数計画問題への定式化

2.1　緒言

予測需要量が期によって大きく異なるとき，各期の生産能力を需要の変化にどの程度まで合わせて変更すべきかは，生産能力計画において慎重な検討を要する意思決定項目である。各期で生産能力を細かく変更する計画は，たとえそれが数学モデルにおいて最小費用であっても，モデルに反映されない種々の要因のために，実際には受け入れられない場合が多い。むしろ，小幅な需要変動を在庫で吸収し，大幅な変動に対してのみ生産能力を増減させるという生産計画法が現実的と思われる。生産スイッチング法は後者の立場から提案された生産計画法であり，選択可能な生産水準とそれに対応した労働力量をあらかじめ決めておき，ある所定の条件に応じて，各期の生産水準と労働力量を切り替えようとするものである。

この生産スイッチング法を用いるにあたっては，適切な生産水準とそれに対応した労働力量，ならびに目標在庫水準の値をいかにして求めるかが問題となる。これまでに提案されている手法では，生産スイッチング法が広範な対象に適用できることの特徴を生かせるような探索法が用いられてきたが，このような方法で得られた解はどの程度よいかが分からないという欠点がある。そこで本章では従来の探索法にかわって，対象を線形近似して混合整数計画問題に定式化し，それを解くことで適切なパラメータ値を求める方法を提案する。対象を線形近似しているため得られた解は必ずしも原問題の最適解とはならないが，対象の線形近似が適切であれば，十分な精度の解が得られるものと期待される。また，得られた解をもとにした探索法でさらによい値を見つけるという方法もあり，混合整数計画問題への定式化による潜在的利点は大きいと考えられる。

2.2　生産スイッチング法

生産スイッチング法の始まりは，Orr (1962)[70] のランダム・ウォーク・モデルであろう。これは式 (2.1) で定義されるモデルであり，t 期の生産水準 P_tを，$(t-1)$ 期末の在庫水準 I_{t-1}の挙動に基づいて決定するものである。

$$P_t = \begin{cases} H & \text{もし } I_{t-1}\text{が } c \text{ を上から横切った場合} \\ N & \text{もし } I_{t-1}\text{が } b \text{ を横切った場合} \\ L & \text{もし } I_{t-1}\text{が } a \text{ を下から横切った場合} \end{cases} \tag{2.1}$$

ここに a, b, c $(a > b > c)$ は在庫管理点，H, N, L $(H > N > L)$ は生産水準を表す (図 2.1参照)。このモデルは，多くの計画者が頻繁に生産計画を立て直すことを好まず，在庫水準が非常に高くなるか，あるいは非常に低くならない限り，できるだけ安定した労働力量と生産水準を維持したいという考えを持つことを背景としている。

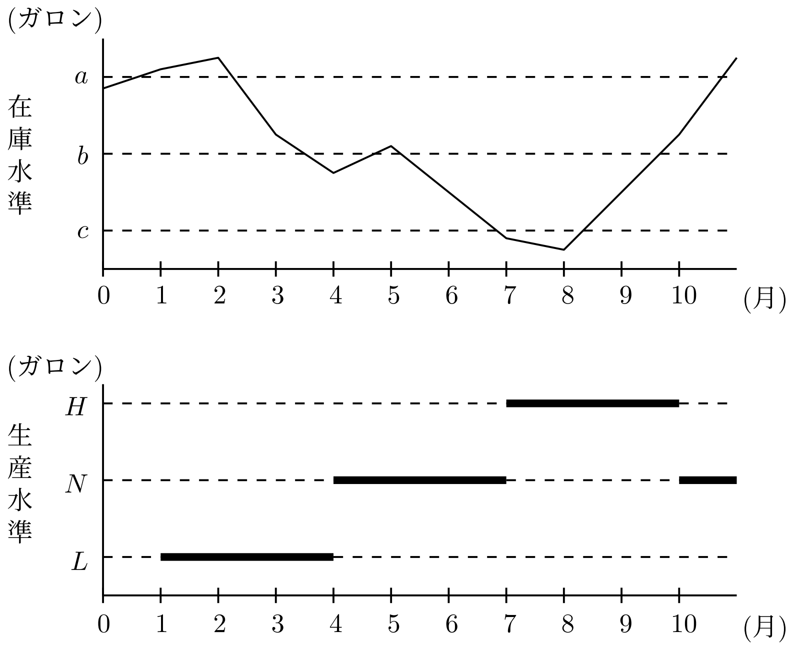

図 2.1　ランダム・ウォーク・モデルの例

Elmaleh と Eilon (1974)[28] は，取りうることの可能な生産水準数が 2 ならびに 3 の場合に対しシミュレーション実験を行って，Orr のランダム・ウォーク・モデルが有望な方法であることを示している。また，Mellichamp と Love (1978)[60] は，ランダム・ウォーク・モデルに式 (2.2) のごとく t 期の予測需要量 d_tを組み入れて，より生産

計画に適した形に修正し，生産スイッチング・ヒューリスティック (PSH: Production Switching Heuristic) と呼んでいる。

$$P_t = \begin{cases} L & \text{もし } d_t - I_{t-1} < L - C \text{の場合} \\ H & \text{もし } d_t - I_{t-1} > H - A \text{ の場合} \\ N & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{2.2}$$

ここに A, C ($A < C$) はそれぞれ最小ならびに最大目標在庫水準を表す。各生産水準 (L, N, H) ならびに目標在庫水準 (A, C) は計画者の意思決定項目であり，探索法によって最良値を求めることを提案している。さらに彼らは，Holt ら (1955)[44] の塗料製造会社ならびに Jones (1967)[47] の X 社に対する数値計算例を示して，生産スイッチング・ヒューリスティックが簡単な構造であるにもかかわらず，他の最適化指向のアプローチによる解とあまり総生産費用に差のないことを示した。ただし，Vergin (1980)[79] は固定費を除いた総生産費用にはかなりの差があると批判している。Barman と Burch (1989)[6] は，Mellichamp と Love の探索法にさらなる改良を加えた方法を提案するとともに，2 水準と 3 水準の生産スイッチング・ヒューリスティックのパフォーマンスを比較して，生産水準数を増やしても必ずしもパフォーマンスが改善されるわけではないことを示している。

なお，DuBois と Oliff (1991)[23] は，アメリカの 4 州に立地する 55 社からのアンケート結果を報告しているが，この中で労働集約的工場では労働者の雇用/解雇をグループ単位で行う場合が多いことを示しており，このことは生産スイッチング法が現実的アプローチの 1 つであることを裏付けていると思われる。

2.3　混合整数計画問題への定式化

本章では Mellichamp と Love のアプローチを踏襲し，彼らのヒューリスティックを混合整数計画問題の中に組み入れ，それを解くことで生産水準ならびに目標在庫水準の最適値を求めることを試みる。なお，Mellichamp と Love は生産水準数を 3 と固定していたが，Barman と Burch は需要系列や費用構造によっては 2 水準でも十分な場合があることを示しているため，本章では，例えば 3 つの生産水準のうち 2 つが同じ値となることを許すことで，実質的な生産水準数が 3 以下となりうる定式化を行う。

定式化を行う上で最も重要な仮定は，対象に対する線形近似が可能なことである。特に労働力量と生産水準に非線形な関係があると非常に取り扱いにくいため，ここでは生産水準は労働力量に比例するものと仮定する。費用項目としては賃金，在庫費用，雇

用ならびに解雇費用を取りあげ，制約式には生産スイッチング・ヒューリスティックの規則を組み入れるとともに，生産水準・在庫水準と需要量の平衡制約，各期での労働力量の平衡制約，そして労働力量と生産水準の関係式を組み入れる。

以上の議論に基づき，第 1 期から第 T 期までの計画期間中の総生産費用最小化を目的とする混合整数計画問題を以下のように定式化した。

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T}(c_1W_t + c_2I_t + c_3H_t + c_4L_t) \tag{2.3}$$

subject to

$$R_n - kG_n = 0 \qquad n = 1, 2, 3 \tag{2.4}$$

$$R_n - R_{n-1} \leq 0 \qquad n = 2, 3 \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=1}^{3} X_{nt} \geq 1 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.6}$$

$$R_3 - mX_{3,t} + I_{t-1} - C \geq d_t - m \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.7}$$

$$R_3 - mX_{3,t} + I_{t-1} - C \leq d_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.8}$$

$$R_1 + mX_{1,t} + I_{t-1} - A \leq d_t + m \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.9}$$

$$R_1 + mX_{1,t} + I_{t-1} - A \geq d_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.10}$$

$$P_t - R_n - mX_{nt} \geq -m \qquad n = 1, 2, 3; t = 1, \ldots, T \tag{2.11}$$

$$P_t - R_n + mX_{nt} \leq m \qquad n = 1, 2, 3; t = 1, \ldots, T \tag{2.12}$$

$$W_t - G_n - mX_{nt} \geq -m \qquad n = 1, 2, 3; t = 1, \ldots, T \tag{2.13}$$

$$W_t - G_n + mX_{nt} \leq m \qquad n = 1, 2, 3; t = 1, \ldots, T \tag{2.14}$$

$$W_t - W_{t-1} - H_t + L_t = 0 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.15}$$

$$I_{t-1} + P_t - I_t = d_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.16}$$

$$A - C \leq 0 \tag{2.17}$$

$$X_{nt} \in \{0, 1\} \qquad n = 1, 2, 3; t = 1, \ldots, T \tag{2.18}$$

$$G_n, R_n \geq 0 \qquad n = 1, 2, 3 \tag{2.19}$$

$$A, C \geq 0 \tag{2.20}$$

$$P_t, I_t, H_t, L_t, W_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.21}$$

ここに添字 n は生産水準の番号，t は計画期を表す。入力データならびに決定変数の意味するところは以下のとおりである。

＜入力データ＞

c_1：労働者 1 人当たりの賃金

c_2：単位当たりの在庫費用

c_3：労働者 1 人当たりの雇用費用

c_4：労働者 1 人当たりの解雇費用

k：労働者 1 人当たりの労働生産性

d_t：t 期の予測需要量

m：十分に大きな正の値

＜決定変数＞

P_t：t 期における生産水準

I_t：t 期末における在庫水準

H_t：t 期首に雇用された人数

L_t：t 期首に解雇された人数

R_n：n 番目の生産水準

G_n：n 番目の生産水準を達成するために必要な労働者数

W_t：t 期の労働者数

X_{nt}：0-1 変数であり，1 の値をとれば，t 期に n 番目の水準が選択されたことを表す

A, C：最小ならびに最大目標在庫水準

式 (2.3) は計画期間中の総生産費用の最小化を要求する目的関数，式 (2.4) は各生産水準達成に必要な労働者数を表す関係式，式 (2.5) は各生産水準の大小関係を表している。式 (2.6) は各期で少なくともいずれか 1 つの生産水準を選ぶことを要求している。式 (2.7)〜(2.10) は生産スイッチング・ヒューリスティックを表しており，式 (2.11), (2.12) は t 期の生産水準 P_t が 3 つの生産水準 R_1, R_2, R_3 のいずれかであることを要求する制約式，式 (2.13), (2.14) は各期の労働者数が対応する生産水準に必要な労働者数に一致することを要求する式，式 (2.15) は各期での労働者数の平衡制約式，式 (2.16) は生産水準・在庫水準と需要量の平衡制約式，式 (2.17) は目標在庫水準に対する大小関係を表している。式 (2.18)〜(2.21) は 0-1 制約ならびに非負制約を表している。なお，数理計画問題への定式化を容易にするために，生産スイッチング・ヒューリスティックにおける不等号条件には等号を含めている。

2.4　塗料製造会社の生産計画問題への適用

定式化した生産スイッチング法の有効性をみるために，Holt ら (1955)[44] の塗料製造会社の生産計画問題を取りあげる。彼らの問題は以下のように定式化される。

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T} (\Omega_{1,t} + \Omega_{2,t} + \Omega_{3,t} + \Omega_{4,t}) \tag{2.22}$$

subject to

$$I_{t-1} + P_t - I_t = d_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.16}$$

$$P_t, I_t, W_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.21$'$}$$

ただし，$\Omega_{1,t}$〜$\Omega_{4,t}$の意味するところは以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
&\Omega_{1,t} = 340W_t && \text{：定時賃金} \\
&\Omega_{2,t} = 64.3(W_t - W_{t-1})^2 && \text{：雇用/解雇費用} \\
&\Omega_{3,t} = 0.20(P_t - 5.67W_t)^2 + 51.2P_t - 281W_t && \text{：残業費用} \\
&\Omega_{4,t} = 0.0825(I_t - 320)^2 && \text{：在庫関連費用}
\end{aligned}$$

ここに在庫関連費用$\Omega_{4,t}$は在庫費用，段取費用，バックオーダー費用からなる。もし在庫水準を低くしすぎると，製品種類ごとの在庫量のバランスを保つためにロットサイズを小さくする必要がある。その結果，段取回数が多くなり，段取費用の増加を招いてしまう。また，在庫水準をあまり低くすると，品切れも発生しやすくなる。よって，ある一定量の在庫水準 (ここでは 320 ガロン) が最も低費用となる定式化となっている。

上記モデルは目的関数が 2 次式となっており，そのままでは混合整数計画問題に変換できない。そこで，Goodman (1974)[38]，Barman と Burch[6] により紹介されている線形計画モデルへの変換を導入し，目的関数を以下のように置き換える。

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T} \{&340W_t + 428.67|W_t - W_{t-1}| + 630.0(P_t/5.67 - W_t) + \\
&5.51|I_t - 320|\}
\end{aligned} \tag{2.22$'$}$$

ただし，目的関数の第 3 項

$$630.0(P_t/5.67 - W_t)$$

は残業費用を表すため，正の値のみ考慮するものとする。なお，この線形化手続きについては付録 A で補足する。

2.4.1 定式化

上述の費用線形化に基づき，最適生産水準ならびに目標在庫水準決定問題は以下のように定式化される。

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T} \Big\{ 340W_t + 428.67(L_t + H_t) + 630.0\beta_t + 5.51(\gamma_t^+ + \gamma_t^-) \Big\} \quad (2.22'')$$

subject to

$$R_n - 5.67(1+\theta)G_n \leq 0 \quad (2.4')$$

$$(2.5) \cdots (2.20)$$

$$P_t, I_t, W_t, \beta_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \quad (2.21'')$$

$$\beta_t \geq P_t/5.67 - W_t \qquad t = 1, \ldots, T \quad (2.23)$$

$$I_t + \gamma_t^- - \gamma_t^+ = 320.0 \qquad t = 1, \ldots, T \quad (2.24)$$

$$0 \leq H_t, L_t \leq 10 \qquad t = 1, \ldots, T \quad (2.25)$$

$$0 \leq \gamma_t^-, \gamma_t^+ \leq 100 \qquad t = 1, \ldots, T \quad (2.26)$$

ここに新しい入力データならびに決定変数の意味は以下のとおりである。

＜入力データ＞

θ：最大残業生産時間の定時生産時間に対する割合

＜決定変数＞

β_t：t 期における残業量 (人)

γ_t^-, γ_t^+：t 期末在庫水準に対する偏差変数 (ガロン)

式 (2.4′) は残業生産を認めるために不等号制約式に置き換えている。式 (2.23) は生産水準と労働力量より，残業量 (人) を求める式であり，式 (2.24) は各期末在庫水準が 320 (ガロン) からどれだけ離れているかを示す式であり，式 (2.25), (2.26) は線形近似の妥当性を保つために各決定変数の値が決められた範囲を越えないことを要求する式である。

2.4.2 入力データと計算結果

数値計算で用いた入力データ，すなわち初期労働者数，初期在庫水準，1 期から 12 期までの予測需要量は，Mellichamp と Love の論文[60] ならびに Barman と Burch の

論文[6] と同じものを使用し，2.4.1節のモデルにおいて，$T = 12$，$\theta = 0.2$ とおいて，HITAC M680H 上の数理計画パッケージ MPS/MIP により解を求めた[1]。得られた解は以下のとおりである。

$$
\begin{array}{lcrl}
R_1\ (=H) & = & 424.667 & (\text{ガロン}) \\
R_2\ (=N) & = & 424.667 & (\text{ガロン}) \\
R_3\ (=L) & = & 373.000 & (\text{ガロン}) \\
G_1 & = & 74.911 & (\text{人}) \\
G_2 & = & 74.911 & (\text{人}) \\
G_3 & = & 65.797 & (\text{人}) \\
A & = & 220.000 & (\text{ガロン}) \\
C & = & 220.000 & (\text{ガロン}) \\
\text{目的関数値} & = & 288{,}205 & (\text{ドル})
\end{array}
$$

本章で提案した混合整数計画問題による解を検討するために比較モデルとして以下のものを選んだ。

(1) Holt らの LDR(Linear Decision Rule：線形決定規則)：Barman と Burch の論文[6] の表 1 から引用

(2) Mellichamp と Love の PSH：彼らの論文[60] の表 2 から引用

(3) Barman と Burch による改良探索法による PSH：彼らの論文[6]の表 1 から引用

混合整数計画問題を解いて得られた結果 (以下では MIP と略記する) ならびに比較モデルの結果を費用別に整理したものを表 2.1 に，各モデルの各期での詳細な計画を表 2.2 にそれぞれ示した。なお表 2.1 の費用計算はすべて式 (2.22) の 2 次費用関数を用いた。ただし，残業費用を表す項については，P_tと W_tの組み合わせによっては負の値を取ることがあり，その場合には残業費用は零とした。

表 2.2 の 12 期末在庫水準を見ると，各モデルとも異なった値を示しているため，単純に各モデルの費用比較をすることは好ましくない。そこで Vergin (1980)[79] の説に

[1]MPS/MIP が出力する多量の途中経過レポートのために，途中で計算を打ち切らざるをえなかった。従って，残念ながら得られた結果が定式化した混合整数計画問題の最適解であるという保証はないが，計算を打ち切った時点での目的関数値は，0-1 変数を連続変数に緩和して得られる連続緩和問題の目的関数値より 1.3%高であったため，解の精度としては十分であると判断した。なお現在の解を得るまでに要した計算時間 (CPU 時間) は 10 秒である。

表 2.1 各モデルによる塗料製造会社の生産費用の比較

費用項目	LDR	PSH	改良探索法による PSH	MIP
定時賃金	287,052	276,338	273,431	277,756
残業費用	5,696	13,198	9,928	7,550
雇用 / 解雇費用	3,129	8,863	9,557	7,721
在庫費用	1,262	1,494	3,011	4,449
総生産費用	297,139	299,893	295,927	297,476
在庫水準調整	0	2,126	5,364	3,805
調整後総生産費用	297,139	302,019	301,291	301,281

注：費用の単位はドルである

基づき LDR の 12 期末在庫水準とその他のモデルの 12 期末在庫水準の差を求め，その差がどれだけの価値に相当するかを算出し，それを各モデルの費用に加えて調整後総生産費用とした。PSH を例にとれば，在庫水準の差は 35.45 (ガロン) であり，これは定時生産でみたとき $(340/5.67) \times 35.45 = 2,126$ (ドル) の価値があるとするものである。図 2.2は調整前と調整後の総生産費用を比較したグラフである。

2.4.3 考察

表 2.1，表 2.2ならびに図 2.2 から以下のことが読み取れる。

(1) 最終期末の在庫水準の差に基づく調整を行う前の総生産費用を比較すると，改良探索法による PSH が最も低い値を示しており，以下 LDR，MIP，PSH となる。しかしながら在庫水準の差に基づく調整を行うと，その順番は LDR，MIP，改良探索法による PSH，そして PSH となり，改良探索法による PSH の総生産費用の低さは最終期末の在庫水準を低くしていることによるものであることがわかる。

(2) MIP による解は最終期末在庫水準による調整にかかわらず，PSH よりは良い結果を示しており，また調整を行った後には改良探索法による PSH よりも良い結果を示している。これらのことより，2 次費用関数を線形近似した混合整数計画問題を解くことにより，生産水準とそれに対応した労働力量，ならびに目標在庫

表 2.2 各モデルの生産計画の比較

		LDR[6]			PSH[60]		
t	d_t	P_t	W_t	I_t	P_t	W_t	I_t
0			81.00	263.00		81.00	263.00
1	430	465.57	78.15	298.57	452.42	70.82	285.42
2	447	441.39	75.27	292.96	452.42	70.82	290.83
3	440	415.40	72.51	268.36	382.42	67.45	233.25
4	316	380.91	70.08	333.27	382.42	67.45	299.67
5	397	377.10	68.29	313.37	382.42	67.45	285.08
6	375	368.26	67.08	306.63	382.42	67.45	292.50
7	292	359.43	66.52	374.06	382.42	67.45	382.92
8	458	382.24	66.77	298.30	382.42	67.45	307.34
9	400	376.39	67.37	274.69	382.42	67.45	289.75
10	350	364.06	68.50	288.75	382.42	67.45	322.17
11	284	362.89	70.42	367.64	312.42	64.07	350.59
12	400	400.81	73.31	368.45	382.42	67.45	333.00

d_t : t 期の予測需要量 (ガロン)
P_t : t 期の生産水準 (ガロン)
W_t : t 期の労働力量 (人)
I_t : t 期末の在庫水準 (ガロン)

表 2.2 各モデルの生産計画の比較 (続き)

		改良探索法による PSH[6]			MIP		
t	d_t	P_t	W_t	I_t	P_t	W_t	I_t
0			81.00	263.00		81.00	263.00
1	430	440.00	74.96	273.00	424.67	74.91	257.67
2	447	440.00	74.96	266.00	424.67	74.91	235.34
3	440	440.00	74.96	266.00	424.67	74.91	220.00
4	316	365.00	64.37	315.00	373.00	65.80	277.00
5	397	365.00	64.37	283.00	373.00	65.80	253.00
6	375	365.00	64.37	273.00	373.00	65.80	251.00
7	292	365.00	64.37	346.00	373.00	65.80	332.00
8	458	365.00	64.37	253.00	373.00	65.80	247.00
9	400	365.00	64.37	218.00	373.00	65.80	220.00
10	350	365.00	64.37	233.00	373.00	65.80	243.00
11	284	365.00	64.37	314.00	373.00	65.80	332.00
12	400	365.00	64.37	279.00	373.00	65.80	305.00

d_t : t 期の予測需要量 (ガロン)

P_t : t 期の生産水準 (ガロン)

W_t : t 期の労働力量 (人)

I_t : t 期末の在庫水準 (ガロン)

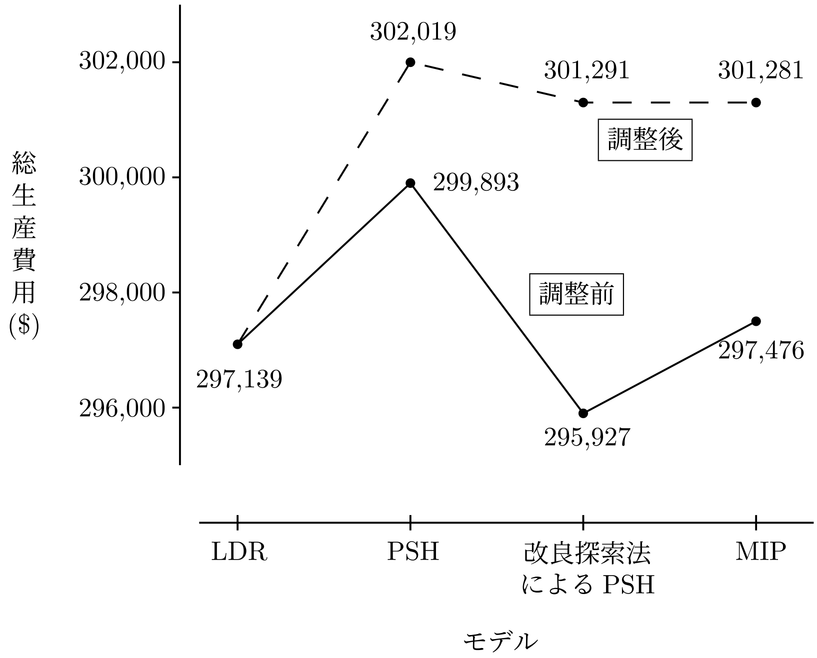

図 2.2　最終期末在庫水準の差に基づく調整を行う前後の総生産費用

水準の値を求める方法は，探索法よりも有効な場合のあることがわかる。

(3) 改良探索法による PSH，MIP とも生産水準数は 2 であり，総生産費用削減の観点からは 3 水準は必要ないことがわかる。

(4) 2 次費用モデルを線形近似した時の目的関数値と，2 次費用関数に代入して計算した (真の) 値との差は約 3%であり，比較的よく線形近似されていることがわかる。

2.5　結言

本章では，生産スイッチング法におけるパラメータの最適値を数理計画問題を解くことで求めることをねらい，生産スイッチング・ヒューリスティックを組み込んだ混合整数計画問題を定式化した。数値計算例において塗料製造会社の 2 次費用関数に対して線形近似を行い，最適パラメータ値を求め，他のモデルによる結果と比較したところ，本手法がかなり良いパフォーマンスを示した。

混合整数計画問題に定式化することのさらなる利点として，必要な生産水準数も同時に決定されることがある。数値計算例においては，3 水準としなくても 2 水準で費用

的には十分良い結果を示している。一般に生産水準数が少ない方が生産計画作成が簡単になり，生産スイッチング法の良さが発揮される。このような生産水準数決定の観点からも，本章で定式化した混合整数計画問題が生産スイッチング法を用いる上で大きな役割を果たすものと思われる。

付録 A　2 次費用モデルの線形化手続き

Holt らの 2 次費用モデルを線形化する方法として，本章では Goodman[38]，Barman と Burch[6]で紹介されていた Kolenda のモデルを採用した。このモデルは，2 次式で表された関数を 1 次式で近似するにあたり，図 2.3 に示すように領域 A と B の面積が等しくなるように 1 次式を決定する近似法である。なお，文献[6] に示されていた Kolenda のモデルでは労働者数の変化量の最大値が 5 人となっているが，生産スイッチング環境ではこの制限は厳しいと判断し，最大値を 10 人として，その時の 1 次式の傾きを再計算して使用した。

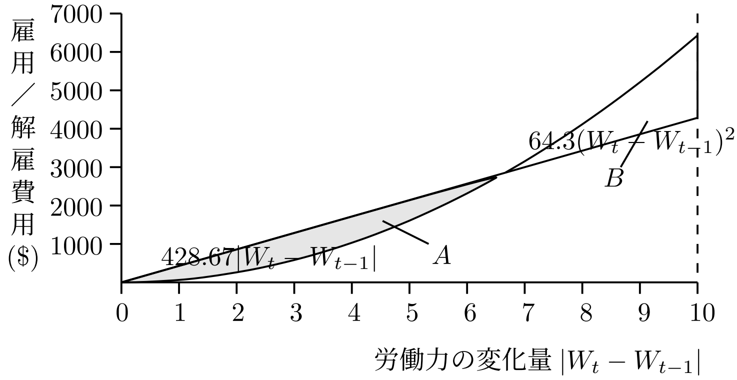

図 2.3　2 次費用関数の線形近似 (雇用/解雇費用の場合)

第 3 章

生産スイッチング規則の混合整数計画問題への定式化

3.1　緒言

第 2 章では生産スイッチング法を用いるにあたって必要とされる生産水準とそれに対応した労働力量，そして目標在庫水準の値を，対象を線形近似した混合整数計画問題の解より決定する方法について論述した。これは対象とする生産システムがある一定の範囲内で任意の生産水準や労働力量をあらかじめ決定できる環境 (以後，連続的生産環境と呼ぶ) を仮定していたわけであるが，シフト制を採用していたり，設備の稼働水準が変更できず，稼働させるか休止させるかの選択しか行えないなどの理由から特定の生産水準や労働力量しか取れない環境 (以後，離散的生産環境と呼ぶ) に対してはそのままでは適用できない。Elmaleh と Eilon (1974)[28] は，食品製造工場や化学工場にこのような環境がみられることを述べている。

Oliff と Leong (1987)[68] はこのような離散的生産環境における生産スイッチング法として生産スイッチング規則 (production switching rule) を提案している。生産スイッチング規則は生産スイッチング法の 1 つであるが，生産水準が特定の離散値に限られている離散的環境への適用を強調したもので，期首在庫水準と予測需要量ならびに目標在庫水準の値より，当該期の生産水準を選択可能な生産水準の中から規則的に与えるものである。そこで本章では生産スイッチング規則に焦点をあて，最適な生産水準の選択ならびに目標在庫水準の決定のために，生産スイッチング規則を制約条件の中に組み込んだ混合整数計画問題を定式化する。さらに，この定式化した問題に対する 1 つのヒューリスティック解法を提案するとともに，数値計算例よりその有効性について検討する。

3.2　生産スイッチング規則と混合整数計画問題

Oliff と Leong[68] の提案した生産スイッチング規則は，スイッチング水準数が 3 の場合に対して提案されている Mellichamp と Love (1978)[60] の生産スイッチング・ヒューリスティックを，一般的な水準数 Nに拡張したものである。しかしながら，水準数 N をあまり多くすることは生産スイッチング規則を用いることの有意性を失うことになるため[26]，水準数はある程度少ない場合を想定するのが妥当であると思われる。そこで本章では従来の研究成果ならびに第 2 章の結果も踏まえて，$N = 3$ の場合を中心として議論する。

