

博 士 論 文

不純物を含む液体ヘリウム3中の音波

平成14年3月

広島大学大学院生物圏科学研究科

環境計画科学専攻

市 川 貴 之

# 目次

第1章 序説	5
第2章 液体 $^3\text{He}$	13
2.1 Fermi 流体理論	13
2.2 超流動 $^3\text{He}$	19
2.3 エアロジェル中 $^3\text{He}$	24
第3章 液体 $^3\text{He}$ における音波	29
3.1 常流動 $^3\text{He}$ 中での音波	29
3.1.1 Landau-Boltzmann 理論	29
3.1.2 縦波	31
3.1.3 横波	36
3.2 超流動 $^3\text{He}$ 中での音波	38
3.2.1 オーダパラメータの集団励起	39
3.2.2 縦波	42
3.2.3 横波	45
3.2.4 エアロジェル中 $^3\text{He}$ -超流動相での音波	46
第4章 エアロジェル中 $^3\text{He}$ 常流相での音波	49
4.1 エアロジェル中 $^3\text{He}$ 常流動相での音波の実験	50
4.2 不純物散乱による衝突項	51
4.3 音波の分散関係	52
4.4 Collision Drag Effect	54
4.4.1 不純物散乱-再考	55
4.4.2 エアロジェルの運動	55

4.4.3	エアロジェル中の音波	57
<b>第 5 章</b>	<b>Keldysh 形式のグリーン関数と準古典的理論</b>	<b>63</b>
5.1	Hamiltonian	63
5.2	Keldysh グリーン関数	64
5.3	線形応答	68
5.4	準古典的理論	70
5.4.1	平衡状態での準古典的グリーン関数	70
5.4.2	線形応答の準古典的グリーン関数	71
5.4.3	物理量の準古典的グリーン関数による表現	71
<b>第 6 章</b>	<b>純粋な超流動 <math>^3\text{He}</math> での音波</b>	<b>75</b>
6.1	純粋な超流動 $^3\text{He}$ での線形応答グリーン関数	75
6.2	オーダーパラメータの集団励起	77
6.2.1	B 相	77
6.2.2	A 相	79
6.3	ABM 状態での横波	83
<b>第 7 章</b>	<b>不純物を含む超流動相での音波</b>	<b>89</b>
7.1	不純物効果	89
7.2	不純物を含む系での線形応答グリーン関数	94
7.3	BW 状態でのパーテックス補正	97
7.4	1 次のギャップ方程式	100
7.5	不純物を含む $^3\text{He}$ -B 相での縦波	102
7.5.1	常流動状態	103
7.5.2	超流動状態におけるクリーンな極限	104
7.5.3	ギャップレス状態での hydrodynamic 極限	105
7.6	吸収の数値計算結果	105
<b>第 8 章</b>	<b>まとめと考察</b>	<b>113</b>
8.1	常流動状態	113
8.1.1	衝突項の評価	113

8.1.2	超音波吸収に現れる不純物効果 . . . . .	114
8.1.3	Collision Drag 効果 . . . . .	114
8.2	超流動状態 . . . . .	115
8.2.1	Keldysh 形式での準古典的グリーン関数 . . . . .	115
8.2.2	純粋な超流動 $^3\text{He-A}$ 相での横波 . . . . .	115
8.2.3	不純物を含む超流動 $^3\text{He-B}$ 相での縦波 . . . . .	116
8.3	問題点と今後の課題 . . . . .	116
8.3.1	常流動状態 . . . . .	116
8.3.2	超流動状態 . . . . .	117
付録 A 不純物中での超流動転移温度		121
付録 B Faraday 効果		123
B.1	運動方程式 . . . . .	123
B.2	物質中での電磁波 . . . . .	124
付録 C 高エネルギーの寄与		127
C.1	粒子数密度 . . . . .	127
C.2	準粒子の流れ . . . . .	128
付録 D 線形応答関数の展開		131
付録 E バーテックス補正項		133
付録 F Yosida 関数についての恒等式		137

## 第1章 序説

$^3\text{He}$ は単体で存在する最も軽い原子であり、大きなゼロ点エネルギーを持つことから、常圧で絶対零度まで固化しないことが知られている。また電氣的に中性であり、レナードジョーンズ型の相互作用ポテンシャルを持つため液体状態においてはハードコアの斥力によって強く相互作用する。この $^3\text{He}$ 原子はスピン $\frac{1}{2}$ のFermi粒子であるため、十分低温ではLandau<sup>[1]</sup>によって記述された理想的なFermi流体の系を実現する。更に低温では超流動相<sup>[2]</sup>が安定な状態となる<sup>[3, 4]</sup>。これは準粒子間に引力相互作用が働きクーパー対が形成されるためである。この引力相互作用はスピンゆらぎを媒介としたものであると言われており、このような引力相互作用のもとでは、スピンに関しては三重項状態、軌道角運動量に関してはP波の対称性をもつ対を形成する。したがってクーパー対は内部自由度を持ち、超流動相に複数の安定な相が存在する可能性を持っている。実際、図1.1の圧力-温度相図に見られるように、超流動相におけ

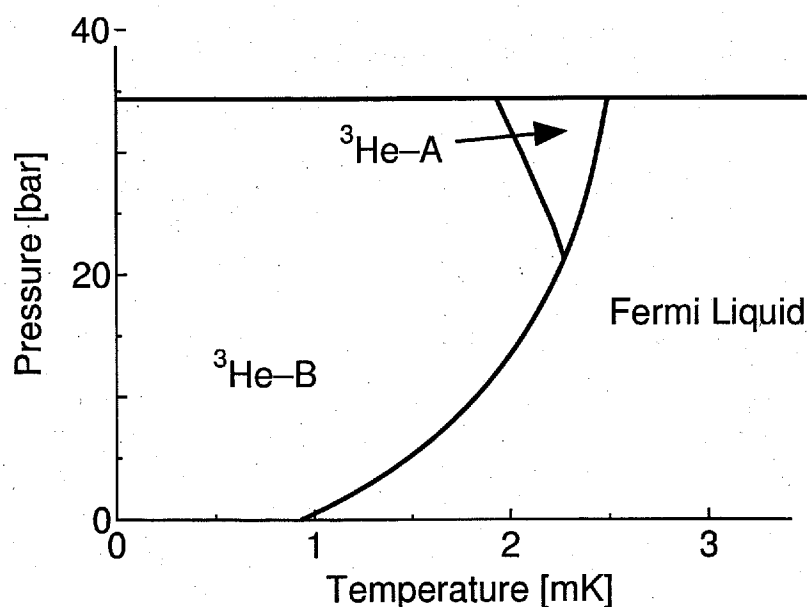


図 1.1:  $^3\text{He}$  の圧力-温度相図<sup>[5]</sup>

る高温高压側で A 相、それ以外の大部分の領域において B 相が実現している。液体  $^3\text{He}$  は強相関 Fermi 粒子系特有の多彩な物性を示す上に、内部自由度を持つオーダーパラメータの存在から、超流動相においても、この系特有の振る舞いを数多く示す。更に、液体  $^3\text{He}$  は極めて純度が高く、理論と実験の精密な比較が可能である。したがって、古くより盛んに研究がなされ、今もなおその研究対象としての興味が失われていない。また、最近発見された超伝導体  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$ <sup>[6, 7]</sup>、 $\text{UPt}_3$ <sup>[8]</sup> などでは、スピン三重項のクーパー対が形成されていると考えられ、これらの研究において超流動  $^3\text{He}$  はモデル物質としての役割を果たしている。

このように極めて純粋な系をなす液体  $^3\text{He}$  において、最近、エアロジェル中での振る舞いが注目されている。エアロジェルはシリカ ( $\text{SiO}_2$ ) をゼリー状にした後、高温高压状態において乾燥させて作られる寒天状の固体であるが、気体のように低密度の多孔質であり、またガラス並みの透明度でありながら屈折率の極めて小さい物質である。非常にもろい物質であり加工等には向いていないが、宇宙空間に存在するマイクロなちり (宇宙ダスト) を捕集するために利用されたり、高い絶縁性を生かした利用、あるいは断熱材として利用され、主に宇宙産業において更なる応用が期待される物質である。マイクロな立場から見ると、シリカが鎖状ネットワークをなし、複雑なフラクタル構造を持っている。本研究で注目する代表的な約 98% の空孔率を示すエアロジェルでは、その鎖の半径は  $R \simeq 3[\text{nm}]$  であり、鎖と鎖の平均間隔は  $d \simeq 30[\text{nm}]$  であると見積もられている。また、単位体積あたりにエアロジェルが占める表面積は  $A \simeq 2.6 \times 10^{-2}[\text{nm}^{-1}]$  であり、これから見積もられる幾何学的平均自由行程は  $l_{\text{geo}} = 4/A \simeq 150[\text{nm}]$  となる<sup>[9]</sup>。エアロジェル中の  $^3\text{He}$  が注目されているのは、極めて純度の高い  $^3\text{He}$  に対してエアロジェルが不純物として働くのか、もしその場合、不純物が  $^3\text{He}$  特に超流動状態にどのような影響を与えるのかという点に興味があるからである。

エアロジェル中の  $^3\text{He}$  の超流動状態は Porto and Parpia<sup>[10]</sup> によって初めて調べられた。彼らはねじれ振子を用いて超流動密度を測定し、その温度変化を調べ、超流動転移温度が、純粋な液体  $^3\text{He}$  での結果に比べて低くなっていると報告した。この転移温度の抑制は、不純物散乱による  $^3\text{He}$  クーパー対の対破壊効果によるものと考えられる。P 波のクーパー対の場合は、非磁性不純物であっても不純物散乱によって対破壊効果を受ける。エアロジェルを均一に分布した不純物と仮定すれば、Abrikosov and Gorkov<sup>[11]</sup> による S 波超伝導体における磁性不純物散乱効果の理論と同様な方程式を

用いて、超流動転移温度と不純物散乱による平均自由行程との関係を求めることができる。それによれば、実験から求められた超流動転移温度から評価される平均自由行程は、上に述べたエアロジェルの幾何学的平均自由行程  $l_{\text{geo}}$  と同程度になる。

均一分布不純物モデルを用いると、さらに超流動相の物理量に対する不純物効果を計算することができ、Ginzburg-Landau 自由エネルギーに現れるパラメータ [9] や、超流動密度 [12, 13]、超音波吸収 [12] などの計算が報告されている。それらによれば、エアロジェル中の  $^3\text{He}$  においては、転移温度や超流動密度等は不純物効果によって抑制されるものの、純粋な系でみられるように A、B 二つの相が安定であるという結果になる。

その後、NMR や音波吸収などの実験が数多く報告されてきたが、実験結果は、均一不純物モデルの予言とは大幅に異なったものになっている。例えば、転移温度の磁場依存性と帯磁率の温度変化は A 相を仮定しても B 相を仮定しても説明できない。あるいは、平均自由行程の値も、転移温度、帯磁率、輸送係数から評価される値がそれぞれの間で数倍異なっている。このように、現段階では、エアロジェル中の  $^3\text{He}$  の超流動状態については統一的理解が得られていないと言ってよい。

最近、Northwestern 大学のグループ (Nomura *et al.* [14]) が、16[bar] の下で、15[MHz] という比較的高い振動数の超音波吸収の実験を常流動相から超流動相にわたる広い温度範囲で行った。彼らは、吸収<sup>1</sup>の温度変化を測定し、純粋な  $^3\text{He}$  系での同じ振動数の実験結果と比較した (図 1.2)。驚くべきことに、エアロジェルが不純物の役割を果たしていると思われるにもかかわらず、吸収の絶対値は純粋な系の場合とあまり変わらない。しかし温度依存性は純粋  $^3\text{He}$  とは異なっており、常流動相において、吸収は 5[mK] 以下の低温域ではほぼ一定で、10[mK] 程度から減少し、数 10[mK] 以上の高温域ではまた一定の値になっていて、純粋な系で見られる第 0 音波から第 1 音波への転移は観測されなかった。超流動相では純粋な系で観測される秩序パラメータの集団励起による吸収ピークも観測されなかった。彼らは、常流動相での吸収の温度変化を現象論的な visco-elastic model (粘弾性モデル) [15] を用いて解析したが、実験結果を説明することは出来なかった。10[mK] 以下の低温域で実験値と合うように visco-elastic model のパラメータを選ぶと、高温域では吸収は単調に減少するのみで、一定の値に留まるという結果は得られない。後述するように、微視的立場から見たとき、visco-elastic

<sup>1</sup> $x$  方向に伝播する音波の振幅が  $e^{-\alpha x}$  のように減衰するとき、 $\alpha$  を吸収と呼ぶ

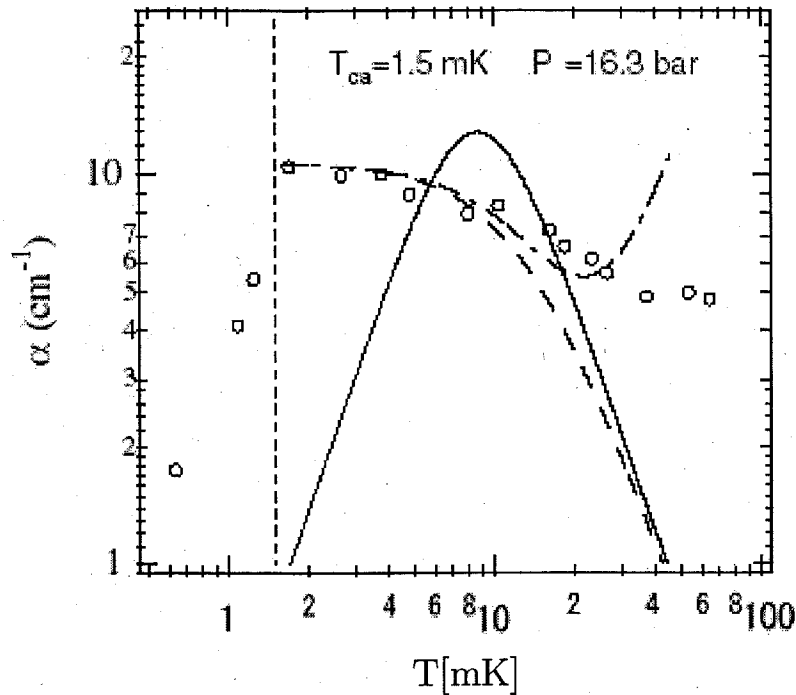


図 1.2: North Western グループによる Aerogel 中における音波の吸収の温度依存性

model では不純物散乱の効果が十分には取り入れられていないからである。

本論文の第1の目的は、微視的立場からエアロジェル中の $^3\text{He}$ の常流動相での超音波の伝播と吸収を考察することである。

純粋な液体 $^3\text{He}$ の常流動相での音波は、LandauによるFermi流体理論によって微視的に記述できる<sup>[16]</sup>。Fermi流体の振る舞いは、準粒子の分布関数で記述される。Landauは、準粒子間の衝突項を含むBoltzmann方程式から出発して、音波の伝播を議論した。高温では準粒子間の衝突の頻度が増し、局所平衡が達成されるために通常の流体力学的音波である第1音波が伝播する。これに対し低温では準粒子間衝突の頻度が減少するため、通常の流体力学的音波は伝播できない。しかし、液体 $^3\text{He}$ 準粒子間の強い相互作用を直接復元力とする音波が存在し、絶対零度においては吸収なしに伝播する。これは第0音波と呼ばれ、Collisionless音波として、Landauによって初めて予言された現象である。第1音波の伝播には密度と流れの振動が伴うが、それぞれに対応してFermi球のS波的な変形(等方的な変形)とP波的な変形が生じる。第0音波の場合は、さらにD波やより高次の変形を伴う。準粒子間の衝突はこのD波以上の変形を減衰させ、液体 $^3\text{He}$ を伝播する音波は高温になるとともに第1音波に変化



する。第0音波の吸収は低温になるに従い温度の二乗に比例して減少し、第1音波の吸収は高温になるに従い温度の二乗の逆数に比例して、やはり減少する。この二つの極限のクロスオーバーにおいて吸収の値はピークとなり、同時に音速にも変化が生じる。このことは、実験的に確認されている<sup>[17]</sup>。さて、Northwestern大学のグループが行った実験の条件である、圧力16[bar]、振動数15[MHz]の場合、純粋な $^3\text{He}$ ではこのピークは10mK付近で起こる。