水準数が 3 の場合の生産スイッチング規則は式 (3.1) のように表される。

$$P_t = \begin{cases} R_1 & \text{もし } d_t - I_{t-1} + A \geq R_1 \text{の場合} \\ R_3 & \text{もし } d_t - I_{t-1} + C \leq R_3 \text{の場合} \\ R_2 & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{3.1}$$

ここに R_1, R_2, R_3 $(R_1 > R_2 > R_3)$ は生産水準，P_tは t 期の生産水準，d_tは t 期の予測需要量，I_{t-1}は $(t-1)$ 期末の在庫水準，A は最小目標在庫水準，Cは最大目標在庫水準 $(A \leq C)$ をそれぞれ表す[2]。この規則では最小値 A を小さくしていくと R_1が選ばれにくくなり，逆に最大値 Cを大きくしていくと R_3が選ばれにくくなるということからわかるように，目標在庫水準を最小値と最大値でとらえることにより，柔軟な決定構造を実現している。

いま，対象とする生産システムにおいて取りうることの可能な生産水準数が M $(M > 3)$ であるとすれば，生産スイッチング規則を用いるにあたって次の 2 種類の意思決定を行わなければならないことになる。

＜生産水準選択＞

選択可能な M個の生産水準の中からいずれか 3 つを選択し，生産水準 R_1, R_2, R_3 とする。(以後，この選択された生産水準 R_1, R_2, R_3をスイッチング水準と呼ぶ。)

＜目標在庫水準決定＞

最小ならびに最大目標在庫水準 A, Cの値を決める。

[2] Oliff と Leong は生産水準の選択条件に等号を含めていないが，本章では数理計画問題に定式化することを踏まえ，条件に等号を含めている。これと同様に最小ならびに最大目標在庫水準 A, C に対する大小制約にも等号を含めた。

これらの意思決定を適切に行うことは，総生産費用の最小化において重要であると考えられる。そこで，計画期間中の総生産費用が最小となる各スイッチング水準ならびに目標在庫水準を求めるために，上記生産スイッチング規則を組み入れた混合整数計画問題を以下のように定式化した。なお，この定式化は第 2 章の成果をもとにしているが，生産水準ならびに労働力量を，取りうることの可能な値の中から選択する形にした部分が新しくなっている。

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T}(c_1W_t + c_2I_t + c_3H_t + c_4L_t) \tag{3.2}$$

subject to

$$R_1 + zX_{1,t} + I_{t-1} - A \le d_t + z \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.3}$$

$$R_1 + zX_{1,t} + I_{t-1} - A \ge d_t + \alpha \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.4}$$

$$R_3 - zX_{3,t} + I_{t-1} - C \ge d_t - z \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.5}$$

$$R_3 - zX_{3,t} + I_{t-1} - C \le d_t - \alpha \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.6}$$

$$\sum_{n=1}^{3} X_{nt} = 1 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.7}$$

$$R_n - \sum_{m=1}^{M} p_m Y_{mn} = 0 \qquad n = 1, 2, 3 \tag{3.8}$$

$$\sum_{m=1}^{M} Y_{mn} = 1 \qquad n = 1, 2, 3 \tag{3.9}$$

$$R_n - R_{n+1} \ge 0 \qquad n = 1, 2 \tag{3.10}$$

$$G_n - \sum_{m=1}^{M} w_m Y_{mn} = 0 \qquad n = 1, 2, 3 \tag{3.11}$$

$$P_t - R_n + zX_{nt} \le z \qquad n = 1, 2, 3; t = 1, \ldots, T \tag{3.12}$$

$$P_t - R_n - zX_{nt} \ge -z \qquad n = 1, 2, 3; t = 1, \ldots, T \tag{3.13}$$

$$W_t - G_n + zX_{nt} \le z \qquad n = 1, 2, 3; t = 1, \ldots, T \tag{3.14}$$

$$W_t - G_n - zX_{nt} \ge -z \qquad n = 1, 2, 3; t = 1, \ldots, T \tag{3.15}$$

$$W_t - W_{t-1} - H_t + L_t = 0 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.16}$$

$$I_{t-1} + P_t - I_t = d_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.17}$$

$$A - C \le 0 \tag{3.18}$$

$$X_{nt} \in \{0, 1\} \qquad n = 1, 2, 3; t = 1, \ldots, T \tag{3.19}$$

$$Y_{mn} \in \{0, 1\} \qquad m = 1, \ldots, M; n = 1, 2, 3 \tag{3.20}$$

$$G_n, R_n \ge 0 \qquad n = 1, 2, 3 \tag{3.21}$$

$$A, C \geq 0 \tag{3.22}$$

$$P_t, I_t, H_t, L_t, W_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.23}$$

ここに添字 t は計画期，n はスイッチング水準番号，m は生産水準番号をそれぞれ表す。入力データならびに決定変数の意味するところは以下のとおりである。

＜入力データ＞

M：システムが取りうることの可能な最大生産水準数 ($m = 1, \ldots, M$)

T：計画期間数 ($t = 1, \ldots, T$)

d_t：t 期の予測需要量

p_m：m 番目の生産水準

w_m：m 番目の生産水準における労働力量

c_1：賃金費用係数

c_2：在庫費用係数

c_3：雇用費用係数

c_4：解雇費用係数

z：十分大きい正の値

α：十分小さい正の値 (需要量をはかる最小単位以下の値)

＜決定変数＞

R_n：n 番目のスイッチング水準

G_n：n 番目のスイッチング水準に対応した労働力量

I_t：t 期末の在庫水準

P_t：t 期の生産水準

A：最小目標在庫水準

C：最大目標在庫水準

W_t：t 期での労働力量

H_t：t 期首での雇用量

L_t：t 期首での解雇量

X_{nt} : スイッチング水準 n を t 期の生産水準に選択したならば 1，そうでなければ 0

Y_{mn} : 生産水準 m をスイッチング水準 n として選択したならば 1，そうでなければ 0

目的関数 (3.2) は，計画期間中の総生産費用，すなわち賃金，在庫費用，雇用/解雇費用の和の最小化を要求している。制約式 (3.3)〜(3.7) は 3 水準における生産スイッチング規則を表している。すなわち，式 (3.3)，(3.4) は $d_t - I_{t-1} + A$ の値が R_1 以上 ($X_{1,t} = 1$) か，R_1未満 ($X_{1,t} = 0$) かを表し，式 (3.5)，(3.6) は $d_t - I_{t-1} + C$ の値が R_3 以下 ($X_{3,t} = 1$) か, R_3 より大きい ($X_{3,t} = 0$) かを表している。さらに，式 (3.7) により，$X_{1,t} = X_{3,t} = 0$ の場合，R_2 が t 期の生産水準として選ばれることを要求している。式 (3.8)，(3.9) はいずれかの生産水準をスイッチング水準として選ぶことを要求しており，式 (3.10) はスイッチング水準間での大小関係を表している。また，式 (3.11) は選択されたスイッチング水準に対応した労働力量を与える。式 (3.12)，(3.13) は生産スイッチング規則に基づく各期の生産水準を，また式 (3.14)，(3.15) は各期の労働力量をそれぞれ与える。式 (3.16) は各期での労働力量と雇用/解雇量に関する平衡式であり，式 (3.17) は生産水準・在庫水準と需要量の平衡式である。式 (3.18) は目標在庫水準に対する大小制約式，式 (3.19)〜(3.23) は 0-1 制約ならびに非負制約を表す。

3.3　問題の特徴とヒューリスティック解法

3.3.1　混合整数計画問題の特徴

先に定式化した混合整数計画問題は，本質的には 2 つの連続変数 A, C と，$3T+3M$(T は計画期間数，Mは取り得ることの可能な最大生産水準数) 個の 0-1 変数 X_{nt}, Y_{mn} の最適値を決定する問題である。混合整数計画問題の最適解を求める解法としては分枝限定法が最も一般的であり，たとえば数理計画パッケージ MPS 上の混合整数計画プログラム MIP も分枝限定法を用いている。しかしながら，先に定式化した問題は効果的な限定手続きが困難な構造となっているため，分枝限定法では最適解が得られにくいことがわかった。効果的な限定手続きが困難な理由は，スイッチング水準と生産水準，労働力量が 0-1 変数 X_{nt} によって関係付けられていることにある。分枝の途中では 0-1 変数 X_{nt}の一部が実数変数に緩和されて取り扱われるが，X_{nt}が 0 か 1 以外の値を取ると，労働力量が零であるにもかかわらず (すなわち費用を伴うことなく)，需要に見合っ

た生産が可能となってしまう。そのため，X_{nt} を 0 か 1 に固定する分枝が浅いうちは，目的関数もあまり大きな値を取らないため，効率的な限定手続きが困難となっているのである。

一方，定式化した混合整数計画問題に，ラグランジュ緩和法や Bender の分割法などの最適化技法を適用することも困難と思われる。これらのことより，定式化した問題を直接的に最適化指向の手続きにより解くことは断念し，問題の特徴を生かした 1 つのヒューリスティック解法を提案する。

3.3.2　ヒューリスティック解法

先に述べたように，分枝限定法によって 0-1 変数 X_{nt}を逐次 0 か 1 に固定しながら目標在庫水準 A, Cの最適値を求めることは非常に手数がかかるが，逆に，A, Cの値が決まっていて，かつ Y_{mn} の値も与えられているならば，X_{nt} の値は生産スイッチング規則により簡単かつ一意に定まる。そこで，定式化した混合整数計画問題を以下に示すように，X_{nt}ならびに Y_{mn}の決定問題＜問題 A ＞と，A, Cと Y_{mn} の決定問題＜問題 B ＞という 2 つの部分問題に分割して，交互に解きながら近似最適解を探すというヒューリスティック解法を提案する。

＜問題 A ＞

目標在庫水準 A, Cが与えられたもとで，生産水準から 3 つのスイッチング水準を選んだすべての組合せに対し，生産スイッチング規則をあてはめて，システム制約内で総生産費用が最小となるスイッチング・パターンを得る。

＜問題 B ＞

スイッチング・パターン X_{nt}が与えられたもとで，生産水準から 3 つのスイッチング水準を選んだすべての組合せに対し，システム制約を満たし，かつ総生産費用が最小となる目標在庫水準 A, Cの区間を求める。

ここに＜問題 B ＞が，最小ならびに最大目標在庫水準 A, Cを，特定値ではなく幅をもつ区間で求める手続きを要求している理由は以下のとおりである。いまスイッチング・パターンが与えられたもとで 3 つのスイッチング水準を選んだとする。各期にどの水準を選ぶかはスイッチング・パターンにより指定されているわけであるから，その指定されたパターンに一致するように生産スイッチング規則における A ならびに C を決める必要がある。たとえば t 期に R_1が選ばれているとすれば，$A \geq I_{t-1} + R_1 - d_t$

と $C > I_{t-1} + R_3 - d_t$ が成立しなければならない。これを各期ごとに適用すれば，条件を満たす A ならびに C は一般的に区間で得られることになり，これが<問題 B >における出力となっているのである。

さて，上記の 2 つの部分問題は，もし最適なパラメータ値 (A, C と X_{nt}) が与えられれば，それぞれ最適値を出力することは明らかである。さらに，各部分問題は，式 (3.2) で定義した目的関数のすべての項目を考慮し，かつ，その最小化をねらっているため，<問題 A >と<問題 B >を交互に解きながら最適なパラメータ値を探す手続きは，全体的な最適解を探す流れに一致するものと期待される。また，システムが取り得ることの可能な最大生産水準数 M はさほど多くないと考えられるので[68]，各部分問題の最適解は可能なスイッチング水準の組合せをすべて列挙することで求められる。

このヒューリスティック解法を用いるにあたって最も問題となることは，<問題 B >の解として得られる目標在庫水準 A, C の区間値をいかに 1 つの特定値に絞り込み，<問題 A >に与えるかである。この絞り込みにはいくつかの方法が考えられるが，ここでは，式 (3.2) の目的関数に在庫費用があることより，システム制約を考慮しながら在庫費用が最小となる点を計画者が設定し (以後，この設定値を照準値と呼ぶ)，この値に向かって A, C を絞り込む方法を提案する。

以上の基本的考えに基づいたヒューリスティック解法の手続きは次のとおりである。

ステップ 0： 目標在庫水準 A, C の初期値を与える。

ステップ 1： 目標在庫水準 A, C の値を<問題 A >に入力し，システム制約内で総生産費用が最小となるスイッチング・パターンを得る。もし実行可能な計画がなければステップ 4 へ行く。

ステップ 2： <問題 B >を解き，システム制約を満足し，かつ総生産費用が最小となる目標在庫水準 A, C の区間を求める。もし，その区間内に照準値が含まれていれば照準値を，もし照準値から外れていれば現在の区間値の中で最も照準値に近い値より，わずかに照準値よりの値を目標在庫水準に設定する。

ステップ 3： ステップ 2 の結果が以前と同じであればステップ 4 へ，そうでなければステップ 1 に戻る。ただし，あらかじめ設定した繰り返し回数を越える場合にはステップ 4 へ行く。

ステップ 4： これまで得られた実行可能計画の中で総生産費用が最小のものを出力して終了する。

上記手続きのステップ 2 では，目標在庫水準 A, C の値を照準値に向けて絞り込んでおり，A, C の値が照準値に等しくない間は繰り返しとともに必ず照準値に近づいていくため，手続きは有限回で停止する。ただし，非常に多くの繰り返しを要する可能性もあるため，ステップ 3 において，繰り返し数に上限を設けている。なお，目標在庫水準の初期値によっては，ステップ 1 において実行可能な計画が得られない可能性がある。このような場合には手続きを終了させ，新たな初期値を与えて再実行させる必要がある。

3.4　数値計算例

本節では 2 つの数値計算例によって，提案したヒューリスティック解法の特徴，すなわち，

- 最適解にどれだけ近い解を生成できるか (解の精度)
- 入力データとして与える目標在庫水準 A, C の初期値ならびに照準値と，得られる解の精度がどのように関係しているか (初期値への依存性)
- 何回の繰り返し計算を必要とするか (収束の速さ)

を明らかにする。

解の精度を調べるためには最適解を求めなければならないが，前述のごとく定式化した問題を最適に解くことが困難であることより，次に述べる完全列挙法によって最適解を求めた。まず最適な最小ならびに最大目標在庫水準 A, C が存在すると想定される区間を設定し，その区間内を一定の離散値に区切った。これにより問題は A, C と X_{nt}, Y_{mn} の選択問題となるため，可能な組合せすべてを列挙することで最も低費用な最適解を見つけた[3]。

数値計算は以下の手順で行った。まず目的関数ならびにシステム制約をもとに，妥当と思われる 10 個の照準値を準備した。一方，目標在庫水準 A, C の初期値は乱数を用いて決定することとし，乱数を発生させる区間を決定した。それから A, C の初期値を

[3]完全列挙法を用いるにあたっては，最小ならびに最大目標在庫水準の最適値が存在する区間を仮定している。したがって完全列挙法により得られる最適解は仮定した区間内においてのみ保証されるものであり，対象とする問題に対する真の最適解であるという保証はない。この意味では本文中の最適解という言葉は正しくないが，2 つの数値計算例においては目標在庫水準の最適値が存在すると仮定した区域を広く取っているため，この区間外に最適値が存在する可能性はないと判断して，最適解という言葉を用いた。

生成してヒューリスティック解法に与え，最良解を求めて最適解と比較するという手続きを各照準値ごとに 100 回行った。100 回の中で最良解が最適解に一致した回数，最小ならびに最大目的関数値と平均目的関数値を各照準値ごとに整理することで初期値への依存性を検討した。また最適解が得られた場合に対して，ヒューリステリィック解法が必要とした繰り返し計算回数を調べることで収束の速さを検討した。なお繰り返し回数の上限はすべて 30 回に設定した。

取りあげた 2 つの計算例のうち，前者は本章の研究の動機付けとなった Oliff と Leong の論文[68] で取りあげられているグラスファイバー製造会社の例であり，後者は生産計画問題においてしばしば例題に取りあげられる塗料製造会社のデータ[44] である。塗料製造会社のデータを取りあげた理由は，提案したヒューリスティック解法が非線形費用関数に対しても効果的に適用できることを示すことにある。

3.4.1 グラスファイバー製造会社の例

グラスファイバー製品を生産している Owens-Corning Fiberglas 社のある工場では，2 つの独立したラインによって補強品を生産している[16],[67]–[69]。月産量はシフト数に依存しており，選択可能な生産水準 (月産量) とそれに対応した労働力量 (シフト数) は表 3.1 に示すとおりである。残念ながら文献[68] には数値計算に用いた費用係数が明示されていないため，ここでは，文献[69] の数値計算例を参考に式 (3.24) に示す目的関数を作成した。

$$\begin{aligned}\text{Minimize}\quad \sum_{t=1}^{12}(&1851W_{1,t} + 1407.8H_{1,t} + 653.2L_{1,t} + \\ &1893W_{2,t} + 1407.8H_{2,t} + 653.2L_{2,t} + 0.0064I_t)\end{aligned} \tag{3.24}$$

ここに変数 $W_{1,t}, W_{2,t}, H_{1,t}, H_{2,t}, L_{1,t}, L_{2,t}$ の添字の 1 ならびに 2 は，それぞれライン 1 ならびにライン 2 に対する変数であることを意味する。また，各期末在庫水準は常に 900,000 ポンド以上でなければならないというシステム制約が存在するものとした[69]。

最適解を求めるにあたっては，区間 [800 000, 2 000 000] 内に最適な最小ならびに最大目標在庫水準が存在すると仮定し，1,000 ポンドごとの離散値に区切って完全列挙法により求めた。その結果，最適解の総生産費用は 1,047,698 ドルであることがわかった。

またこの例に対しては，3.2節で定式化した混合整数計画問題から最適解を求めることも試みた。問題の特徴を保ちつつ限定効率を高めるために，以下の制約式 (3.25) を追加した混合整数計画問題を作成した。ここに式 (3.25) の 4 番目の式は，生産水準と

表 3.1　選択可能な生産水準と労働力量

m	生産水準 p_m 月産量 (ポンド)	労働力量 w_m ライン 1	ライン 2
1	1,796,000	44(4)	15(3)
2	1,679,000	44(4)	10(2)
3	1,571,000	44(4)	5(1)
4	1,405,000	33(3)	15(3)
5	1,288,000	33(3)	10(2)
6	1,180,000	33(3)	5(1)

注：( ) 内の数値はシフト数を表す

労働力量の間に線形性を仮定して求めた近似式である。この問題を HITAC M680H 上の数理計画パッケージ MPS/MIP に入力したところ，すべての整数制約を緩和したときの最適目的関数値は 994,548 ドルであり，60CPU 秒の計算時間内で得られた実行可能最良解の目的関数値は 1,161,481 ドルであった。

$$\left.\begin{aligned} &33 \le W_{1,t} \le 44 \\ &5 \le W_{2,t} \le 15 \\ &1,180,000 \le P_t \le 1,796,000 \\ &35,500W_{1,t} + 22,500W_{2,t} - P_t \ge 103,500 \end{aligned}\right\} \qquad t = 1,\dots,12 \tag{3.25}$$

在庫水準に下限値を設定したため，ヒューリスティック解法を適用するにあたっての照準値は 900,000 から 990,000 まで 10,000 ポンド刻みに設定し，目標在庫水準の初期値は区間 [800 000, 2 000 000] 内から引き出すこととした。

表 3.2はヒューリスティック解法で得られた最良解を示しているが，この最良解は完全列挙法から得られた最適解に一致している。なお表下段に示した目標在庫水準 A, C の値は代表値 (最良解が得られたときのステップ 1 での A, Cの値) であり，その値の右側括弧内に最適値の存在する範囲を示した。また表 3.3は，100 回の中で最良解が最適解に一致した回数，最小ならびに最大目的関数値と平均目的関数値を，設定した照準値ごとに整理したものである。なお最適解を得るために要した繰り返し回数は平均 11.2 回，最高 20 回であった。

表 3.2 グラスファイバー製造会社の最適生産計画

月	需要量 (ポンド)	生産水準 (ポンド)	在庫水準 (ポンド)	労働力量 ライン 1	労働力量 ライン 2
0			1,306,000	44	5
1	1,190,000	1,180,000	1,296,000	33	5
2	1,280,000	1,180,000	1,196,000	33	5
3	1,408,000	1,180,000	968,000	33	5
4	1,714,000	1,679,000	933,000	44	10
5	1,184,000	1,571,000	1,320,000	44	5
6	1,546,000	1,571,000	1,345,000	44	5
7	1,216,000	1,180,000	1,309,000	33	5
8	1,167,000	1,180,000	1,322,000	33	5
9	1,404,000	1,180,000	1,098,000	33	5
10	1,204,000	1,180,000	1,074,000	33	5
11	1,154,000	1,180,000	1,100,000	33	5
12	1,114,000	1,180,000	1,166,000	33	5

$A = 940,000$ $(933,000 \leq A \leq 968,000)$

$C = 968,000$ $(955,000 \leq C \leq 968,000)$

総生産費用 $1,047,698

表 3.3 グラスファイバー製造会社の問題に対する計算結果

照準値 (ポンド)	最適解の得られた回数 (100 回中)	最小目的関数値	最大目的関数値	平均目的関数値
900,000	0	1,072,097	1,103,949	1,075,856.4
910,000	0	1,072,097	1,103,949	1,077,050.6
920,000	0	1,072,097	1,099,922	1,076,694.7
930,000	0	1,072,097	1,100,391	1,077,849.8
940,000	97	1,047,698	1,067,867	1,048,303.1
950,000	99	1,047,698	1,067,867	1,047,899.7
960,000	100	1,047,698	1,047,698	1,047,698.0
970,000	0	1,072,097	1,099,922	1,076,493.0
980,000	0	1,072,097	1,099,922	1,076,597.6
990,000	0	1,072,097	1,099,922	1,077,011.6

注：目的関数値の単位はドルである。

3.4.2 塗料製造会社の例

第 2 章の 2.4節で取りあげた塗料製造会社は，連続的生産環境にあるものとしていたが，ここでは [生産水準 (ガロン)，労働力量 (人)] で表したとき，[440，75]，[420，72]，[400，70]，[380，68]，[360，65]，[340，63] の 6 つの生産水準のみが選択可能な離散的生産環境にあるものと仮定した。この生産水準は，生産量を 20 ガロンごとに区切りながら，全体としての平均労働生産性がほぼ 5.67 ガロンとなるように，労働者数を決めたものである (文献[60]の 1246 頁参照)。

最適解を求めるにあたっては，最適な最小ならびに最大目標在庫水準が [200, 600] の区間に存在するものと仮定し，1 ガロンごとの離散値に区切って完全列挙法により求めた。その結果，最適解の総生産費用は 297,560 ドルであることがわかった。

目的関数の在庫費用の項が 2 次関数で，320 ガロンのとき最小となることより，ヒューリスティック解法を適用するにあたっての照準値は 270 から 360 までの 10 ガロン刻みに設定した。また目標在庫水準の初期値は区間 [200, 600] から引き出すこととした。

表 3.4 はヒューリスティック解法で得られた最良解を示しているが，この最良解は完全列挙法から得られた最適解に一致している。なお表 3.2と同様に表下段の目標在庫水

表 3.4　塗料製造会社の最適生産計画

月	需要量 (ガロン)	生産水準 (ガロン)	在庫水準 (ガロン)	労働者数 (人)
0			263.00	81.00
1	430	440.00	273.00	75.00
2	447	440.00	266.00	75.00
3	440	440.00	266.00	75.00
4	316	380.00	330.00	68.00
5	397	380.00	313.00	68.00
6	375	380.00	318.00	68.00
7	292	360.00	386.00	65.00
8	458	380.00	308.00	68.00
9	400	380.00	288.00	68.00
10	350	380.00	318.00	68.00
11	284	360.00	394.00	65.00
12	400	360.00	354.00	65.00

$A = 320\ (273 \leq A \leq 347)$

$C = 320\ (311 \leq C \leq 354)$

総生産費用 $297,560

準 A, Cの値は代表値であり括弧内に最適値の存在する区間を示した。また表 3.5は表3.3と同様に各照準値ごとの結果を整理したものである。なお最適解を得るために要した繰り返し回数は平均 4.6 回，最高 7 回であった。

3.4.3　考察

(1) 3.4.1節ならびに 3.4.2節の計算結果より，ヒューリスティック解法は費用関数の線形・非線形にかかわらずその最小化に比較的有効であり，適切な入力データが与えられれば最適解を見つけ出している。

(2) 3.4.1節においては，定式化した混合整数計画問題を 60CPU 秒内に最適に解くこ

表 3.5 塗料製造会社の問題に対する計算結果

照準値 (ガロン)	最適解の得られた回数 (100 回中)	最小目的関数値	最大目的関数値	平均目的関数値
270	15	297,560	302,205.9	299,040.9
280	71	297,560	302,205.9	298,215.3
290	68	297,560	302,205.9	298,212.7
300	68	297,560	302,205.9	298,186.6
310	99	297,560	299,097.0	297,575.4
320	98	297,560	302,205.9	297,621.8
330	97	297,560	302,205.9	297,637.2
340	96	297,560	302,205.9	297,714.8
350	96	297,560	302,205.9	297,714.8
360	2	297,560	306,881,3	299,265.5

注：目的関数値の単位はドルである。

とはできなかった。さらにこの時間内に得られた最良実行可能解は最適解よりも10.8%費用高であった。このことは，定式化した混合整数計画問題の解きにくさを裏付けているといえよう。しかしながら，整数制約を緩和して得られる線形計画問題の最適目的関数値は，ヒューリスティック解法によって得られる解の評価に利用できる可能性がある。たとえば，3.4.1節では緩和問題の最適目的関数値が994,548 ドルであることから，ヒューリスティック解法によって得られた最良解の目的関数値 1,047,698 ドルは，最悪でも最適値より 5.3%費用高であることがわかる。数値計算例では完全列挙法によって解の精度を検討したが，問題設定によっては定式化した混合整数計画問題を用いることも効果的であろう。ただしこの場合，3.2節で定式化した問題をそのまま用いたのでは，生産水準と労働力量が直接的に関係付けられていないために，下界値が最適値と大きくかけ離れてしまう危険性がある。そのため，問題の特徴を細かく検討して問題の性質を変えることなく実行可能領域をできるだけ狭くすることで，下界値の精度を上げる必要がある。

(3) 表 3.3ならびに表 3.5より，ヒューリスティック解法の解の精度は入力データとし

て与えられる照準値に大きく依存するが，目標在庫水準の初期値にはあまり影響されない傾向が見られる。たとえば，表 3.3において，照準値を 900,000 ポンドとした場合，100 組のランダムに与えられた目標在庫水準の初期値に対して最適解は 1 回も得られていないが，照準値を 960,000 ポンドとした場合，目標在庫水準の初期値に影響を受けることなく，すべての場合において最適解を見いだしている。照準値と最適解の得られた回数，ならびに最適な目標在庫水準の区間を図 3.1と図 3.2に整理して検討してみると，適切な照準値は 3.4.1節のグラスファイバー製造会社の例では 940,000〜960,000 ポンド，3.4.2節の塗料製造会社の例では 310〜350 ガロンと思われるが，これらの範囲はそれぞれ最適解を与える最小ならびに最大目標在庫水準の共通領域を含んでいる。グラスファイバー製造会社の例における共通領域の照準値は 960,000 ポンドで，この設定においては 100 回とも最適解が得られている。一方，塗料製造会社の例における共通領域の照準値は 320〜340 ガロンで，最適解は 96 回以上得られている。これらの結果より，照準値は最小ならびに最大目標在庫水準の共通領域内の値にすることが望ましいと思われる。しかしながら，この共通領域 (すなわち適切な照準値) は前もってはわからないため，何度かの試行錯誤的な計算が必要となる。この問題点は提案したヒューリスティック解法における 1 つの限界であり，今後さらなる検討が必要であろう。ただし，照準値が適切な区間から外れていても総生産費用はさほど増加しておらず，最悪の場合を取りあげても，表 3.3では最適値の 5.4%高，表 3.5では 3.1%高にとどまっている。それゆえ近似最適解で十分な場合には，照準値の設定にさほど多くの試行錯誤は要しないと思われる。

(4) 表 3.5を見ると，適切な照準値が与えられた場合においても最適解の得られない場合のあることがわかる。たとえば，照準値を 320 ガロンとしたとき，100 回中 2 回の結果が最適解と異なっていたことを示している。このように，適切な照準値が与えられたにもかかわらず最適解が得られなかった場合の結果について詳細に検討したところ，ほとんどの場合において目標在庫水準 A, Cの初期値がともに最適区間値よりも小さく，最適な区間に到達する前に，局所的な最良解で手続きが終了していることがわかった。このことより，最小目標在庫水準の初期値は，想定される最適値よりも小さめに設定し，逆に最大目標在庫水準の初期値は想定される最適値よりも大きめに設定することが望ましいと考えられる。

(5) ヒューリスティック解法が必要とした繰り返し回数は，グラスファイバー製造会

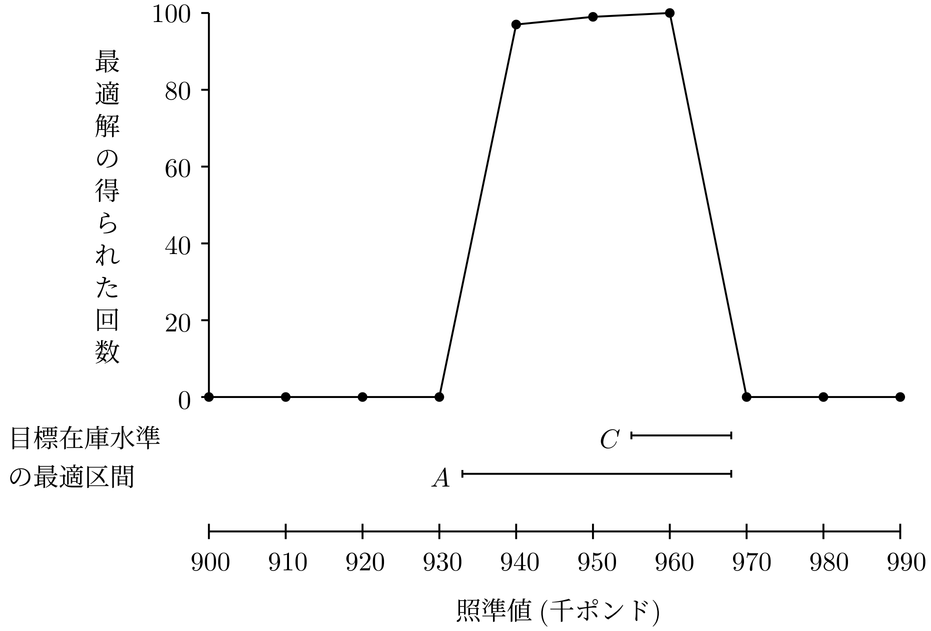

図 3.1　グラスファイバー製造会社の問題の計算結果と目標在庫水準の関係

社の問題で平均 11.2 回，最大 20 回，塗料製造会社の問題では平均 4.6 回，最大 7 回であり，前者については必ずしも収束が速いとは言えないが，後者の塗料製造会社の問題の収束は速く，提案したヒューリスティック解法の収束速度は全体的には許容範囲内であると思われる。

3.5　結言

本章では生産スイッチング規則を用いるにあたって問題となる生産水準選択と目標在庫水準決定に焦点をあて，最適解を求めるための混合整数計画問題を定式化するとともに，問題の特徴を生かした 1 つのヒューリスティック解法を提案した。定式化した混合整数計画問題は最適に解きにくい構造をしているが，整数制約を緩和することによって得られる最適解の下界値は，ヒューリスティック解法による解の精度の検討に役立つものと期待される。またヒューリスティック解法は，適切な照準値が与えられれば，目標在庫水準の初期値にあまり影響されることなく最適解を比較的効率よく見いだすことが確かめられた。ただし，適切な照準値の決定には試行錯誤的な計算が必要

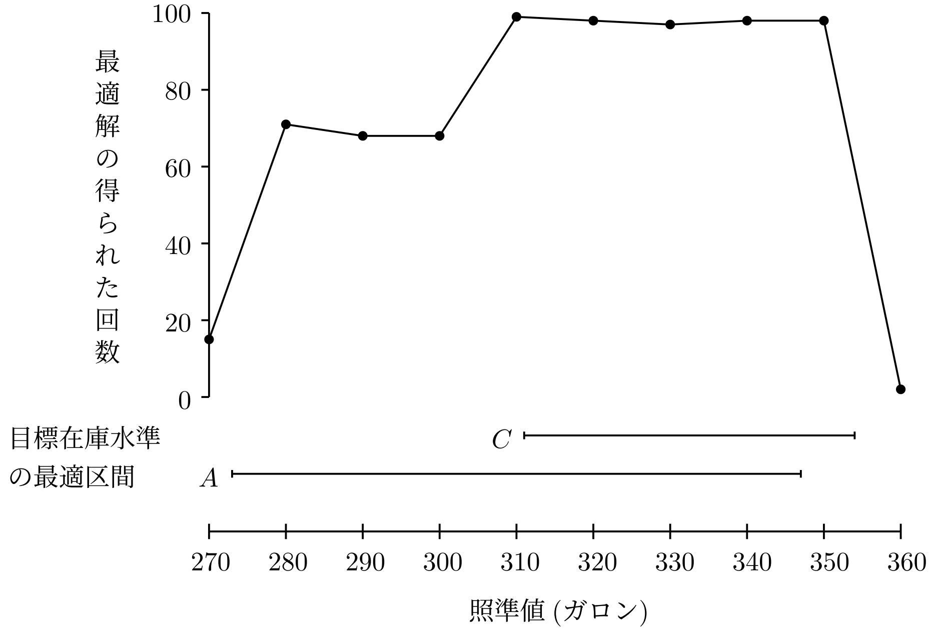

図 3.2 塗料製造会社の問題の計算結果と目標在庫水準の関係

とされるため，今後は系統的な方法を検討しなければならない。

本章ではスイッチングの生産水準数 Nが 3 の場合について議論してきた。提案したヒューリスティック解法を $N > 3$ に拡張することは簡単であるが，混合整数計画問題を $N > 3$ に拡張するためには新たな整数変数の導入が必要となり，最適解を得ることがますます困難になるものと予想される。しかしながら，混合整数計画問題の近似最適解を求めることができれば，ヒューリスティック解法による解の精度の検討に利用できるのみならず，照準値の決定にも役立つものと思われる。今後は定式化した混合整数計画問題の近似最適解を効率よく求めうる解法の開発が必要とされる。

第 4 章

段取費用を考慮したロットサイズ計画問題

4.1　緒言

通常，1 つの工程で段取替えしながら複数種類の製品を生産するときには，生産品種切り替え時の工程停止をできるだけ短時間にすることが重要であり，多くの企業で短縮化の努力がなされている。たとえばプレス加工工程などでは，内段取時間が 3〜5 分程度と，ロットサイズ計画レベルでは段取時間が無視できるところまで改善がなされているところもある。しかしながら，段取替え後の製品にしばらくは品質上の問題がでやすいとか，外段取作業に対する費用が無視できないなどで，段取費用を考慮に入れる必要がある場合も少なくない。本章ではこのように段取替えしながら多品種の製品を生産している単一工程において，段取時間は十分短いが，段取費用が無視できない状況における多期間ロットサイズ計画問題を議論する。計画期間中に当該工程に割り当てられた作業者数は，上位レベルの生産能力計画によって与えられたものとし，労働者数の増減による生産能力の増減は認められず，必要に応じて残業生産のみが計画可能で，計画可能な残業時間には上限があるものとする。また，生産リードタイムはすべての製品とも単位計画期の長さに比べて十分短く，考慮する必要はないものとする。

本章ではこのようなロットサイズ計画問題を混合整数計画問題に定式化し，その近似最適解をラグランジュ緩和法により求める方法を提案する。このアプローチは Graves (1982)[39] が製品の階層構造に基づく階層的生産計画問題に対して提案した解法を踏襲しているが，ラグランジュ乗数の更新手続きならびに得られた計画に対するヒューリスティックな改善手続きに更なる検討を加えている。また，問題に冗長な制約式を導入した後に緩和を行う方法を用いるが，このような方法は同様の対象問題に対してラグランジュ緩和法を用いている他の研究には見当たらない。種々の条件設定の下で数値計算を行い，提案した解法の有効性を検討する。

4.2　ロットサイズ計画問題の定式化

製品種類数を N，計画期間数を Tとするとき，第 1 期から T期までの各期 t の各製品 i $(i = 1, \ldots, N)$ の需要を満足しながら，計画期間中の在庫費用，段取費用，残業費用の和を最小にする生産計画を求める問題は，以下のような混合整数計画問題 (P) に定式化できる。

(P)

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{N} h_{it}I_{it} + \sum_{i=1}^{N} s_{it}X_{it} + c_tO_t\right) \tag{4.1}$$

subject to

$$I_{i,t-1} + P_{it} - I_{it} = d_{it} \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} r_iP_{it} - O_t \leq (rm)_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{4.3}$$

$$O_t \leq (om)_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{4.4}$$

$$P_{it} - m_{it}X_{it} \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \tag{4.5}$$

$$P_{it}, I_{it}, O_t \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \tag{4.6}$$

$$X_{it} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \tag{4.7}$$

ここに添字 i は製品番号，t は計画期を表す。入力データならびに決定変数の意味するところは以下のとおりである。

＜入力データ＞

h_{it} : t 期での製品 i の単位在庫費用

s_{it} : t 期での製品 i の段取費用

c_t : t 期での単位残業費用

d_{it} : t 期での製品 i の需要量

r_i : 単位当たりの製品 i の必要生産時間

$(rm)_t$: t 期に利用可能な定時生産時間

$(om)_t$: t 期に利用可能な残業生産時間

m_{it} : t 期での製品 i の最大生産量 $(m_{it} = \sum_{\tau=t}^{T} d_{i\tau})$

＜決定変数＞

P_{it} : t 期での製品 i の生産量 (ロットサイズ)

I_{it} : t 期末の製品 i の在庫量

O_t : t 期での残業時間

X_{it} : 0-1 変数であり，t 期に製品 i を生産するときのみ 1 の値を取る段取変数

目的関数 (4.1) は計画期間中の在庫費用，段取費用，残業費用の和の最小化を要求している。式 (4.2) は生産量・在庫量・需要量の平衡式を表し，式 (4.3) と (4.4) は各期の総生産時間が定時生産時間と残業生産時間の上限を越えられないことを示している。式 (4.5) は生産量 P_{it}と段取変数 X_{it}の関係を与えている。式 (4.6) と (4.7) は決定変数の非負制約ならびに 0-1 制約である。なお，初期在庫はすでに需要に引当て済みであるものとする[4]。

4.3 解法

4.3.1 ラグランジュ緩和による問題の分割

先に定式化した問題 (P) は混合整数計画問題であり，現実的規模問題の厳密な最適解を求めることはほぼ不可能であろう。そこで本研究では問題 (P) のラグランジュ緩和問題を繰り返し的に解きながら，(P) の近似最適解を見つける手続きを提案する。このときラグランジュ緩和問題は問題 (P) の最適目的関数値の下界値を与えるのみならず，問題 (P) の実行可能解も出力し，その実行可能解は (P) の最適目的関数値の上界値を与える。このラグランジュ緩和法が対象とする問題に対してどの程度有効であるかを理論的に議論することは困難であるが，類似した問題を取り扱っている Graves の研究[39]では優れた計算結果が示されているため，1 つの有望なアプローチであると思われる。

問題 (P) はそのままでは取り扱いにくいため，生産時間計画問題と，能力制約のないロットサイズ計画問題の 2 つに分割しやすいように，以下の問題 (EP) へと表現し直す。

(EP)

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{N} h_{it} I_{it} + \sum_{i=1}^{N} s_{it}\overline{X}_{it} + c_t O_t\right) \tag{4.1$'$}$$

[4]第 1 期の需要量から初期在庫量分を差し引き，0 期末在庫量を零とすることを意味する。もし初期在庫量が 1 期の需要量よりも多い場合には，さらに 2 期以降の需要に対して同様の処理を行う。

subject to

$$I_{i,t-1} + P_{it} - I_{it} = d_{it} \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \quad (4.2)$$

$$\overline{I}_{i,t-1} + \overline{P}_{it} - \overline{I}_{it} = d_{it} \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \quad (4.2')$$

$$\sum_{i=1}^{N} r_i P_{it} - O_t \leq (rm)_t \qquad t = 1, \ldots, T \quad (4.3)$$

$$O_t \leq (om)_t \qquad t = 1, \ldots, T \quad (4.4)$$

$$\overline{P}_{it} - m_{it}\overline{X}_{it} \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \quad (4.5')$$

$$P_{it}, I_{it}, O_t \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \quad (4.6)$$

$$\overline{P}_{it}, \overline{I}_{it} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \quad (4.6')$$

$$\overline{X}_{it} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \quad (4.7')$$

$$\overline{I}_{it} - I_{it} = 0 \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \quad (4.8)$$

ここに決定変数の意味するところは上線の有無にかかわらず以前の定義と同一であるが，生産時間計画問題に対する決定変数には上線を付しておらず，能力制約のないロットサイズ計画問題のそれには上線を付している。これに伴い一部の式を若干変更し，式番号にアスタリスクを付けて以前の式と区別した。生産時間計画問題は式 (4.2)，(4.3)，(4.4)，(4.6) に該当し，能力制約のないロットサイズ計画問題は式 (4.2′)，(4.5′)，(4.6′)，(4.7′) に該当する。目的関数 (4.1′) は両計画問題より計上される費用の和の最小化を表す。新たに加えた式 (4.8) により，各製品の各期末在庫量が両計画で一致するため，問題 (EP) は (P) と等価であることがわかる。なお，式 (4.1′) の在庫費用の計算には生産時間計画問題の決定変数 I_{it}を用いているが，能力制約のないロットサイズ計画問題の決定変数$\overline{I}_{it}$を用いても，以下の議論は適用可能である。

いま，問題 (EP) の式 (4.8) にラグランジュ乗数$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_{it}\}$ を掛けて目的関数に組み込むと，以下のラグランジュ緩和問題 (RP$_{\boldsymbol{\lambda}}$) が得られる。なお式 (4.8) は等式制約のため，$\boldsymbol{\lambda}$に符号制約はない。

(RP$_{\boldsymbol{\lambda}}$)

$$\text{Minimize} \ \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{N} h_{it} I_{it} + \sum_{i=1}^{N} s_{it} \overline{X}_{it} + c_t O_t \right) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} \lambda_{it} (\overline{I}_{it} - I_{it}) \qquad (4.9)$$

subject to

$$(4.2), (4.2'), (4.3), (4.4), (4.5'), (4.6), (4.6'), (4.7')$$

ラグランジュ乗数に値が与えられれば，問題 (RP$_{\boldsymbol{\lambda}}$) は生産時間計画のための線形計画

問題 (LP) と，能力制約のないロットサイズ計画問題 (LS) に分割することができる。

(LP)

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T}\left\{\sum_{i=1}^{N}(h_{it}-\lambda_{it})I_{it}+c_tO_t\right\} \tag{4.10}$$

subject to

$$(4.2),(4.3),(4.4),(4.6)$$

(LS)

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_{it}\bar{I}_{it}+\sum_{i=1}^{N}s_{it}\overline{X}_{it}\right) \tag{4.11}$$

subject to

$$(4.2'),(4.5'),(4.6'),(4.7')$$

問題 (LP) に対してはシンプレックス法を，また問題 (LS) に対しては各製品ごとに Wagner と Whitin (1958)[80] の動的計画法をそれぞれ用いることで，簡単に最適解を求めることができる。さらに，問題 (LP) にはすべての生産時間制約が組み込まれているため，この解は必ず問題 (P) の実行可能解となる。逆に，もし問題 (LP) が実行可能解をもたなければ，(P) も実行可能解をもたないことは明らかである。したがって，以下では一般性を失うことなく，問題 (P) が実行可能解をもつと仮定する。

なお，問題の緩和にあたっては，問題 (P) の式 (4.3) にラグランジュ乗数を掛けて目的関数に組み入れる方法もあり，本研究でも第 6 章においてこのような緩和法を用いている。しかしながらこの場合，緩和された問題は生産時間制約を直接的には考慮しないため，緩和問題の解を実行可能な計画へと変更する手順が重要となってくる。そこで本章では，生産時間制約を明示的に考慮するように問題を緩和することで，緩和問題から必ず実行可能な計画の得られる方法を採用した。

4.3.2 ラグランジュ双対問題の解法

問題 (EP) のラグランジュ双対問題 (D) は以下で与えられる。

(D)

$$\text{Maximize} \quad v(\mathrm{RP}_{\boldsymbol{\lambda}}) \tag{4.12}$$

ここに記号 $v(\cdot)$ は問題 $(\cdot)$ の最適目的関数値を表す。双対問題 (D) の目的関数値は，問題 (P) の最適目的関数値の下界値を与えるため[36]，現在の解がどの程度良いかを判断するうえで有益である。

問題 (D) の解法には，一般に次のような繰り返し的手続きがとられる[8],[39]。

ステップ 1：　ラグランジュ乗数の初期値$\boldsymbol{\lambda}^0$を与える。$k=0$ とおく。

ステップ 2：　与えられた$\boldsymbol{\lambda}^k$に対して，問題 (LP)，(LS) を解く。

ステップ 3：　現在得られている実行可能解の総生産費用と問題 (D) の目的関数の最大値との差が，あらかじめ設定した許容値以内であるか，あるいは規定の繰り返し回数となったならば終了する。それ以外はステップ 4 に移る。

ステップ 4：　新しいラグランジュ乗数値$\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$を生成する。$k=k+1$ とおいてステップ 2 へ返る。

ここで，ステップ 3 における終了条件について補足する。先にも述べたように，$v(\mathrm{D})$ は $v(\mathrm{P})$ の下界値となる。一方，問題 (LP) は常に (P) の実行可能解を生成するため，その解を問題 (P) の目的関数に代入して得られる総生産費用は $v(\mathrm{P})$ の上界値となる。もし，この上界値と下界値の差が実用上問題のない程度 (例えば数パーセントの差) となれば，その時点で計算を打ち切り，問題 (LP) の解を近似最適解として採用すればよい。しかしながら，上界値と下界値の差が所定の許容値内に収まる保証はないため，規定の繰り返し回数に達した時点で繰り返し計算を打ち切る。

次に，ステップ 4 でのラグランジュ乗数の更新手続きであるが，ここでは以下のようなサブ勾配法[43] を用いる。あるラグランジュ乗数$\boldsymbol{\lambda}$に対する $v(\mathrm{RP}_{\boldsymbol{\lambda}})$ のサブ勾配$\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_{it}\}$ は

$$\gamma_{it}=\overline{I}_{it}-I_{it} \tag{4.13}$$

である。サブ勾配法は，第 k回目のラグランジュ乗数$\boldsymbol{\lambda}^k$と，そのときのサブ勾配$\boldsymbol{\gamma}^k$をもとに，第 $k+1$ 回目の$\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$を次式のごとく，サブ勾配の方向に更新するものである。

$$\boldsymbol{\lambda}^{k+1}=\boldsymbol{\lambda}^k+\alpha^k\boldsymbol{\gamma}^k \tag{4.14}$$

ここにα^kはステップサイズと呼ばれるスカラー値である。Graves[39] はステップサイズの決定法として，あらかじめ予備実験により適切な値 (例えば，$k=1,\ldots,10$ では $\alpha^k=1$，$k=11,\ldots,20$ では$\alpha^k=0.5$ など) を見つけて用いたと述べている。しかしな

がら適切なステップサイズ値は問題設定によって変わりうるし，しかも予備実験自体が試行錯誤的な性格をもつため，適切な値を求めるためには大変な手数がかかる。そこで，ここでは Held ら (1974)[43] の方法を踏襲し，式 (4.15) を用いてステップサイズを決定することにする。

$$\alpha^k = \beta^k \frac{\hat{v} - v(\mathrm{RP}_{\boldsymbol{\lambda}^k})}{|\boldsymbol{\gamma}^k|^2} \tag{4.15}$$

ここに記号 $|\cdot|$ はユークリッド・ノルムを表す。$\hat{v}$は $v\left(\mathrm{RP}_{\boldsymbol{\lambda}}\right)$の上界値，$\beta^k$は定数であり，それぞれ以下のように設定した。

問題$\left(\mathrm{RP}_{\boldsymbol{\lambda}}\right)$の上界値を各問題設定ごとにあらかじめ求めることは大変であるため，初期情報をあらかじめ与えることなく計算できる次のような手続きを用いた。ステップサイズの計算を行う時点では，すでに問題 (LP) と (LS) が解かれている。問題 (LP) の解より $v(\mathrm{P})$ の上界値が得られることはすでに述べたが，明らかにこの上界値は$\left(\mathrm{RP}_{\boldsymbol{\lambda}}\right)$の上界値よりも大きいため，当該繰り返し計算までに得られている最小の上界値を$\hat{v}$として採用できる。また，問題 (LS) は生産時間制約を考慮していないため，その解は必ずしも (P) の実行可能解とはならないが，生産時間制約が緩ければ (LS) の解もさほど (P) の生産時間制約に違反しないため，利用可能な残業生産時間の上限がないものとして (LS) の解より求めた (P) の目的関数値も $v(\mathrm{P})$ の上界値とみなし，これと (LP) より求めた上界値のいずれか小さいものを$\hat{v}$として用いることも可能である。4.5節での数値計算においては後者の方法を採用したが，問題設定によっては，(LP) より得られる上界値のみから$\hat{v}$の値を設定することが必要であろう。

一方，定数β^kの値は次のように設定した。$n = T$(計画期間数) とし，$2n$ 回は$\beta^k = 2$，次の n 回は$\beta^k = 1$，と以下繰り返し回数とβ^kの値をともに (1/2) 倍しながら，繰り返し回数が 3 回以下となるまでこれを続け，それ以降は 3 回ごとにβ^kを (1/2) 倍しながら，繰り返し総数が 60 回となった時点で計算を終了する。

4.4 ヒューリスティックな解の改善手続き

繰り返し計算を行う過程で得られる問題 (LS) の解が，必ずしも (P) の生産時間制約を満足しないことはすでに述べた。しかしながら，(LS) の解を単にラグランジュ乗数の更新 (と場合によってはステップサイズの計算) だけに用いるのでは，その潜在的な利用価値が充分に生かされているとは言えないであろう。実際，(LS) の解を若干修正すれば，生産時間制約を満足し，かつ (LP) の解よりも低費用な計画となる場合のある

ことが予備数値計算で確かめられた。そこで，各繰り返しごとの問題 (LS) の解の総生産費用を，利用可能な残業生産時間の上限がないものとして算出し，規定の繰り返し回数の中で最小の総生産費用となった解に，以下のヒューリスティックな解の改善手続きを適用した。

ステップ 1： $t=1$ とし，ステップ 2 に移る。

ステップ 2： t 期に残業生産を計画しているならばステップ 3 に移る。そうでなければステップ 5 に移る。

ステップ 3： t 期に生産しており，かつ t 期末に繰り越し在庫のある製品 i に対し，t 期での生産量を減らし，次に製品 i を生産する期 t''までに定時生産時間に余裕のある期 t'でその残りを生産することで費用削減となる計画変更を見つける ($t<t'<t''$)。ここで移動させる製品 i の生産量は，t'期から $(t''-1)$ 期の需要量の和か，t 期での生産量のいずれか小さい値である。最も費用削減となる計画を採用してステップ 2 に返る。もし，費用削減となる計画変更が見つからなければ，t 期の残業生産時間が t 期で利用可能な残業生産時間を越えていないか調べる。もし超過していればステップ 4 に移る。超過していなければステップ 6 に移る。

ステップ 4： t 期に生産しており，かつ，t 期末に繰り越し在庫のある製品 i に対し，t 期の生産量を当該期の需要を満足するために必要な最小量に減らし，残りを次期に生産する計画へと変更したとき，最も費用増分の小さい生産計画の変更を見つけ，その計画を採用してステップ 2 に返る。もし t 期に生産している製品のすべてが t 期末に繰り越し在庫をもたなければ，実行可能解が得られないことを示して手続きを終了する。

ステップ 5： t 期に生産している製品 i に対し，もし製品 i を生産している次の期 t''が残業生産を計画しているならば，t''期での生産量の一部ないし全部を t 期に移動させることで費用削減ができないか調べる。ここでの製品 i の移動量は，

(1) t 期での定時生産時間の余裕時間で生産できる量
(2) t''期において残業生産を必要としなくなる量
(3) t''期での生産量

の 3 つの中で最も小さい値である。もし費用削減が可能であれば最も費用削減となる計画を採用してステップ 2 に返る。費用削減となる計画変更が見つからなけ

ればステップ 6 に移る。

ステップ 6： $t = t + 1$ とし，$t < T$ ならばステップ 2 に返る。そうでなければ現在の計画を出力して手続きを終了する。

ステップ 4 は実行可能解を求めるための手続きであり，ステップ 3 とステップ 5 は，現在の計画における残業生産時間を減らすことで，より低費用な計画を求めようとする手続きである。なお，上述のステップにおける費用削減 (ないし費用増加) の計算方法は，在庫費用，段取費用，残業費用を単純に加減するもので，ステップ 3 での製品 i を例に挙げれば，t 期の生産量の一部 (ないし全部) を t' 期に移すことで増加する費用項目は t' 期での段取費用と t' 期での残業費用 (これは零の場合もある)，減少する費用項目は在庫費用と t 期での残業費用，さらに t 期の生産量が零となるのであれば t 期での段取費用である。この増加分と減少分の和が削減される費用となる。

4.5　数値計算例

4.5.1　入力データ

提案した解法がどの程度有効であるかを見るために，Graves[39] の数値計算例を参考にしたうえで，以下の入力データを変化させて数値計算を行った。

- 計画期間数 T：6，9，12 の 3 通り。
- 製品種類数 N：5，10，20 の 3 通り。
- 段取費用 s_{it}：低 (各製品とも [100, 300] からのランダム値) と高 (各製品とも [1000, 1500] からのランダム値) の 2 通り。なお，これらの値は期によらず一定とした。
- 利用可能な定時生産時間 $(rm)_t$ と残業生産時間 $(om)_t$：期当たりの平均負荷 W をもとに，以下のごとく期によらない一定値に設定した。利用可能な定時生産時間 $(rm)_t$ は $0.8W$，$1.0W$，$1.2W$ の 3 通りに設定し，それぞれの場合における利用可能な残業時間 $(om)_t$ を，$0.7W$，$0.5W$，$0.3W$ とした。ただし製品種類数が 20 の場合のみ，$(om)_t$ を $0.5W$，$0.3W$，$0.1W$ と，短かめに設定した。なお期当たりの平均負荷 W は，計画期間数が 12 の場合における期間中の総需要量を負荷 (時間) に換算し，それを 12 で割った値とした。

表 4.1 製品需要の季節変動の係数 (上：変動小，下：変動大)

製品	期											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.8	0.8	0.7	0.5	0.7	1	1	1.2	1.3	1.5	1.2	1.1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1.2	1.3	1.5	1.3	1	0.9	0.7	0.6	0.8
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0.6	0	0	0	0	0	0.8	1.6	3	3	2
2	0.8	0.6	0.3	0	0	0.6	1.2	1.5	2	2	1.5	1.2
3	1.1	1.2	1.3	1.5	3	2.5	1	0	0	0	0	0
4	0.3	0.5	0.6	1	1.2	1.5	2	2.2	1.3	1	0.5	0.2
5	1.5	2	2	1.7	1.5	0.9	0.5	0.5	0	0	0	0.5

- 製品需要 d_{it}：次式を用いて 2 つの系列 (需要変動が小と大) を作成した。

$$d_{it} = \lfloor \phi_i \eta_{it} \rfloor \tag{4.16}$$

ここに記号 $\lfloor\cdot\rfloor$ は小数部分切り捨てを意味し，ϕ_iは製品 i の需要量の上下限値からのランダム値，η_{it}は表 4.1 で与えられる製品 i の t 期での季節変動の係数をそれぞれ表す。製品の需要量の上下限値は，下限値を 5〜30，上限値を 15〜50 の範囲で各製品ごとにあらかじめ設定して用いた。なお，製品種類数が 10 ならびに 20 の場合には，表 4.1 で示した各製品ごとの係数を，それぞれ 2 つないし 4 つの製品に重複しないように割り当てた。

また，実験において固定した入力データの設定は下記のとおりである。なお，いずれの値も期によらず一定値とした。

- 単位当たりの必要生産時間：各製品とも [5, 15] からのランダム値
- 単位在庫費用：各製品とも [5, 16] からのランダム値
- 単位残業費用：10

以上で問題設定総数は 108 通りとなるが，それぞれの設定ごとに初期ラグランジュ乗数を零として提案した手続きを適用し，ラグランジュ双対問題 (D) から得られる (P) の最適目的関数値の下界値と，線形計画問題 (LP) から得られた最良解ないし能力制約のないロットサイズ計画問題 (LS) の解をヒューリスティック手続きにより改善した解のいずれか低費用のもの (費用も含めて以後これを最良実行可能解と呼ぶことにする) を比較した。また，提案した手続きがどの程度良い最良実行可能解を生成するかを見るために，繰り返し計算の終了条件の 1 つである上界値と下界値間の許容差は零に設定した。それゆえ，両計画の各製品の各期末在庫量が完全に一致する場合を除いては規定の繰り返し回数 (60 回) の計算を行った。

4.5.2 計算結果と考察

図 4.1は 108 通りの結果を，最良実行可能解と下界値の差により整理したものであり，これを計画期間数，製品種類数，段取費用，利用可能な生産時間，製品需要変動により整理したものが，それぞれ図 4.2〜図 4.6である。図中では最良実行可能解と下界値の差を最良実行可能解で割った値でもって，両者の差を表している。なお，最良実行可能解と下界値の差が 10%を越えたものが 4 通りあったが，それらの値は 10.1%，11.2%，11.9%，16.0%であり，極端に大きな差ではなかった。