不純物効果を微視的理論に取り入れるためにまず考え付くことは、Boltzmann方程式の衝突項に不純物散乱の項を付け加えることである。不純物散乱の効果は二通りある。一つは準粒子間衝突と同様Fermi球のD波以上の変形を減衰させる。後述するように、この効果はvisco-elastic modelで取り入れることが出来る。しかし、より重要なのは、二つ目の効果である。これは不純物散乱が $^3\text{He}$ の運動量を保存しないために、音波の伝播に伴う流れを減衰させる効果となる。実際、幾何学的に評価される平均自由行程を用いて計算すると、二つ目の効果のために吸収の値は純粋な $^3\text{He}$ の場合に比べ数百倍になる。このことは、予想されることで、不純物のある場合、純粋な系に比べて吸収が大きいのは当然といえよう。問題は、上でも述べたように、エアロジェル中の $^3\text{He}$ でNomura *et al.*<sup>[14]</sup>が観測した吸収が、純粋な系での値と同程度であるということである。したがって、不純物散乱を通常に扱うだけでは、実験とは大幅に異なる結果になる。

不純物があるにもかかわらず吸収が小さく留まるということは、音波に伴う流れが減衰しないということの意味する。これは、散乱体であるエアロジェルが動けば可能であり、 $^3\text{He}$ とエアロジェルが衝突を介して力を及ぼしあいながら一緒に動く(Collision Drag Effect)というシナリオで説明される。エアロジェルがともに動く分だけ慣性が増し、その結果、音速も減少することが予想されるが、そのことはGervais *et al.*<sup>[18]</sup>の実験でも確認されている。我々は、Boltzmann方程式に、散乱体であるエアロジェルの運動の効果を取り入れ、これをエアロジェルの運動方程式と連立させることによって音波の伝播を調べ、Nomura *et al.*の実験結果をよく再現する結果を得た。エアロジェルが $^3\text{He}$ と一緒に動く可能性はすでに指摘されている<sup>[19]</sup>が、微視的な立場からその機構を明らかにしたのは本研究が初めてである<sup>[20]</sup>。

さて、超流動相での音波の研究はこれまで実験と理論の両面から精力的に行われてきたが、超音波を用いたエアロジェル系での研究はNorthwesternのグループの実験が

最初である。超流動状態では常流動状態には無い音波の吸収の機構が二つ存在する。一つは対破壊過程 (2つの Bogoliubov 準粒子が励起される過程) による吸収であり、もう一つはクーパー対のゆらぎに起因する集団励起によるものである。純粋な  $^3\text{He}$  ではこれらの機構に由来する吸収が明瞭に観測されている。特に B 相の場合、real squashing モードと呼ばれる集団励起が極めて線幅の小さい吸収ピークとして観測される。他にも P 波超流動状態に特徴的な様々なタイプの集団励起が超音波を用いた実験で観測されている。集団励起の固有振動数はオーダーパラメータの対称性に依存するため、音波はオーダーパラメータの内部構造を探るプローブともなる。実際、超音波吸収の実験は、NMR の実験と共に、超流動  $^3\text{He}$  の A、B 両相におけるオーダーパラメータの対称性の同定に決定的な役割を果たした。

一方、Northwestern グループのエアロジェル中  $^3\text{He}$  の実験では、温度を下げて超流動相に入ると、音波の吸収は温度の低下と共に単調に減少するだけで、対破壊やオーダーパラメータの集団励起に伴う構造が確認されていない。この原因としては、やはりエアロジェルの不純物散乱効果が考えられる。Abrikosov and Gorkov の理論を用いた解析によると、P 波状態のような異方的超流動状態では、準粒子状態密度が純粋な系のものとは大きく異なることが示される (S 波超流動状態では不純物の影響を受けない)。このような、準粒子状態密度の変化は、当然、対破壊による吸収の構造に反映される。また、オーダーパラメータの集団励起による吸収のピーク位置やその線幅にも不純物散乱の影響が現れるであろう。本論文の第2の目的は、このような超流動相における音波の吸収に対する不純物効果の微視的理論を構築することである。

エアロジェル中超流動  $^3\text{He}$  における音波の研究は最近始まったばかりで、その理論的蓄積は現在のところほとんど無い。唯一、Rainer and Sauls<sup>[12]</sup> による報告があるだけである。彼らは、Bogoliubov 準粒子の Boltzmann 方程式を用いて、第0音波と第4音波に関する定性的な議論を行っている。超流動状態では、密度の揺らぎはクーパー対の構造揺らぎと結合しているのでその両方を追う必要があり、純粋な  $^3\text{He}$  系では、行列形式の分布関数を用いる方法が確立しているが、不純物散乱効果を正しく取り入れるには難点がある。そこで、本研究では、非平衡系でも実時間で Feynman ダイアグラムの手法を使える Keldysh 形式の Green 関数理論を用いる。音波を励起する外場を考え、その外場に対する線形応答関数を計算する。不純物散乱に関しては、Green 関数の自己エネルギーにはセルフコンシステント T-matrix 近似に対応するダイアグラ

ムを取り入れ、線形応答関数には対応するバーテックス補正を行う。Rainer and Sauls の理論では集団励起の寄与を計算することができないが、我々の理論では少なくとも形式的には全ての集団励起自由度を取り入れることが可能である。もちろん、この理論形式は常流動相の議論において Landau-Boltzmann 理論に帰着する。我々は、この理論形式を用いて超流動  $^3\text{He-B}$  相での音波の吸収を計算し、温度依存性は振動数に依存することを見出した。低い振動数領域では実験で観測されているように温度の低下と共に吸収が単調に減少する。しかし、振動数が高くなると吸収に緩やかな山が見られ、低温まで吸収が減少しない。

本論文は以下のように構成される。

第 2 章では、液体  $^3\text{He}$  の常流動、超流動およびエアロジェル中  $^3\text{He}$  について概観する。Landau による Fermi 液体理論の概要、P 波スピン三重項超流動に関する一般化された BCS 理論について述べ、また近年のエアロジェル中  $^3\text{He}$  に関する研究についてふれる。

第 3 章では、純粋な液体  $^3\text{He}$  中を伝播する音波についての従来理論と実験結果を紹介する。常流動相に関しては、第 1 音波と第 0 音波、および横波の伝播について述べ、微視的理論と visco-elastic モデルの関係を議論する。超流動に関しては、クーパー対の変形に伴う集団励起、および最近行われた横波の観察について述べる。

第 4 章では、まず、Northwestern グループの実験を紹介し、不純物散乱を取り入れた Landau-Boltzmann 理論に基づく常流動相における縦波の解析を行う。固定された不純物を含む場合について、更には不純物の運動の影響を取り込んだ場合に分けて考察を行う。

第 5 章では、Keldysh 形式による準古典的グリーン関数の方法について定式化を行う。また、この理論の枠組みで表される物理量に関しても言及する。

第 6 章では第 5 章で定式化した方法に基づいて、純粋な ABM 状態を想定し、具体的に横波の伝播について議論する。その際、オーダーパラメータの集団励起の寄与を取り込んで吸収の振動数依存性および温度依存性について議論を行う。

第 7 章では第 5 章で定式化した方法に基づいて、不純物散乱効果を、自己エネルギーにセルフコンシステント T-Matrix 近似に対応するダイアグラムを取り入れて調べる。その際に得られる準粒子状態密度の詳細についても紹介する。さらに、不純物を含む

系での線形応答を議論するために必要なパーテックスの補正についても詳細に議論する。具体的には、BW状態におけるパーテックスの補正とオーダーパラメータの集団励起を同時に取り入れ、コンシステントな解を得る。最終的には、不純物を含むBW状態における縦波の伝播について議論する。この際、不純物効果および集団励起の効果を全て同時に考慮した音速の表式を得て、音波の吸収の振動数依存性および温度依存性を議論する。

第8章では、結論と考察を述べる。

また本論文を通して  $\hbar = k_B = 1$  の単位系を用いることを予め断っておく。

## 第2章 液体<sup>3</sup>He

<sup>3</sup>He はスピン  $\frac{1}{2}$  の Fermi 粒子であり、液体 <sup>3</sup>He の Fermi 温度は密度から評価すると数 [K] 程度になる。したがって、数 10[mK] 以下の温度では Fermi 縮退しており、Landau の Fermi 流体理論でよく記述できる。さらに 2[mK] 以下の低温では超流動状態になる。この超流動状態は、P 波三重項のクーパー対を持つ BCS 状態であることが知られている。

本章では、まず Landau の Fermi 流体理論について紹介し、次に液体 <sup>3</sup>He の超流動相を記述する P 波三重項のクーパー対の BCS 理論について述べる。最後にエアロジェル中 <sup>3</sup>He に関する研究の現状についてふれる。

### 2.1 Fermi 流体理論

Fermi 流体は相互作用の無い理想 Fermi 気体に対して相互作用を断熱的に加えた後に実現する液体として記述される。系の状態はこの相互作用を加える前後において一対一の対応があり、理想 Fermi 気体において運動量  $\mathbf{k}$  スピン  $\sigma$  を持つ粒子は液体においては同じ運動量とスピンを持つ準粒子に対応すると考える。この準粒子が持つエネルギーは当然自由粒子のものとは異なるが、Fermi 面の近くでは

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_k = \varepsilon_F + \frac{k_F}{m^*}(k - k_F) \equiv \varepsilon_F + v_F(k - k_F) \quad (2.1)$$

と書けるであろう。ここで  $\varepsilon_F$ 、 $k_F$ 、 $m^*$  はそれぞれ Fermi エネルギー、Fermi 運動量、有効質量を表す。また  $v_F = k_F/m^*$  は Fermi 速度である。これらを用いると Fermi 面での状態密度は

$$N_0 = \frac{m^* k_F}{2\pi^2} \quad (2.2)$$

で表される。理想 Fermi 気体との対応から、この系の状態は準粒子の占有数  $\{n_{\mathbf{k}}\}$  で指定される。基底状態では

$$n_{\mathbf{k}}^0 = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon_{\mathbf{k}}) = \begin{cases} 1 & (|\mathbf{k}| \leq k_F) \\ 0 & (|\mathbf{k}| > k_F) \end{cases} \quad (2.3)$$

であり、低エネルギー励起状態は基底状態からのゆらぎ  $\delta n_{\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}}^0$  で記述できる。有限温度の平衡状態では占有数の平均値は Fermi 分布関数で与えられる。

$$n_{\mathbf{k}}^0 = \frac{1}{\exp \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu}{T} + 1}$$

しかし、準粒子間にも相互作用が存在し、準粒子間の相互衝突により、特定の運動量を持つ準粒子は有限の寿命をもつ。この準粒子の寿命の逆数  $\tau_c^{-1}$  が準粒子のエネルギースケールである温度  $T$  に比べて十分小さい、

$$\tau_c^{-1} \ll T$$

の場合においてのみ、この描像は正しくなる。この準粒子間の衝突による寿命 (衝突時間)  $\tau_c(\mathbf{k})$  は次式で与えられる。

$$\frac{1}{\tau_c(\mathbf{k})} = 6\pi \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_3}) \delta_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3} \times n_{\mathbf{k}_1} (1 - n_{\mathbf{k}_2}) (1 - n_{\mathbf{k}_3}) \quad (2.4)$$

運動量保存則から  $\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$  が成り立つ。また、Fermi 分布とエネルギー保存則を考慮すると  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  の積分範囲は Fermi 面近傍に限られる。したがって、遷移確率  $W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$  は、図 2.1 に示される角度  $\theta, \phi$  のみの関数と考えてよい。

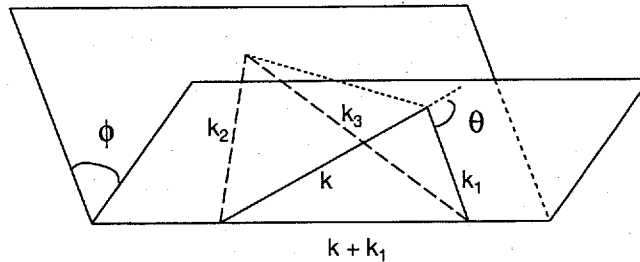


図 2.1: 遷移確率

以上を考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_c(\mathbf{k})} &= \frac{12\pi^2(m^*)^3}{(2\pi)^5} \int \frac{\sin\theta d\theta d\phi}{4\pi \cos\theta/2} W(\theta, \phi) \\ &\times \int d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3 \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) n(\varepsilon_1) (1 - n(\varepsilon_2)) (1 - n(\varepsilon_3)) \\ &= \frac{3(m^*)^3 T^2}{32\pi^3} \left\langle \frac{W(\theta, \phi)}{\cos(\theta/2)} \right\rangle \frac{\pi^2 + [(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F)/T]^2}{1 + \exp[(\varepsilon_F - \varepsilon_{\mathbf{k}})/T]} \end{aligned} \quad (2.5)$$

が得られる。Fermi 面上での衝突時間は  $\tau_c \propto 1/T^2$  となり、十分低温では準粒子描像が正当化される [21]。

以上の議論から十分低温において Fermi 流体系のエネルギーは、準粒子の分布のゆらぎ  $\delta n_{k\sigma}$  の汎関数として記述できることがわかる。準粒子励起に伴って生じるエネルギー変化を  $\delta n_{k\sigma}$  の二次まで考慮すると、系のエネルギーは汎関数微分を用いて次のように記述できる。

$$E\{\delta n_{k\sigma}\} = E_0 + \sum_{k\sigma} \left( \frac{\delta E}{\delta n_{k\sigma}} \right) \delta n_{k\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{k\sigma, k'\sigma'} \left( \frac{\delta^2 E}{\delta n_{k\sigma} \delta n_{k'\sigma'}} \right) \delta n_{k\sigma} \delta n_{k'\sigma'} \quad (2.6)$$

ここで、 $E_0$  は系の基底状態におけるエネルギーである。一次の汎関数微分は、運動量  $k$  スピン  $\sigma$  の準粒子 1 個のエネルギーを意味し、

$$\varepsilon_{k\sigma} = \frac{\delta E}{\delta n_{k\sigma}}$$

とおける。また、二次の汎関数微分

$$f_{k\sigma, k'\sigma'} = \frac{\delta^2 E}{\delta n_{k\sigma} \delta n_{k'\sigma'}}$$

は準粒子間の有効相互作用を表すと考えられる。したがって、準粒子の有効エネルギーは次のように記述できる。

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{k\sigma} &= \varepsilon_k + \delta\varepsilon_{k\sigma} \\ &= \varepsilon_k + \sum_{k'\sigma'} f_{k\sigma, k'\sigma'} \delta n_{k'\sigma'} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで、 $k, k' \simeq k_F$  であることと、系の等方性を考慮すると、

$$f_{k\sigma, k'\sigma'} = \sum_{\ell} (f_{\ell}^{\sigma} + f_{\ell}^{\sigma} \sigma \cdot \sigma') P_{\ell}(\hat{k} \cdot \hat{k}')$$

のように<sup>1</sup>、部分波展開できる。 $f_{\ell}^{\sigma}$ 、 $f_{\ell}^{\sigma}$  はそれぞれスピンに関して対称および反対称な成分を表す。本論文で扱う音波の議論のように、スピン分極を扱わない場合は  $\delta n_{k\uparrow} = \delta n_{k\downarrow}$  とし、式 (2.7) は

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_k &= 2 \sum_{k'} \left[ \sum_{\ell} f_{\ell}^{\sigma} P_{\ell}(\hat{k} \cdot \hat{k}') \right] \delta n_{k'} \\ &= 2f_0^{\sigma} \sum_{k'} \delta n_{k'} P_0(\hat{k} \cdot \hat{k}') + 2f_1^{\sigma} \sum_{k'} \delta n_{k'} P_1(\hat{k} \cdot \hat{k}') \\ &\quad + 2f_2^{\sigma} \sum_{k'} \delta n_{k'} P_2(\hat{k} \cdot \hat{k}') + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

<sup>1</sup>以後の記述において、 $\hat{x} \equiv \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$  として、あるベクトル  $\mathbf{x}$  の単位ベクトルを  $\hat{x}$  で表す。

と書ける。以下にいくつかの例を示すように、有効相互作用は Fermi 流体において定量的側面において極めて重要な役割を果たす。 $f_\ell^{s,a}$  は、 $^3\text{He}$  原子間の複雑な多体効果で決まる量であり微視的理論によって決めることは難しい。Landau はこれらを実験から決めるべきパラメータとして導入した。

$f_\ell^{s,a}$  に Fermi 面での状態密度  $2N_0$  をかけ無次元化した  $F_\ell^{s,a} = 2N_0 f_\ell^{s,a}$  はランダウパラメータと呼ばれ、以下に述べるように、比熱、圧縮率などの実験値から決められる。表 2.1 に、今までに定められたランダウパラメータの圧力依存性を示す。

圧力 [bar]	$v_F$ [m/s]	$F_0^s$	$F_1^s$	$F_2^s$	$F_0^a$	$F_1^a$
0	59.03	9.3	5.4	-0.22	-0.70	-0.57
5	51.01	20.3	7.1	-0.02	-0.73	-0.76
10	45.66	31.2	8.6	0.17	-0.74	-0.89
15	41.83	41.8	9.9	0.34	-0.75	-0.95
20	38.74	52.8	11.1	0.50	-0.76	-0.98
25	36.01	64.6	12.3	0.63	-0.76	-0.99
30	33.63	77.2	13.5	0.75	-0.75	-1.00