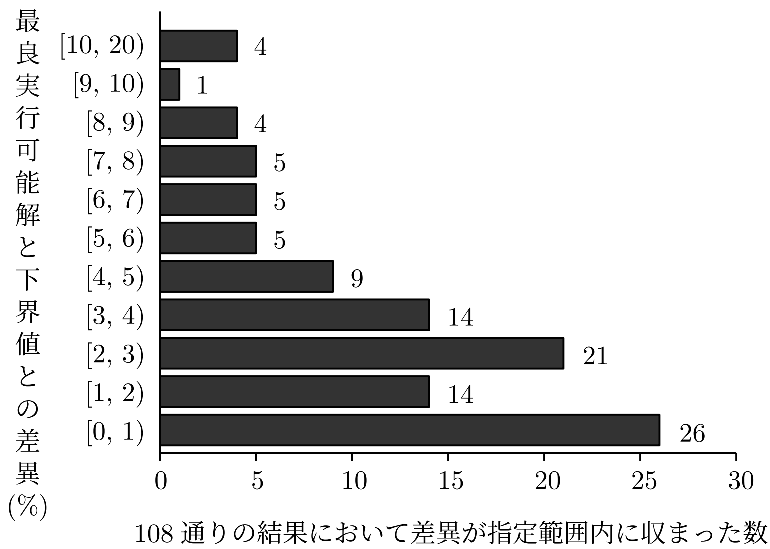

図 4.1 最良実行可能解と下界値の差異

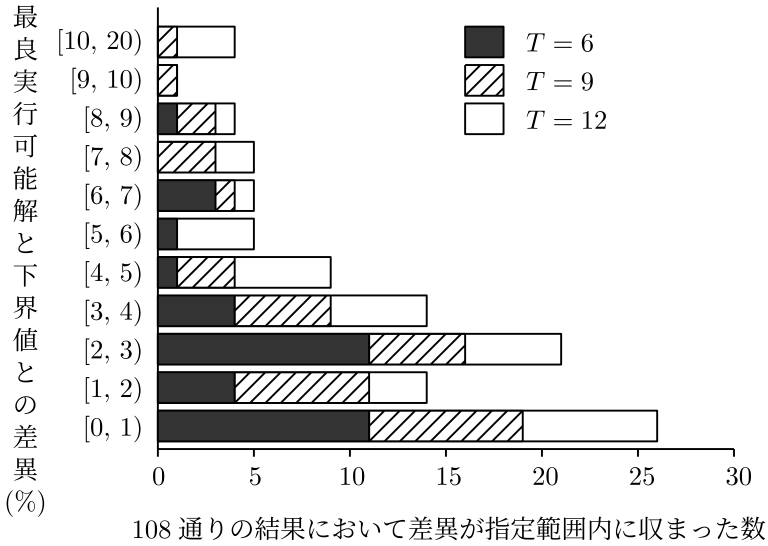

図 4.2 最良実行可能解と下界値の差異 (計画期間数の影響)

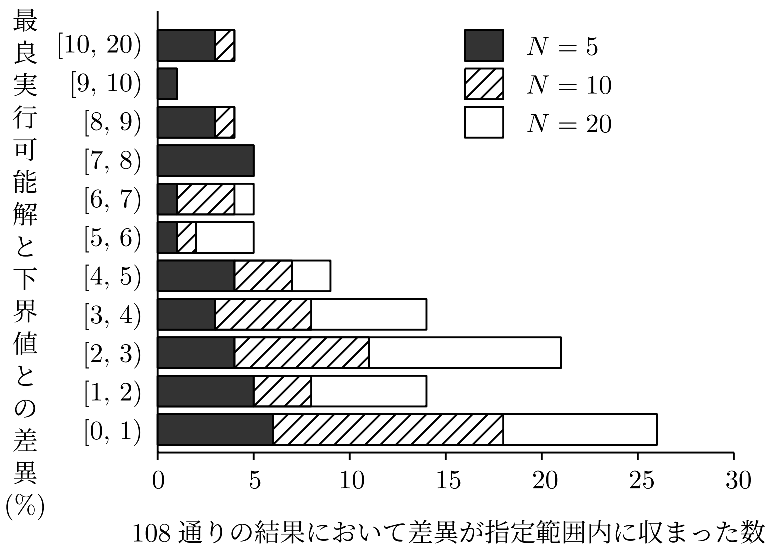

図 4.3 最良実行可能解と下界値の差異 (製品種類数の影響)

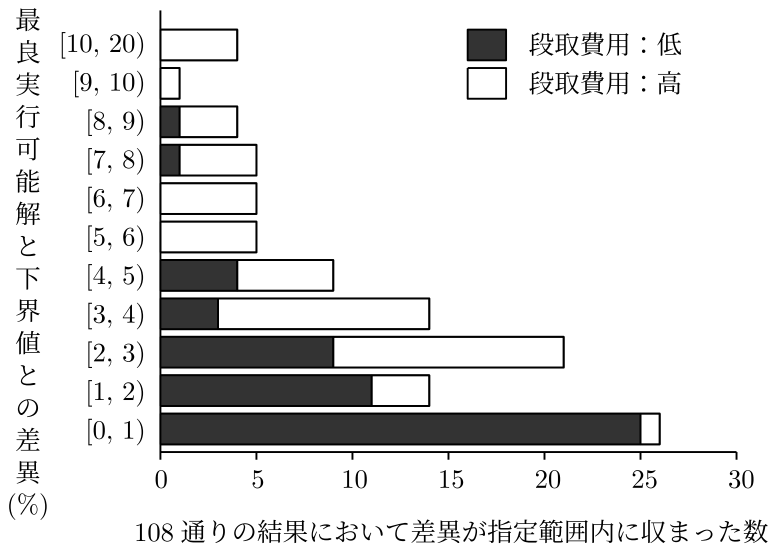

図 4.4 最良実行可能解と下界値の差異 (段取費用の影響)

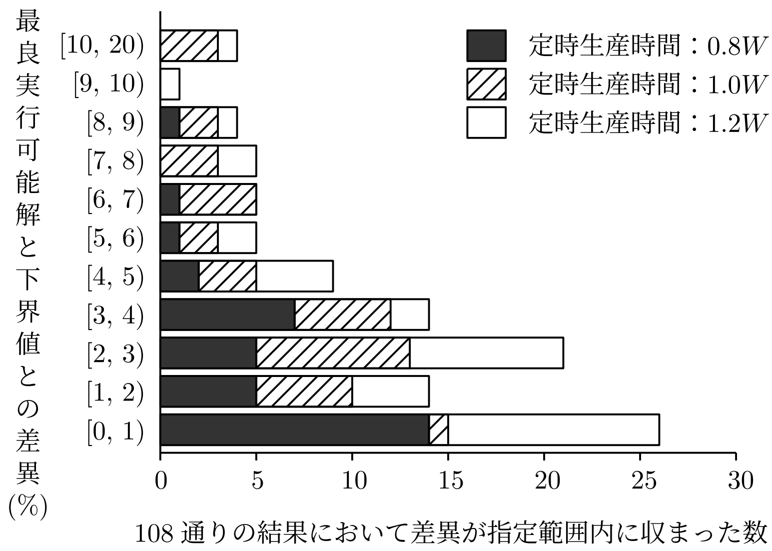

図 4.5 最良実行可能解と下界値の差異 (利用可能な生産時間の影響)

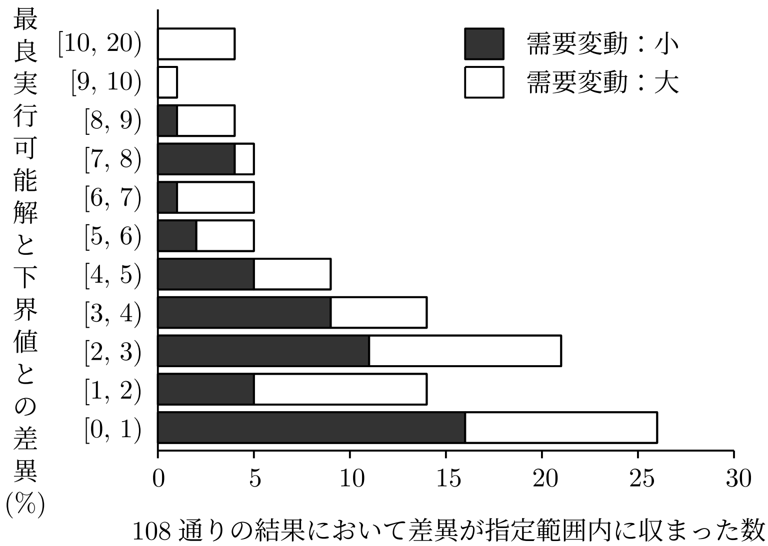

図 4.6 最良実行可能解と下界値の差異 (需要変動の影響)

以上の結果より以下のことがわかる。

(1) 図 4.1 より，約 78%の結果については，最良実行可能解と下界値の差が 5%以内となっており，精度の良い解がかなりよく求められていることがわかる。しかしながら，最良実行可能解と下界値の差が 10%を越える場合もあるなど，解の精度の安定性の観点からは，まだ改善の必要性が残されている。

(2) 図 4.3 より，製品種類数の違いが解の精度とかなり密接に関係していることが読み取れ，製品種類数が多いほど精度が良くなる傾向が見られる。製品種類数が少ない場合に精度が悪くなる傾向が見られる理由としては，個々の段取変数 X_{it}が総生産費用に与える影響が相対的に高くなるために，最適値と異なった場合の差異が大きくなりやすいことが考えられる。

(3) 図 4.4 より，段取費用が低い場合の解の精度がかなり良いことがわかる。なお，製品種類数が多く (10 以上)，段取費用が低い状況下では，解の精度，安定性とも良く，最悪でも最良実行可能解と下界値の差は 4.4%であった。段取費用が低い状況では，段取変数の値が総生産費用に与える影響度も弱まることから，この結果は妥当なものと思われる。

(4) 図 4.5 より，利用可能な定時生産時間がおおよそ需要負荷に等しいときに，解の

精度が悪いことがわかる。このような状況では，ロットサイズの決定を適切に行えば残業生産を必要としない計画の得られる可能性が高いことから，最良実行可能解と下界値の差が大きくなったものと思われる。

(5) 計画期間数の違いが解の精度に与える顕著な影響は特に見られなかった (図 4.2 参照)。また，図 4.6 は需要変動が小さい状況において解の精度が若干良いことを示しているが，この理由はわからなかった。

なお，108 通りの結果の中で，能力制約のないロットサイズ計画問題より得られた最良解に対してヒューリスティックな解の改善手続きを適用したものが最良実行可能解となった場合が 87 通りあった。また，1 通りについてはヒューリスティックな解の改善手続きが実行可能解を生成できなかった。

さらに，最良実行可能解と下界値の差が 10%を越えた 4 つの場合に対しては，ステップサイズの決定手続きのβ^kの設定で用いた n を Tから $2T$に変更し，繰り返しの上限数を 120 に増加させてみたところ，10.1%が 9.9%，11.2%が 5.4%，11.9% が 4.3%，16.0%が 15.0%にそれぞれ改善された。なお，ここでの改善はほとんどが実行可能解の改善によるものであり，下界値は 1%程度しか改善されなかった。これらのことより，繰り返し計算数を増やしても，必ずしも計算時間の増加に見合うだけの効果があるわけではないこと，また，60 回の繰り返し計算の中で得られた下界値は，比較的よい値であることが推測される。

上述のような最良実行可能解と下界値の差異が生じる原因には

(i) 原問題の最適解と最良実行可能解に差がある

(ii) 双対問題の最適解 (すなわち最適下界値) と下界値に差がある

(iii) 双対ギャップがある

の 3 つが挙げられ，混合整数計画問題においてはこれらがすべて非零で混在している場合が一般的である。提案手法によって得られた近似最適解の精度をより細かく検討するためには，本来ならば差異の原因を上記の (i) から (iii) に分けて整理することが必要となるが，残念ながらこのような検討は非常に困難である。

数値計算は Apollo DN3500 ワークステーション (約 4MIPS) 上で行った。提案した手続きに要した計算時間は問題規模 (すなわち，製品種類数 Nと計画期間数 Tの値) により大きく異なった。これは，計算時間の大部分が問題 (LP) を解くために費やされており，(LP) を解く時間が問題規模により大きく異なったことに起因している。最小規

模の問題 ($N=5$, $T=6$) に対しては約 1 分で手続きが終了したが，最大規模の問題 ($N=20$, $T=12$) では約 3 時間を要した。問題 (LP) を解くために用いたライブラリは，標準的な改訂シンプレックス法 (積形式の逆行列を使用) を自らプログラムしたものであるため，問題規模が大きくなるに従って計算時間が急激に増加したが，大規模問題に対する種々の技法を用いている一般的なライブラリ (例えば大型汎用計算機上の MPS など) ではこのような極端な計算時間の増加はないものと思われる。

さて，本章で提案した手続きにおける繰り返し回数の上限数 (60 回) やステップサイズの決定手続き (特にβ^kの設定方法) の妥当性については，その他の方法との比較を行っていないため議論が困難である。しかしながら， 108 通りの計算結果を見た限りでは，1 つの良い方法であると思われる。無論これらよりも優れた方法の存在は否定しえず，より洗練された方法論の確立が今後の課題として残される。

4.6 結言

本章では段取費用を考慮したロットサイズ計画問題に対し，ラグランジュ緩和法を用いたヒューリスティック解法を提案した。問題の緩和にあたっては，緩和された問題においても生産時間制約を明示的に考慮するように問題を冗長な形に表現し直す方法を採用した。これによりロットサイズ計画問題は，生産時間計画問題と能力制約のないロットサイズ計画問題へと分割でき，生産時間計画問題からは原問題の実行可能解が必ず得られる。また，能力制約のないロットサイズ計画問題の解を実行可能な計画へと修正するヒューリスティックな解の改善手続きも提案した。数値計算によって提案した解法の有効性を検討したところ，得られる解の精度は必ずしも安定していないが，約 78%の結果については，総生産費用と下界値の差が 5%以内の最良実行可能解が求まっており，比較的精度の良い近似最適解が得られることが示された。また，問題設定により解の精度や安定性が大きく異なる場合があるが，段取費用が高い設定においても製品種類数が多い場合には精度の良い近似最適解が比較的安定して得られることが示され，このような状況下においては特に優れた近似解法の 1 つであると思われる。

第 5 章

段取時間と段取費用を考慮したロットサイズ計画問題

5.1　緒言

第 4 章においては段取費用のみを考慮したロットサイズ計画問題を議論したが，段取作業に要する時間が無視できない状況も少なくない。たとえば Trigeiro ら (1989)[76] は，段取時間が 3〜12 時間の工程もあることを述べている。そこで本章においては段取時間と段取費用の両者を明示的に考慮したロットサイズ計画問題を取りあげる。この問題は各期で各製品を生産するか否かを決める組合せ問題と，各期の生産量 (ロットサイズ) と残業生産時間を決める線形計画問題の両方の性質を持つため，ここでは前者の組合せ的性質に着目し，組合せ最適化問題に対して有効な手法の 1 つとされているアニーリング (simulated annealing) 法[2],[49] に基づくヒューリスティック手続きを提案する。アニーリング法とは，高温状態の物質を徐々に冷却していくとエネルギーが最小な状態に落ち着くという過程が，最適化問題の目的関数を最小化させていく過程に対応付けできるという考えに基づく，近似最適化手法の 1 つであり，生産計画に関連した諸問題への適用も少なくない[25],[78]。しかしながら，本章で対象とするロットサイズ計画問題への適用はまだ試みられていないようである。

一般的にアニーリング法は長時間の計算を要するが，アルゴリズムが簡単であり，プログラム化も比較的容易なため，ロットサイズ計画問題に対してアニーリング法が精度の高い最良解を安定して見つけ出せるならば，ラグランジュ緩和法などの数理計画法に基づく近似最適化手続きに代わる解法の 1 つとなりうる。しかしながら，解の精度を理論的に論じることは困難であるため，実際にプログラム化を行い，種々の問題設定に対して適用した結果を基に，論述しなければならない。

そこで本章においては，ロットサイズ計画問題に含まれる連続変数の値を段取変数ならびに入力データの値から一意に決定する簡便法を用いることで，ロットサイズ計画問題をアニーリング法の適用可能な組合せ最適化問題へと簡単化する。数値計算例

において，第 4 章で論述した手法を一部変更したラグランジュ緩和法により得られた最良解ならびに下界値と，提案したアニーリング・ヒューリスティックから得られた最良解とを比較し，ヒューリスティック手続きの有効性ならびにロットサイズ計画問題の特徴を検討する。

5.2　ロットサイズ計画問題

5.2.1　定式化

製品種類数を N，計画期間数を T とするロットサイズ計画問題を以下のような混合整数計画問題 (P) に定式化する。

(P)

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{N} h_{it}I_{it} + \sum_{i=1}^{N} s_{it}X_{it} + c_tO_t\right) \tag{5.1}$$

subject to

$$I_{i,t-1} + P_{it} - I_{it} = d_{it} \qquad i=1,\ldots,N; t=1,\ldots,T \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} r_iP_{it} + \sum_{i=1}^{N} a_iX_{it} - O_t \le (rm)_t \qquad t=1,\ldots,T \tag{5.3}$$

$$P_{it} - m_{it}X_{it} \le 0 \qquad i=1,\ldots,N; t=1,\ldots,T \tag{5.4}$$

$$P_{it}, I_{it}, O_t \ge 0 \qquad i=1,\ldots,N; t=1,\ldots,T \tag{5.5}$$

$$X_{it} \in \{0,1\} \qquad i=1,\ldots,N; t=1,\ldots,T \tag{5.6}$$

$$I_{i0} = 0 \qquad i=1,\ldots,N \tag{5.7}$$

$$d_{i1} > 0 \qquad i=1,\ldots,N \tag{5.8}$$

ここに添字 i は製品種類を，t は計画期を表す。入力データならびに決定変数の意味するところは以下のとおりである。

＜入力データ＞

h_{it}：t 期での製品 i の単位在庫費用

s_{it}：t 期での製品 i の段取費用

c_t：t 期での単位当たり残業費用

d_{it}：t 期での製品 i の需要量

r_i：単位当たりの製品 i の必要生産時間

a_i：製品 i の段取時間

$(rm)_t$：t 期に利用可能な定時生産時間

m_{it}：t 期での製品 i の最大生産量 ($m_{it} = \sum_{\tau=t}^{T} d_{i\tau}$)

＜決定変数＞

P_{it}：t 期での製品 i の生産量 (ロットサイズ)

I_{it}：t 期末の製品 i の在庫量

O_t：t 期での残業時間

X_{it}：t 期に製品 i を生産するときのみ 1 の値を取る段取変数

目的関数 (5.1) は，計画期間中の在庫費用，段取費用，残業費用の和の最小化を要求している。制約式 (5.2) は在庫量・生産量・需要量の平衡制約を表し，式 (5.3) は各期での生産時間と段取時間の和が定時ならびに残業生産時間からなることを表している。式 (5.4) は生産量と段取変数の関係を与えており，式 (5.5) ならびに (5.6) は非負ならびに 0-1 制約を表す。式 (5.7) はすべての製品の初期在庫がすでに需要に引当て済みであることを，式 (5.8) はすべての製品の 1 期の需要量が零でないことをそれぞれ要求している。

本章では，問題 (P) において残業生産時間に上限を設けていない。もし残業生産時間に上限があると，この問題に対するヒューリスティック解法の有効性検討において，解の精度のみならず，どの程度安定して実行可能解を見つけることができるかも考慮しなければならない[76]。しかしながら後者についてはまだ有効な検討法がないことから，本章では残業生産時間に上限を設けないことで，実行可能解が必ず存在する問題に対象を限定している。このことは，問題 (P) を生産能力制約のない問題の 1 つとして取り扱うことを意味するが，定時生産時間を超過する生産時間，すなわち残業生産時間に対しては残業費用が発生するため，総生産費用最小化の目的のもとでは，期によって総生産時間が大きくばらつく計画は最適解とはなりにくいため，残業生産時間に上限を設けないことが極度に非現実的とは言えない[85]。

また，制約式 (5.8) は後述するアニーリング・ヒューリスティックにおける候補解の生成方法を簡単化するための仮定である。この制約のもとでは，1 期に段取りをしない計画は実行不可能であり決して最適解の候補とはならない。式 (5.8) が成立しない場合への拡張は，候補解の生成方法を一部変更することで対応可能である。

5.2.2 組合せ最適化問題への簡単化

アニーリング・ヒューリスティックの適用を踏まえ，問題 (P) を以下の方法により組合せ最適化問題に簡単化する。連続変数のうち生産量 P_{it}を決定すれば残りの連続変数の値は一意に定まる。そこで段取変数 X_{it}の値に応じて生産量を式 (5.9) で与えることにする。

$$P_{it} = \begin{cases} 0 & \text{もし } X_{it} = 0 \text{ の場合} \\ \displaystyle\sum_{\tau=t}^{t'-1} d_{i\tau} & \text{もし } X_{it} = 1 \text{ の場合} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \quad (5.9)$$

ここに t'期は t 期以降最初に段取りを行う期であり，仮想的に $X_{i,T+1} = 1, i = 1, \ldots, N$ と設定しているものとする。式 (5.9) は生産量を零か累積需要量に等しくするため，段取りを行う期の期首在庫量は必ず零となる。

なお，段取変数 X_{it}の値が 0 か 1 に定まっているのであれば問題 (P) は線形計画問題となるため，$X_{it} = 0$ に対応する P_{it}が基底に選ばれないような手続きを追加したシンプレックス法を用いることで，与えられた X_{it}のもとでの最適な生産量，在庫量，残業生産時間，そして総生産費用が得られる[5]。しかしながらアニーリング法を用いるにあたっては高速に目的関数値を求める必要があるため，計算の簡単な式 (5.9) を用いることにする。

5.3 アニーリング・ヒューリスティック

5.3.1 アニーリング法の概要

アニーリング法は探索法の 1 つであるが，最小化問題における候補解の目的関数値が現在の解のそれよりも大きな場合でも，これをある確率に基づき新たな解として採用することにより，局所的最小解への収束を避けている点に特徴がある。その基本的手順は以下のとおりである。

ステップ 0： コントロール・パラメータの初期値ω^0と初期解Ψを与え，目的関数値 $f(\Psi)$ を計算する。最良解$\tilde{\Psi}$としてΨを与え，$k = 1$ とする。

ステップ 1： 現在の解を基に 1 つの候補解Ψ^*を生成し，その目的関数値 $f(\Psi^*)$ を計算する。

[5]式 (5.9) は，段取を行う期の期首在庫が必ず零であることを要求しているが，これが必ずしも最適であるとは限らない。繰り越し在庫を持つことで，当該期の総生産時間を短くする方が低費用となる場合もある。シンプレックス法を用いれば，このようなより低費用な計画が得られる可能性がある。

ステップ 2： 目的関数値の変化量$\Delta f = f(\Psi^*) - f(\Psi)$ を求め，

- $\Delta f < 0$ ならば候補解を新しい解として採用する。もし $f(\Psi^*) < f(\tilde{\Psi})$ ならば最良解をΨ^*とする。
- $\Delta f \geq 0$ ならば [0, 1) 乱数ξを選び，$\exp(-\Delta f/\omega^k) > \xi$が成立するときのみ，候補解を新しい解として採用する。

ステップ 3： 定常状態に達したと判定された場合はステップ 4 に移り，まだ達していなければステップ 1 に戻る。

ステップ 4： コントロール・パラメータを式 (5.10) によって更新する。

$$\omega^{k+1} = \alpha\omega^k \quad (0 < \alpha < 1) \tag{5.10}$$

ステップ 5： 基底状態に達した (もう現在の解よりもよい解は見つからないと判定された) ならば最良解$\tilde{\Psi}$を出力して終了する。そうでなければ $k = k + 1$ とおいてステップ 1 に戻る。

5.3.2 ヒューリスティック手続き

アニーリング法を適用するにあたっては，上述の手順の一般的な表現部分を対象問題の特徴などに基づいて具体的に決定しなければならない。本章で用いるヒューリスティック手続きは以下のとおりである。

- 候補解の生成方法：解Ψは段取変数 X_{it}の集合であり X_{it}は 0 か 1 の値を取っているため，候補解はランダムに期と製品を選んで，その段取変数の値を現在の値と逆にすれば容易に生成できる。ただし候補解が実行可能であるためには，1 期に必ず段取りをしなければならないので，期の選択は [2, T] の区間で行う必要がある。すべての製品が 1 期に段取りをする初期解を与えれば，この生成方法により必ず実行可能な候補解が得られる。

  なお，式 (5.8) が成立しない場合には，各製品ごとに最初に需要量が非零となる期κ_iをあらかじめ記録しておき，選択された製品 i と期 t に対する現在の X_{it}の値が 1 で，かつ $t \leq \kappa_i$，さらに $X_{it} = 0$ としたとき，$X_{i,1} = X_{i,2} = \cdots = X_{i,\kappa_i} = 0$ となってしまう場合には，候補解が実行不可能となってしまうため，この候補解を棄却して，新たに製品 i と期 t を選び直せばよい。

- 定常状態判定：Wilhelm と Ward (1987)[82] の方法を踏襲し，次の 2 つの判定方法を採用する。

  (1) エポック (τ) という概念を導入する。エポックとは定常状態を判定する間隔であり，候補解が解として採用された数がエポックの整数倍に達するごとに評価式 (5.11) によって定常状態を判定する。

$$\left|\bar{f}_c - \bar{f}_g\right| / \bar{f}_g \leq \epsilon \tag{5.11}$$

  ここにϵは誤差，$\bar{f}_c$は現在のエポックで得られた目的関数値の平均であり，$\bar{f}_g$は現在のコントロール・パラメータ値において直前のエポックまでで得られた目的関数値の平均である。式 (5.11) は直前のエポック内で得られた目的関数値の平均が，それ以前のエポックまでの目的関数値の平均と十分近い (ϵ 以下の) 状態に達したならば定常状態と判断することを表している。

  (2) 製品 i $(1 \leq i \leq N)$ と期 t $(2 \leq t \leq T)$ のすべての組 (i,t) に対してカウンターを設定し，その値はコントロール・パラメータの値を更新した都度に零とおく。生成した候補解が解として採用されたならば，その時に選ばれていた製品と期の組 (i,t) に対応するカウンターを 1 つ増加させる。もしすべての組に対してカウンターの値がある規定数 (σ) 以上となったならば定常状態に達したと判断する。

  この 2 つの判定条件のどちらかが成立すれば定常状態に達したものとし，コントロール・パラメータを更新させる。しかしながら，コントロール・パラメータの値が小さくなるにしたがって候補解が解として採用されにくくなり，上述の判定条件が成立するまでの計算時間が長くなりやすい。そこで各コントロール・パラメータ値において生成させる候補解の総数 (π) を決めておき，もしこの数に達したならばコントロール・パラメータを更新させるものとする。

- 基底状態判定：上述の定常状態の判定基準 (1)，(2) がいずれも成立せず，候補解の総数が規定数に達したことによりコントロール・パラメータを更新した場合が 5 回連続し，しかもその間，最良解が更新されなかったならば基底状態に達したと判定する。

- 最良解の改善：ステップ 5 で出力される最良解の段取変数値がたとえ最適であっても，式 (5.9) で与えた生産量が最適であるとは限らない。そこで最良解に対し，5.2.2節で述べたシンプレックス法を適用することで最終的な最良解を求める。

5.4 数値計算例

5.4.1 比較解法

アニーリング・ヒューリスティックの最良解がどの程度最適解に近いかを検討するためには最適解が必要となる。しかしながら非常に小規模な問題を除いては，現実的な計算時間内で対象とする問題の最適解を求めることはできない。そこで最適解の代わりにラグランジュ緩和法によって求めた最良解，ならびに最適解の下界値によってヒューリスティック手続きの最良解の精度を検討する。ここで用いたラグランジュ緩和法は第 4 章のアプローチを一部変更したものであるが，その変更部分は付録 B で説明する。

5.4.2 入力データ

入力データは第 4 章の数値計算例を基に作成した。問題を特徴付ける入力データとして以下の 5 つを選定し，それぞれ水準数を 2 ないし 3 とした。なお製品需要を除くその他の入力データは期によらず一定値としている。