表 2.1: Landau パラメータと Fermi 速度の圧力依存性 [22]

準粒子間の有効相互作用が重要な役割を果たすいくつかの例を述べる。

### 有効質量

ガリレイ不変性から、運動量密度と質量の流れの密度は等しいことが要請される。このことは

$$\frac{2}{m} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} n_{\mathbf{k}} = 2 \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \quad (2.9)$$

と表される。ここで  $m$  は裸の粒子の質量、 $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \bar{\epsilon}_{\mathbf{k}}$  は準粒子の速度である。また断熱定理から、粒子数と準粒子数が等しいことを使っている。 $n_{\mathbf{k}} = f(\epsilon_{\mathbf{k}}) + \delta n_{\mathbf{k}}$  とおき、 $\delta n_{\mathbf{k}}$  に関して線形化を行なうと、



$$\begin{aligned}
\frac{2}{m} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \delta n_{\mathbf{k}} &= 2 \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \right) \delta n_{\mathbf{k}} + 2 \sum_{\mathbf{k}} f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left( 2 \sum_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta n_{\mathbf{k}'} \right) \\
&= \frac{2}{m^*} \left( \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \delta n_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} (-f') \mathbf{k} \left( 2 f_1^s \sum_{\mathbf{k}'} \delta n_{\mathbf{k}'} P_1(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \right) \right) \\
&= \frac{2}{m^*} \left( \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \delta n_{\mathbf{k}} + \frac{F_1^s}{3} \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{k}' \delta n_{\mathbf{k}'} \right) \\
&= \frac{2}{m^*} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \delta n_{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

となる。これは、有効質量と裸の質量の関係を与える。

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{1}{3} F_1^s \quad (2.10)$$

この関係式において現れる有効質量は低温での比熱から評価される。比熱の表式は Fermi 面での状態密度  $N_0$  を用いて、

$$C = \frac{2N_0 \pi^2}{3} T = \frac{m^* k_F}{3} T$$

となり、理想 Fermi 気体から得られる比熱に比べて  $m^*/m$  だけエンハンスされることがわかる。この結果から  $m^*$  を見積もることが可能となり、同時に  $F_1^s$  が決定される。

### 圧縮率

化学ポテンシャルを  $\mu$ 、粒子の数密度  $n$  とすると熱力学的考察により圧縮率は

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial \mu}{\partial n} \right)^{-1} \quad (2.11)$$

と記述できる。一方で、数密度の変化  $\delta n$  に伴う化学ポテンシャルの変化は、

$$\begin{aligned}
\delta \mu &= \frac{k_F}{m^*} \delta k_F + \sum_{\mathbf{k}' \sigma'} f_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^s \delta n_{\mathbf{k}' \sigma'} \\
&= \frac{k_F}{m^*} \frac{\pi^2}{k_F^2} \delta n + \frac{F_0^s}{2N_0} \delta n \\
&= \frac{1 + F_0^s}{2N_0} \delta n \quad (2.12)
\end{aligned}$$

となり、

$$\kappa = \frac{1}{n^2} \frac{2N_0}{1 + F_0^s} \quad (2.13)$$

の関係を得る。ここで、音速の表式は流体力学により、 $c^2 = \partial p / \partial n = 1 / (mn\kappa)$  と与えられるので、通常の流体力学的音波である第1音波の音速  $c_1$  の表式を得る。

$$c_1^2 = \frac{n(1 + F_0^s)}{2mN_0} = \frac{1}{3}(1 + F_0^s)(1 + F_1^s/3)v_F^2 \quad (2.14)$$

### 帯磁率

準粒子の持つ磁気モーメントを  $\gamma s$  とすると、磁場  $H$  を与えた場合の Zeeman エネルギーは  $\pm \frac{\gamma}{2} H$  となる。Zeeman エネルギーによる  $\uparrow, \downarrow$  スピンをもつ粒子数の変化を考慮すると、圧縮率での議論と同様に、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma H &= \frac{1 + F_0^a}{2N_0} (\delta n_{\uparrow} - \delta n_{\downarrow}) \\ &= \frac{1 + F_0^a}{2N_0} \frac{M}{\gamma/2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

が成り立つ。帯磁率は  $\chi = \partial M / \partial H$  により与えられるため、Pauli の常磁性帯磁率  $\chi_n = (\gamma^2/2)N_0$  を用いて次のように記述される。

$$\chi = \frac{\chi_n}{1 + F_0^a} \quad (2.16)$$

さて最後に式 (2.8) で定義した  $\delta \epsilon_0$  の変化の物理的意味を考える。すなわち、部分波展開における S 波および P 波部分は、準粒子の流れの密度を  $\mathbf{J}$  として、

$$\delta \epsilon_0 = f_0^s \delta n \quad (2.17)$$

$$\delta \epsilon_1 = f_1^s \frac{m}{k_F^2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} \quad (2.18)$$

となり、密度ゆらぎ  $\delta n$  や準粒子の流れの密度  $\mathbf{J}$  によって誘起された分子場のエネルギーと考えることが出来る。音波が伝播している場合、その振動数を  $\Omega$ 、波数ベクトルを  $\mathbf{q}$  とすると、粒子数保存を保証する連続の方程式は

$$\Omega \delta n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{J} \quad (2.19)$$

と書かれるため、

$$\eta\delta\varepsilon_1 = \Omega \left( \frac{F_1^s/F_0^s}{1+F_1^s/3} \right) \delta\varepsilon_0(\hat{k} \cdot \hat{q})^2 \quad (2.20)$$

の関係を満たす。後の議論のためにここで現れた無次元パラメータ

$$E_1 \equiv \frac{F_1^s/F_0^s}{1+F_1^s/3} \quad (2.21)$$

を定義しておくとも便利である。

## 2.2 超流動 $^3\text{He}$

本節ではP波スピン三重項状態 ( $^3\text{P}$  状態) を含む一般化されたBCS理論について述べ、純粋な  $^3\text{He}$  のA相、B相をそれぞれ記述するABM状態、BW状態について説明する。

BCS理論にならって有効ハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \sum_{k\sigma} \xi_k a_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{k,k'} \sum_{\sigma,\sigma'} v_{\hat{k},\hat{k}'} a_{k\sigma}^\dagger a_{-k\sigma'}^\dagger a_{-k'\sigma'} a_{k'\sigma} \quad (2.22)$$

$$\xi_k = \frac{k^2}{2m^*} - \mu \quad (2.23)$$

を考える。ここで、 $a_{k\sigma}^\dagger$ 、 $a_{k\sigma}$  は、準粒子の生成消滅演算子であり、 $v_{\hat{k},\hat{k}'}$  は、準粒子間の有効対相互作用である。対凝縮を特徴付ける

$$\langle a_{-k'\sigma'} a_{k'\sigma} \rangle \quad \text{および} \quad \langle a_{k'\sigma}^\dagger a_{-k'\sigma'}^\dagger \rangle$$

が有限に残るとして分子場近似を行なう。オーダーパラメータとして、

$$\Delta_{\sigma\sigma'}(\hat{k}) = \sum_{k'} v_{\hat{k},\hat{k}'} \langle a_{-k'\sigma'} a_{k'\sigma} \rangle \quad (2.24)$$

$$\Delta_{\sigma\sigma'}^*(\hat{k}) = \sum_{k'} v_{\hat{k},\hat{k}'} \langle a_{k'\sigma}^\dagger a_{-k'\sigma'}^\dagger \rangle \quad (2.25)$$

を導入すると分子場近似でのハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}_m = \sum_{k\sigma} \xi_k a_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{k,\sigma,\sigma'} \left[ \Delta_{\sigma\sigma'}(\hat{k}) a_{k\sigma}^\dagger a_{-k\sigma'}^\dagger + \Delta_{\sigma\sigma'}^*(\hat{k}) a_{-k\sigma'} a_{k\sigma} \right] \quad (2.26)$$

で与えられる。ここで、南部表示、

$$\phi_k = \begin{pmatrix} a_{k\uparrow} \\ a_{k\downarrow} \\ a_{-k\uparrow}^\dagger \\ a_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}$$

を採用すると、 $\mathcal{H}_m$ は

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{\mathbf{k}} & \hat{\Delta}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\Delta}_{\mathbf{k}}^\dagger & -\hat{\xi}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \phi_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (2.27)$$

と書ける。上式の中の行列は適当なユニタリ行列を  $U_{\mathbf{k}}$  を用いて、

$$U_{\mathbf{k}}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{\mathbf{k}} & \hat{\Delta}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\Delta}_{\mathbf{k}}^\dagger & -\hat{\xi}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} U_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\mathbf{k}_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{-\mathbf{k}_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{-\mathbf{k}_2} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

と対角化できる。Bogoliubov 準粒子の生成・消滅演算子  $\gamma_{\mathbf{k}}^\dagger$  および  $\gamma_{\mathbf{k}}$  を Bogoliubov 変換と呼ばれる

$$U_{\mathbf{k}}^\dagger \phi_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mathbf{k}_1} \\ \gamma_{\mathbf{k}_2} \\ \gamma_{-\mathbf{k}_1}^\dagger \\ \gamma_{-\mathbf{k}_2}^\dagger \end{pmatrix}$$

で定義すると、 $\mathcal{H}_m$ は、

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, s=1,2} \left( E_{\mathbf{k},s} \gamma_{\mathbf{k},s}^\dagger \gamma_{\mathbf{k},s} + E_{-\mathbf{k},s} \gamma_{-\mathbf{k},s}^\dagger \gamma_{-\mathbf{k},s} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} (\xi_{\mathbf{k}} - E_{-\mathbf{k},s}) \quad (2.29)$$

と対角化される。すなわち、 $\mathcal{H}_m$ は、励起エネルギー  $E_{\mathbf{k},s}$  をもつ Bogoliubov 準粒子の気体と等価になる。Bogoliubov 変換はユニタリ変換なので、Bogoliubov 準粒子も Fermi 粒子である。純粋な超流動<sup>3</sup>He で実現している ABM 状態や BW 状態はユニタリ状態と呼ばれ、

$$\hat{\Delta}(\mathbf{k}) \hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k}) = |\hat{\Delta}_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2.30)$$

を満たしている。このときは、励起エネルギーは簡単な形

$$E_{\mathbf{k},s} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\hat{\Delta}_{\mathbf{k}}|^2} \quad \text{for } s = 1, 2 \quad (2.31)$$

になり、 $|\hat{\Delta}_{\mathbf{k}}|$  がエネルギーギャップを与える。

P 波対を安定化させる有効対相互作用  $v_{\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}'}$  として

$$v_{\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}'} = -3v_1 P_1(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = -3v_1 \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}', \quad (v_1 > 0) \quad (2.32)$$

を考えよう。このときギャップ方程式は次のように与えられる。

$$\hat{\Delta}_{\sigma\sigma'}(\hat{\mathbf{k}}) = -3v_1 \sum_{\mathbf{k}'} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \langle a_{-\mathbf{k}'\sigma'} a_{\mathbf{k}'\sigma} \rangle \quad (2.33)$$

これから P 波の転移温度  $T_c$  を決定する方程式は、

$$1 = N_0 v_1 \int_0^{\epsilon_c} \frac{d\xi}{\xi} \tanh \frac{\xi}{2T_c} \quad (2.34)$$

となる。

オーダーパラメータは定義 (2.24) から  $\hat{\Delta}_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k}) = -\hat{\Delta}_{\sigma'\sigma}(-\mathbf{k})$  を満たす。さらに P 波の場合は、(2.33) 式から、 $\hat{\Delta}_{\sigma\sigma'}(-\mathbf{k}) = -\hat{\Delta}_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k})$  となり、スピンに関しては三重項状態で  $\Delta_{\uparrow\downarrow} = \Delta_{\downarrow\uparrow}$  が成り立つことが分かる。スピン三重項の場合は  $\mathbf{d}$  ベクトルと呼ばれるベクトルの成分を用いて

$$\hat{\Delta}_{\hat{\mathbf{k}}} = \begin{pmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow} & \Delta_{\uparrow\downarrow} \\ \Delta_{\downarrow\uparrow} & \Delta_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -d_x + id_y & d_z \\ d_z & d_x + id_y \end{pmatrix} = i(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma})\sigma_y \quad (2.35)$$

と書き表せる。 $\boldsymbol{\sigma}$  はパウリ行列である。さらに P 波の場合は、 $\mathbf{d}$  ベクトルの各成分が  $\hat{\mathbf{k}}$  の各成分で

$$d_\mu = d_{\mu\nu} \hat{k}_\nu$$

のように展開できる。この計 18 個のパラメータをもつ複素テンソル  $d_{\mu\nu}$  によって、 $\hat{\Delta}$  が指定される。

このように、内部自由度を持つ対を持つ超流動相では複数の相が実現する可能性がある。事実、磁場のないバルク液体  $^3\text{He}$  には図 2.2 の圧力-温度相図に示されるよう

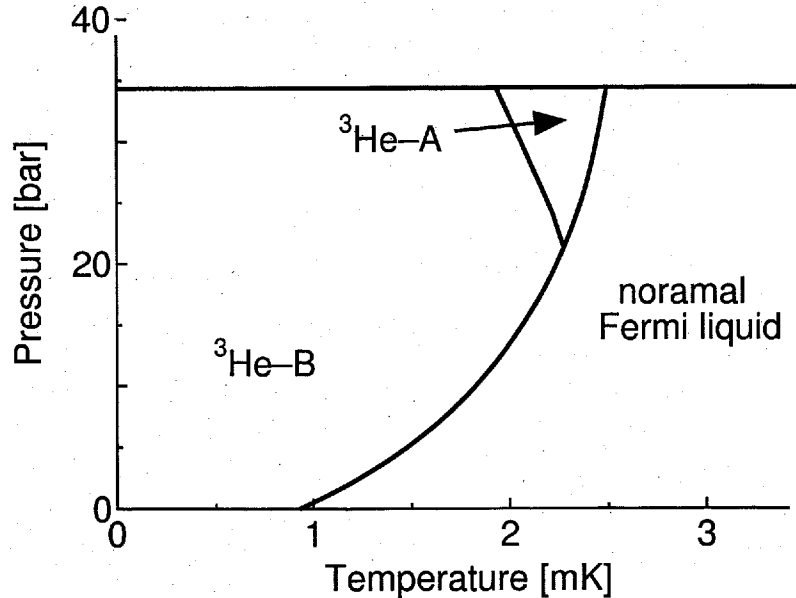


図 2.2:  $^3\text{He}$  の圧力-温度相図 [5]

に、超流動領域において高温高压に A 相、それ以外の大部分の領域に B 相が実現する。そのほかにも、磁場、不純物、サイズに依存した多彩な相をなすことが知られており、その各々に対応した対の対称性が提唱されている。本論文では特に、B 相で実現している BW 状態、および A 相に対応する ABM 状態に注目して議論を行うため、これらの状態について調べておく。

### BW 状態

Balian and Werthamer<sup>[23]</sup> は、対相互作用が (2.32) 式で与えられる場合、最も安定な状態は、最も対称性の良い

$$d_{\mu\nu} \rightarrow \Delta_B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

であることを証明した (BW 状態)。この場合、

$$\hat{\Delta}_{\hat{k}} = \Delta_B \begin{pmatrix} -\hat{k}_x + i\hat{k}_y & \hat{k}_z \\ \hat{k}_z & \hat{k}_x + i\hat{k}_y \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

となり、 $|\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2 = |\Delta_B|^2$  となり等方的なギャップが開く。(図 2.3 参照)

オーダーパラメータとして (2.37) 式に位相因子  $e^{i\phi}$  をかけたものを用いても自由エネルギーは不変である。これは系のハミルトニアン (2.22) がゲージ変換

$$a_{k\sigma} \rightarrow a_{k\sigma} e^{i\phi/2}$$

に関して不変である事に起因している。同様に、ハミルトニアン (2.22) は、実空間およびスピン空間での回転対称性を持っている。したがって、任意の回転行列  $R_{\mu\nu}$  を用いた  $d_\mu = \Delta_B R_{\mu\nu} \hat{k}_\nu$  を持つ状態もやはり同じ自由エネルギーを持つ。したがって、BW 状態のオーダーパラメータの一般的な形は

$$d_\mu = \Delta_B e^{i\phi} R_{\mu\nu} \hat{k}_\nu \quad (2.38)$$

で与えられる。特定の  $\phi$  や  $R_{\mu\nu}$  を持った状態が実現しているということはハミルトニアンの持つ対称性の破れた状態が実現していることになる。

BW 状態は  $\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$  の対を含むがこの対はスピン分極には寄与しない。したがって、BW 状態の帯磁率は温度とともに減少する。

### ABM 状態

当初の超流動状態の実験では、冷却は図 2.2 の圧力-温度相図に見られる液相と固体相の境界に沿って行われた (ポメンランチュク冷却)。したがって、最初に発見された超流動状態は A 相である。A 相の帯磁率は温度によらず、式 (2.16) で与えられる常流動相の値にとどまることが発見された。そこで、Anderson and Morel<sup>[24]</sup> により提案されていた、平行なスピンのみで対を形成する ESP (Equal Spin Pairing) 状態

$$\hat{\Delta}_{\hat{k}} = \Delta_A \begin{pmatrix} \hat{k}_x + i\hat{k}_y & 0 \\ 0 & \hat{k}_x + i\hat{k}_y \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

が候補となった。Anderson and Brinkman<sup>[25]</sup> は、この状態を安定化する対相互作用としてスピン揺らぎ (パラマグノン) を媒介とする相互作用を考え、スピン揺らぎの強さは帯磁率に比例するので、帯磁率の大きい ESP 状態の方が対相互作用が強く、より安定化する可能性があるとして提案した。Kuroda<sup>[26]</sup> はパラマグノンの圧力依存性を考慮したモデル計算を行い、高温高压側で ESP 状態が安定になることを示した。その後、この状態は ABM 状態と呼ばれている。ABM 状態も縮退しており、 $\mathbf{d}$  ベクトルは一般的な形は直交する単位ベクトル  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  を用い

$$\mathbf{d} = \Delta_A \hat{\mathbf{d}} \cdot (\mathbf{m} + i\mathbf{n}) \quad (2.40)$$

で与えられる。 $\hat{\mathbf{d}}$  はスピン空間の単位ベクトルで任意の方向に選べる。また、 $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$  は  $\mathbf{l}$  ベクトルと呼ばれ、クーパー対は  $\mathbf{l}$  方向に  $+1$  の角運動量を持つ。ABM 状態では  $|\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2 = |\Delta_A|^2 \sin^2 \theta$  となり、図 2.3 で示すように  $\mathbf{l}$  方向のギャップが閉じている。

液体  $^3\text{He}$  で実現している P 波三重項状態は、 $S = 1$  でスピン自由度が生きていることが重要である。磁場中では上に述べたように ESP 状態のほうが有利であり、B 相が安定な温度、圧力下でも磁場を上げると A 相に転移し、600[mT] 以上の磁場では全領域において A 相が安定になる。また、実験的側面からは、NMR が使えることが重要で、液体  $^3\text{He}$  を研究する重要な手段の一つになっている。

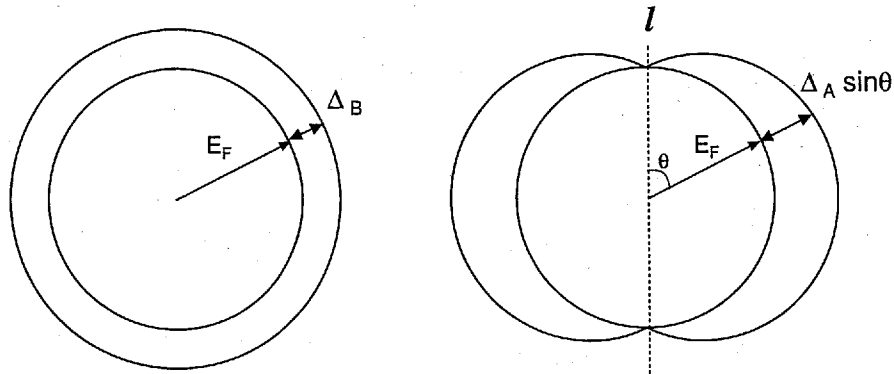


図 2.3: BW 状態 (左)、ABM 状態 (右) のエネルギーギャップ

### 2.3 エアロジェル中<sup>3</sup>He

極めて純粋な系をなす液体<sup>3</sup>Heは、理論と実験の精密な比較が可能であることから、盛んに研究がなされてきたが、最近、エアロジェル中での振る舞いが注目されている。この系における多くの実験は、純粋な液体<sup>3</sup>Heでの結果と大きく異なる振る舞いを示しており、これらの相違は不純物効果を反映していると言われている。したがって本節ではまず、エアロジェルについて紹介し、続いてエアロジェル中<sup>3</sup>Heでの代表的な研究について紹介する。

**エアロジェル** まずエアロジェルに関して一般的性質を説明する。エアロジェルとは、寒天状の固体でありながら、気体のように低密度(多孔質)であり、またガラス並みの透明度でありながら屈折率の極めて小さい物質である。これはシリカをゼリー状にした後、高温高圧状態において乾燥させて作られる。また、非常にもろい物質であり加工等には向いていないが、宇宙空間に存在するマイクロなちり(宇宙ダスト)を捕集するために利用されたり、高い絶縁性を生かした利用、あるいは断熱材として利用され、主に宇宙産業において更なる応用が期待される物質である。

マイクロな立場から見ると、シリカの鎖状ネットワークをなし、複雑なフラクタル構造を持つ物質である。本研究で注目する代表的な約98%の空孔率を示すエアロジェルにおいて、その鎖の半径は $R \simeq 3[\text{nm}]$ 、鎖と鎖の平均間隔は $d \simeq 30[\text{nm}]$ であり、単位



体積あたりにエアロジェルが占める表面積は  $A \simeq 2.6 \times 10^{-2} [\text{nm}^{-1}]$  であると言われている。エアロジェル中の<sup>3</sup>He準粒子の平均自由行程を幾何学的考察から求めてみよう。平均自由行程は不純物の数密度を  $n_i$ 、散乱断面積を  $\sigma$  として、 $\ell = 1/(n_i\sigma)$  と書ける。ここで散乱体を半径  $R$  の球であるとみなすと、幾何学的散乱断面積は、 $\sigma = \pi R^2$  となる。散乱体の全表面積を  $S$  とし、全系の体積を  $V$ 、更に散乱体の個数を  $N_i$  とすると、単位体積あたりの表面積は

$$A = \frac{S}{V} = \frac{4\pi R^2 N_i}{V} = 4\pi R^2 n_i$$

であり、散乱体の数密度  $n_i$  は、散乱体の単位体積あたりの表面積  $A$  を用いて、 $n_i = A/(4\pi R^2)$  となる。これにより幾何学的な平均自由行程は、

$$\ell_{\text{geo}} = \frac{1}{n_i\sigma} = \frac{4\pi R^2}{\pi R^2 A} = \frac{4}{A} \quad (2.41)$$

となり、 $\ell_{\text{geo}} = 4/A \simeq 150 [\text{nm}]$  と見積もられる。

**エアロジェル中<sup>3</sup>He** エアロジェル中<sup>3</sup>Heでの超流動は Porto and Parpia<sup>[10]</sup>により初めて報告された。まず始めに、このエアロジェル中<sup>3</sup>Heにおける相図を図2.4に

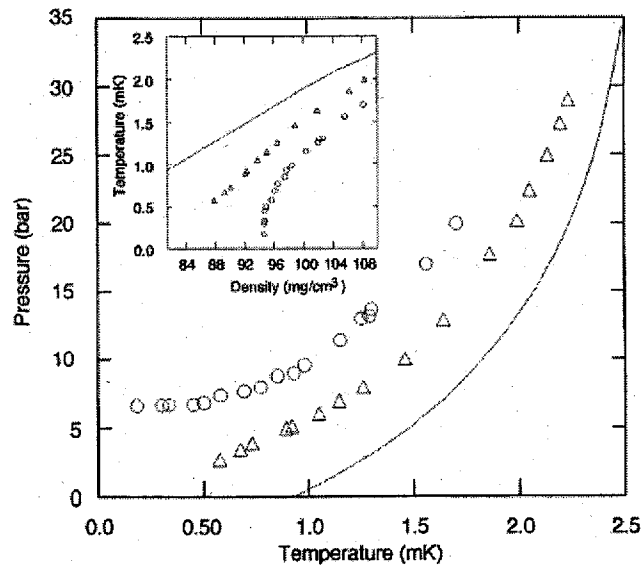


図 2.4: エアロジェル (空効率 98.2 %) 中<sup>3</sup>He の圧力-温度相図 ( $\Delta$ : Porto *et al.*<sup>[10]</sup>), ( $\circ$ : Matsumoto *et al.*<sup>[27]</sup>) 挿入図は液体<sup>3</sup>Heの密度に対する超流動転移温度の変化

を示す<sup>[27]</sup>。これは、ねじれ振子を用いた超流動密度を測定する実験から得られた結

果であり、転移温度は純粋な液体<sup>3</sup>Heのものとは比べて低くなっている。図2.4の相図は、その後のMatsumoto *et al.*<sup>[27]</sup>による実験結果を合わせたものである。この相図に表した二種類の結果は、いずれも98.2%の空孔率を示すエアロジェルを用いたねじれ振子を用いた実験から決定<sup>2</sup>されたものである。Matsumoto *et al.*<sup>[27]</sup>は、二種類の結果の違いは、エアロジェルの製造過程の違いによる構造の相違が起因していると解釈している。

この転移温度の抑制は、不純物散乱が<sup>3</sup>HeのP波のクーパー対のコヒーレンスを破り対破壊が起こるため<sup>[28]</sup>、S波超伝導における磁性不純物散乱の効果と等価なものとなる。エアロジェルを均質に分布した不純物と仮定すると、転移温度の抑制はAbrikosov and Gorkov<sup>[11]</sup>による不純物散乱効果の理論を理用してディガンマ関数 $\Psi$ を用いた関係式で平均自由行程と関連付けられる。

$$\ln\left(\frac{T_{C0}}{T_C}\right) = \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\xi_0}{l_{tr}} \frac{T_{C0}}{T_C}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.42)$$

ここで、純粋な<sup>3</sup>Heの転移温度を $T_{C0}$ 、エアロジェル中での転移温度を $T_C$ とした<sup>3</sup>。また、 $\xi_0 = v_F/(2\pi T_C)$ はコヒーレンス長であり圧力依存性を示し $\xi_0 = 15 \sim 80$ [nm]となる。 $l_{tr} = v_F \tau_{tr}$ は輸送平均自由行程であり、 $\xi_0/l_{tr}$ は対破壊パラメータと呼ばれ、 $\xi_0/l_{tr} \ll 1$ で超流動が実現し、 $l_{tr}$ がコヒーレンス長である $\xi_0$ 程度になる場合には、超流動状態は現れない。この議論から見積もられる輸送平均自由行程は $l_{tr} \simeq 200$ [nm]となり、幾何学的考察から得られた平均自由行程と同程度のものとなる。均一分布不純物モデルを用いると、さらに超流動相の物理量に対する不純物効果を計算することができる<sup>[9, 12, 13, 29, 30, 31]</sup>。Thuneberg *et al.*<sup>[9]</sup>はGinzburg-Landau自由エネルギーの係数に対する不純物補正を計算した。それによれば、純粋な<sup>3</sup>Heと同様に高温高压側ではABM状態が安定であり、その他ではBW状態が安定である。また、Higashitani<sup>[13]</sup>はABMおよびBW状態を仮定して超流動密度の温度依存性を議論している。

しかし、均一分布不純物モデルは超流動状態の実験結果を十分には説明できていない。当初は、転移温度の圧力依存性が問題になった。幾何学的考察から得られる平均自由行程を用いると、転移温度の圧力依存性はコヒーレンス長 $\xi_0$ の圧力依存性から決まるが、これは実験とは合っていない。Thuneberg *et al.*<sup>[9]</sup>は、この問題に関し、不均質異方散乱モデル (inhomogeneous anisotropic scattering model) を提案した。一方、

<sup>2</sup>測定方法としてPorto *et al.*は定圧のもと温度を変化させて超流動転移温度を測定したのに対し、Matsumoto *et al.*は定温で圧力を変化させて超流動転移圧力を測定している。

<sup>3</sup>この理論の詳細は付録Aに示す。

Higashitani<sup>[13]</sup> は均一分布不純物モデルでも、不純物散乱の扱いとして、ボルン近似よりはむしろユニタリティー極限を考慮すれば実験を説明できると主張している。いずれにせよ、Porto and Parpia<sup>[32]</sup> が主張するように、エアロジェルの平均鎖間距離が超流動  $^3\text{He}$  のコヒーレンス長と同程度の場合は、エアロジェルの複雑なフラクタル構造を考慮することが必要であろう。

さらに問題は、エアロジェル中では、ABM 状態と BW 状態が実験的に明確に確認されていないことである。前節でも述べたように、ABM 状態と BW 状態では磁気的性質が異なっている。Sprague *et al.*<sup>[33]</sup> は数百 [mT] の磁場下での NMR の実験を行い、帯磁率は温度によらないが、転移温度が磁場の 2 乗に比例して低下すると報告した。帯磁率の面では A 相的であるが、ABM 状態の転移温度は磁場の影響は受けないはずである。引き続いて、Sprague *et al.*<sup>[34]</sup> は、系に少量の  $^4\text{He}$  を加えて実験を行ったところ、転移温度の磁場依存性は消え、帯磁率は温度低下とともに減少し B 相的振る舞いをすると報告した。通常エアロジェルの表面では、 $^3\text{He}$  原子が吸着され固体層が形成されていると考えられている。固体  $^3\text{He}$  では、孤立スピンの存在し、これが液体の準粒子の磁気散乱の原因になる。一方  $^4\text{He}$  が存在すると  $^3\text{He}$  に比べ質量が大きいため先に吸着され、 $^3\text{He}$  固体層が出来るのを防ぐ。この磁気散乱が、最初の実験で観測された A 相的振る舞いの原因であろうというのが、Sprague *et al.* の結論である。しかし、磁気散乱によって ABM 状態の転移温度が磁場の 2 乗に比例して低下するという理論的根拠は無い。NMR を用いた実験は他にも行われているが [35, 36, 37]、一致した結論は得られていない。

一方、Brussard *et al.*<sup>[38]</sup> は、液体  $^3\text{He}$  中でエアロジェルの方を振動させその負荷から超流動密度を測定した。磁場中では、超流動密度の温度変化に相転移が観測され、その転移温度と磁場の関係は均一分布不純物モデルを用いて計算した A-B 転移曲線と一致すると報告している。しかし、それぞれの相が ABM 状態や BW 状態であるとの確認はされていない。

また、次章で紹介するように音波を用いた研究もなされており、比較的低周波の音波を用いて第 4 音波の研究 [39, 40, 41] や第 0 音波を意識した高周波を用いた研究 [14, 18, 42] が報告されている。

以上に紹介した実験において、エアロジェルによる超流動の抑制は共通して見られるものの、全ての実験結果を矛盾無く説明できる理論的考察は今のところ無く、現段

階においてエアロジェル中<sup>3</sup>Heの統一的な理解には至っていない。

本論文では、以下の章で音波の伝播、吸収について考察する。比較的高周波でも音波の波長は20[ $\mu\text{m}$ ]程度と平均自由行程に比べて圧倒的に大きい。常流動相では、不純物散乱効果は波長程度の領域で平均されたものが見えるはずであり、均一分布不純物モデルが問題なく適用できる。したがって、常流動相での音波伝播を解析すれば、エアロジェルの不純物散乱について確実な知見が得られるはずである。その知見を基に、超流動相での不純物散乱効果を明らかにしていくというのが本論文の方針である。

## 第3章 液体<sup>3</sup>Heにおける音波

液体<sup>3</sup>He中を伝播する音波は、Landauによる第0音波伝播の予言<sup>[16]</sup>に始まり、理論<sup>[43]</sup>、実験<sup>[4]</sup>ともに盛んに研究がなされてきた。液体<sup>3</sup>Heは準粒子間に働く強い有効相互作用により、縦波はもちろん横波までもが伝播する。更に低温では内部自由度を有するクーパー対を形成して超流動状態が安定な相となり、これに伴ない音波の伝播に関しても、この系特有の多彩な振る舞いを示す。本章では、これらの液体<sup>3</sup>He中を伝播する音波に関する代表的な理論と実験の結果について紹介する。

### 3.1 常流動<sup>3</sup>He中での音波

#### 3.1.1 Landau-Boltzmann 理論

Landauは液体<sup>3</sup>Heの動的性質を議論するために、分布関数 $n_{\mathbf{k}}$ のBoltzmann方程式を考察し、第0音波の存在や、横波の伝播を予言した。その後、Abrikosov and Khalatonikov<sup>[44]</sup>やWölfle<sup>[43]</sup>などにより、衝突項を保存則を満たすように近似する方法が開発され、第0音波と第1音波の関係が定量的に議論できるようになった。

準粒子の数密度分布 $n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ が従うBoltzmann方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dn_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{dt} &= \frac{\partial n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{k}} \\ &= \frac{\partial \delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{k}} \\ &= I_c[\{n_{\mathbf{k}}\}] \end{aligned} \quad (3.1)$$

と書ける。ここで $I_c$ は準粒子間衝突によるcollision項である。分布関数を平衡状態とそれからのゆらぎの形

$$n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = f(\epsilon_{\mathbf{k}}) + \delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \quad (3.2)$$