- 製品種類数 N ：5, 10, 20 の 3 通り。
- 段取費用 s_{it} ：低 (各製品とも [100, 300] からのランダム値) と高 (各製品とも [1000, 1500] からのランダム値) の 2 通り。
- 段取時間 a_i ：短 (各製品とも [20, 40] からのランダム値) と長 (各製品とも [70, 110] からのランダム値) の 2 通り。
- 利用可能な定時生産時間 $(rm)_t$ ：段取時間が無視できない場合，需要系列が確定していても，段取りのパターンによって必要生産時間が異なってくる。そこで本実験では，需要系列，在庫費用，段取費用より各製品ごとに経済的ロットサイズを求め，そのロットサイズで計画したときに必要な総生産時間を計画期間数 12 で割ってこれを期当たりの平均負荷 W とした。各期の定時生産時間はこの値を用いて，$0.9W$，$1.0W$，$1.1W$ の 3 通りの設定とした。
- 製品需要 d_{it} ：式 (5.12) を用いて変動が小と大の 2 つの系列を作成した。

$$d_{it} = \lfloor \phi_i \eta_{it} \rfloor \tag{5.12}$$

ここに記号 $\lfloor \cdot \rfloor$ は小数部分切り捨てを意味し，ϕ_i は製品 i の需要量の上下限値からのランダム値，η_{it} は第 4 章の表 4.1 で与えられる製品 i の t 期での季節変動の

係数である。製品の需要量の下限値は 5〜30，上限値は 15〜50 とした。また製品種類数が 10 ないし 20 の場合には表 4.1 の係数をそれぞれ 2 つないし 4 つの製品に重複しないように割り当てた。

またすべての実験において固定した入力データは以下のとおりである。

- 計画期間数 T ：12
- 単位当たりの必要生産時間 r_i ：各製品とも [5, 15] からのランダム値
- 単位在庫費用 h_{it} ：各製品とも [5, 16] からのランダム値
- 単位残業費用 c_t ：10

以上で問題設定総数は 72 通りとなる。

一方，アニーリング・ヒューリスティックにおいて用いたパラメータ値は以下のとおりである。これらの値は，予備数値計算によって実験的に求めたものである。

- コントロール・パラメータの初期値 (ω^0) は 100,000。
- コントロール・パラメータの更新における定数 (α) は 0.9。
- エポック (τ) は 100。
- 定常状態判定において，収束誤差 (ϵ) は 0.001，製品と期の組に対する規定数 (σ) は 100。
- 各コントロール・パラメータ値で生成させる候補解の総数 (π) は (製品種類数) $\times$ $(12-1) \times 150$。

また初期解はすべての製品を 1 期のみ段取りする計画とした。

さて，アニーリング・ヒューリスティックを実際にコンピュータ上で実現するにあたっては，候補解の生成ならびに採用決定に乱数が必要となるが，この乱数を発生させる手続きにはシード (初期種) が必要となる。本実験では各設定ごとに 5 回ずつランダムなシードを与えてアニーリング・ヒューリスティックを実行し，その結果の中で最も低費用な解をその設定における最良解として用いた。

5.4.3 計算結果と考察

(1) 得られた解の精度を各要因の水準ごとに整理したものが表 5.1 である。ここに最良解と下界値の差異は，最良解から下界値を引いた値を最良解で割った値で表し

ている。表よりアニーリング・ヒューリスティックとラグランジュ緩和法で解の精度が類似した傾向をもつことが読み取れる。たとえば段取時間が長くなると両手法とも急激に差異が大きくなる傾向を示している。しかしながらアニーリング・ヒューリスティックはいずれの水準においても平均差異が小さく，ラグランジュ緩和法よりも平均的には解の精度がよいことが読み取れる。個々の設定で比較した場合，アニーリング・ヒューリスティックの最良解が劣ったものは 72 通りのうち 17 通りで，最悪でも 6.5% 費用高にとどまった。

(2) ここで採用したアニーリング・ヒューリスティックでは，まず生産量を段取変数値と需要量から一意的に決定して最良解を見つけ，最後にシンプレックス法を適用することで最終的な最良解を求める手続きとしているが，このシンプレックス法による費用削減の有効性を検討した。図 5.1はその結果を示しており，製品種類数が増加するに従って，シンプレックス法適用の効果が弱まっていることが読み取れる。このことから製品種類数が多い場合には，式 (5.9) で与えた生産量がかなりよい近似を与えるものと思われる。これは，製品種類数の増加に伴い，各製品の生産時間の総生産時間に占める割合が減少するため，ロットサイズを若干変更しても，残業生産時間があまり削減されないためと考えられる。

(3) アニーリング法の計算時間は設定の違いのみならず，乱数のシードによってもばらつきが見られたが，製品種類数 5 のとき約 8 分〜15 分，10 のとき約 18 分〜25 分，20 のとき約 30 分〜 50 分であった。一方ラグランジュ緩和法は製品種類数 5 のとき約 15 分，10 のとき約 20 分，20 のとき約 2.5 時間であった。なお使用計算機は Apollo DN3500 (約 4MIPS) である。アニーリング・ヒューリスティックでは乱数のシードを変えて 5 回ずつ実験を行っているため，各設定における総計算時間はアニーリング・ヒューリスティックの方が長くなった。

(4) 本実験では乱数のシードとして異なる 5 つの値を与え，得られた結果の中で最もよい解をその設定における最良解としているが，逆に，5 つの中で最も悪い値となったものに対して下界値との差異を求めたところ平均が 10.07% で，ラグランジュ緩和法の最良解よりも低費用なものは 72 通りの中で 23 通りにすぎなかった。このことは提案したアニーリング・ヒューリスティックの解の精度が乱数のシードに影響を受けやすいことを意味しているといえよう。候補解をより多く生成するようにヒューリスティック手続きを変更すれば，シードによる影響の度合は減少するものと思われるが，予備実験を行った範囲では計算時間の増加に比べ

表 5.1 最良解と下界値の平均差異 (%)

<table>
<tr><th>要因</th><th>水準</th><th>アニーリング・
ヒューリスティック</th><th>ラグランジュ
緩和法</th></tr>
<tr><td rowspan="3">製品
種類数</td><td>5</td><td>7.60</td><td>9.95</td></tr>
<tr><td>10</td><td>6.44</td><td>7.33</td></tr>
<tr><td>20</td><td>8.35</td><td>9.27</td></tr>
<tr><td rowspan="2">段取
費用</td><td>低</td><td>8.90</td><td>10.25</td></tr>
<tr><td>高</td><td>6.03</td><td>7.44</td></tr>
<tr><td rowspan="2">段取
時間</td><td>低</td><td>4.63</td><td>4.95</td></tr>
<tr><td>高</td><td>10.30</td><td>12.75</td></tr>
<tr><td rowspan="3">定時生
産時間
の上限</td><td>$0.9W$</td><td>7.87</td><td>10.02</td></tr>
<tr><td>$1.0W$</td><td>8.53</td><td>9.49</td></tr>
<tr><td>$1.1W$</td><td>6.00</td><td>7.03</td></tr>
<tr><td rowspan="2">需要
変動</td><td>低</td><td>6.50</td><td>7.94</td></tr>
<tr><td>高</td><td>8.43</td><td>9.76</td></tr>
<tr><td colspan="2">総平均</td><td>7.46</td><td>8.85</td></tr>
</table>

て解の精度の改善が思わしくなかったため，個々の計算時間を短めにして多くの最良解を作成する方法を採用した。解の精度の安定性については，アニーリング・ヒューリスティックの手続きの再検討も含むさらなる研究が必要と思われる。

5.5 結言

本章では段取時間と段取費用を考慮したロットサイズ計画問題に対し，アニーリング法に基づくヒューリスティック手続きを提案し，数値計算例によってその有効性を検討した。ラグランジュ緩和法による最良解ならびに最適解の下界値との比較より，以下のことが明らかになった。

(1) アニーリング・ヒューリスティックの最良解と下界値の平均差異は 7.46% であったのに対し，ラグランジュ緩和法のそれは 8.85% であり，アニーリング・ヒューリスティックは平均的には精度のよい最良解を見つけることができる。

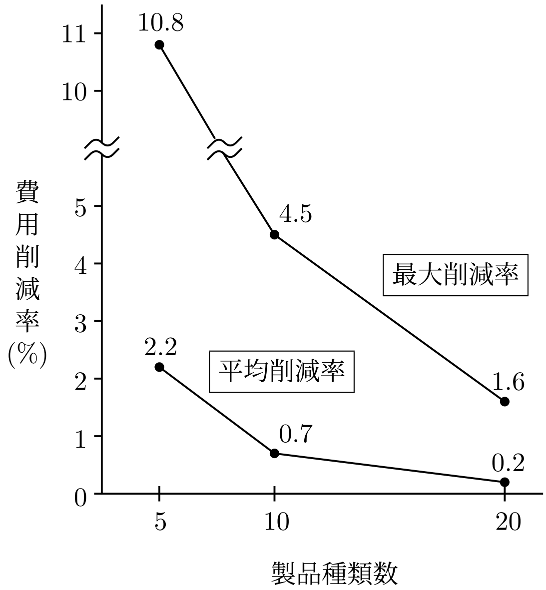

図 5.1　シンプレックス法による費用削減率 (%)

(2) 製品種類数が多くなるにつれて，生産量を段取変数の値に応じて零ないし累積需要量に等しくするという簡便法を用いても，ほとんど解の精度に影響しなくなる。

(3) アニーリング・ヒューリスティックは乱数のシードに比較的影響を受けやすく，また計算時間がラグランジュ緩和法よりもやや長いという課題が残されている。

付録 B　比較に用いたラグランジュ緩和法

ここでは数値計算例で比較解法に用いたラグランジュ緩和法を説明する。本章の対象は段取時間を考慮していること，残業生産時間に上限を設定していないことを除けば，第 4 章で議論した対象と同じものである。そこで第 4 章で提案した手法を踏襲するために，問題 (P) を以下のように一部変形する。

まず制約式 (5.3) は生産時間計画問題と能力制約のないロットサイズ計画問題の両方の決定変数を含む形となっているため，生産時間計画問題において t 期での総段取時間を表す決定変数 Q_tを新しく導入して，式 (5.3) を以下のように書き換える。

$$\sum_{i=1}^{N} r_i P_{it} + Q_t - O_t \leq (rm)_t \qquad t = 1, \ldots, T \quad (5.3')$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i X_{it} - Q_t \le 0 \qquad t = 1, \ldots, T \quad (5.3'')$$

$$Q_t \le \sum_{i=1}^{N} a_i \qquad t = 1, \ldots, T \quad (5.3''')$$

ここに式 (5.3″) は，生産時間計画問題における Q_tが，実際の総段取時間以上であることを要求している。残業生産を必要とする期では，残業生産時間に比例した費用が発生するため，式 (5.3″) は等式で成立するが，残業生産を必要としない期では両者は必ずしも等しくなくてもよいため，不等号制約式としている。また，式 (5.3‴) は Q_tの上限値を与えている。

これらに加え，残業生産時間に上限がないことより，以下の制約式 (5.13) を追加する。通常，式 (5.13) は，単位在庫費用が正の値を取る限り必ず成立するため，通常は明示的に考慮する必要がない。しかしながら，ここでは制約の緩和に伴い，在庫費用係数が負の値をとることがあり，式 (5.13) のない状況下では，生産時間計画問題が非有界となる場合があるため，あえて導入した。

$$I_{iT} = 0 \qquad i = 1, \ldots, N \qquad (5.13)$$

以上の準備のもとで，対象問題を生産時間計画問題と能力制約のないロットサイズ計画問題へと分割するために，両問題間の在庫量の平衡式と式 (5.3″) にそれぞれラグランジュ乗数を掛けて目的関数に組み込むと，ラグランジュ緩和問題は線形計画問題と各製品ごとの能力制約のないロットサイズ計画問題へと分割できるため，以後は第 4 章で議論した手続きを用いることができる。ただし本実験においては以下の点を変更した。

- 解の精度を向上させるため，ロットサイズ計画問題の解に対して後述するヒューリスティックな解の改善手続きを各繰り返しごとに適用し，その中で最小費用となったものを最良解とした。
- ステップサイズの更新式で用いる定数β^kは，2×40 回は$\beta^k = 2$ とし，以後繰り返し総数が 180 となるまで第 4 章と同様の更新手続きによって設定した。

また，能力制約のないロットサイズ計画問題の解に対して適用したヒューリスティックな解の改善手続きは以下のとおりである。

ステップ 1： $t = 1$ としてステップ 2 に移る。

ステップ 2： t 期に残業生産を計画しているならばステップ 3 に，残業生産を計画していないならばステップ 6 に移る。

ステップ 3： t 期に生産を計画しており，かつ t 期末に繰り越し在庫のある製品に対し，t 期での生産量のいくらかを当該製品の需要が非零の次の期に移動させることで費用削減ができないか調べる。ステップ 4 に移る。

ステップ 4： t 期に生産を計画している製品に対し，その製品の生産を計画している直前の期にいくらか生産量を移動させることで費用削減ができないか調べる。ステップ 5 に移る。

ステップ 5： ステップ 3 とステップ 4 で計算した費用削減で最も低費用となる計画を記録する。

ステップ 6： $t = t + 1$ とし，$t \leq T$ であればステップ 2 に戻る。そうでなければステップ 5 で記録した計画の中で最も費用削減となる計画を採用してステップ 1 に戻る。もし費用削減となる計画が存在しなければ手続きを終了する。

第 6 章

段取時間と段取費用を考慮した大規模ロットサイズ計画問題

6.1　緒言

第 5 章では段取時間と段取費用の両者を明示的に考慮したロットサイズ計画問題に対し，アニーリング法に基づくヒューリスティックな近似最適化手法を提案し，有望なアプローチの 1 つであることを示した。しかしながら，長時間の計算を必要とするため，そのまま直接的に大規模問題に適用することには疑問が残るものとなっている。また付録 B で論じたラグランジュ緩和法は，生産時間計画問題が製品種類数の増加に伴って大規模な線形計画問題となるため，大規模問題には適用しにくいうえに，ヒューリスティック手続きも問題の大規模性を考慮に入れたものとはなっていない。

そこで本章では，製品種類数 100 以上の大規模問題への適用を前提とした大規模ロットサイズ計画問題を論じる。たとえば Claassen と Van Beek (1993)[15] は，ある食品メーカのチーズの包装工程における生産計画とスケジューリング問題について論じているが，この工程では約 2,500 種類の製品を 10 ラインで処理しているため，1 ラインあたり 250 種類程度の問題となる。このように，製品種類数の多い大規模問題は，特に最終製品に近い工程においてよく見られる。

大規模なロットサイズ計画問題を対象とした研究としては，Diaby ら (1992)[19] が挙げられ，彼らは混合整数計画問題に定式化したロットサイズ計画問題を，ラグランジュ緩和法によって解く方法を提案している。本章で提案する解法も，対象とする問題をラグランジュ緩和して取り扱うことから，Diaby ら[18],[19]や，あるいは Trigeiro ら (1989)[76] の方法と共通する部分があるが，ラグランジュ乗数の初期値の与え方と，実行可能な計画を求めるためのヒューリスティック手続きが異なっている。特にヒューリスティック手続きについては，問題の大規模性を踏まえ，計算量の増加を抑えることに重点を置いた手続きを提案する。

6.2　ロットサイズ計画問題の定式化

本章では第 5 章と同様の前提のもとで定式化を行う。ただし，第 5 章においては残業生産時間に上限を設けなかったが，通常は現実的ではないため，本章では各期で利用可能な残業生産時間に上限があるものとする。このような前提のもとで，製品種類数を N，計画期間数を T とするロットサイズ計画問題を以下に示す混合整数計画問題 (P) に定式化する。

(P)

$$\text{Minimize} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{N} h_{it} I_{it} + \sum_{i=1}^{N} s_{it} X_{it} + c_t O_t \right) \tag{6.1}$$

subject to

$$I_{i,t-1} + P_{it} - I_{it} = d_{it} \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \tag{6.2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} r_i P_{it} + \sum_{i=1}^{N} a_i X_{it} - O_t \le (rm)_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{6.3}$$

$$O_t \le (om)_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{6.4}$$

$$P_{it} - m_{it} X_{it} \le 0 \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \tag{6.5}$$

$$P_{it}, I_{it}, O_t \ge 0 \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \tag{6.6}$$

$$X_{it} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T \tag{6.7}$$

ここに添字 i は製品番号を，t は計画期をそれぞれ表している。入力データならびに決定変数の意味するところは以下のとおりである。

＜入力データ＞

h_{it} : t 期での製品 i の単位在庫費用

s_{it} : t 期での製品 i の段取費用

c_t : t 期での単位残業費用

d_{it} : t 期での製品 i の需要量

r_i : 単位当たりの製品 i の必要生産時間

a_i : 製品 i の段取時間

$(rm)_t$: t 期に利用可能な定時生産時間

$(om)_t$: t 期に利用可能な残業生産時間

m_{it}：t 期での製品 i の最大生産量 ($m_{it} = \sum_{\tau=t}^{T} d_{i\tau}$)

＜決定変数＞

P_{it}：t 期での製品 i の生産量 (ロットサイズ)

I_{it}：t 期末の製品 i の在庫量

O_t：t 期での残業時間

X_{it}：段取りを行う時のみ 1 の値を取る段取変数

式 (6.1) は計画期間中の総生産費用の最小化を要求する目的関数であり，式 (6.2) は在庫量・生産量・需要量の平衡制約を表している。式 (6.3) と (6.4) は総生産時間が定時生産時間と残業生産時間に制約されていることを表しており，式 (6.5) は生産量が零でなければ対応する段取変数が 1 の値を取ることを要求している。なお，0 期末の在庫はすべて需要に引当て済みであるものとする。

6.3　解法

6.3.1　ラグランジュ緩和による問題の分割

先に定式化した問題 (P) の制約式 (6.3) に非負のラグランジュ乗数$\boldsymbol{\mu}$=$\{\mu_t\}$ を掛けて目的関数に組み込んだラグランジュ緩和問題$\left(\mathrm{RP}\boldsymbol{\mu}\right)$は，能力制約のないロットサイズ計画問題 (P1) と，残業生産時間計画問題 (P2) に分割できる。

(P1)

$$\text{Minimize} \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\{h_{it}I_{it} + (s_{it} + a_i\mu_t)\,X_{it} + r_i\mu_t P_{it}\} \tag{6.8}$$

subject to

(6.2), (6.5), (6.6) の P_{it}, I_{it}の部分, (6.7)

(P2)

$$\text{Minimize}\sum_{t=1}^{T}(c_t - \mu_t)\,O_t \tag{6.9}$$

subject to

(6.4), (6.6) の O_tの部分

問題 (P2) は目的関数の係数値に応じて O_tに 0 か $(om)_t$を与えれば最適解が得られる。一方，問題 (P1) は各製品ごとに独立した問題に分割でき，それらは期によって単位生産費用が異なる能力制約のないロットサイズ計画問題となるため，以下に述べるように動的計画法で最適解が得られる。

簡単化のため単位生産費用 $b_t = r_i\mu_t$，段取費用 $e_t = s_{it} + a_i\mu_t$ とおき，その他の決定変数と入力データについては添字の i を除いて以前の定義をそのまま踏襲する。いま $(t-1)$ 期末在庫量が I_{t-1} $(I_{t-1} \geq 0)$ のとき，t 期から T期までの需要を満たす最小費用を $f_t(I_{t-1})$ で表すこととする (定式化の都合上，$f_{T+1}(\cdot) = 0$ とする)。すると，付録 C に示すように $I_{t-1}P_t = 0$ なる性質が成り立つことより，$t = 1, \ldots, T$に対し式 (6.10) が得られる。

$$f_t(I_{t-1}) = \min_{P_t \in \Phi_t} \{h_t I_t + b_t P_t + e_t X_t + f_{t+1}(I_t)\} \tag{6.10}$$

ただし，$I_t = I_{t-1} + P_t - d_t$であり，集合$\Phi_t$は以下のとおりである。

$$\Phi_t = \begin{cases} \{d_t, \ldots, \sum_{\tau=t}^{T} d_\tau\} & I_{t-1} = 0 \text{ の場合} \\ \{0\} & I_{t-1} > 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{6.11}$$

最適解は式 (6.10) を $t = T$から 1 へと順次適用することで得られる。このとき I_{t-1}として $\{0, d_t, \ldots, \sum_{\tau=t}^{T} d_\tau\}$ を考えなければならないが，$t = 1$ においては初期在庫量が所与 $(I_0 = 0)$ のため，$f_1(I_0)$ が求めるべき最適費用となる。なお，式 (6.10) をより効率的に解くための方法も提案されているが[30], [83]，本章では後述するヒューリスティック手続きとの関係で，式 (6.10) をそのまま用いる。

6.3.2　サブ勾配法

問題$\left(\mathrm{RP}\boldsymbol{\mu}\right)$ のラグランジュ双対問題を解く方法として，第 4 章と同様に以下のサブ勾配法を用いる。

ステップ 1：ラグランジュ乗数の初期値 μ_t^0を与える。$k = 0$ とおく。

ステップ 2：与えられたμ_t^kのもとで，問題 (P1) と (P2) を解く。$k > k_{\min}$の場合には後述のヒューリスティックな計画改善手続きを適用する。

ステップ 3：現在得られている実行可能解の総生産費用と，ラグランジュ双対問題の目的関数値 (すなわち問題 (P) の下界値) が一致したか，あるいは停止条件を満たせば終了する。それ以外はステップ 4 に行く。

ステップ 4： 新しいラグランジュ乗数値を次式で求める。

$$\mu_t^{k+1} = \max\left\{0, \mu_t^k + \alpha^k \theta_t^k\right\} \tag{6.12}$$

ここにθ_t^kはμ_t^kにおけるサブ勾配，α^kはステップサイズでそれぞれ以下の式で与えられる。

$$\theta_t^k = \sum_{i=1}^{N} r_i P_{it}^k + \sum_{i=1}^{N} a_i X_{it}^k - O_t^k - (rm)_t \tag{6.13}$$

$$\alpha^k = \beta^k [\hat{v} - v\left(\mathrm{RP}_{\boldsymbol{\mu}^k}\right)] / \sum_{t=1}^{T} \left(\theta_t^k\right)^2 \tag{6.14}$$

ここに $v\left(\mathrm{RP}_{\boldsymbol{\mu}^k}\right)$ は問題$\left(\mathrm{RP}_{\boldsymbol{\mu}^k}\right)$ の最適目的関数値，$\hat{v}$は $v\left(\mathrm{RP}_{\boldsymbol{\mu}}\right)$の上界値，$\beta^k$は 2 以下のスカラー値である。$k = k + 1$ とおいてステップ 2 に返る。

後述の数値計算例において$\hat{v}$とβはそれぞれ以下のように設定した。$\hat{v}$の値は，当該繰り返しまでに得られている最良実行可能解の目的関数値を用いた。ただし実行可能解の得られていない間は，残業生産時間の上限を与える制約式 (6.4) がないものと仮定したうえで，問題 (P1) の解を式 (6.1) によって評価した中の最小値を 1.5 倍したものを用いた。一方，βの値は，当初 2 としておき，5 回ごとに目的関数値 (下界値) の改善の度合いを調べ，0.5%以上の改善がなされていればβに 0.8 を掛けた。繰り返し手続きはβの値が 10^{-4}以下となった時点で打切った。これらの設定は，予備数値実験ならびに Diaby ら[19] の成果を基にしている。

なおステップ 2 で計画改善手続きの適用を $k_{\min}$回の繰り返し以降に限定したのは，ある程度ラグランジュ乗数の値が落ち着かないと提案するヒューリスティック手続きが効果的に機能しないことと，計算時間の削減の二点を考慮したためで，数値計算例においては $k_{\min} = 150$ と設定した。

6.3.3 ラグランジュ乗数の初期値設定

サブ勾配法を用いるにあたっては，ラグランジュ乗数の初期値をどのように設定するかが 1 つの問題となる。サブ勾配法ではラグランジュ乗数をサブ勾配の方向に更新するが，初期値が適切に設定されていなければ，最終値が最適値と大きく離れてしまう危険性がある。しかしながら適切な初期値を見つけることも容易でないため，零を初期値に用いる場合が多いようであり，第 4 章においても初期値を零とおいて計算を行った。そこで本章では，初期値よりも最終値の方が最適値に近い可能性が高いとい

う仮定のもと，サブ勾配法を繰り返し適用する方法を提案する。このときラグランジュ乗数の初期値は直前の繰り返しで得られた最終値を用いる (ただし 1 回目は零とする)。この繰り返しは，双対問題の目的関数値 (すなわち下界値) の改善の度合いが 0.1%以下となった時点で終了させる。

6.3.4 ヒューリスティックな計画改善手続き

問題 (P1) の解をすべての製品についてとりまとめたものが，そのまま実行可能な精度の高い計画となる場合は非常に少ないため，何らかのヒューリスティックな手続きによって実行可能な計画を求める必要がある。第 5 章の数値計算結果より，製品種類数が多くなるに従って，ロットサイズを零ないし当該期からの累積需要量に等しくするという簡便法を用いても，解の精度にさほど影響を与えないことが明らかになった。そこで，本章においては実行可能な計画を見つけるにあたって，ロットサイズを零ないし当該期からの累積需要量に等しい値に限定する。しかしながら，製品種類数が多くなると，ロットサイズの取りうる値をこのように限定しても，ロットサイズを変更したときの費用増加/減少を逐次正確に計算したうえで，最も費用効果の高い変更案を採用するという方法を用いたのでは，長時間の計算を要する可能性がある。すなわち，費用増加/減少を正確に求めるためには，ロットサイズを変更したときに段取時間を含んだ総生産時間がどれだけ変化するかを計算し，残業生産時間の変化量から残業費用の変化分を求めたうえで，ロットサイズの変更に伴う在庫費用と段取費用の変化分を状況に応じて加減しなければならないのである。そこで，ヒューリスティック手続きでの計算量をできるだけ少なくすることを意図した以下のようなヒューリスティックな計画改善手続きを提案する。

サブ勾配法は各期の総生産時間を限られた時間内に収めながら，定時生産時間を有効に利用する計画となるようにラグランジュ乗数を更新する。しかしながら，ロットサイズ計画問題は離散値しか認めないため，ラグランジュ乗数の値が若干変化してもそれがロットサイズ計画に反映されない場合がある。ここで視点を変えて見れば，ロットサイズ計画を強制的に変更しなければならないとき，ロットサイズ計画問題で使用している (ラグランジュ乗数を含んだ) 費用係数には有益な情報が含まれていると考えることができる。

いま生産時間制約のために t $(t < T)$ 期の製品 A の生産量を減らす場合を考える。製品 A のロットサイズは式 (6.10) に基づいて求めており，t 期には t' $(t' > t)$ 期までの累積需要量をロットサイズとしているものとする。これは製品 A の $(t-1)$ 期末在庫量が

零であり，Φ_tの候補の中で $P_t = \sum_{\tau=t}^{t'} d_\tau$が式 (6.10) の中で最小値を与えたことを意味する。もしここで P_tとして 1 期分少ない $(t'-1)$ 期までの累積需要量を採用した場合，製品 A の t から T期までの総生産費用は以前の計画に比べて

$$f_{t+1}\Big(\sum_{\tau=t+1}^{t'-1} d_\tau\Big) - f_{t+1}\Big(\sum_{\tau=t+1}^{t'} d_\tau\Big) - (h_t + b_t)d_{t'} \tag{6.15}$$

だけ増加すると考えることができる[6]。このような費用増分は生産量の増加に対しても同様に求めることができるが，この増分を対象となる製品ごとに求め，その増分が最小の製品の計画を優先的に変更させることで，費用最小化の目的を維持した計画変更を実現させようとするのが基本的な考えである。なお，計画変更により t 期のロットサイズをψ期までの累積需要量に等しくした場合，当該製品の $(\psi+1)$ 期からのロットサイズは，$I_\psi = 0$ のもとで式 (6.10) によって求めるものとする。

上述の考えに基づき，ここでは数値計算例において手順 A(実行可能化) と手順 B(定時生産時間の有効利用) を導入する。

手順 A(実行可能化)　t 期において生産時間制約を超過している場合，t 期の生産量を減らすことで超過分の生産時間を削減する。t 期にτ $(\tau > t)$ 期までの累積需要量を生産量としている製品に対し，その生産量を $(\tau-1)$ 期までの累積需要量に減らした場合の費用増分を求め，その増分が最小となる製品の計画を変更する。生産時間超過が解消されるか，あるいは t 期に生産する製品の生産量がすべて当該期の需要量に等しくなるまで手順 A を繰り返す。

手順 B(定時生産時間の有効利用)　t 期において利用可能な定時生産時間に余裕があるとき，余裕分の生産時間増加により，他の期の残業生産分を削減させることで費用削減を試みる。t 期の需要量が零でないすべての製品に対して，t 期に生産する製品については以下の (i) を，生産しない製品については (ii) を適用する。

(i) 当該製品を生産する直後の期 t'で残業生産を計画している場合，t 期での生産量を t'期の需要分まで増加させたときの費用増分を求める。

(ii) 当該製品を生産する直前の期 t^0で残業生産を計画している場合，t^0期での生産量を $(t-1)$ 期までの累積需要量に減らした場合の費用増分を求める。

[6] 式 (6.15) は，式 (6.10) において，$P_t = \sum_{\tau=t}^{t'} d_\tau$ のときと，$P_t = \sum_{\tau=t}^{t'-1} d_\tau$ のときの { } 内の値の差を表している。

(i)，(ii) で費用増分最小のものを選び計画を変更する。定時生産余裕分が無くなるか，あるいは対象となる製品が存在しなくなれば手続きを終了し，その他の場合は手順 B を繰り返す。