と置き、 $\delta n_{\mathbf{k}}$ に関して線形化すると

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \left( \frac{\partial \delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - f' \frac{\partial \delta \epsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right) = \delta I_c[\{\delta n_{\mathbf{k}}\}] \quad (3.3)$$

が得られる。線形化された方程式では、 $v_{\mathbf{k}} = \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}$  であり、 $f'$  は Fermi 分布関数のエネルギーに関する微分である。

衝突項は式(2.4)で考察した準粒子どうしの相互衝突によるもので

$$I_c(\mathbf{k})[\{n_{\mathbf{k}}\}] = -2\pi \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} + \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}_1} - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}_2} - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}_3}) \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3} \\ \times [n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_1} (1 - n_{\mathbf{k}_2})(1 - n_{\mathbf{k}_3}) - n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} (1 - n_{\mathbf{k}})(1 - n_{\mathbf{k}_1})] \quad (3.4)$$

で与えられる。粒子間の衝突では、粒子数と運動量が保存されるので、

$$\sum_{\mathbf{k}} I_c(\mathbf{k}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} I_c(\mathbf{k}) = 0 \quad (3.6)$$

が成立する。

線形化された衝突項は  $\delta n_{\mathbf{k}}$  の  $\mathbf{k}$  積分を含み、(3.3) 式は複雑な微積分方程式になるので、衝突項については保存則を満たすような緩和時間近似を採用する。まず、エネルギー保存則に注目すると

$$n_{\text{l.e.}} = f(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}) = n_{\mathbf{k}}^0 + \delta n_{\text{l.e.}} \\ \delta n_{\text{l.e.}} = f' \delta \varepsilon_{\mathbf{k}} \quad (3.7)$$

が、 $I_c(\mathbf{k}) = 0$  を満たす局所平衡解であることがわかる。したがって、衝突項は局所平衡解からのずれ

$$\delta \bar{n}_{\hat{\mathbf{k}}} = \delta n_{\hat{\mathbf{k}}} - \delta n_{\text{l.e.}} \quad (3.8)$$

で書かれる。これらの点を考慮して衝突項  $\delta I_c$  を次のように近似する。

$$\delta I_c = -\frac{1}{\tau_c} \left( \delta \bar{n}_{\hat{\mathbf{k}}} - \sum_{\ell} (2\ell + 1) \lambda_{\ell}^c \left\langle P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \delta \bar{n}_{\hat{\mathbf{k}}'} \right\rangle_{\hat{\mathbf{k}}'} \right) \quad (3.9)$$

ここで緩和時間  $\tau_c$  は式(2.5)で定義されたもので、簡単のため Fermi 面上での値を採用している。したがって、 $\tau_c \propto 1/T^2$  である。 $\langle \dots \rangle_{\hat{\mathbf{k}}'}$  は  $\mathbf{k}'$  に関する角度平均を表す。 $\lambda_{\ell}^c$  は、いわゆる back scattering の効果を考慮するために導入されたパラメータであるが、粒子数と運動量の保存則の要請から

$$\lambda_0^c = \lambda_1^c = 1 \quad (3.10)$$

と定まる。

角振動数  $\Omega$ 、波数ベクトル  $\mathbf{q}$  の音波の伝播を考え、分布関数が

$$\delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)} \quad (3.11)$$

と変動するとしよう。この式を線形化された Boltzmann 方程式 (3.3) に代入すると

$$(\Omega - \eta) \delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) + \eta f' \delta \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) = i \delta I_c(\mathbf{k}) \quad (3.12)$$

を得る。ここで、 $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q} \equiv \eta$  とした。また、以下の議論においては、特に混乱が無い場合、 $\mathbf{q}, \Omega$  の表記を省略する。

### 3.1.2 縦波

縦波の場合、 $\mathbf{q}$  軸の周りの回転対称性を持つので、分布のゆらぎである  $\delta n_{\mathbf{k}}$  は  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$  にのみ依存するため、部分波展開ができる。また、(3.12) 式から、 $\delta n_{\mathbf{k}}$  のエネルギー依存性は Fermi 分布関数の微分  $f'$  で与えられることがわかる。従って、

$$\delta n_{\hat{\mathbf{k}}} = (-f') \sum_{\ell} \nu_{\ell} P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \quad (3.13)$$

同様に準粒子のエネルギーのゆらぎも

$$\delta \varepsilon_{\mathbf{k}} = \sum_{\ell} \frac{F_{\ell}^{\text{S}}}{2\ell + 1} \nu_{\ell} P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \quad (3.14)$$

と展開出来る。分布の局所平衡からのずれは、

$$\begin{aligned} \delta \bar{n}_{\hat{\mathbf{k}}} &= \delta n_{\hat{\mathbf{k}}} - f' \delta \varepsilon_{\mathbf{k}} \\ &= (-f') \sum_{\ell} \left( \frac{F_{\ell}^{\text{S}}}{2\ell + 1} + 1 \right) \nu_{\ell} P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

となり、結果的に衝突項は

$$\begin{aligned} \delta I_c &= -(-f') \sum_{\ell} \frac{1 - \lambda^c}{\tau_c} \left( \frac{F_{\ell}^{\text{S}}}{2\ell + 1} + 1 \right) \nu_{\ell} P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \\ &\equiv f' \sum_{\ell} \frac{1}{\tau_{\ell}} \left( \frac{F_{\ell}^{\text{S}}}{2\ell + 1} + 1 \right) \nu_{\ell} P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

と記述できる。ここで、(3.10) 式に注意すると、部分波の緩和時間はそれぞれ、

$$\frac{1}{\tau_0} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{\tau_1} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{\tau_{\ell}} = \frac{1 - \lambda_{\ell}^c}{\tau_c} \quad \text{for } \ell \geq 2 \quad (3.19)$$

となる。

さて、ルジャンドル多項式の満たす漸化式  $xP_\ell(x) = (\ell+1)P_{\ell+1}(x) + \ell P_{\ell-1}(x)$  を用いて Boltzmann 方程式を書き直すと、

$$\begin{aligned} \sum_\ell \left\{ \Omega \nu_\ell + \frac{i}{\tau_\ell} \left( \frac{F_\ell^s}{2\ell+1} + 1 \right) \nu_\ell \right\} P_\ell(\hat{k} \cdot \hat{q}) \\ = v_{Fq} \sum_\ell \left[ \left( \frac{F_{\ell-1}^s}{2\ell-1} + 1 \right) \frac{\ell \nu_{\ell-1}}{2\ell-1} + \left( \frac{F_{\ell+1}^s}{2\ell+3} + 1 \right) \frac{(\ell+1) \nu_{\ell+1}}{2\ell+3} \right] P_\ell(\hat{k} \cdot \hat{q}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

となる。 $\ell=0$  すなわち S 波成分は

$$\Omega \nu_0 = \frac{1}{3} v_{Fq} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \nu_1 \quad (3.21)$$

この関係式は式 (2.19) で表される連続の方程式と等価なものである。次に P 波成分は

$$\Omega \nu_1 = v_{Fq} \left[ (1 + F_0^s) \nu_0 + \left( 1 + \frac{F_2^s}{5} \right) \frac{2}{5} \nu_2 \right] \quad (3.22)$$

と書け、これは運動量保存則に対応している。 $\ell=2$  の D 波成分は

$$\left\{ \Omega + \frac{i}{\tau_2} \left( 1 + \frac{F_2^s}{5} \right) \right\} \nu_2 = v_{Fq} \left[ \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \frac{2\nu_1}{3} + \left( 1 + \frac{F_3^s}{7} \right) \frac{3\nu_3}{7} \right] \quad (3.23)$$

となり、方程式は閉じない。しかし、液体<sup>3</sup>He の場合は、表 2.1 に見られるように  $F_0^s$  がきわめて大きいので、 $\nu_\ell$  に関する漸化式を  $1/F_0^s$  の展開形で解くことが出来、その結果、 $\nu_3$  以上は高次の補正となって無視することが出来る。したがって、式 (3.21)、式 (3.23) より、

$$\frac{\nu_2}{\nu_0} = \frac{2\Omega}{\Omega + \frac{i}{\tau_2} \left( 1 + \frac{F_2^s}{5} \right)}, \quad \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Omega}{\frac{1}{3} v_{Fq} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right)}$$

が得られる。これらから、縦波の音波に関する分散関係は

$$\Omega^2 = c_1^2 q^2 \left[ 1 + \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_1^2} \frac{\Omega}{\Omega + \frac{i}{\tau_2} \left( 1 + \frac{F_2^s}{5} \right)} \right] \quad (3.24)$$

と与えられることがわかる。ここで  $c_1$  は (2.14) 式で見た第 1 音波の音速

$$c_1^2 = \frac{1}{3} \left( F_0^s + 1 \right) \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) v_F^2 \quad (3.25)$$

であり、 $c_0$  はすぐ後で示すように

$$c_0^2 = c_1^2 \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{1 + \frac{F_2^s}{5}}{1 + F_0^s} \right) \quad (3.26)$$



で与えられる第0音波の音速である。

ここで実験で観測される音速  $c$  と吸収  $\alpha$  を

$$c = \frac{\Omega}{\text{Re } q} \quad \alpha = \text{Im } q \quad (3.27)$$

で定義する。

(3.25) 式と (3.26) 式に注目すると、 $(c_0^2 - c_1^2)/c_1^2$  は  $1/F_0^s$  のオーダーの微小量であるため、音速  $c$  と吸収  $\alpha$  はそれぞれ

$$c = c_1 \left( 1 + \frac{c_0 - c_1}{c_1} \frac{(\Omega\tau'_\eta)^2}{1 + (\Omega\tau'_\eta)^2} \right) \quad (3.28)$$

$$\alpha = \frac{c_0 - c_1}{c_1^2} \frac{\Omega^2 \tau'_\eta}{1 + (\Omega\tau'_\eta)^2} \quad (3.29)$$

と求まる。ここで後の議論のために、 $\tau'_\eta = \tau_2/(1 + F_2^s/5)$  を導入している。

### 第1音波

まず高温で衝突が頻繁に生じるため局所平衡が実現している極限を考える。これは  $\Omega\tau'_\eta \ll 1$  の条件と等価で、通常 hydrodynamic 極限と呼ばれ、通常の流体力学的音波が伝播する。これは第1音波としてよく知られており、音速と吸収は

$$c = c_1 = v_F \sqrt{(1 + F_1^s/3)(1 + F_0^s)/3} \quad (3.30)$$

$$\alpha = \frac{c_0 - c_1}{c_1^2} \Omega^2 \tau'_\eta \quad (3.31)$$

で与えられる。吸収は温度とともに  $1/T^2$  に比例して減少する。

### 第0音波

今度は、衝突の頻度が著しく少ない collisionless の極限を考える。これは  $\Omega\tau'_\eta \gg 1$  の条件と等価であり、液体  $^3\text{He}$  の強い相互作用を復元力とする音波が伝播する。これが第0音波であり、Landau により初めて理論的に予言され、低温の極限において伝播する音波となる。

$$c = c_0 = v_F \sqrt{\frac{(1 + F_1^s/3)}{3} \left( \frac{9}{5} + F_0^s + \frac{4F_2^s}{25} \right)} \quad (3.32)$$

$$\alpha = \frac{c_0 - c_1}{c_1^2} \frac{1}{\tau'_\eta} \quad (3.33)$$

吸収は温度とともに  $T^2$  に比例して増加する。

## 実験

常流動相すなわち Fermi 液体中を伝播する縦波の音波の実験は、Abel *et al.*<sup>[17]</sup> によってはじめて報告された。この実験で測定された音波の吸収と速度を図 3.1 に示す。温度の上昇とともに、吸収は第0音波的な振る舞いから第1音波的な振る舞いに転移しており、そのクロスオーバーの起こる温度でピークをなしていることが明瞭に観測されている。更に、Landau が予言したように超流動転移直前の最低温において、吸

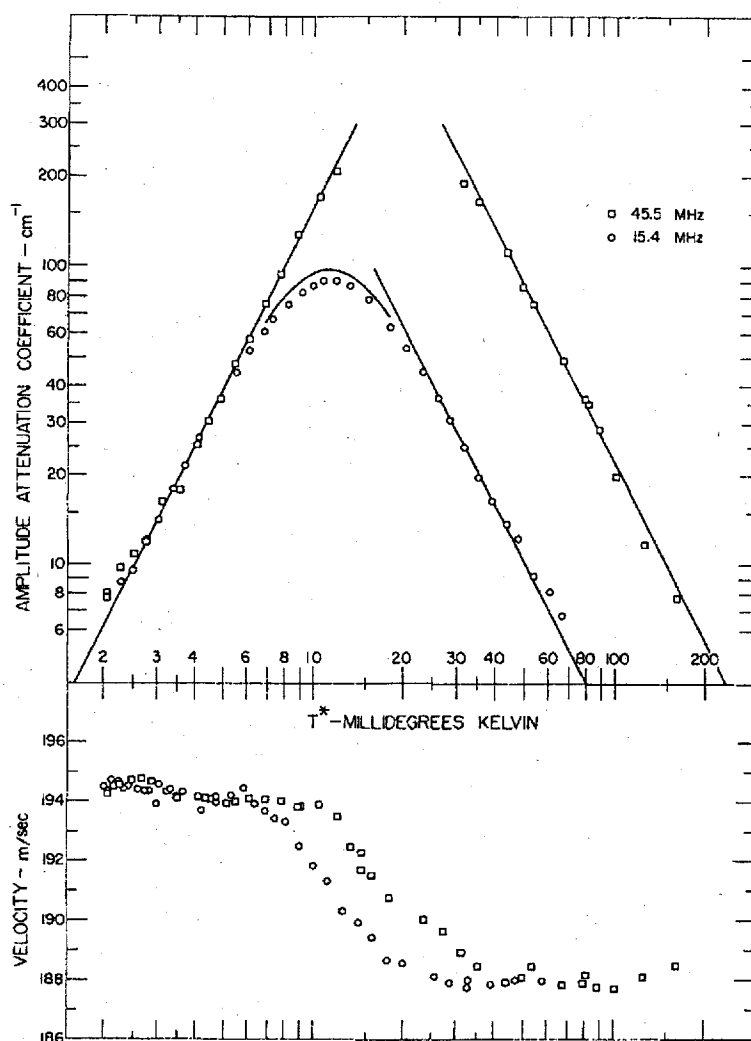


図 3.1: 第1音波(高温)から第0音波(低温)への転移。上図は音波の吸収(減衰係数)の温度変化、下図は音速の温度変化を表す<sup>[17]</sup>。

収が  $T^2$  則から外れて一定の値に落ち着くことも見て取れる。これは量子効果であり、

低温では音波のエネルギーを準粒子が受け取れなくなる事に起因する。この最低温での温度依存性も Matsumoto *et al.*<sup>[45]</sup> の高周波を用いた実験により確認されている。

### Visco-elastic(粘弾性) モデル

第1音波吸収 (3.31) 式を、粘性項を含む流体力学方程式から導かれる吸収の式

$$\alpha = \frac{2\eta\Omega^2}{3\rho c_1^3}$$

と比較する。 $\eta$  は粘性係数で気体分子運動論により粘性緩和時間  $\tau_\eta$  と  $\eta_v = \frac{1}{3}n p_F v_F \tau_\eta$  で結ばれている。比較の結果、

$$\tau_\eta \equiv \tau'_\eta(1 + F_2^s/5) = \tau_2 = \frac{\tau_c}{1 - \lambda_2^s}$$

となる。粘性緩和時間  $\tau_\eta$  は粘性係数の測定で調べられており、 $1/T^2$  の温度変化をすることが確認されている。表 3.1 に  $\tau_\eta T^2$  の圧力依存性を示す。

圧力 [bar]	0	3	9	15	21	27	33
$\tau_\eta T^2 [10^{-12} \text{secK}^2]$	1.24	1.15	1.04	0.96	0.87	0.78	0.69

表 3.1: 粘性緩和時間 [4]

さて、常流動<sup>3</sup>He 中を伝播する音波の第0-第1音波転移の振る舞いは、Rudnick<sup>[15]</sup> による visco-elastic モデルでの考察からも説明されている。visco-elastic モデルでは、弾性率  $K$  に対して緩和過程を考慮し振動数依存性を持つよう、次のように拡張する。

$$K(\Omega) = K_0 + \frac{\frac{4}{3}K_\infty}{1 + i/\Omega\tau}$$

ここで、 $\Omega$  は音波の振動数であり、 $\tau$  は緩和時間である。 $\Omega\tau \ll 1$  の極限では、 $K(\Omega) \rightarrow K_0$  となり、 $K_0$  の逆数は液体の圧縮率である ( $\kappa = K_0^{-1}$ )。逆に  $\Omega\tau \gg 1$  の極限では、 $K(\Omega) \rightarrow \kappa^{-1} - i(4/3)\Omega K_\infty \tau$  となり、 $K_\infty \tau$  は粘性係数に等しいと解釈できる ( $\eta_v = K_\infty \tau$ )。この拡張された弾性率を用いて、吸収の寄与も含む複素音速は  $\rho$  を液体の密度として

$$c^2 = \left( \frac{\Omega}{q + i\alpha} \right)^2 = K(\Omega)/\rho$$

と記述でき、吸収  $\alpha$  は、

$$\alpha = \frac{c_0 - c_1}{c_1^2} \frac{\Omega^2 \tau}{1 + (\Omega\tau)^2} \quad (3.34)$$

となり、 $\tau = \tau'_\eta$  とおけば Landau-Boltzmann 理論の結果と一致する。液体<sup>3</sup>He における第0-第1音波の転移を説明することができる。

すなわち、液体<sup>3</sup>He での第0音波から第1音波への転移は、粘弾性流体<sup>[46]</sup> における弾性流体から粘性流体への転移に対応すると解釈することが出来る。

### 3.1.3 横波

続いて常流動<sup>3</sup>He 中を伝播する横波について述べる。Landau の理論によれば、液体<sup>3</sup>He 常流動相では、粒子間の強い相互作用によって、通常、流体中では伝播し得ないとされる横波までもが振幅の減衰なしで伝播する。Boltzmann 方程式 (3.12) に立ち返り、衝突項を無視すると、

$$(\Omega - \eta)\delta n_{\mathbf{k}} + \eta f' \delta \varepsilon_{\mathbf{k}} = 0 \quad (3.35)$$

となる。横波の場合、誘起される場は、分極方向の準粒子の流れ

$$\mathbf{J} = \frac{2}{m} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \delta n_{\mathbf{k}}$$

であり、準粒子励起に伴うエネルギーのゆらぎは、

$$\delta \varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{F_1^s m}{3n m^*} \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}$$

となる。これらの式を連立させることにより Boltzmann 輸送方程式を解くことができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{2}{m} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \frac{\eta}{\Omega - \eta} f' \delta \varepsilon_{\mathbf{k}} \\ &= \left( \frac{1}{3} \frac{m}{m^*} \frac{F_1^s}{n} \right) \frac{2}{m} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \frac{\eta}{\Omega - \eta} f' \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} \end{aligned} \quad (3.36)$$

この方程式から無次元化した音速  $s = \Omega / (qv_F)$  を決定する条件式が得られる。

$$\frac{6}{F_1^s} = (3s^2 - 2) + \frac{3s(s^2 - 1)}{2} \ln \frac{s-1}{s+1} \equiv f(s)$$

まず、 $s < 1$  では急激な虚数部分の増加により条件式を満たす解が存在しない。これは Landau 減衰に相当し、準粒子励起と外場が共鳴することに対応して著しく吸収が増すため音波は伝播しない。また、Landau 減衰が生じない  $s > 1$  となる解を得るためには  $F_1^s > 6$  でなければならないことがわかる。図 3.2 に、実線で関数  $s^2 f(s)$  を、

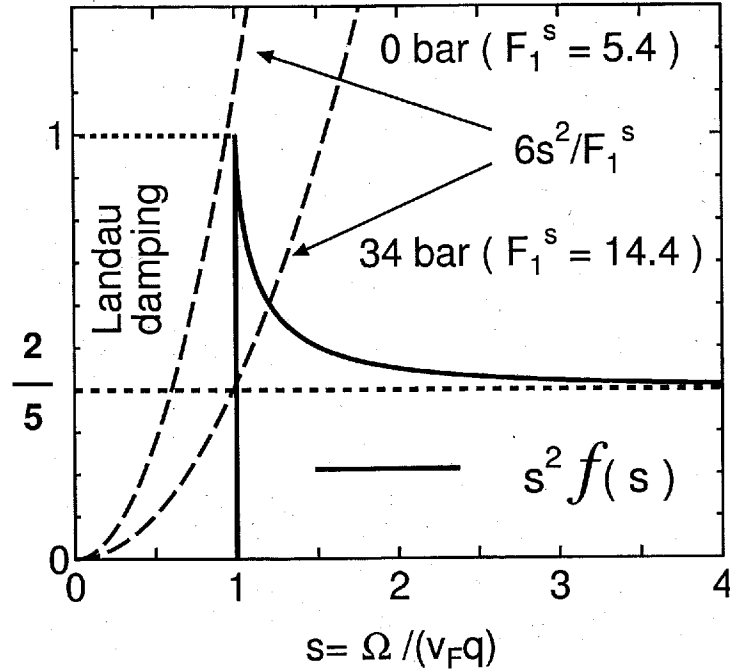


図 3.2: 横波の音速の存在範囲 (実線:  $s^2 f(s)$ 、破線:  $6s^2/F_1^s$ )

また 2 つの破線による曲線で 0[bar] と 34[bar] での  $6s^2/F_1^s$  の振る舞いを示した。これらの曲線と実線の交点が、実現する音速であり、図からも明らかなように横波の音速は  $s \simeq 1$  あたりに現れる。これは実際の音速が Fermi 速度程度となり、縦波の音速と比べて著しく遅い結果であることがわかる。

実験的には Roach and Ketterson<sup>[47]</sup> によって初めて横応答の結果が報告された。彼らは音響インピーダンスを測定し、流体力学から導かれる音響インピーダンスの表式

$$Z_{ai} \equiv \rho_3 \frac{\Omega}{q + i\alpha} = \frac{\rho_3 \Omega q}{q^2 + \alpha^2} - i \frac{\rho_3 \Omega \alpha}{q^2 + \alpha^2} = R_H - iX_H$$

を用いて、この実部  $R_H$  と虚部  $X_H$  の振る舞いを解釈した。ここで  $\rho_3$  は液体<sup>3</sup>He の密度である。測定結果は結果は図 3.3 に示す通り、高温から低温へ横波の第 1-第 0 音波の転移を観測したように考えられた。その後、Flowers *et al.*<sup>[48]</sup> および Flowers and Richardson<sup>[49]</sup> によって、Landau-Boltzmann 理論に基づく音響インピーダンスの理論が発表されたが、特に虚部の低温での振る舞いにおいて理論と実験は一致せず、常流動状態における横波伝播の確証には至っていない。

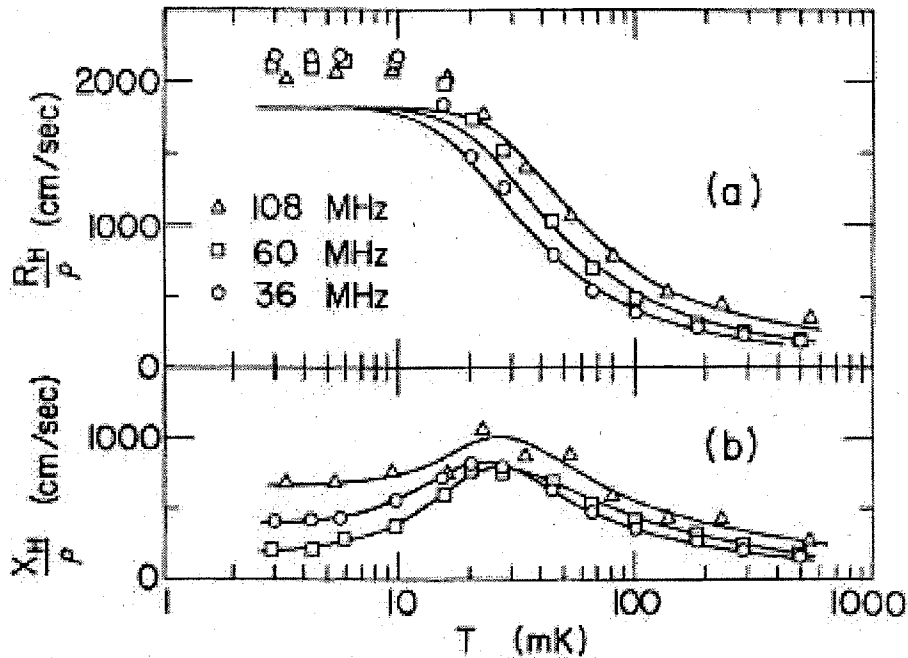


図 3.3: 常流動<sup>3</sup>He 中の横波における吸収の温度依存性。(a): 実部、(b): 虚部 [47]

### 3.2 超流動<sup>3</sup>He 中での音波

超流動<sup>3</sup>He では、P 波三重項の BCS 状態が実現している。2.2 節で述べたように、秩序パラメータには 18 の自由度があるが、転移温度は共通である。したがって、対破壊には至らない低いエネルギーでクーパー対の内部励起が励起される可能性がある。実際、それはオーダーパラメータの集団励起として存在し、そのうちのいくつかは音波と結合している。音波の吸収の振動数依存性を調べると、集団励起の振動数に対応する位置でピークが観測される。集団励起は以下に紹介するように、A 相、B 相それぞれに特有なものが存在し、超音波吸収はそれらを観測する重要な実験手段である。図 3.4 は、B 相の場合の集団励起と音波の模式図である。音波の速度が大きいため、音波と結合する集団励起はほとんど  $q = 0$  のものを考えればよいことを注意しておく。

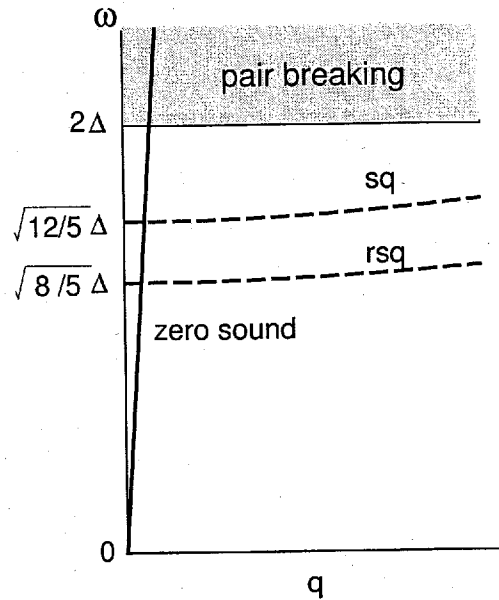


図 3.4: B 相における音波と集団励起の分散関係

### 3.2.1 オーダパラメータの集団励起

オーダーパラメータの平衡状態からのゆらぎを

$$\delta\hat{\Delta} = i(\delta d_{\mu}\sigma_{\mu})\sigma_y \quad (3.37)$$

とし、

$$\delta d_{\mu} = \delta d_{\mu\nu}\hat{k}_{\nu} = (\delta d'_{\mu\nu} + \delta d''_{\mu\nu})\hat{k}_{\nu} \quad (3.38)$$

と展開する<sup>1</sup>。ここで、 $\delta d'$ 、 $\delta d''$  はそれぞれオーダーパラメータの実部および虚部の揺らぎを表し、 $\delta d' \equiv (\delta d + \delta d^*)/2$ 、 $\delta d'' \equiv (\delta d - \delta d^*)/2$  によって定義する。6.2 節で再び言及するが、集団励起を求めるには以下のように行えばよい。たまたま揺らぎ

$$\delta\hat{\Delta}(\mathbf{q}, \Omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)}$$

が生じたとする。これを 2.2 節の分子場ハミルトニアン  $\mathcal{H}_m$  に加わる摂動と考え、 $\langle a_{\mathbf{k}\sigma} a_{-\mathbf{k}\sigma'} \rangle$  の線形応答を計算する。その結果をギャップ方程式 (2.33) に代入して自己無撞着の条件を課すと

$$\delta d_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \Omega) = \sum_{\mu'\nu'} \mathcal{K}_{\mu\nu,\mu'\nu'}(\mathbf{q}, \Omega) \delta d_{\mu'\nu'}(\mathbf{q}, \Omega)$$

<sup>1</sup> $\mu$ 、 $\nu$  はそれぞれ運動量空間、スピン空間に対応するサフィックスである。

の形の方程式が得られる。これを対角化し、非自明解の存在を要請すると集団励起の  $\Omega$  と  $q$  の関係が求まる。

**BW 状態** 2.2節で述べたように、オーダーパラメータの位相を一様に変化させても、自由エネルギーは変化しない。それに対応して、 $q=0$  で  $\Omega=0$  になる Goldstone(GS) モードが存在し、その基準座標は

$$\delta d''_{xx} + \delta d''_{yy} + \delta d''_{zz}$$

である。このモードはS波超伝導体で Anderson モードと呼ばれるものに対応するが、 $^3\text{He}$  では音波と結合し、第0音波の音速で伝播するようになる。同様に、回転対称性の破れを回復する3つのGSモードがあり、基準座標は

$$\delta d'_{xy} - \delta d'_{yx}, \quad \delta d'_{yz} - \delta d'_{zy}, \quad \delta d'_{zx} - \delta d'_{xz}$$

である。これらは、スピン波として伝播する。

BW 状態ではエネルギーギャップが等方的に開いているために、集団励起もクーパー対の全角運動量  $J$  で分類することができ、それぞれの表現の基底が基準座標になっている。Anderson モードは虚部の  $J=0$  モードであり、スピン波は実部の  $J=1$  モードである。 $J=0, 1, 2$  についてそれぞれ実部および虚部のモードがあり、全部で18個存在する [50, 51]。BW 状態におけるオーダーパラメータの集団励起を表3.2にあげる。 $J=2$  の虚部のモードは、squashing(sq) モードと呼ばれ、 $q=0$  で  $\Omega = \sqrt{\frac{12}{5}}\Delta_B$  のギャップを持ち、5重に縮退している。squashing の名前の由来は、このモードが Fermi 球のD波の変形を引き起こすからである。一方、 $J=2$  の実部のモードは、real squashing(rsq) モードと呼ばれ、 $q=0$  で  $\Omega = \sqrt{\frac{8}{5}}\Delta_B$  のギャップを持ち、5重に縮退している。このモードは、Fermi 球のスピン分布のD波の変形を引き起こす。

実部のモードと音波の結合は非常に弱い。実際、計算の段階で、Fermi 面近傍の状態密度が Fermi 液体理論で与えられる一定値  $N_0$  であるとする (particle-hole 対称性の仮定)、結合は生じないという結果になる。運動量の和をエネルギー積分で置き換える段階で、Fermi 面近傍の状態密度のエネルギー依存性まで考慮すると、初めて  $\Omega/\varepsilon_F$  のオーダーで結合が生じる [52]。しかし、BW 状態では、 $2\Delta_B$  のギャップがあるため、非常に弱い結合でも実験では rsq モードが明瞭な吸収ピークとして観測された。



全角運動量	固有振動数	基準座標
$J = 0$	$\Omega^2 = 0$	$\delta d''_{xx} + \delta d''_{yy} + \delta d''_{zz}$
$J = 0$	$\Omega^2 = 4\Delta_B^2$	$\delta d'_{xx} + \delta d'_{yy} + \delta d'_{zz}$
$J = 1$	$\Omega^2 = 4\Delta_B^2$	$\delta d''_{xy} - \delta d''_{yx}$ $\delta d''_{zx} - \delta d''_{xz} \pm i(\delta d''_{zy} - \delta d''_{yz})$
$J = 1$	$\Omega_B^2 = 0$	$\delta d'_{xy} - \delta d'_{yx}$ $\delta d'_{zx} - \delta d'_{xz} \pm i(\delta d'_{zy} - \delta d'_{yz})$
$J = 2$	$\Omega^2 = \frac{12}{5}\Delta_B^2$	$\delta d''_{xx} + \delta d''_{yy} - 2\delta d''_{zz}$ $\delta d''_{zx} + \delta d''_{xz} \pm i(\delta d''_{zy} + \delta d''_{yz})$ $\delta d''_{xx} - \delta d''_{yy} \pm i(\delta d''_{xy} + \delta d''_{yx})$
$J = 2$	$\Omega^2 = \frac{8}{5}\Delta_B^2$	$\delta d'_{xx} + \delta d'_{yy} - 2\delta d'_{zz}$ $\delta d'_{zx} + \delta d'_{xz} \pm i(\delta d'_{zy} + \delta d'_{yz})$ $\delta d'_{xx} - \delta d'_{yy} \pm i(\delta d'_{xy} + \delta d'_{yx})$

表 3.2: BW 状態におけるオーダーパラメータの集団励起 [53]

**ABM 状態** ABM 状態においても、対称性の破れを回復する GS モードとして、Anderson モードやスピン波が存在する。そのほか、 $q = 0$  でギャップを持ち、音波と結合する集団励起として Clapping(cl) モードと 2 つの Flapping(fl) モードすなわち、低周波数側の normal Flapping(nfl) モードと高周波数側の super Flapping(sfl) モードがあげられる。これらのモードを表 3.3 に示す。平衡状態のオーダーパラメータは (2.39)