以上の準備のもとで，本章で提案するヒューリスティックな計画改善手続きは以下のとおりである。

ステップ 1： $t=1$ とし，ステップ 2 へ移る。

ステップ 2： t 期で生産時間制約を超過している場合には手順 A を適用し，もし生産時間制約超過が解消できなければヒューリスティック手続きを終了する。一方，t 期の定時生産時間に余裕のある場合には手順 B を適用する。次に総生産費用を求め，最良解であればそれを保存する。ステップ 3 へ移る。

ステップ 3： $t=t+1$ とし，$t \leq T$ ならばステップ 2 に移り，そうでなければ保存している最良解を出力して手続きを終了する。

6.4　数値計算例

6.4.1　入力データ

緒言で言及した論文成果，特に Diaby ら[19]の数値計算データを参考のうえ，提案した解法のパフォーマンスを検討するうえで重要なパラメータとして以下の 7 つを選定し，それぞれ 2 ないし 3 水準を設定した。

- 計画期間数 T：12, 24 の 2 通り。
- 製品種類数 N：100, 500, 1000 の 3 通り。
- 需要量 d_{it}：以下の方法で，期ごとのばらつきが小と大の 2 通りに設定した。まず各製品 i に対し平均需要量 $\hat{d}_i$ を平均 100, 標準偏差 30 の正規分布から与えた。次に，製品 i の各期での需要量を平均 $\hat{d}_i$，標準偏差 $\hat{d}_i/k$ の正規分布から与えた。ここに k は需要のばらつきを与える係数で，ばらつきが小の場合には 10 を，ばらつきが大の場合には 2 を与えた。
- 段取費用 s_{it}：低と高の 2 通りに設定し，低の場合には区間 [250, 500] から，高の場合には区間 [1000, 3000] からランダムに与えた。なおこれらの値は期によらず一定とした。

- 段取時間 a_i：短と長の 2 通りに設定し，短の場合には区間 [20, 100] から，長の場合には区間 [200, 600] からランダムに与えた。
- 単位残業費用 c_t：低と高の 2 通りに設定し，各期とも低は 10，高は 100 とした。
- 利用可能な定時生産時間 $(rm)_t$：まず各製品ごとに需要量，単位在庫費用，段取費用より経済的ロットサイズを求める。次に，このロットサイズを採用したときの計画期間中での総生産時間を求め，これを計画期間数で割った値をその製品 i の期当たりの平均負荷 W_iとする。そして総平均負荷 $W = \sum_{i=1}^{N} W_i$を求め，各期の定時生産時間として $1.0W$, $1.1W$, $1.2W$の 3 通りを用いた。ただし 1 期についてはこの値を 1.5 倍して用いた。

以上で組合せ総数は 288 通りとなる。一方，以下の入力データはすべての計算において固定した。

- 単位在庫費用 h_{it}：各製品とも区間 [0, 2] からのランダム値を与え，これらは期によらず一定とした。
- 単位当たりの必要生産時間 r_i：各製品とも [1, 5] からのランダム値を与えた。
- 利用可能な残業生産時間 $(om)_t$：利用可能な定時生産時間の 0.3 倍とした。ただし 1 期のみ 0.5 倍とした。

これらの設定において，1 期における利用可能な定時ならびに残業生産時間の値を 2 期以降に比べて大きく設定した理由は，1 期の需要量が非零の製品はすべて段取りが必要とされるうえに，1 期のロットサイズとしてある程度将来の需要分までを組み入れることができなければ，2 期以降で生産時間が不足して，実行可能解が得られない状況が生じやすくなるためである。

6.4.2 解法の諸設定

提案した解法はサブ勾配法を繰り返し適用するが，その回数はあらかじめ決められていないうえに，ヒューリスティック手続きの計算負荷も高いため，そのままでは計算時間が非常に長くなる恐れがある。よって本計算例ではサブ勾配法の繰り返しが 2 回までしかヒューリスティック手続きを適用しなかった。またサブ勾配法を 3 回繰り返しても実行可能解が見つからなければ，実行可能解が見つからない旨を出力して終了させた。

6.4.3 計算結果と考察

上述の 288 通りの組合せの中で実行可能解の得られなかった場合が 38 通りあったため，まず実行可能解の得られた 250 通りの結果について検討した。

本章で最も重要な評価基準は，最良実行可能解の目的関数値と下界値の差異である。図 6.1 は 250 通りの結果をまとめたもので，平均 3.5%，最小 0.08%，最大 24.4%であった。差異の度数分布は単位残業費用の高低でかなり異なっていたため，図 6.1 ではそれぞれの場合を区別している。単位残業費用が低の場合の平均差異は 1.7%，高の場合には 5.3%と，単位残業費用が高い場合に差異が大きくなったが，これは残業生産時間のわずかな違いが総生産費用に大きく影響するために，下界値や最良解が最適費用に近づきにくい場合が全体的に多かったためと思われる。しかしながら個々の問題設定により差異はかなり異なっていた。例えば差異の最小も最大も単位残業費用が高の場合であり，両者の最良解は定時生産時間にかなり余裕のある，類似した計画となっていた。このとき最大差異を示した計画は段取費用の総和が総生産費用の約 81%を占めており，また段取費用が高の設定であったため，段取回数を削減することで，より低費用な計画の得られる可能性があったと思われる。一方，最小差異を示した計画では段取費用が低の設定であったこと，また総生産費用に占める段取費用の総和が約 65%であったことなどから，ほぼ最適な計画が得られたものと想定される。しかしながら，差異が 20%を越えた残りの 2 通りについては需要負荷と定時生産能力が比較的近い状況にあり，残業生産を行う期と定時生産に余裕のある期が交互に現れる計画となっており，これらにおいては段取回数の削減がさほど効果的とは思われなかった。またこの 2 通りに類似した傾向の解でありながら，差異が 1%未満の場合もあった。差異が 10%を越えた 17 通りの結果を詳細に検討したが，差異が大きくなりやすい状況を特定することはできなかった。しかしながら平均的には単位残業費用の低い場合に精度のよい最良解が得られることがわかった。

さて本章ではサブ勾配法を繰り返し適用することで下界値の改善をねらったが，その有効性について結果を整理したものが図 6.2 と図 6.3 である。図 6.2 はサブ勾配法の繰り返し回数をまとめたものであるが，繰り返し数 5 回以下が全体の 80%以上を占めており，平均的にはあまり多くの繰り返しは発生しないことがわかる。しかしながら最大繰り返し数は 23 であり，多数の繰り返しを要する問題もあることがわかった。繰り返しが多くなりやすい状況を調べたが，顕著な傾向は見つからなかった。

図 6.3 は最終的に得られた下界値が 1 回目の繰り返しで得られた下界値に比べてどの程度改善されたか (すなわち，高い値となったか) を示している。平均は 2.6%で，1.0%未

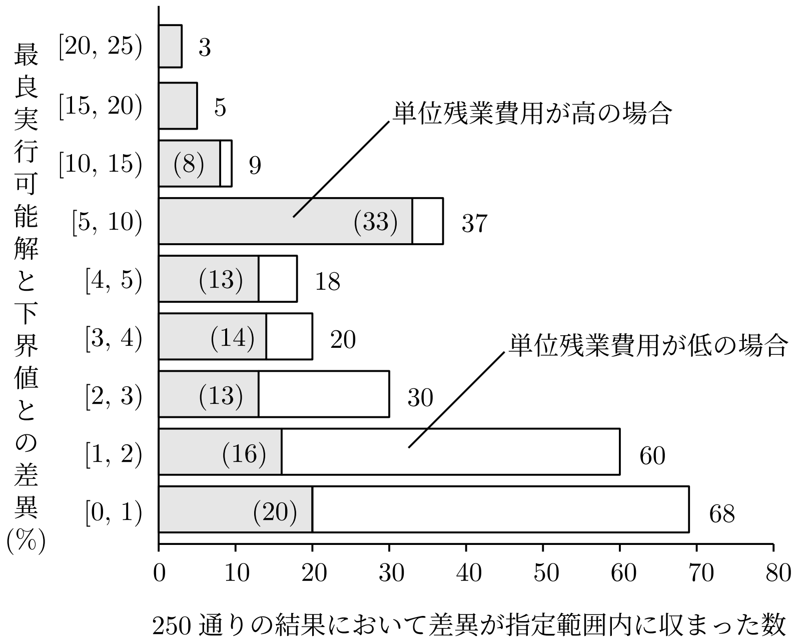

図 6.1 最良実行可能解と下界値の差異 (%)

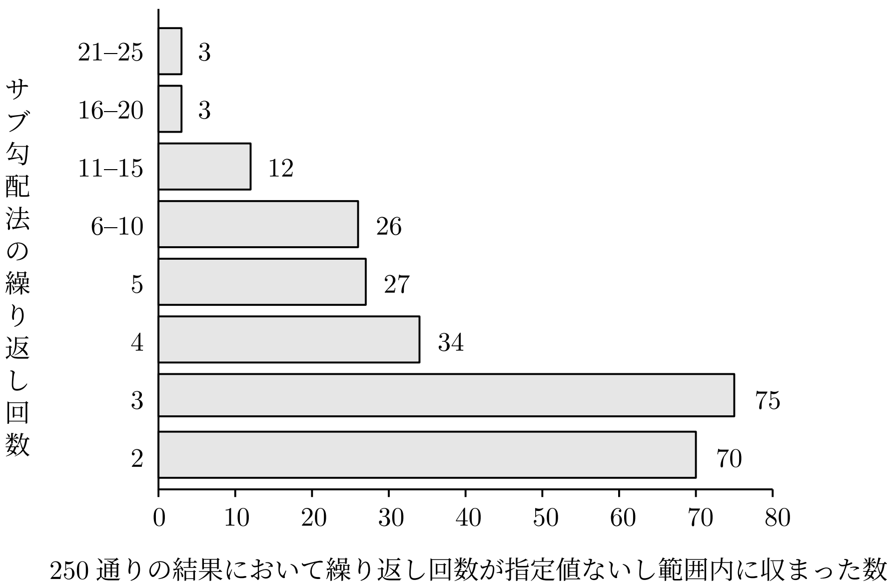

図 6.2 サブ勾配法の繰り返し回数

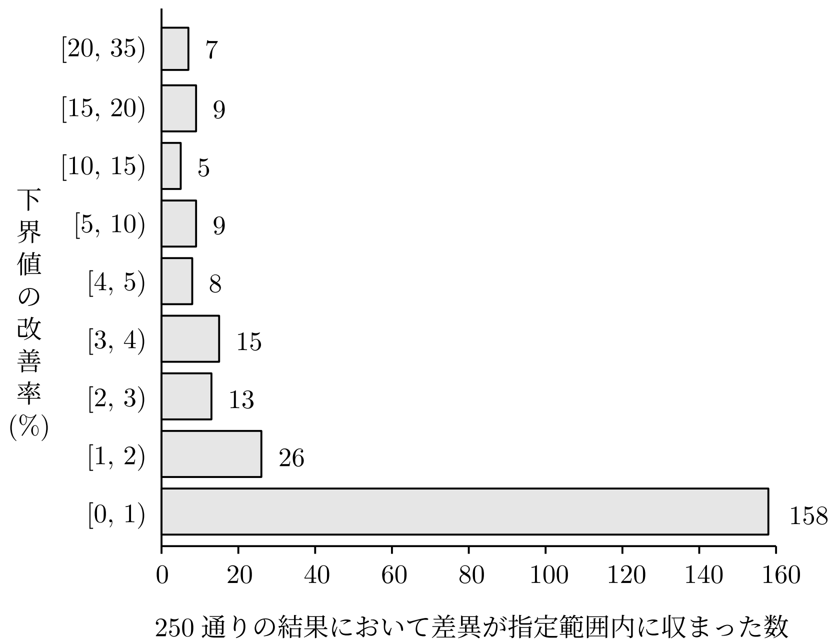

図 6.3　下界値の改善率 (%)

満の場合が 60%以上あるが，10%以上改善された場合も約 8%あり，最高は 33.2%であった。結果を詳細に検討したところ，単位残業費用と段取費用が高く，段取時間が短い場合には平均で 11.8%の改善がなされていた。このような状況ではサブ勾配法を繰り返し適用することが効果的と思われるが，何故このような状況に対して効果的であるかその理由はわからなかった。なお，単位残業費用が低い場合には改善率も平均 0.7%，最高 5.5%と比較的低く，単位残業費用が低い場合にはサブ勾配法を 1 回適用するだけでも，かなりよい下界値の得られることがわかった。

繰り返し回数と下界値の改善率にはある程度の関連がみられ，例えば改善率が 10.0%以上となった場合は少なくとも 5 回の繰り返しが行われていた。しかしながら繰り返しを多数回行っても下界値があまり改善されない場合もあり，例えば 12 回の繰り返しで改善率が 1.5%，10 回で 2.4%などがあった。

計算時間は問題の規模に大きく依存したため，各規模ごとの平均計算時間を図 6.4 にまとめた。なお使用したワークステーションは IBM POWERstation 220 (約 26 SPECmark) である。計画期間数を 12 から 24 へと 2 倍にすると，平均計算時間は約 4 倍に増加しており，これは各製品ごとのロットサイズ計画に動的計画法を採用しているた

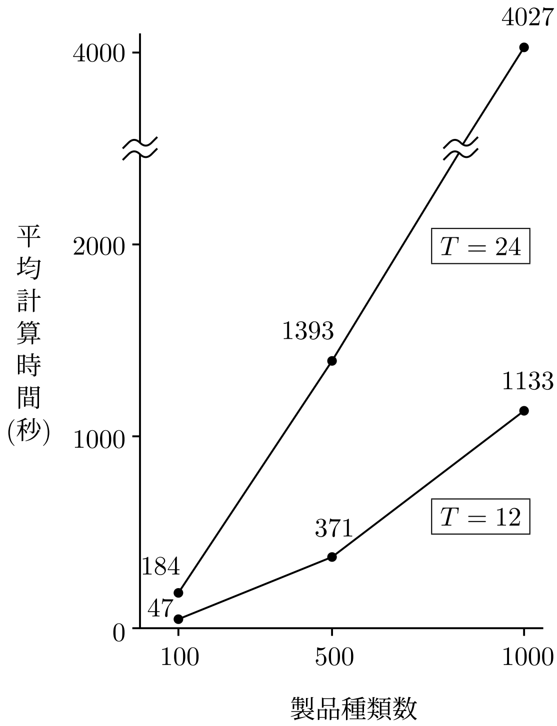

図 6.4　各問題規模における平均計算時間 (秒)

めに，計画期間数の増加が指数的に影響したためと思われる。一方，製品数 100 から 500，500 から 1,000 へと 5 倍ないし 2 倍にすると，平均計算時間は約 1.5×5 ないし 1.5×2 倍に増加しており，製品数に対しては比例的な増加傾向がみられる。これは製品数の増加の影響が費用計算とヒューリスティック手続きのみにとどまっているためと思われる。平均計算時間が製品種類数の増加に対して，指数的ではなく，比例的に増加するという特徴は，提案した手法が製品種類数の多い大規模問題に対して有効であることを示していると言えよう。ただし，同一規模においても計算時間にはかなりのばらつきがあり，例えば 24 期間 1,000 製品の場合の最短時間は 1,244 秒，最長時間は 10,941 秒であった。これは問題設定によりサブ勾配法の適用回数，ラグランジュ乗数の収束速度，そしてヒューリスティック手続きの計算量がかなり異なる場合があるためと思われる。よって個々の問題に要する計算時間をあらかじめ予測することは困難である。

なお，需要のばらつきの大小の違いが上述の各パフォーマンス尺度に与える顕著な影響は見い出せなかった。

最後に，実行可能解の得られなかった 38 通りの設定に対して検討を行った。これら

はいずれも段取費用が高，段取時間が長，利用可能な定時生産時間が $1.0W$ ないし $1.1W$ に設定された場合であった。これら実行可能解が得られなかった設定において，実行可能解が本質的に存在しないのか否かを正確に判定することは非常に困難であるが，問題の特徴を調べたところ，最初の 3 期間の生産時間制約が厳しいことがわかった。定時生産時間の設定を $1.0W$ から $1.1W$，$1.2W$ へと大きくしていき，実行可能解の得られた時の計画を検討した結果，段取費用が高，段取時間が長，利用可能な定時生産時間が $1.0W$ の設定 (24 通り) については恐らく実行可能解が存在しないものと思われる。しかしながら，利用可能な定時生産時間を $1.1W$ と設定していた残りの 14 通りについては，実行可能解が存在する可能性を否定できなかった。

6.5　結言

本章では大規模ロットサイズ計画問題に対する近似最適化解法を提案し，その特徴を数値計算によって検討した。その結果，提案した解法は特に単位残業費用の低い環境において最適解にかなり近い最良解を見つけ出すことがわかった。単位残業費用が高い場合には最良解と下界値の差異がかなり大きくなる場合もあるが，サブ勾配法を繰り返し適用することで，下界値をかなり改善できる場合のあることを示した。また平均計算時間は製品数の増加に対して比例的傾向を示し，提案した解法は製品数が多く計画期間数の少ない大規模問題に適していることを示した。

さて，提案したヒューリスティック手続きにはあまり複雑な手順を組み入れず，計算量の増加を抑える基本的手続きの提案に主眼を置いた。よって生産時間制約が厳しい場合には実行可能解を見つけるために，より複雑な手順を組み込む必要があろう。また総生産費用の改善についても，本章では定時生産時間の有効利用のみに着眼したが，状況によっては段取回数の削減に着目するなどの拡張が考えられる。提案したヒューリスティック手続きはこのような拡張にも容易に対応できるが，ヒューリスティック手続きに組み込むべき手順の検討ならびに計算時間の短縮方法については今後さらに検討を重ねていく必要があると思われる。

付録 C　$I_{t-1}P_t = 0$ が成立することの証明

いま問題を以下のように表現する。

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T} (h_t I_t + s_t X_t + b_t P_t) \tag{6.16}$$

subject to

$$I_{t-1} + P_t - I_t = d_t \qquad t = 1, \ldots, T \quad (6.17)$$

$$P_t - m_t X_t \leq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \quad (6.18)$$

$$X_t \in \{0, 1\} \qquad t = 1, \ldots, T \quad (6.19)$$

$$I_t, P_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \quad (6.20)$$

なお $I_0 = 0$ とし，$s_t > 0$，$b_t > 0$ とする。また，h_tには符号制約を設けない。明らかに，式 (6.8) はこの条件を満たしている。$I_{t-1}P_t > 0$ が最適計画となりえないことを証明するために，$I_{t-1}P_t > 0$ よりも $I_{t-1}P_t = 0$ の方が必ず低費用となることを証明する。

いま仮に $I_{t-1}P_t > 0$ なる計画が与えられているものとする。この計画を $I_{t-1}P_t = 0$ が成立するように変更する方法として以下の案 1 と案 2 がある。なお，t 期の直前で段取りしている期を t'とおき，t_1期から t_2期 $(t_1 \leq t_2)$ までの単位在庫費用を記号 $H(t_1, t_2)$ で表すこととする。

案 1($P_t = 0$ への変更案)　　$P_{t'} \leftarrow P_{t'} + P_t$とし，$P_t \leftarrow 0$ とする。費用の変化は,

増加： $b_{t'}P_t + H(t', t-1)P_t$

減少： $b_t P_t + s_t$

となる。

案 2($I_{t-1} = 0$ への変更案)　　$P_{t'} \leftarrow P_{t'} - I_{t-1}$とし，$P_t \leftarrow P_t + I_{t-1}$とする。この場合の費用変化は,

増加： $b_t I_{t-1}$

減少： $b_{t'}I_{t-1} + H(t', t-1)I_{t-1} +$ (もし $P_{t'} = 0$ となったら $s_{t'}$)

となる。

さて，それぞれの案の費用増分を整理すると

案 1： $(b_{t'} + H(t', t-1) - b_t)P_t - s_t$

案 2： $(b_t - b_{t'} - H(t', t-1))I_{t-1}$(さらに場合によっては $- s_{t'}$)

ここで$\Psi = b_{t'} + H(t', t-1) - b_t$とおくと,

案 1： $\Psi P_t - s_t$

案 2： $-\Psi I_{t-1}(-s_{t'})$

と整理できる。もし $\Psi > 0$ であれば案 2 が費用削減となるし，逆に $\Psi \leq 0$ であれば，案 1 が費用削減となる。以上の議論より $I_{t-1}P_t > 0$ よりも $I_{t-1}P_t = 0$ の方が必ず低費用となることが証明された。 □

第 7 章

段取時間と段取費用が生産順序に依存する環境における ロットサイズと生産順序の計画問題

7.1 緒言

第 4 章から第 6 章まで論じてきたロットサイズ計画問題においては，段取作業に伴う費用や時間が製品種類に固有で，生産順序には依存しないものと仮定してきた。しかしながら，段取時間や段取費用が製品の生産順序に依存する工程，たとえば i, j, k の 3 種類の製品があるとき，k から i に切り替えるときと，j から i に切り替えるときで段取費用や時間が異なる工程も実際には少なくない。集積回路のウェハ製造工程のような先端的な製造環境においても段取時間が製品の生産順序に依存する工程があるとの報告が Uzsoy ら (1992)[77] によってなされているし，食品製造業における色や味の切り替え時の清掃時間なども製品種類の順序に依存する場合がある (Meier ら (1982)[59] の Midcentral Foods 社もその一例である)。また，化学的処理工程において，機械を稼動させたまま投入する原料を切り替えたとき，直前の原料が混ざった不良品がしばらくの間生産され，この損失が投入される原料に依存する場合などもある。

このような段取作業に伴う損失が製品の生産順序に依存する場合，ロットサイズのみならず，製品の生産順序の決定も重要となってくる。第 1 章でも述べたように，通常はロットサイズ計画で生産品種を決定した後にスケジューリングを行うが，段取作業が製品の生産順序に依存する場合，ロットサイズ計画のレベルで順序付けも同時に考慮することが，実行可能な計画や総生産費用最小の生産計画を求めるうえで必要とされる。しかしながら，ロットサイズと生産順序の両者を同時に考慮した計画問題に対する効果的なアプローチはまだ見あたらない。Dilts と Ramsing (1989)[20] は段取費用が製品の生産順序に依存する環境を取りあげ，段取費用を生産順序に依存しない値に置き換える方法を提案しているが，その妥当性の検討は十分とは思われず，また生産時間制約も考慮していない。Dobson (1992)[21] は段取作業に要する時間と費用が生産

順序に依存する環境における周期的なロット・スケジューリング問題を取りあげているが，需要が一定の仮定を設けているため，本章で対象とする問題への手法の拡張は困難と思われる。そこで本章では，ロットサイズと生産順序の計画問題に対するヒューリスティック解法を提案し，その特徴を数値計算例より論じる。

7.2　前提条件と定式化

7.2.1　前提条件

(1) 製品種類数は N とし，計画期間は離散的な T 個の期に分割されているものとする。

(2) 各期 t $(t = 1, \ldots, T)$ では定時生産のみが計画可能で，定時生産時間には上限があるものとする。

(3) 各製品 i $(i = 1, \ldots, N)$ の各期 t での需要量は確定値で与えられるものとする。また t 期の需要を t 期の生産によって引き当てることが可能で，バックオーダーは認めないものとする。また，すべての製品の初期在庫はすでに需要に引き当て済みであるものとする。

(4) 任意の異なる製品 i, j について，i から j への段取時間ないし段取費用と j から i へのそれとは，必ずしも等しくないものとする。

(5) すべての可能な生産順序に対して段取時間と段取費用は既知で，これらは期によらず，直前に生産した製品種類と直後に生産する製品種類から一意に確定するものとする。さらに，任意の異なる製品 i, j, k に対して，i の直後に j を生産し，その直後に k を生産したときに要する段取時間の和は，i の直後に k を生産するときに要する段取時間よりも短くないものとする (これを三角不等式制約と呼ぶ)。もし三角不等式制約が成立しないとすれば，i から j，そして j から k へと段取替えする方が，i から直接 k へと段取替えするよりも段取時間が短くなってしまうが，その場合には i から一度 j へと段取替えし，j の生産を行わず直ちに k に段取替えをすればよいことになる。そのため，三角不等式は実際の段取時間においては通常は必ず成立するものである。同様の理由より，三角不等式制約は段取費用に対しても成立するものとする。

第 4 章から第 6 章では残業生産が計画可能であるものとしてきたが，本章においては定時生産のみを計画可能としている。もし残業生産を認めると，

(a) 段取時間が長く残業生産を必要とするが，段取費用は低い計画

(b) 段取時間は短く残業生産は必要としないが，段取費用が高い計画

の両計画がともに実行可能で同一総生産費用となる可能性がある。このように，残業生産を認めると順序づけ方法の特徴が分かりにくくなる可能性があるため，本章では定時生産のみを計画可能としている。

7.2.2 問題の定式化

対象とする問題を以下のような数学モデル (P) に定式化することで明確にする。このモデルは，第 6 章で定式化したモデルに生産順序の決定問題を組み入れたものである (ただし，残業生産に関する部分は除外している)。

(P)

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} h_{it}I_{it} + \sum_{t=1}^{T} Z_t \tag{7.1}$$

subject to

$$Z_t = s_{k,U_{1t}} + \sum_{j=1}^{N_t-1} s_{U_{jt},U_{j+1,t}} \qquad k = U_{N_{t-1},t-1}; t = 1,\ldots,T \tag{7.2}$$

$$I_{i,t-1} + P_{it} - I_{it} = d_{it} \qquad i = 1,\ldots,N; t = 1,\ldots,T \tag{7.3}$$

$$N_t = \sum_{i=1}^{N} \delta(P_{it}) \qquad t = 1,\ldots,T \tag{7.4}$$

$$\sum_{j=1}^{N_t} S_{ijt} = \delta(P_{it}) \qquad i = 1,\ldots,N; t = 1,\ldots,T \tag{7.5}$$

$$\sum_{i=1}^{N} S_{ijt} = 1 \qquad j = 1,\ldots,N_t; t = 1,\ldots,T \tag{7.6}$$

$$U_{jt} = \sum_{i=1}^{N} iS_{ijt} \qquad j = 1,\ldots,N_t; t = 1,\ldots,T \tag{7.7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} r_iP_{it} + a_{k,U_{1t}} + \sum_{j=1}^{N_t-1} a_{U_{jt},U_{j+1,t}} \le (rm)_t \qquad k = U_{N_{t-1},t-1}; t = 1,\ldots,T \tag{7.8}$$

$$P_{it}, I_{it} \ge 0 \qquad i = 1,\ldots,N; t = 1,\ldots,T \tag{7.9}$$

$$S_{ijt} \in \{0,1\} \qquad i = 1,\ldots,N; j = 1,\ldots,N_t; t = 1,\ldots,T \tag{7.10}$$

ただし，$\delta(P_{it})$ は次式を意味する。

$$\delta(P_{it}) = \begin{cases} 0 & \text{もし } P_{it} = 0 \text{ のとき} \\ 1 & \text{もし } P_{it} > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

ここに添字 i は製品番号を，t は計画期をそれぞれ表している。入力データならびに決定変数の意味するところは以下のとおりである。

＜入力データ＞

h_{it}：t 期での製品 i の単位在庫費用

s_{ij}：製品 i の直後に製品 jを生産するときの段取費用

d_{it}：t 期での製品 i の需要量

r_i：単位当たりの製品 i の必要生産時間

a_{ij}：製品 i の直後に製品 jを生産するときに要する段取時間

$(rm)_t$：t 期に利用可能な定時生産時間

＜決定変数＞

P_{it}：t 期での製品 i の生産量 (ロットサイズ)

I_{it}：t 期末の製品 i の在庫量

Z_t：t 期中の総段取費用

N_t：t 期に生産する製品種類数

S_{ijt}：t 期に製品 i を j番目に生産するときのみ 1 の値をとる 0-1 変数

U_{jt}：t 期で j番目に生産する製品番号

目的関数 (7.1) は計画期間中の在庫費用と段取費用の総和の最小化を要求している。制約式 (7.2) は t 期に発生する段取費用 Z_tが，$(t-1)$ 期の最後に生産する製品と t 期の最初に生産する製品間，そして t 期中に生産する隣接する製品間で生じる段取費用の和から構成されることを表している。式 (7.3) は各期での需要量・生産量・在庫量の平衡制約を表し，式 (7.4) は t 期に生産する製品種類数 N_tを与えている。式 (7.5) と (7.6) は t 期に生産される製品に対して，それを 1 から N_tの間に重複なく順序付けることを要求している。式 (7.7) は上で付けられた順序を基に，指定された順番の製品を与える。式 (7.8) は t 期の総生産時間 (生産時間と段取時間の総和) が，定時生産時間の上限を越えられないこと表している。ここに段取時間は式 (7.2) の段取費用と同様にして計算する。式 (7.9) と (7.10) は非負制約ならびに 0-1 制約である。