モード名	固有振動数 ( $T \rightarrow 0$ )	固有振動数 ( $T \rightarrow T_C$ )
cl モード	$\Omega \simeq 1.23\Delta_A(T)$	$\Omega \simeq 1.22\Delta_A(T)$
nfl モード	$\Omega \propto T$	$\Omega \simeq \sqrt{4/5}\Delta_A(T)$
sfl モード	$\Omega \simeq 1.56\Delta_A(T)$	$\Omega \simeq 2\Delta_A(T)$

表 3.3: ABM 状態での音波と結合する代表的な集団励起 [53]

に見られるように、 $l$  方向を  $z$  軸とすると、 $L_z = 1$  の角運動量を持つ状態になっている。これに、 $L_z = -1$  の成分の揺らぎが混じるのが Clapping mode である。 $L_z = -1$  の揺らぎが生じると、 $m$  ベクトルと  $n$  ベクトルが両手をたたく (Clap) ように振動す

るようになりこれが名前の由来である。一方、flモードでは、 $L_z = 0$ の成分の揺らぎが生じている。その結果、 $l$ ベクトルが $m-n$ 面に対して傾く、あるいは $l$ ベクトルから見れば $m-n$ 面が両手を羽ばたかせる(Flap)ように振動するという訳である。ABM状態では $l$ 軸方向にエネルギーギャップが閉じ、有限の振動数では常に対破壊が起こる。したがって、BW状態の場合とは異なり、clモードやflモードは大きなエネルギー幅を持っている。

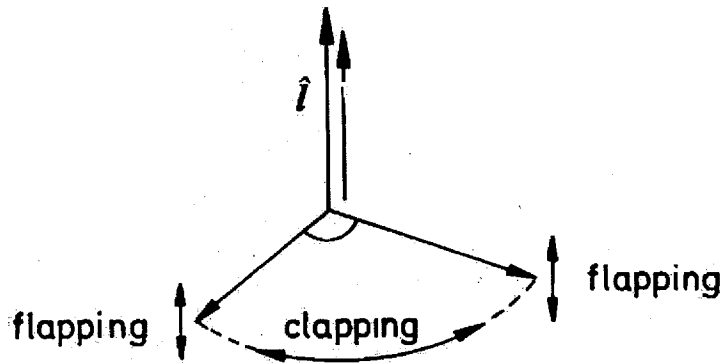


図 3.5: clモードとflモードに対応するオーダーパラメータの振動

### 3.2.2 縦波

**B相** まず、純粋な超流動 $^3\text{He}$ -B相における縦波の理論および実験についてふれる。実験は、基本的には音波の振動数を固定し、温度を変えて吸収の温度依存性を測定している。初期の段階で代表的なものとしては、Paulson *et al.*<sup>[54]</sup>、Roach *et al.*<sup>[55]</sup>、による報告がある。これらはsqモードと対破壊による吸収を観測したと考えられている。その後、Giannetta *et al.*<sup>[56]</sup>、Mast *et al.*<sup>[57]</sup>により更に精密な測定がなされ、図 3.6に見られるように、sqモードと対破壊の寄与の分離がなされ、同時にrsqモードによるピークも発見された。また、Daniels *et al.*<sup>[58]</sup>は、転移温度直下の対破壊効果による吸収の増大について更に詳しい解析を行い、図 3.7にあるように、対破壊の吸収端から外れた領域に吸収が現れることを見出し、これをgapモードであると報告したが、理論的評価との差異から現在までに解決されない問題として残っている。

rsqモードに関しては、 $\Omega = \sqrt{\frac{8}{5}}\Delta_B(T)$  近くに吸収ピークが発見され、さらに磁場中

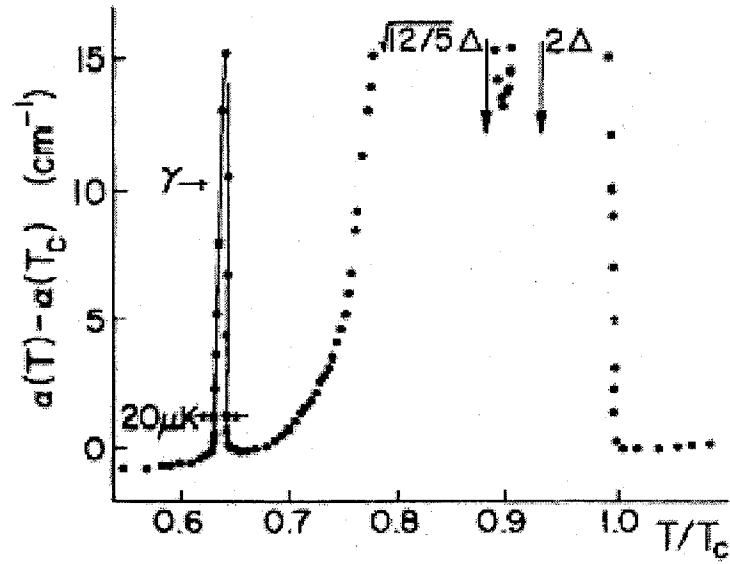


図 3.6: BW 状態における音波の吸収 (左から rsq モード、sq モード、対破壊効果)<sup>[56]</sup>

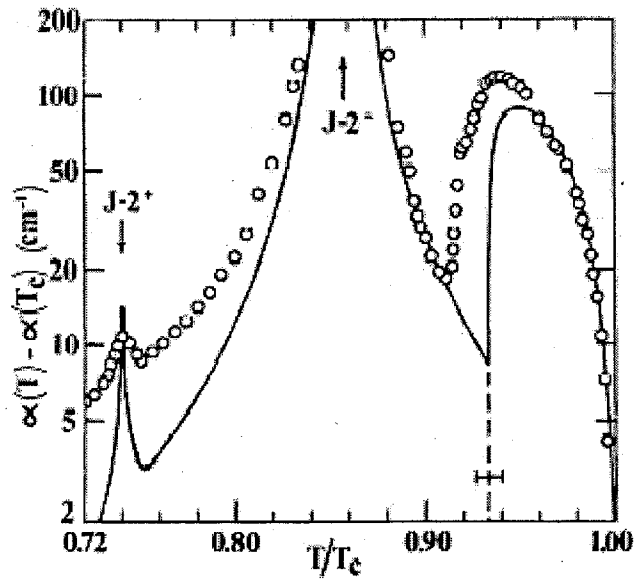


図 3.7: B 相における音波の吸収 (左から rsq モード、sq モード、gap モードと対破壊効果: 実線 (理論)、点線 (対破壊効果の吸収端))<sup>[58]</sup>。

におけるピークの分裂が Avenel *et al.*<sup>[59]</sup> により観測された。この振舞いは、rsq モードがゼーマン効果によりその縮退が解けるといふ Tewordt and Schopohl<sup>[60]</sup> による理論と一致し、rsq モードであるという指摘に確証を与えた。また同様に sq モードも、理論的にはゼーマン分裂を起こすと予言されていたが、sq モードによる吸収が大きすぎて、長い間ピーク分裂の観測には至っていなかったが、Movshovich *et al.*<sup>[61]</sup> の実験により sq モードの分裂が確認された。

磁場中では、BW 状態の  $\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$  の対が抑制され、エネルギーギャップも異方的になる。その結果、音波の吸収スペクトルも音波の波数ベクトル  $\mathbf{q}$  と磁場との角度に依存し、異方性を示す。磁場下での超音波吸収については、異方性、集団励起の磁場依存性、対破壊スペクトルの微細構造などが Ling *et al.*<sup>[62]</sup> によって観測され、Ashida *et al.*<sup>[63]</sup> の理論とよく一致している。

**A 相** 超流動<sup>3</sup>He-A 相では、 $l$  ベクトルの存在により、音波の伝播にも異方性がある。縦波を用いた場合、 $l$  ベクトルと平行に伝播する音波は、cl モード、fl モードのいずれとも結合せず、一方、 $l$  ベクトルと垂直に伝播する音波を用いた場合は cl モードが結合し、中間方向に伝播する音波を用いた場合に fl モードと結合することが示されている<sup>[64]</sup>。ABM 状態では、 $l$  ベクトル方向でギャップが閉じているため、すべての振動数で対破壊に伴うエネルギー吸収が生じる。したがって、これらの集団励起は、ブロードな吸収のピークとなって現れる。Paulson *et al.*<sup>[65, 66]</sup> によって報告された A 相における超音波吸収の温度依存性を図 3.8 に示す。この実験では、3 方向の音波を用いて超音波吸収の測定がなされた。理論との完全な一致は見られていないが、方向によって、nfl モードおよび cl モードとの結合が変化していることが見て取れる。

2 つの fl モードのうち高周波数側のモードである sfl モードは、対破壊による吸収に隠れるためはっきりとしたピークとしては観測されず、逆に対破壊のスペクトルにおいて、対励起の状態密度の特異性を反映して  $\Omega = 2\Delta_A(T)$  にカスプが見えることが理論的に示され<sup>[67]</sup>、実験的にも確認されている。

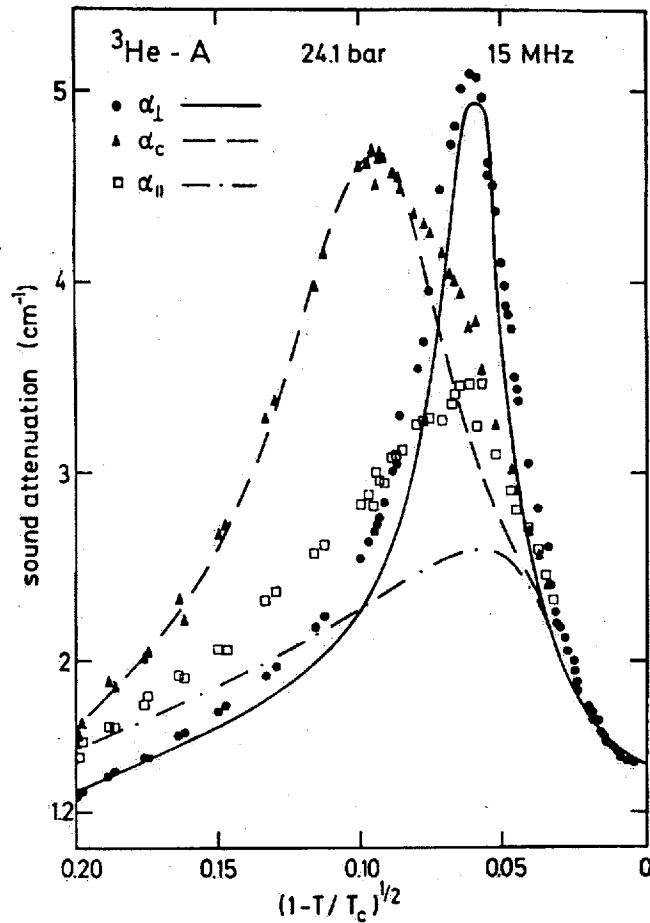


図 3.8: A 相における超音波吸収 ( $\alpha_{\perp}$ :  $l$  ベクトルと垂直方向、 $\alpha_{\parallel}$ : 平行方向、 $\alpha_c$ : 中間方向に伝播する音波の吸収。対応する曲線は Wölfle and Koch<sup>[64]</sup> による理論線)

### 3.2.3 横波

3.1.3 節において言及したように常流動相では横波の伝播の確定的な観測には至っていない。超流動相においては、エネルギーギャップの間に sq モードを有し、横波とも結合している<sup>[51]</sup>。  $J = 2$  の sq モードのうち、  $J_z = \pm 1$  のモードがそれぞれ左右の円偏光と結合している（横波音波であるが電磁波とのアナロジーがあるため円偏光という用語を使った）。それぞれの円偏光の音速は共鳴周波数の付近で著しくエンハンスされる（図 3.9 参照）。磁場中では、ゼーマン効果によって sq モードの共鳴周波数が分裂するため、右偏光の横波と左偏光の横波では音速が違ってくる。実際の横波音波は

左右の円偏光の重ね合わせである。したがって、横波の進行とともに分極方向が回転する。この現象は、Moore and Sauls<sup>[68]</sup>により予言されていたが、Lee *et al.*<sup>[69]</sup>は、

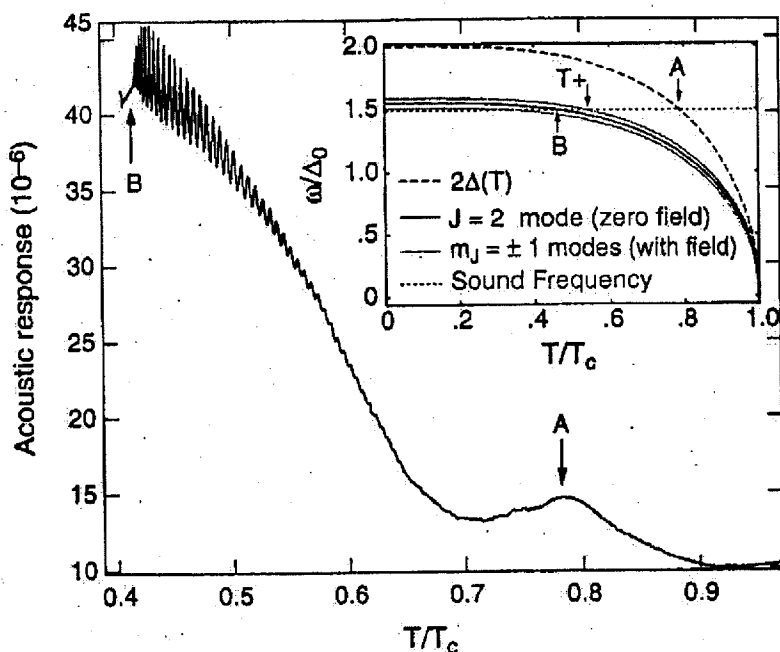


図 3.9: 対破壊効果 (A) と sq モード (B) による横応答の増強

入射横波と、実験セルの他端で反射して戻ってきた横波との干渉を調べる方法でこのことを観測し、音響 Faraday 効果<sup>2</sup>と呼んだ。図 3.10 に示すように、磁場中でこの実験を行い、磁場の強さを変化させることにより入射波と反射波の干渉パターンが変化することを観測した。この実験は、<sup>3</sup>He 中を横波が伝播することを確認する実験といえよう。

### 3.2.4 エアロジェル中<sup>3</sup>He-超流動相での音波

不純物を含む超流動相での音波の理論はまだ不十分である。エアロジェルを対象にしたものではないが、Maki<sup>[70]</sup>は、焼結銀などで満たされた容器中を伝播する第 4 音波の解析を均一分布不純物模型を用いて行った。Rainer and Sauls<sup>[12]</sup>は、エアロジェルを対象とし、Bogoliubov 準粒子の従う半現象論的 Boltzmann 方程式を用いて、音

<sup>2</sup>Faraday 効果については、付録 B にその詳細を示した。

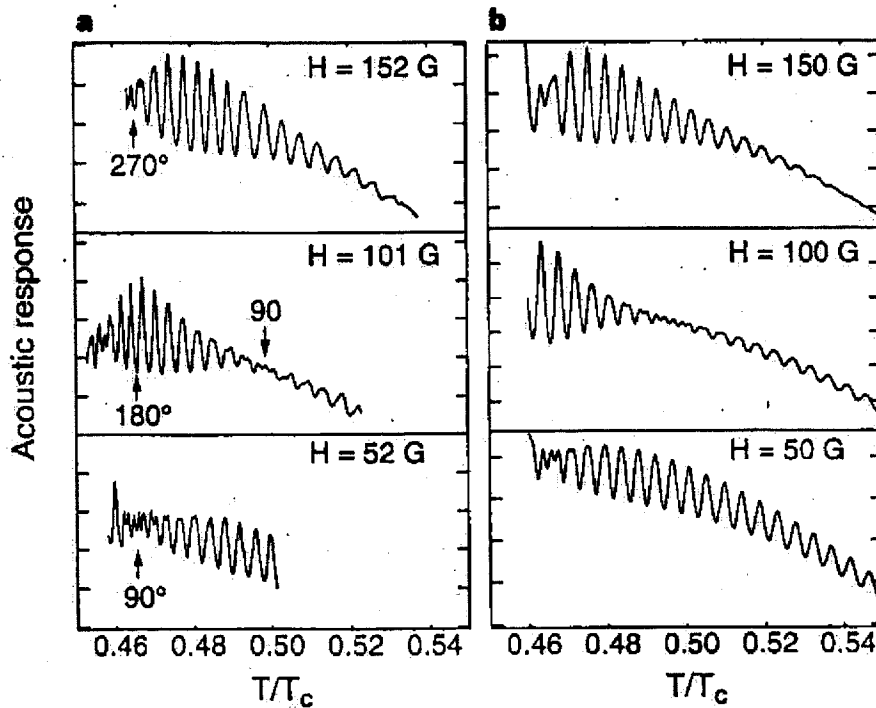


図 3.10: 音響ファラデー効果 (a: 実験、b: 理論) 偏光面が回転することで相殺している干渉パターンが磁場を強めると共に右方向にずれていく様子が見られている