7.3 ヒューリスティック解法

7.3.1 解法の概要

定式化した問題 (P) には,

(1) 製品 i を t 期に生産するか否かの決定問題。

(2) 生産する場合，その生産量 (ロットサイズ) を決める問題。

(3) 生産する場合，それを当該期で何番目とするか (どの製品の直後に生産するか) を決める順序付け問題。

という 3 つの部分問題が含まれており，非常に小規模な問題を除いては，その最適解を得ることは不可能と思われる。そこで本章では問題 (P) に対するヒューリスティック解法を提案する。

まず上記の 1 番目と 2 番目の部分問題に対して，第 5 章と同様に以下の簡便法を採用する。

$$P_{it} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\tau=t}^{\tau^o} d_{i\tau} & \text{もし } I_{i,t-1} = 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{もし } I_{i,t-1} > 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{7.11}$$

式 (7.11) は，期首在庫がなければ生産量を当該期 t から将来のある期τ^o ($t \leq \tau^o \leq T$) までの累積需要量の和とし，もし期首在庫があれば当該期は生産しないことを表している。第 5 章の計算結果より，製品種類数が少ない場合を除いては，この簡便法により生産量を決定してもさほど影響はないものと思われる。この簡便法を用いるにあたっては，期τ^oの決定が費用のみならず計画の実行可能性からも重要となる。本章では各製品ごとに動的計画法を用いて仮にτ^oを設定し，このときに必要とされる総生産時間と定時生産時間の上限を比較し，必要に応じてτ^oの値を増減させる方法を用いる。

さて，3 番目の順序付け問題は，費用と時間の両面から検討しなければならないという難しさがある。さらに，たとえば費用のみを考慮すればよいとしても，1 期から T期までの全期間を対象とした順序付け問題の最適解を求めることは困難と思われる。一方，各期で問題を分割し，1 期から順に最適な順序付けがたとえ行えたとしても，これが T期間全体を対象としたときの最適順序に一致する保証はない。よって各期ごとの最適順序を求めることが必ずしも意味があるとは限らない。ただし，製品種類数が多くなれば，隣接する期間の接続部分の影響は相対的に弱まり，期の中での順序付け

が重要となってくる。そこで本章では比較的製品種類数の多い状況への適用を考慮し，問題を 1 期から順に各期ごとに分割して非対称巡回セールスマン問題と見なす。すなわち，直前期の最後に生産した製品を出発都市 (始点) と考え，当該期に生産しなければならない製品を，訪問しなければならない都市とおき，終点として仮想的な製品 (たとえば 0) を設けて，すべての製品から製品 0 への距離を零とおいて，始点から終点に至る最短経路を見つける問題とするのである。本研究では前提条件でも述べたように，都市間が物理的距離を表すわけではなく，時間ないし費用を表すため，巡回セールスマン問題の中でも特に非対称巡回セールスマン問題に該当する。そこで，その順序付けに Kanellakis と Papadimitriou (1980)[48] のヒューリスティック手法を採用する。この手法は Lin と Kernighan (1973)[53] のヒューリスティックを非対称問題に対して拡張したもので，巡回経路の一部を入れ替えるごとに目的関数値を求め，必ず減少するもののみを採用するという局部的な探索法の 1 つであり，100 都市程度の問題は高速に最良解を出力する。ただし最終解が初期解に依存するため，本来ならば多くの初期解を生成して最良解を求める必要があるが，簡単化のため，本章では後述の規則に基づいて作成した初期解のみを使用する。

7.3.2　解法手順

提案する手続きはフェーズ I とフェーズ II で構成され，この順に適用する。フェーズ I では 1 期から T期に向かって各期ごとにロットサイズと生産順序を決定していく。このとき，定時生産時間に余裕のある期ではできるだけ将来の需要分を当該期に作ることで，費用的には高くなってでも将来の能力不足に備える。逆に，フェーズ II では T期から 1 期に向かって各期の計画を調整する。これはフェーズ I で得られる計画が在庫を必要以上に確保しやすいため，定時生産時間に余裕のある期において，新たな段取りを加えることで過剰在庫を削減させることを主要な目的としている。

フェーズ I

ステップ 0 (平均段取費用の設定)　ロットサイズを決定するために，製品 i の平均段取費用$\hat{s}_i$を式 (7.12) で定義する。そして $t = 1$ とおく。

$$\hat{s}_i = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} s_{ji} \qquad i = 1, \ldots, N \quad (7.12)$$

ステップ 1 (t 期での平均段取時間の計算) t 期に生産しなければならない製品の集合，すなわち $(t-1)$ 期末在庫量が零で，t 期の需要量が零でない製品の集合をψ_tとおく。N_tを集合ψ_tの要素数とし，ψ_tに含まれる製品 i の平均段取時間$\bar{a}_i$を式 (7.13) によって設定する。なお，kは $(t-1)$ 期の最後に生産する製品を表す。

$$\bar{a}_i = \frac{1}{N_t}\Big\{\sum_{\substack{j\in\psi_t\\ j\neq i}} a_{ji} + a_{ki}\Big\} \qquad i \in \psi_t \quad (7.13)$$

これにより，t 期に生産しなければならない製品に対する t 期での平均段取時間の総和 y_tは $y_t = \sum_{i\in\psi_t} \bar{a}_i$ となる。

ステップ 2 (生産順序の決定) 生産時間制約の厳しい状況においては，総段取時間を短くするような順序付けを優先的に行う必要があると思われるし，やや制約が緩やかな状況においては，総段取費用を小さくするような順序付けも考慮の対象とする必要があろう。そこで，t 期に生産しなければならない製品 $i \in \psi_t$ に対する順序付けに以下の 3 つの手順を取りあげる。

手順 A (段取時間最小化志向) 段取時間の和の最小化を目的とした順序付けを行う。

手順 B (段取費用最小化志向) 段取費用の和の最小化を目的とした順序付けを行う。

手順 C (時間と費用のバランス化志向) まず段取時間の和の最小化を目的とした順序付けを行う。この結果の総段取時間が y_tに等しいか大きい場合には，この順序付けを採用する。そうでなければ，今度は段取費用の和の最小化を目的として順序付けをやり直す。ただし，途中で順序を変えるごとに総段取時間を求め，この値が y_tを越えた場合にはその時点で順序付けを終える。この手順は，段取時間については平均的な値 y_tを目標とすることで長期的な観点からの実行可能性を達成しつつ，近視眼的には各期における段取費用の最小化を目的としたものである。

なお，ψ_tの要素に対する初期順序の決定方法であるが，$(t-1)$ 期の最後に生産する製品が与えられたもとで，手順 A と手順 C は，まだ順序付けしていない製品の中で段取時間が最小のものを，手順 B は段取費用が最小のものを次に選ぶという近視眼的方法を用いる。この方法が適切な初期順序を生成するとは限らないが，簡潔であり，順序付けの目的を直接的に考慮しているために採用した。

ステップ 3 (t 期でのロットサイズの仮決定)　ステップ 2 において生産順序が決定したため，t 期における段取時間と段取費用が確定したことになる。そこでこのステップでは集合ψ_tに属する製品 i それぞれについて，次のような能力制約のないロットサイズ計画問題 $(\mathrm{LS})_i$を解く。

$(\mathrm{LS})_i$

$$\text{Minimize} \quad \sum_{\tau=t}^{T} \{h_{i\tau} I_{i\tau} + s'_{i\tau}\delta(P_{i\tau})\} \tag{7.14}$$

subject to

$$I_{i,\tau-1} + P_{i\tau} - I_{i\tau} = d_{i\tau} \qquad \tau = t, \ldots, T \tag{7.3$'$}$$

$$P_{i\tau}, I_{i\tau} \geq 0 \qquad \tau = t, \ldots, T \tag{7.9$'$}$$

ここに段取費用 $s'_{i\tau}$の値は，$\tau = t$ については確定値を用いるが，$\tau > t$ についてはステップ 0 で求めた平均値$\hat{s}_i$を用いる。この問題 $(\mathrm{LS})_i$は第 6 章の 6.3.1 節で論じた動的計画法によって最適解が得られる。簡単化のため添字の i を省略し，$(\tau - 1)$ 期末在庫量が $I_{\tau-1}$ $(I_{\tau-1} \geq 0)$ のとき，τ期からT期までの需要を満たす最小費用を $f_\tau(I_{\tau-1})$ で表すこととすれば，$\tau = t, \ldots, T$に対し式 (7.15) が得られる (ただし，$f_{T+1}(\cdot) = 0$)。

$$f_\tau(I_{\tau-1}) = \min_{P_\tau \in \Phi_\tau} \{h_\tau I_\tau + s'_\tau \delta(P_\tau) + f_{\tau+1}(I_\tau)\} \tag{7.15}$$

なお，$I_\tau = I_{\tau-1} + P_\tau - d_\tau$であり，集合$\Phi_\tau$は以下のとおりである。

$$\Phi_\tau = \begin{cases} \{d_\tau, \ldots, d_\tau + d_{\tau+1} + \cdots + d_T\} & I_{\tau-1} = 0 \text{ の場合} \\ \{0\} & I_{\tau-1} > 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{7.16}$$

最適解は式 (7.15) を$\tau = T$から t へと順次適用することで得られる。なお，この問題に対しては Wagner と Whitin (1958)[80]の計画期間定理を用いる方法もあるが，次のステップ 4 において必要とされる情報を求めるために，本章では上述の方法で最適解を求める。

ステップ 4 (ロットサイズの調整)　ステップ 3 で得られた各製品 i $(i \in \psi_t)$ の t 期のロットサイズをまとめると，t 期での総生産時間が定時生産時間の上限を越えていたり，あるいは大きく下回ったものとなっている可能性がある。前者は実行可能解とするためにロットサイズを小さくする必要がある。また後者については，費用的には割高となってでも，定時生産時間の枠内でロットサイズをできるだけ大きく

することで，将来の能力不足に備えることにする。このようなロットサイズの変更を行うためには，ψ_tに属する製品の中でどの製品のロットサイズを変更させるかが問題となるが，ここに第 6 章の 6.3.4 節で提案した考えを適用し，問題 $(\mathrm{LS})_i$を解く過程で得られている情報を活用する。ステップ 3 では t 期のロットサイズを t 期からτ期 $(\tau = t, \ldots, T)$ までの累積需要量としたときの総生産費用を求めている。ステップ 3 はその中で最も低費用となる計画を最適解として出力するが，さらにもう 1 期分の需要量を組み入れたり，逆に減らした場合の費用の増分も同時に求めているわけであるから，この費用増分が最小のものから順にロットサイズを増減させることで，定時生産時間を有効に利用する計画を求める。たとえば，現在τ $(\tau > t)$ までの累積需要量をロットサイズとしているものを，1 期分少ない $(\tau - 1)$ 期までに変更する場合，費用増分は，

$$f_{t+1}(d_{t+1} + \cdots + d_{\tau-1}) - f_{t+1}(d_{t+1} + \cdots + d_\tau) - h_t d_\tau \tag{7.17}$$

で与えられる (添字の i は省略している)。なお，このような調整によって得られたロットサイズがすべて t 期の需要量に等しい値で，かつそのときの総生産時間が定時生産時間の枠内に納まらない場合は，実行可能解が得られないものとして次のステップに移る。

ステップ 5 (対象期の移動)　$t = t + 1$ とし，$t \leq T$であればステップ 1 に戻り，そうでなければフェーズ I を終了する。

フェーズ II

ステップ 0 (初期化)　$t = T$とする。

ステップ 1 (定時生産時間の余裕分の活用)　t 期の定時生産時間に余裕がある場合には，在庫によって t 期の需要に引き当てていた製品 i を，新たに t 期に生産することとしたときの，在庫費用の削減分が段取費用の増加分を上回るとき，この変更が t 期の定時生産時間を越えない限りにおいてこれを採用する。製品 i の選択順序は，$h_{i,t-1}I_{i,t-1}$の大きいものを優先することとする。また，新たに生産する製品を追加することにより，t 期での順序付けをいかに変更するかが問題となるが，ここではすでに決まっている前後関係を崩さないようにしつつ，これらの間に挿入したときに，最も段取費用の増加の小さい場所に追加することとする。

ステップ2 (対象期の移動)　$t = t - 1$ とし，$t > 1$ であればステップ1に戻る。$t = 1$ の場合はフェーズIIを終了する。

7.4　数値計算例

7.4.1　計算の目的

ここでの数値計算には2つの目的がある。1つはフェーズIのステップ2(生産順序の決定) で取りあげた3つの手順A，B，Cの特徴を計算結果より検討することであり，もう1つは対象とする問題に対してアニーリング法を適用することで，提案した解法の解の良さを検討することである。ここで用いたアニーリング法はAartsとVan Laarhoven (1985)[1] のアプローチを基にし，冷却スケジュールは$\chi_0 = 0.95$，$\epsilon_s = 10^{-6}$，$\delta = 10^{-4}$とした。ここにχ_0とϵ_sはコントロール・パラメータの初期値と最終値を決定するパラメータであり，δは冷却速度を与えるパラメータである。なお，極度に長い計算時間を避けるため，コントロール・パラメータの更新回数の上限を10^6とした。アニーリング法を適用するにあたっては，生産時間制約を緩和し，総生産時間が利用可能な定時生産時間を越える部分については，残業生産が可能であるとした。ただし，単位残業費用は段取費用や単位在庫費用に比べて十分大きな値を与えることで，残業生産を必要とする計画は非常に高費用となるように設定した。アニーリング法の具体的な内容は付録Dにおいて述べる。

7.4.2　入力データ

問題を特徴付けるものとして以下の5つの項目を選び，それぞれ2つの水準を設定した。この設定は，第6章の数値計算の設定を基にしている。

- 製品種類数 N：50，100の2通り。
- 計画期間数 T：12，24の2通り。
- 需要量 d_{it}：以下の方法で，期ごとのばらつきが小と大の2通りに設定した。まず各製品 i に対し平均需要量 $\hat{d}_i$ を平均100，標準偏差30の正規分布から与えた。次に，製品 i の各期での需要量を平均 $\hat{d}_i$，標準偏差 $\hat{d}_i/k$ の正規分布から与えた。ここに kは需要のばらつきを与える係数で，ばらつきが小の場合には10を，ばらつきが大の場合には2を与えた。

- 段取時間 a_{ij}：短と長の 2 つの系列を用意し，短は区間 [0, 1000] から，長は区間 [0, 5000] からランダムに与えた後，三角不等式制約が成立するように調整した。
- 段取費用 s_{ij}：低と高の 2 つの系列を用意し，低は [0, 500] から，高は [0, 3000] からランダムに与えた後，段取時間と同様に三角不等式が成立するように調整した。

一方，以下の入力データはすべての計算において固定のものとした。

- 単位在庫費用 h_{it}：区間 [1, 3] からのランダム値を各製品ごとに割り振り，期によらない値とした。
- 単位当たりの必要生産時間 r_i：区間 [1, 5] からのランダム値。

以上で問題の組合せ総数は $2^5 = 32$ 通りとなるが，それぞれについて異なる 2 つの乱数系列を用いて，合計 64 通りの問題を作成した。

これら 64 問題それぞれについて，生産時間制約，すなわち定時生産時間の上限 $(rm)_t$ を与えなければならない。本章では，生産時間制約があまり緩すぎない状況を想定しているが，このような想定を満たす定時生産時間の上限を，入力データのみから算出することは困難である。そこで，まず需要量，単位在庫費用と式 (7.12) で求めた平均段取費用より経済的ロットサイズを求め，このロットサイズを採用したときの計画期間中での総生産時間を求める。このとき製品の順序付けは考慮せず，段取時間は式 (7.12) と同様に単純な平均値を用いる。これを計画期間数で割った値をその製品 i の平均負荷 W_i とする。そして総平均負荷 $W = \sum_{i=1}^{N} W_i$ を求め，各期の定時生産時間の上限として $0.4W$ から $1.2W$ の範囲で 10%刻みの値を準備した。ただし，1 期についてはこの値を 1.5 倍した。そして手順 A〜C のいずれかで実行可能な計画が得られた値から，すべての手順で実行可能な計画の得られた値までを考慮の対象とした。

7.4.3 計算結果と考察

手順 A(段取時間最小化志向)，B(段取費用最小化志向)，C(時間と費用のバランス化志向) が，どの程度厳しい生産時間制約のもとで実行可能解を見つけ出したかを整理したものが 図 7.1 である。たとえば手順 A では $0.5W$ と設定したとき，7 通りで実行可能解が得られているが，手順 B ではまったく実行可能解が得られておらず，手順 C では 1 通りにとどまっている。64 通りの問題の中で，手順 B や C では実行可能解の得られない生産時間制約設定においても，手順 A が実行可能解を見つけた場合が全体の約

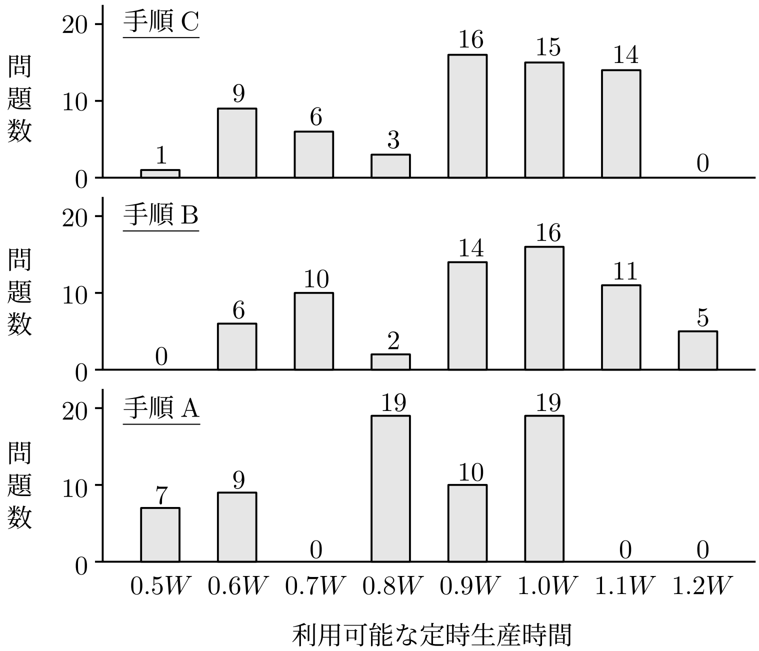

図 7.1　各生産時間制約設定において実行可能解が初めて得られた問題数

70%の 44 通りあった。特に，段取時間が長の設定においては，手順 B よりも少なくとも 1 レベル厳しい設定，たとえば手順 B が $0.8W$ までしか実行可能解を見つけられない場合でも，手順 A は $0.7W$ ないしそれ以下の設定における実行可能解を見つけ出していた。このことより，段取時間の和の最小化を目的とした順序付けは生産時間制約の厳しい場合に効果的であることがわかった。また，手順 C は手順 A と B の中間的な結果が見られ，手順 B が実行可能解を見つけることのできなかった生産時間制約設定において，手順 C が実行可能解を見つけた場合が 16 通りあった。

図 7.2 は，手順 A，B，C のすべてにおいて初めて実行可能解が得られた生産時間制約設定において，最も低費用であった計画 (最良解) と，手順 A で得られた総生産費用を比較したものである。この図からも明らかなように，手順 A では比較的高費用な計画が多く得られており，特に段取費用が高の設定において平均 8.8%高，最高で 20.1%高を示した。しかしながら，段取時間が長，段取費用が低の設定では差異が比較的小さく，このような状況では総段取時間が短くなるような順序付けをすることが，さほど費用的にも悪くないことがわかった。実際，手順 A の解が最も低費用となった場合も 7 通りあった。

図 7.3 は，図 7.2 と同様の分析を手順 C の結果について行ったものである。図 7.2

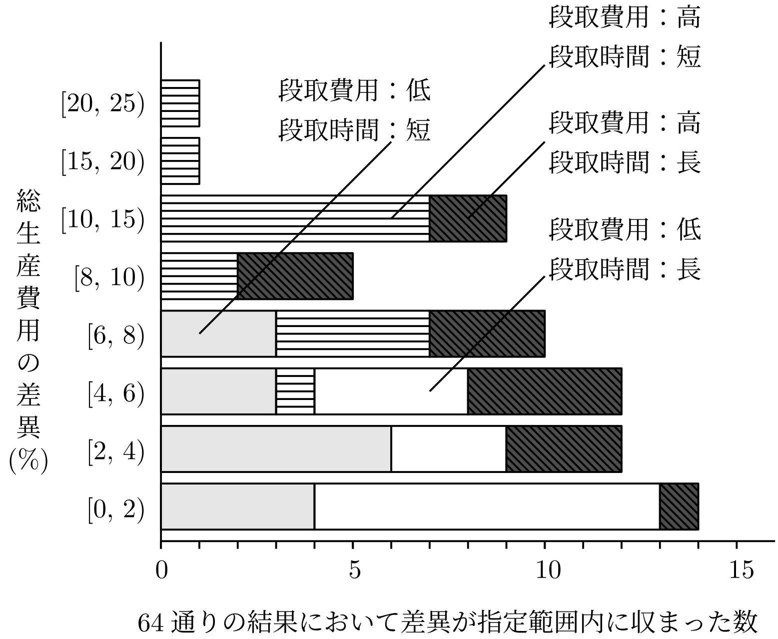

図 7.2 手順 A の解と最良解の総生産費用の差異 (%)

に比べて差異はかなり小さくなっており，特に，段取費用が高，段取時間が低の場合にかなりの改善がみられ，このような場合に費用と時間の両者を考慮した順序付けが有効であると言えよう。

64 問題の中で，手順 A，B，C で同じ生産時間制約設定でしか実行可能解が得られなかった場合が 14 通りあり，これらはすべて段取時間が短の設定であり，そのうちの 11 通りは製品種類数が 100 の場合であった。段取時間が短の場合，生産順序による総段取時間にあまり差がでない場合があったものと思われる。また，製品種類数が 100 の場合が多いのは，本手法で用いた順序付け手法による総段取時間最小化が十分でなかったことも考えられる。

さて，本章で提案した解法がどの程度良い計画を求めているのかの検討は容易ではないが，製品種類数が 50 と 100 のそれぞれから 2 つずつランダムに選んだ 4 問題に対してアニーリング法を適用した。このとき初期解として以下の 2 つを用いた。

(a) 各期のロットサイズとして当該期の需要量を与え，生産順序はロットサイズが零でない製品を番号順に並べた解。

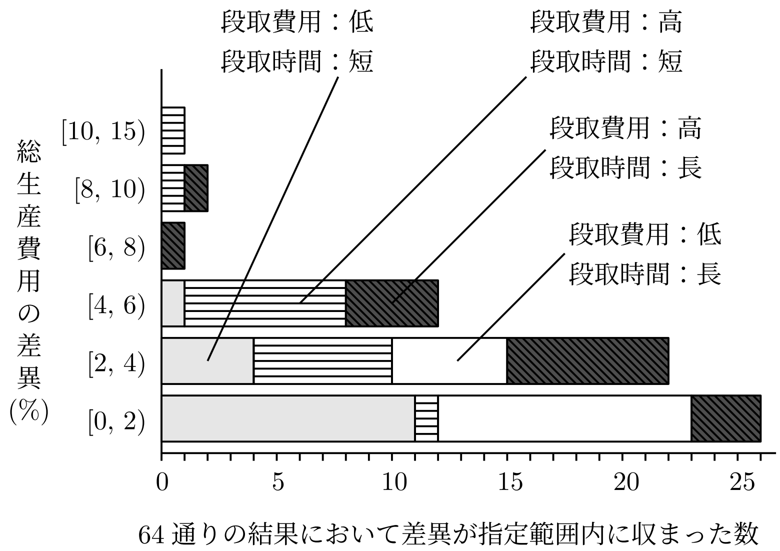

図 7.3　手順 C の解と最良解の総生産費用の差異 (%)

(b) 提案した解法が実行可能解を求めている生産時間制約設定においては最良解。

まず，(a) の初期解を用いた場合，提案した解法で実行可能解の得られなかった生産時間制約設定においてはアニーリング法でも実行可能解が得られなかった。また，提案した解法では実行可能解が得られていても，アニーリング法では実行可能解が見つけられない場合があり，実行可能解が得られても，その総生産費用は提案した解法で得られた最良解よりも平均で 80.3%高くなっていた。次に，(b) の初期解を用いた場合，アニーリング法は提案した解法で得られた最良解よりも良い解を見つけることができなかった。

本章で提案した解法では総段取費用が最小になる順序付けを見つける保証はないため，実行可能性を損なわない範囲で段取費用がより小さくなるように最良解の順序付けをしなおせば，さらに低費用な計画が得られる可能性は高い。しかしながら，アニーリング法は最良解を初期解として与えても，それよりも良い解を見つけることができなかった。これはアニーリング法で用いた候補解の生成方法にも再考の余地があるとは思われるが，対象とする問題があまりにも多くの潜在的組合せ数をもつために，アニーリング法のような汎用的な近似最適化手法では，さらに良い解を得ることが困難

であったものと思われる。また，提案した解法で得られた最良解は，比較的良好なものと推測される。

なお，製品種類数，計画期間数，そして需要量のばらつきが実行可能性や解の良さに対して与える顕著な影響は見られなかった。

アニーリング法が要した計算時間は IBM POWERstation 220 (約 26 SPECmark) で最高約 32 時間であった。一方，提案した解法が要した計算時間は同一ワークステーションで手順 C が長くても 7 分程度，手順 A，B では 1 分程度であった。手順 C は時間と費用に関して各期で 2 回順序付けを行う場合があるため，製品種類数が多い場合には不利であるが，生産時間制約があまり厳しくない設定では 1 分程度で解が得られた。

7.5　結言

本章では段取時間と段取費用がともに生産順序に依存する環境において，各期での各製品のロットサイズと，各期での製品の生産順序の決定問題に対するヒューリスティック解法を提案し，その特徴を数値計算例より検討した。その結果，提案した解法は規模として 100 製品 24 期間までの問題は高速に解を見つけ出し，部分的にアニーリング法との比較を行ったところ，解の精度も比較的良好であることがわかった。また，提案した解法を用いるにあたっては，各期における生産順序の決定が計画の実行可能性ならびに総生産費用の両面に大きく影響を与えることも明らかになった。生産時間制約が厳しい場合には，段取時間の和が小さくなるような順序付けが最優先されなければならないし，逆に，やや制約が緩やかな場合には，段取費用を重視した順序付けが総生産費用最小化に重要であることが確かめられた。時間と費用の両者を考慮した順序付け手順も検討したところ，実行可能性ならびに総生産費用の両面において，単独考慮の場合の中間的なパフォーマンスを示した。

さて，提案したヒューリスティック解法は，簡潔さに重点を置いており，以下の点にまだ改善の余地が残されている。

(1) 実行可能解を見つけるための工夫が不十分である。たとえばある期の総生産時間が定時生産時間の上限を越えてしまうにもかかわらず，当該期に生産しない製品が当該期末に繰り越し在庫をもつ場合がある。これは以前の期におけるロットサイズを変更することで，実行可能解が得られる可能性がある。しかしながら，このような取り扱いを実現するためには，より複雑な条件判定や繰り返しが必要とされる。

(2) 非対称巡回セールスマン問題を解くために用いた方法は，最終解が初期解に依存するため，本来ならば多くの初期解を生成して最良解を得ることが望ましい。提案した解法はかなり高速に解を求めているため，順序付けにおいて複数の初期解を考慮させることはさほど困難ではないものと思われる。

また，本章の今後の大きな課題として，与えられたデータから，あるいは解を求めていく過程の情報から，順序付けの目的を適切に決定する方法を見い出すことが挙げられる。

付録 D　比較に用いたアニーリング法

まず最初に，本章の問題における解の表し方ならびに候補解の生成方法について述べた後に，アニーリング法の諸設定を述べる。

まず，解の表し方であるが，t 期での製品 i の生産順序を整数変数 X_{it}で表すことにする。このとき，生産しない場合は順序を零，すなわち $X_{it}=0$ とする。すると解Φは X_{it}の集合，すなわち$\Phi=\{X_{it} \mid i=1,\ldots,N; t=1,\ldots,T\}$ と表せる。解Φが与えられたもとで，生産量 (ロットサイズ)P_{it}は，

$$P_{it}=\begin{cases}0 & \text{もし } X_{it}=0 \text{ の場合}\\ \displaystyle\sum_{\tau=t}^{t'-1} d_{i\tau} & \text{もし } X_{it}>0 \text{ の場合}\end{cases} \qquad i=1,\ldots,N; t=1,\ldots,T \quad (7.18)$$

で与える。ここに t'期は t 期以降最初に段取りを行う期であり，仮想的に $X_{i,T+1}=1, i=1,\ldots,N$と設定しているものとする。

次に候補解の生成方法であるが，1 つの解Φが与えられたとき，候補解Φ' を次のようにして生成する。期 t と製品 i を任意に選び，$y=X_{it}$とする。また，現在の解Φで t 期に生産する製品種類数を N_tとする。任意の整数乱数を $y=0$ の時には区間 $[1,N_t+1]$ から，$y\neq 0$ の時には区間 $[0,N_t]$(ただし yを除く) から発生させ[7]，その値を zとする。そして候補解として $X_{it}=z$とした解を設定するものとする。ただしこのとき，X_{it}は順序を表しているため，場合によっては t 期の生産順序を付け直す必要がある。たとえば，$y\neq 0$ であったものが $z=0$ となった場合，y以上の値をもつ製品 jについて X_{jt}の値を 1 だけ小さくする。一方，$y=0$ から $z>0$ の場合，z以上の値をもつ製品 jについて，X_{jt}の値を 1 だけ増やす。また y，zとも零でない場合は両者にはさまれる区間に対して修正を施す。このような順序付けの修正によって得られる矛盾のない解を候補解とした。

[7]具体的には，区間 $[0,N_t-1]$ から整数乱数を求め，その値が y以上であれば 1 を加えた値とする。

ただし，このような候補解の生成方法を用いるにあたっては，いくつかの留意事項がある。まず，選ばれた製品 i と期 t について，現在の値が $X_{it} = 0$ であった場合，これを $X_{it} > 0$ とすると，同一製品の他の期での生産量が零になってしまう場合がある。たとえば対象とする製品の需要量ならびに現在のロットサイズ計画が表 7.1に示されているとする。

表 7.1　対象製品の現在のロットサイズ計画

期	1	2	3	4	5	6	7	8
需要量 (個)	0	0	20	40	0	0	30	50
生産量 (個)	0	20	0	40	0	0	30	50

仮に，選ばれた期 t が 3 であるとすると，式 (7.18) より，3 期の生産量が 20(個) となり，2 期の生産量は零となる。よって，2 期に生産する製品種類から当該製品を除去しなければならない。ただし，逆の場合については式 (7.18) を適用せず，たとえば表 7.1 の計画において，もし選ばれた期が 6 であれば，7 期の生産量 30(個) を 6 期に移動させ，7 期に生産する製品種類から当該製品を除外することにする。

このように，t 期に新たに生産する製品を加える場合には，他の期の計画に影響を与える場合がある。これを整理すれば

(1) 当該期 t よりも前の期τ $(\tau < t)$ において，当該製品の生産量が零となる場合がある。

(2) 当該期 t よりも後の期κ $(\kappa > t)$ において，当該製品の生産量が零となる場合がある。

となる。このように，τ期ないしκ期で製品 i の生産量が零となる場合，$X_{i\tau} = 0$ ないし $X_{i\kappa} = 0$ として，τ期ないしκ期の生産順序も付け直すこととする。ただし，以下のような複雑な場合も生じうる。

a) (1) の場合において$\tau = t - 1$ であり，当該製品がτ期において最後に生産する製品であり，t 期では最初に生産する予定になっている場合。

b) (2) の場合において$\kappa = t + 1$ であり，当該製品がκ期において最初に生産する製品であり，t 期では最後に生産する予定になっている場合。

このような場合に対しては，候補解の目的関数値の計算に特に注意が必要とされる。

一方，選ばれた期 t と製品 i において，現在の解Φが $X_{it} > 0$ の場合，これを候補解Φ'において $X_{it} = 0$ とする場合には，Φ'の実行可能性を検討しなければならない。たとえば，表 7.1 の計画において，$t = 2$ であれば 3 期の需要量 20(個) が満足できないため，Φ'は実行不可能な計画となる。このように実行不可能な場合には，その候補解を棄却して次の候補解を生成させる。

次に，アニーリング法の諸設定について述べる。まず，コントロール・パラメータの初期値は，最初にこれを零とおいた状態から値を大きくして，最初のマルコフ連鎖で候補解が解として採用される比率がχ_0に近づいた時点で打ち切り，これをコントロール・パラメータの初期値 c_0 とおいた。

一方，手続きの停止基準は

$$\frac{c_{k+1}}{\langle f \rangle_{c_0}} \frac{\bar{f}_{k+1} - \bar{f}_k}{c_{k+1} - c_k} < \epsilon_s \tag{7.19}$$

とおいた。ここに c_kは k番目のマルコフ連鎖におけるコントロール・パラメータの値を，$\langle f \rangle_{c_0}$は最初のマルコフ連鎖における目的関数の平均値を，$\bar{f}_k$は k番目のマルコフ連鎖における最後の n 回分の目的関数の平均値を表す。ここでの n の値は製品種類数 Nと設定した。

コントロール・パラメータの更新には次式を用いた。

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{1 + \frac{c_k \cdot \ln(1+\delta)}{3\sigma_k}} \tag{7.20}$$

ここに，σ_kは k番目のマルコフ連鎖における目的関数値の標準偏差である。なお，各コントロール・パラメータ値におけるマルコフ連鎖の長さは，製品種類数 Nの 3 倍と設定した。

第 8 章

結論

本論文では，生産システムを効率的に運用するための生産能力計画モデルとロットサイズ計画モデルを構築するとともに，そのヒューリスティック解法を論述した。生産能力計画は通常，ロットサイズ計画の上位に位置づけられる生産計画であり，将来の生産能力と生産水準を計画することを主要な目的とする。本研究では生産能力計画モデルとして生産スイッチング法に焦点をあて，その計画モデルを混合整数計画問題に定式化し，適切なパラメータ値を求めることを試みた。一方，ロットサイズ計画は，上位の生産能力計画から与えられた生産能力制約を越えることなく，各製品の需要を満たす低費用な計画を求めることを目的とする。本研究では従来の研究成果を踏まえ，ラグランジュ緩和法ならびにアニーリング法を中心とし，ロットサイズ計画問題の特徴を考慮したヒューリスティック解法を提案した。各章において得られた成果の要約は以下のとおりである。

第 1 章では，本研究の目的を明らかにするとともに，関連する従来の研究を整理し，本研究の意義を述べた。

第 2 章では，生産スイッチング法における生産水準とそれに対応した労働力量，目標在庫水準の最適値を，従来の探索法に代えて数理計画問題を解くことで求めることをねらい，生産スイッチング・ヒューリスティックを組み込んだ混合整数計画問題を定式化した。数値計算例において塗料製造会社の 2 次費用関数に対して線形近似を行い，最適値を求めて他のモデルによる結果と比較したところ，良好なパフォーマンスを示した。また，生産水準数決定の観点からも本モデルが有効であることを明らかにした。

第 3 章では，生産水準があらかじめ特定の離散値に限られている環境に対して提案されている生産スイッチング規則に焦点をあて，水準数を 3 としたときの生産水準選択と目標在庫水準決定の問題を混合整数計画問題に定式化するとともに，問題の特徴を生かした 1 つのヒューリスティック解法を提案した。定式化した混合整数計画問題は最適に解きにくい構造をしているが，整数制約を緩和することによって得られる最適

解の下界値は，ヒューリスティック解法による解の精度の検討に役立つ場合のあることを述べた。またヒューリスティック解法は，適切な照準値が与えられれば，目標在庫水準の初期値にあまり影響されることなく最適解を比較的効率よく見い出すことを明らかにした。

第 4 章では，段取費用を考慮したロットサイズ計画問題に対し，ラグランジュ緩和法を用いたヒューリスティック解法を提案した。問題の緩和にあたっては，緩和された問題においても生産時間制約を明示的に考慮するように，問題を冗長な形に表現し直す方法を採用した。これによりロットサイズ計画問題は，生産時間計画問題と能力制約のないロットサイズ計画問題へと分割でき，生産時間計画問題からは原問題の実行可能解が必ず得られる。また，能力制約のないロットサイズ計画問題の解の実行可能化を目的としたヒューリスティックな解の改善手続きも提案した。数値計算例において解の精度を検討したところ，得られる解の精度は必ずしも安定していないが，製品種類数が多い状況においては，解の精度も良好であることが確かめられた。

第 5 章では，段取時間と段取費用を考慮したロットサイズ計画問題に対し，ロットサイズを段取変数の値に応じて零ないし累積需要量に等しくするという簡便法を用いることで，対象問題を組合せ最適化問題に簡単化し，アニーリング法に基づくヒューリスティック手続きを適用した。数値計算例においてラグランジュ緩和法との比較を行ったところ，平均的な解の精度はヒューリスティック手続きの方が優れた結果を示したが，乱数のシードに比較的影響を受けやすく，所要計算時間が長くなりやすいことも明らかになった。また，ロットサイズを零ないし累積需要量に等しくするという簡便法は，製品種類数の増加に伴って，解の精度にほとんど影響を与えなくなることが確かめられた。

第 6 章では，製品種類数が多い大規模ロットサイズ計画問題に対し，ラグランジュ緩和により問題を残業生産時間計画問題と，各製品ごとの能力制約のないロットサイズ計画問題に分割し，サブ勾配法によりラグランジュ乗数を更新する方法を提案した。また，能力制約のないロットサイズ計画問題の解を実行可能解に修正するためのヒューリスティック手続きに，問題の大規模性を踏まえた新たな方法を提案した。数値計算例において提案した解法を検討したところ，単位残業費用の低い環境において最適解にかなり近い最良解を見つけ出すことがわかった。なお，単位残業費用が高い場合には最良解と下界値の差異がかなり大きくなる場合もあるが，サブ勾配法を繰り返し適用することで，下界値をかなり改善できる場合のあることを示した。また平均計算時間は製品種類数の増加に対して比例的傾向を示し，提案した解法は製品種類数が多く，

計画期間数の少ない大規模問題に適していることを示した。

第 7 章では，段取時間と段取費用がともに生産順序に依存する環境において，各期での各製品のロットサイズと，各期での製品の生産順序の決定問題に対するヒューリスティック解法を提案し，その特徴を数値計算例より検討した。その結果，提案した解法は規模として 100 製品 24 期間までの問題は高速に解を見つけ出し，部分的にアニーリング法との比較を行ったところ，解の精度も比較的良好であることがわかった。また，提案した解法を用いるにあたっては，各期における生産順序の決定が計画の実行可能性ならびに総生産費用の両面に大きく影響を与えることも明らかになった。生産時間制約が厳しい場合には，段取時間の和が小さくなるような順序付けが最優先されなければならないし，逆に，やや制約が緩やかな場合には，段取費用を重視した順序付けが総生産費用最小化に重要であることが確かめられた。時間と費用の両者を考慮した順序付け手順も検討したところ，実行可能性ならびに総生産費用の両面において，単独考慮の場合の中間的なパフォーマンスが得られた。

なお，第 4 章から第 6 章において提案したヒューリスティック解法を他章のロットサイズ計画問題に適用するためには，それぞれの問題の特徴を踏まえた手続きの変更が必要と思われる。

上述のように，生産能力計画問題とロットサイズ計画問題に対するモデル化ならびに新たなヒューリスティック解法の提案を行い，いくつかの知見を得たが，まだ以下のような諸課題が残されている。

需要予測誤差への対応　本研究では，モデルへの入力データがすべて既知であるものとして論述してきたが，このような仮定は通常成り立たず，特に需要予測には予測誤差が避けられない。このような場合，安全在庫を確保するか，あるいは生産能力に余裕をもたせておくことが必要となるが，これらの最適決定も重要な検討課題である。

多段階工程への拡張　本研究で論述したロットサイズ計画問題は単一工程を対象としてきた。通常，多段階工程においても，実質的な生産性を制約している工程は比較的限られているため，単一工程を対象とした研究には十分な価値があるが，多段階工程におけるロットサイズ計画問題も重要な研究課題であることは述べるまでもない。本研究で論じた諸手法を多段階工程の問題へと拡張させていく必要がある。

階層的生産計画法への統一化　第 1 章で述べたように，生産計画は階層的な構成と

なっており，上位の計画における決定項目が下位の計画における入力パラメータとなる。各計画レベルが考慮すべき入力項目と決定項目はそれぞれ異なっているが，一貫した枠組みの中で各計画レベルを調整することで，全体的目標が達成されるような計画を各レベルごとに求めなければならない。本研究では生産能力計画とロットサイズ計画を論じてきたが，両者の統合についての検討は十分ではなく，さらに下位レベルのスケジューリング問題の統合も含めた，階層的な生産計画法の枠組みを確立しなければならない。

謝辞

本研究を進めるにあたり，終始懇切な御指導と御教示を賜りました広島大学工学部第二類 (電気系) 中村信人 教授に心から感謝の意を表します。

また，本論文をまとめるにあたり，有益な御助言をいただきました広島大学工学部第二類 (電気系) 長町三生 教授，坂和正敏 教授，佐々木博司 教授，そして広島大学工学部第一類 (機械系) 大場史憲 教授に深く感謝いたします。

さらに，学生時代より御指導いただきました今は亡き恩師，新宮哲郎先生にも厚く御礼申し上げます。

参考文献

[1] Aarts, E. H. L. and P. J. M. Van Laarhoven (1985), Statistical cooling: A general approach to combinatorial optimization problems, *Philips Journal of Research*, Vol.40, No.4, pp.193–226.

[2] Aarts, E. H. L. and J. H. M. Korst (1989), *Simulated Annealing and Boltzmann Machines*, John Wiley & Sons, Chichester.

[3] Bahl, H. C., L. P. Ritzman, and J. N. D. Gupta (1987), Determining lot sizes and resource requirements: A review, *Operations Research*, Vol.35, No.3, pp.329–345.

[4] Balinski, M. L. (1961), Fixed-cost transportation problems, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.8, pp.41–54.

[5] Barany, I., T. J. Van Roy, and L. A. Wolsey (1984), Strong formulations for multi-item capacitated lot sizing, *Management Science*, Vol.30, No.10, pp.1255–1261.

[6] Barman, S. and E. E. Burch (1989), The production switching heuristic: A practical revision, *International Journal of Production Research*, Vol.27, No.11, pp.1863–1875.

[7] Barman, S. and R. J. Tersine (1993), Comparing two aggregate planning models, *OMEGA*, Vol.21, No.5, pp.511–517.

[8] Bazaraa, M. S. and C. M. Shetty (1979), *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, New York.

[9] Bazaraa, M. S. and J. J. Goode (1979), A survey of various tactics for generating Lagrangian multipliers in the context of Lagrangian duality, *European Journal of Operational Research*, Vol.3, No.4, pp.322–338.

[10] Billington, P. J., J. O. McClain, and L. J. Thomas (1986), Heuristics for multilevel lot-sizing with a bottleneck, *Management Science*, Vol.32, No.8, pp.989–1006.

[11] Bowman, E. H. (1956), Production scheduling by the transportation method of linear programming, *Operations Research*, Vol.4, No.1, pp.100–103.

[12] Bowman, E. H. (1963), Consistency and optimality in managerial decision making, *Management Science*, Vol.9, No.2, pp.310–321.

[13] Buffa, E. S. and R. K. Sarin (1987), *Modern Production/Operations Management*, Eighth Edition, John Wiley & Sons, New York.

[14] Cattrysse, D., M. Salomon, R. Kuik, and L. N. Van Wassenhove (1993), A dual ascent and column generation heuristic for the discrete lotsizing and scheduling problem with setup times, *Management Science*, Vol.39, No.4, pp.477–486.

[15] Claassen, G. D. H. and P. Van Beek (1993), Planning and scheduling packaging lines in food industry, *European Journal of Operational Research*, Vol.70, No.2, pp.150–158.

[16] Coker, J. L. (1985), Analyzing production switching heuristics for aggregate planning models via an application, *Production and Inventory Management*, Vol.26, Fourth Quarter, pp.1–13.

[17] Conway, R. W., W. L. Maxwell, and L. W. Miller (1967), *Theory of Scheduling*, Addison-Wesley Publishing, Massachusetts.

[18] Diaby, M., H. C. Bahl, M. H. Karwan, and S. Zionts (1992), Capacitated lot-sizing and scheduling by Lagrangean relaxation, *European Journal of Operational Research*, Vol.59, No.3, pp.444–458.

[19] Diaby, M., H. C. Bahl, M. H. Karwan, and S. Zionts (1992), A Lagrangean relaxation approach for very-large-scale capacitated lot-sizing, *Management Science*, Vol.38, No.9, pp.1329–1340.

[20] Dilts, D. M. and K. D. Ramsing (1989), Joint lot sizing and scheduling of multiple items with sequence-dependent seup costs, *Decision Sciences*, Vol.20, No.1, pp.120–133.

[21] Dobson, G. (1992), The cyclic lot scheduling problem with sequence-dependent setups, *Operations Research*, Vol.40, No.4, pp.736–749.

[22] Dogramaci, A., J. C. Panayiotopoulos, and N. R. Adam (1981), The dynamic lot-sizing problem for multiple items under limited capacity, *AIIE Transactions*, Vol.13, No.4, pp.294–303.

[23] DuBois, F. L. and M. D. Oliff (1991), Aggregate production planning in practice, *Production and Inventory Management Journal*, Vol.32, No.3, pp.26–30.

[24] Dzielinski, B. P. and R. E. Gomory (1965), Optimal programming of lot sizes, inventory and labor allocations, *Management Science*, Vol.11, No.9, pp.874–890.

[25] Eglese, R. W. (1990), Simulated annealing: A tool for operational research, *European Journal of Operational Research*, Vol.46, No.3, pp.271–281.

[26] Eilon, S. (1975), Five approaches to aggregate production planning, *AIIE Transactions*, Vol.7, No.2, pp.118–131.

[27] Eisenhut, P. S. (1975), A dynamic lot sizing algorithm with capacity constraints, *AIIE Transactions*, Vol.7, No.2, pp.170–176.

[28] Elmaleh, J. and S. Eilon (1974), A new approach to production smoothing, *International Journal of Production Research*, Vol.12, No.6, pp.673–681.

[29] Eppen, G. D., F. J. Gould, and B. P. Pashigian (1969), Extensions of the planning horizon theorem in the dynamic lot size model, *Management Science*, Vol.15, No.5, pp.268–277.

[30] Federgruen, A. and M. Tzur (1991), A simple forward algorithm to solve general dynamic lot sizing models with n periods in $O(n \log n)$ or $O(n)$ time, *Management Science*, Vol.37, No.8, pp.909–925.

[31] Fisher, M. L., W. D. Northup, and J. F. Shapiro (1975), Using duality to solve discrete optimization problems: Theory and computational experience, *Mathematical Programming Study*, Vol.3, pp.56–94.

[32] Fisher, M. L. (1981), The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems, *Management Science*, Vol.27, No.1, pp.1–18.

[33] Fleischmann, B. (1990), The discrete lot-sizing and scheduling problem, *European Journal of Operational Research*, Vol.44, No.3, pp.337–348.

[34] Florian, M., J. K. Lenstra, and A. H. G. Rinnooy Kan (1980), Deterministic production planning: Algorithms and complexity, *Management Science*, Vol.26, No.7, pp.669–679.

[35] Geoffrion, A. M. (1971), Duality in nonlinear programming: A simplified applications-oriented development, *SIAM Review*, Vol.13, No.1, pp.1–37.

[36] Geoffrion, A. M. (1974), Lagrangean relaxation for integer programming, *Mathematical Programming Study*, Vol.2, pp.82–114.

[37] Gilgeous, V. I. C. (1989), Modelling realism in aggregate planning: A goal-search approach, *International Journal of Production Research*, Vol.27, No.7, pp.1179–1193.

[38] Goodman, D. A. (1974), A goal programming approach to aggregate planning of production and work force, *Management Science*, Vol.20, No.12, pp.1569–1575.

[39] Graves, S. C. (1982), Using Lagrangean techniques to solve hierarchical production planning problems, *Management Science*, Vol.28, No.3, pp.260–275.

[40] Guignard, M. and M. B. Rosenwein (1989), An application-oriented guide for designing Lagrangean dual ascent algorithms, *European Journal of Operational Research*, Vol.43, No.2, pp.197–205.

[41] Hax, A. C. and H. C. Meal (1975), Hierarchical integration of production planning and scheduling, in *North-Holland/TIMS Studies in the Management Sciences*, Vol.1, *Logistics*, Edited by M. A. Geisler, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, pp.53–69.

[42] Hax, A. C. and D. Candea (1984), *Production and Inventory Management*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

[43] Held, M., P. Wolfe, and H. P. Crowder (1974), Validation of subgradient optimization, *Mathematical Programming*, Vol.6, pp.62–88.

[44] Holt, C. C., F. Modigliani, and H. A. Simon (1955), A linear decision rule for production and employment scheduling, *Management Science*, Vol.2, No.1, pp.1–30.

[45] Holt, C. C., F. Modigliani, J. F. Muth, and H. A. Simon (1960), *Planning Production, Inventories, and Work Force*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

[46] Johnston, R., S. Chambers, C. Harland, A. Harrison, and N. Slack (1993), *Cases in Operations Management*, Pitman Publishing, London.

[47] Jones, C. H. (1967), Parametric production planning, *Management Science*, Vol.13, No.11, pp.843–866.

[48] Kanellakis, P. -C. and C. H. Papadimitriou (1980), Local search for the asymmetric traveling salesman problem, *Operations Research*, Vol.28, No.5, pp.1086–1099.

[49] Kirkpatrick, S., C. D. Gelatt, Jr., and M. P. Vecchi (1983), Optimization by simulated annealing, *Science*, Vol.220, No.4598, pp.671–680.

[50] Kleindorfer, P. R. and E. F. P. Newson (1975), A lower bounding structure for lot-size scheduling problems, *Operations Research*, Vol.23, No.2, pp.299–311.

[51] Kuik, R. and M. Salomon (1990), Multi-level lot-sizing problem: Evaluation of a simulated-annealing heuristic, *European Journal of Operational Research*, Vol.45, No.1, pp.25–37.

[52] Lasdon, L. S. and R. C. Terjung (1971), An efficient algorithm for multi-item scheduling, *Operations Research*, Vol.19, No.4, pp.946–969.

[53] Lin, S. and B. W. Kernighan (1973), An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem, *Operations Research*, Vol.21, No.2, pp.498–516.

[54] Lozano, S., J. Larraneta, and L. Onieva (1991), Primal-dual approach to the single level capacitated lot-sizing problem, *European Journal of Operational Research*, Vol.51, No.3, pp.354–366.

[55] Maes, J. and L. N. Van Wassenhove (1986), A simple heuristic for the multi item single level capacitated lotsizing problem, *Operations Research Letters*, Vol.4, No.6, pp.265–273.

[56] Maes, J. and L. N. Van Wassenhove (1988), Multi-item single-level capacitated dynamic lot-sizing heuristics: A general review, *Journal of Operational Research Society*, Vol.39, No.11, pp.991–1004.

[57] Magnanti, T. L. and R. Vachani (1990), A strong cutting plane algorithm for production scheduling with changeover costs, *Operations Research*, Vol.38, No.3, pp.456–473.

[58] Manne, A. S. (1958), Programming of economic lot sizes, *Management Science*, Vol.4, No.2, pp.115–135.

[59] Meier, R. C., R. A. Johnson, W. T. Newell, and A. N. Schrieber (1982), *Cases in Production and Operations Management*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

[60] Mellichamp, J. M. and R. M. Love (1978), Production switching heuristics for the aggregate planning problem, *Management Science*, Vol.24, No.12, pp.1242–1251.

[61] Melnyk, S. A., P. L. Carter, D. M. Dilts, and D. M. Lyth (1985), *Shop Floor Control*, Dow Jones-Irwin, Illinois.

[62] Millar, H. H. and M. Yang (1993), An application of Lagrangean decomposition to the capacitated multi-item lot sizing problem, *Computers & Operations Research*, Vol.20, No.4, pp.409–420.

[63] Miller, D. L. and J. F. Pekny (1991), Exact solution of large asymmetric traveling salesman problems, *Science*, Vol.521, No.4995, pp.754–761.

[64] Nam, S. -J. and R. Logendran (1992), Aggregate production planning — A survey of models and methodologies, *European Journal of Operational Research*, Vol.61, No.3, pp.255–272.

[65] Newson, E. F. P. (1975), Multi-item lot size scheduling by heuristic. Part I: With fixed resources, *Management Science*, Vol.21, No.10, pp.1186–1193.

[66] Newson, E. F. P. (1975), Multi-item lot size scheduling by heuristic. Part II: With variable resources, *Management Science*, Vol.21, No.10, pp.1194–1203.

[67] Oliff, M. D. and E. E. Burch (1985), Multiproduct production scheduling at Owens-Corning Fiberglas, *Interfaces*, Vol.15, No.5, pp.25–34.

[68] Oliff, M. D. and G. K. Leong (1987), A discrete production switching rule for aggregate planning, *Decision Sciences*, Vol.18, No.4, pp.582–597.

[69] Oliff, M. D., H. S. Lewis, and R. E. Markland (1989), Aggregate planning in crew-loaded production environments, *Computers & Operations Research*, Vol.16, No.1, pp.13–25.

[70] Orr, D. (1962), A random walk production-inventory policy: Rationale and implementation, *Management Science*, Vol.9, No.1, pp.108–122.

[71] Salomon, M., L. G. Kroon, R. Kuik, and L. N. Van Wassenhove (1991), Some extensions of the discrete lotsizing and scheduling problem, *Management Science*, Vol.37, No.7, pp.801–812.

[72] Shapiro, J. F. (1993), Mathematical programming models and methods for production planning and scheduling, in *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol.4, *Logistics of Production and Inventory*, Edited by S. C. Graves, A. H. G. Rinnooy Kan, and P. H. Zipkin, North-Holland, Amsterdam, pp.371–443.

[73] Thomas, L. J. and J. O. McClain (1993), An overview of production planning, in *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol.4, *Logistics of Production and Inventory*, Edited by S. C. Graves, A. H. G. Rinnooy Kan, and P. H. Zipkin, North-Holland, Amsterdam, pp.333–370.

[74] Thizy, J. M. and L. N. Van Wassenhove (1985), Lagrangean relaxation for the multi-item capacitated lot-sizing problem: A heuristic implementation, *IIE Transactions*, Vol.17, No.4, pp.308–313.

[75] Trigeiro, W. W. (1989), A simple heuristic lot sizing with setup times, *Decision Sciences*, Vol.20, No.2, pp.294–303.

[76] Trigeiro, W. W., L. J. Thomas, and J. O. McClain (1989), Capacitated lot sizing with setup times, *Management Science*, Vol.35, No.3, pp.353–366.

[77] Uzsoy, R., C. -Y. Lee, and L. A. Martin-Vega (1992), A review of production planning and scheduling models in the semiconductor industry. Part I: System characteristics, performance evaluation and production planning, *IIE Transactions*, Vol.24, No.4, pp.47–60.

[78] Van Laarhoven, P. J. M., E. H. L. Aarts, and J. K. Lenstra (1992), Job shop scheduling by simulated annealing, *Operations Research*, Vol.40, No.1, pp.113–125.

[79] Vergin, R. C. (1980), A new look at production switching heuristics for the aggregate planning problem, *Management Science*, Vol.26, No.11, pp.1185–1186.

[80] Wagner, H. M. and T. M. Whitin (1958), Dynamic version of the economic lot size model, *Management Science*, Vol.5, No.1, pp.89–96.

[81] Walker, W. E. (1976), A heuristic adjacent extreme point algorithm for the fixed charge problem, *Management Science*, Vol.22, No.5, pp.587–596.

[82] Wilhelm, M. R. and T. L. Ward (1987), Solving quadratic assignment problems by simulated annealing, *IIE Transactions*, Vol.19, No.1, pp.107–119.

[83] Zabel, E. (1964), Some generalizations of an inventory planning horizon theorem, *Management Science*, Vol.10, No.3, pp.465–471.

[84] 秋庭雅夫, 佐久間章行, 高橋弘之, 吉田祐夫 (1980) ：生産管理 (経営工学シリーズ 13), 日本規格協会, 東京.

[85] 田村隆善 (1988), 多品目・多段階生産システムの生産計画問題に対する一解法, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.54, No.504, pp.1974–1982.

[86] 人見勝人 (1975)：生産システム工学 (大学講座機械工学 31), 共立出版株式会社, 東京.

公表論文

本論文に関連した公表論文は以下のとおりである。

[1] 森川克己, 中村信人 (1990), 生産スイッチング法に関する研究：混合整数計画問題への定式化, 日本経営工学会誌, Vol.41, No.5, pp.361–366.

[2] 森川克己, 中村信人 (1991), 段取費用を考慮した生産計画問題に対するラグランジュ緩和アプローチ, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.57, No.543, pp.3726–3733.

[3] 森川克己, 中村信人 (1992), 生産スイッチング規則における生産水準選択と目標在庫水準決定のための混合整数計画問題と一解法, 日本経営工学会誌, Vol.42, No.6, pp.389–396.

[4] 森川克己, 中村信人 (1993), 残業生産を考慮したロットサイズ決定問題に対するアニーリング・ヒューリスティック, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.59, No.558, pp.611–616.

[5] Katsumi Morikawa and Nobuto Nakamura (1993), Production planning and scheduling of multiple items with sequence-dependent setup times, *Proceedings of the 12th International Conference on Production Research*, August 16–20, Lappeenranta, Finland, pp.335–336.

[6] Katsumi Morikawa and Nobuto Nakamura (1993), Lagrangean relaxation for the multi-item lot-sizing problem, *Proceedings of the Second China-Japan International Symposium on Industrial Management*, October 16–19, Beijing, China, pp.312–317.

[7] 森川克己, 中村信人 (1994), 生産能力制約のある大規模生産計画問題の解法, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.60, No.575, pp.2484–2490.