波の伝播を議論した。 $\Omega\tau \gg 1$  では第 0 音波が伝播し、 $\Omega\tau \ll 1$  の極限では第 4 音波が伝播するというのが結論である。

第 0 音波の観測を目指し、高振動数 (15 [MHz]) を用いた実験が Northwestern グループ [14] によって行われたが、エアロジェル中において超流動転移直下での対破壊効果および gap モード、更には sq モードおよび rsq モードに起因する吸収の増大は見られず、吸収は温度低下とともに単調に減少すると報告されている。次章で詳しく述べるように、常流動相においても第 0 音波は観測されていない。

より低い振動数を用いた、第 4 音波の実験 [40] も報告されているが、Golov *et al.* [39] はエアロジェル中の超流動  $^3\text{He}$  において二つの音波のモードを観測した。一つは、 $^3\text{He}$  とエアロジェルが同位相で振動するモードで、もう一つは反位相で振動するモードである。彼らは、二流体方程式を用い、エアロジェルは常流動部分と一緒に動く [19] と仮定して実験結果を解析した。音波とともにエアロジェルが動く可能性を指摘したのは、重要である。

更に、エアロジェル中の横波の実験も Gervais *et al.* [42] により報告されており、温

度を下げる過程でのみ A-B 転移を観測したとの報告がなされている。



## 第4章 エアロジェル中<sup>3</sup>He常流相での音波

第3章で紹介したように、Northwestern グループ[14, 18] によって報告されたエアロジェル中の液体<sup>3</sup>He中を伝播する音波の振る舞いは、純粋な液体<sup>3</sup>Heのそれとは大きく異なるものとなっている。本章では常流動領域に焦点を当て、Landau-Boltzmann理論に不純物散乱効果を取り入れ、理論的解析を行う。エアロジェルを固定された不純物として扱うと、音波の吸収の理論値は実験に比べ数百倍大きい結果になるが、エアロジェルの運動を考慮し、Collision Drag Effect を考えると実験がよく説明されることを示す。

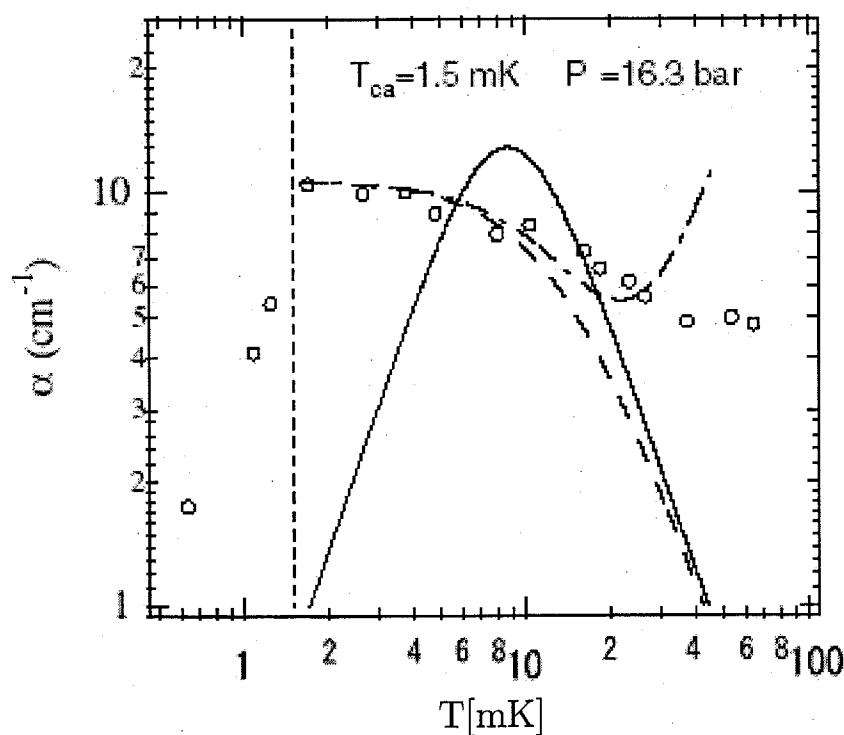


図 4.1: Northwestern 大学のグループによる Aerogel 中における音波の吸収の温度依存性 (○) 実線は純粋な系での理論値、破線は visco-elastic モデルによる解析、一点鎖線は decouple 効果を取り入れた解析 [14, 18]

#### 4.1 エアロジェル中 $^3\text{He}$ 常流動相での音波の実験

Northwestern グループ [14, 18] らによって報告された超音波吸収  $\alpha$  の温度依存性を図 4.1 に再掲する。実験は、16[bar] の圧力下で 15[MHz] の超音波を用いて行われている。図 4.1 の実線は同じ条件下での純粋な  $^3\text{He}$  での吸収の温度変化を表す。エアロジェル中では、第 0 音波から第 1 音波への転移のピークは見られず、10[mK] 近傍においてなだらかな温度依存性を示す結果となっている。注目すべき点は、エアロジェルの存在にもかかわらず、吸収の大きさが純粋な系で想定される値と同程度であるということである。

Nomura *et al.* [14] は、この結果の解釈に、3.1.2 節において言及した visco-elastic モデルの結果

$$\alpha = \frac{c_0 - c_1}{c_1^2} \frac{\Omega^2 \tau}{1 + (\Omega \tau)^2} \quad (4.1)$$

を用いた。緩和時間としては、準粒子散乱の緩和時間  $\tau'_\eta$  に不純物散乱の緩和時間を  $\tau_a$  をマティーンセンの規則を用いて緩和時間の合成を行い

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau'_\eta} + \frac{1}{\tau_a} \quad (4.2)$$

とにおいて解析を行っている。このモデルを用いた解析は図 4.1 において破線で与えられ、低温での温度依存性の説明には成功しているが、高温では  $\alpha \propto \Omega^2/T^2$  となり実験とかけ離れた結果となっている。図の一点鎖線はさらに別の Bio't によるモデルを用いた解析結果である。Bio't モデルは、低温で粘性が大きい場合は  $^3\text{He}$  はエアロジェルと一体となって動くが、高温になると粘性が小さく、 $^3\text{He}$  の運動とエアロジェルの運動にずれが出るために吸収が生じるというモデルである。

以下で示すように、visco-elastic モデルでは、不純物散乱を十分には記述できない。また、Bio't モデルは、エアロジェルの運動を考慮する点では、以下に述べる我々の collision drag モデルと通じるところがあるものの、問題になっている数十 [mK] の温度では、 $^3\text{He}$  の準粒子間衝突による平均自由行程はエアロジェル分子間の平均距離と同程度で、流体力学的な理論は適用できない。

## 4.2 不純物散乱による衝突項

エアロジェル中の  ${}^3\text{He}$  の音波について考えるとき、まずは、エアロジェルが  ${}^3\text{He}$  準粒子に対して散乱体として働くと考えるのが自然であろう。そこで、前章で扱った Boltzmann 方程式の衝突項に不純物散乱効果を加えて考える。

$$I = I_c + I_i \quad (4.3)$$

不純物散乱による衝突項  $I_i$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} I_i(\mathbf{k}) &= -2\pi \sum_{\mathbf{k}'} W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}'}) [n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}'}) - n_{\mathbf{k}'}(1 - n_{\mathbf{k}})] \\ &= -2\pi \sum_{\mathbf{k}'} W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}'}) [n_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}'}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$  は不純物による散乱確率を表す。衝突項  $I_i$  においても (3.7) 式で与えられた

$$\delta n_{l.e.} = f' \delta \varepsilon_{\mathbf{k}} \quad (4.5)$$

が、 $I_i(\mathbf{k}) = 0$  を満たす局所平衡解であることがわかる。そこで局所平衡解からのずれ  $\delta \bar{n}_{\hat{k}} = \delta n_{\hat{k}} - \delta n_{l.e.}$  に関して線形化すると

$$\delta I_i(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\tau_1} \left\langle \delta \bar{n}_{\hat{k}} - \Lambda_{\hat{k},\hat{k}'}^i \delta \bar{n}_{\hat{k}'} \right\rangle_{\hat{k}'} \quad (4.6)$$

$$\Lambda_{\hat{k},\hat{k}'}^i \equiv W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} / \langle W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \rangle \quad (4.7)$$

を得る。 $\tau_1$  は不純物散乱による緩和時間で

$$\frac{1}{\tau_1} \equiv 2\pi N_0 \langle W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \rangle$$

で定義され、明らかに温度に依存しない。

ここで、 $\Lambda_{\hat{k},\hat{k}'}^i$  が  $\hat{k} \cdot \hat{k}'$  のみの関数であると仮定し、部分波に展開する。

$$\Lambda_{\hat{k},\hat{k}'}^i = \sum_{\ell} (2\ell + 1) \lambda_{\ell}^i P_{\ell}(\hat{k} \cdot \hat{k}') \quad (4.8)$$

これを用いると、 $\delta I_i(\mathbf{k})$  も、式 (3.9) で与えられる準粒子間散乱項の緩和時間近似とまったく同じ形になる。

$$\delta I_i = -\frac{1}{\tau_1} \left( \delta \bar{n}_{\hat{k}} - \sum_{\ell} (2\ell + 1) \lambda_{\ell}^i \left\langle P_{\ell}(\hat{k} \cdot \hat{k}') \delta \bar{n}_{\hat{k}'} \right\rangle_{\hat{k}'} \right) \quad (4.9)$$

不純物散乱においても準粒子数は保存されるので、

$$\lambda_0^i = 1$$

が成立するが、運動量は保存されないので $\lambda_1^i \neq 1$ である。

結局、Boltzmann方程式は次式で与えられる。

$$(\Omega - \eta)\delta n_{\mathbf{k}} + \eta f' \delta \varepsilon_{\mathbf{k}} = i\delta I(\mathbf{k}) \equiv i[\delta I_c(\mathbf{k}) + \delta I_i(\mathbf{k})] \quad (4.10)$$

$$\delta I_i(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\tau_1} \left( \delta \bar{n}_{\hat{\mathbf{k}}} - \sum_{\ell} (2\ell + 1) \lambda_{\ell}^i \left\langle P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \delta \bar{n}_{\hat{\mathbf{k}}'} \right\rangle_{\hat{\mathbf{k}}'} \right) \quad (4.11)$$

$$\delta I_c(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\tau_c} \left( \delta \bar{n}_{\hat{\mathbf{k}}} - \sum_{\ell} (2\ell + 1) \lambda_{\ell}^c \left\langle P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \delta \bar{n}_{\hat{\mathbf{k}}'} \right\rangle_{\hat{\mathbf{k}}'} \right) \quad (4.12)$$

### 4.3 音波の分散関係

不純物を含む系の縦波音波の伝播を考えよう。3.1.2節で議論した純粋な系の場合と同様に、分布関数を部分波に展開する。

$$\delta n_{\hat{\mathbf{k}}} = (-f') \sum_{\ell} \nu_{\ell} P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \quad (4.13)$$

衝突項も純粋な系と同じ形

$$\delta I = f' \sum_{\ell} \frac{1}{\tau_{\ell}} \left( \frac{F_{\ell}^s}{2\ell + 1} + 1 \right) \nu_{\ell} P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \quad (4.14)$$

になるが、今回は緩和時間の部分波成分はそれぞれ、

$$\frac{1}{\tau_0} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1 - \lambda_1^i}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_{\text{tr}}} \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1 - \lambda_2^i}{\tau_1} + \frac{1 - \lambda_2^c}{\tau_c} = \frac{1 - \lambda_2^i}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{\eta}} \quad (4.17)$$

となる。(4.16)式で輸送緩和時間 $\tau_{\text{tr}}$ を定義した。この $\ell = 1$ 成分が残るのは、不純物散乱が運動量を保存しないことの結果である。

純粋な系の場合と同様に Boltzmann 方程式を解くことが出来るが、輸送緩和時間が残ることによって、(3.22)式は

$$\Omega \nu_1 + \frac{i}{\tau_{\text{tr}}} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \nu_1 = v_{\text{F}} q \left[ (1 + F_0^s) \nu_0 + \left( 1 + \frac{F_2^s}{5} \right) \frac{2}{5} \nu_2 \right] \quad (4.18)$$

と変更される。その結果、縦波音波の分散関係は

$$\Omega^2 \left( 1 + \frac{i}{\Omega \tau_{\text{tr}}} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \right) = c_1^2 q^2 \left[ 1 + \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_1^2} \frac{\Omega}{\Omega + \frac{i}{\tau_2} \left( 1 + \frac{F_2^s}{5} \right)} \right] \quad (4.19)$$

となる。

この結果を、前章の (3.24) 式と比べると、不純物散乱の効果は2箇所に表れていることがわかる。ひとつは  $\tau_2$  に対する補正であり、もうひとつは左辺第2項の輸送緩和時間を含む項である。Nomura *et al.*<sup>[14]</sup> が visco-elastic モデルを用いて行った補正は前者に対応する。しかし、後者は考慮されていない。

今回の結果を、Nomura *et al.* の visco-elastic モデルの結果と比較するために (4.2) 式を意識して

$$\frac{1 + \frac{F_2^s}{5}}{\tau_2} = \frac{1}{\tau'_\eta} + \frac{1}{\tau_a}$$

と置き、音速と吸収を調べる。

#### A. $\Omega\tau_1 \gg 1$ の場合

低温極限では、 $\Omega\tau'_\eta \gg 1$  が成り立ち、

$$\Omega^2 = c_0^2 q^2 \left[ 1 - \frac{i}{\Omega} \left( \frac{1}{\tau_{tr}} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) + \frac{1}{\tau_a} \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_0^2} \right) \right] \quad (4.20)$$

$$c = c_0 \quad (4.21)$$

$$\alpha = \frac{1}{2c_0} \left\{ \frac{1}{\tau_{tr}} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) + \frac{1}{\tau_a} \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_0^2} \right\} \quad (4.22)$$

一方、高温極限では  $\Omega\tau'_\eta \ll 1$  であり、

$$\Omega^2 = c_1^2 q^2 \left( 1 - \frac{i}{\Omega\tau_{tr}} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \right) \quad (4.23)$$

$$c = c_1 \quad (4.24)$$

$$\alpha = \frac{1}{2c_1\tau_{tr}} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \quad (4.25)$$

となる。いずれの場合も吸収は輸送緩和時間で支配されている。低温極限には  $\tau_a$  も現れているが、その前に液体  $^3\text{He}$  では小さい因子  $(c_0^2 - c_1^2)/c_1^2$  がかかっている。

#### B. $\Omega\tau_1 \ll 1$ の場合

この場合、分散関係は

$$\frac{i\Omega}{\tau_{tr}} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) = c_1^2 q^2 \quad (4.26)$$

となって、音波は過減衰となり伝播は観測されない。

以上のように、音波の吸収は輸送緩和時間によって支配され、visco-elasticモデルを用いた $\tau_2$ への補正だけでは不十分なことがわかる。

そこで、(4.19)式を用いて吸収の温度依存性を計算してみると、図4.2に示すように吸収の値は実験値より数百倍大きな値となる。これは、Northwesternグループの行った圧力16[bar]、振動数15[MHz]の実験に対応する結果で、 $l_{tr} = v_F \tau_{tr}$ としては幾何学的に評価された平均自由行程200[nm]を用い、 $l_a = v_F \tau_a$ をパラメータとしている。

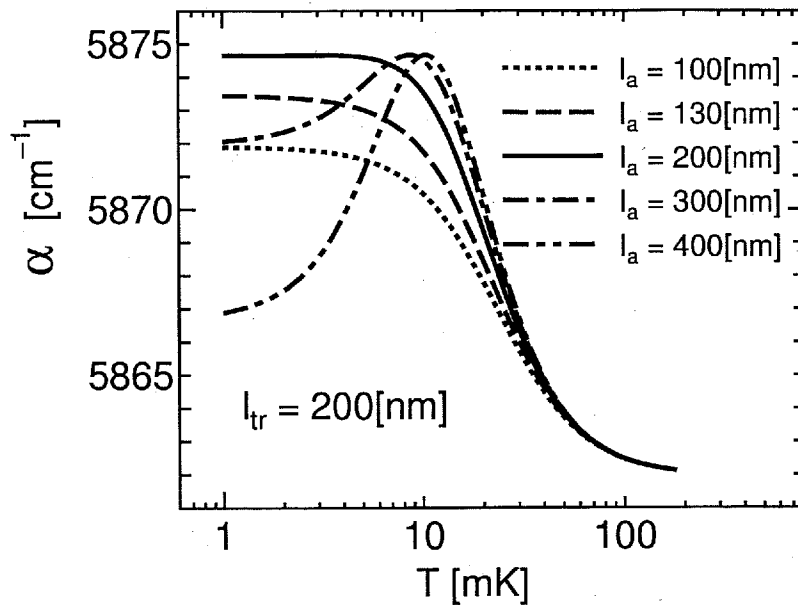


図 4.2: 不純物効果を取り入れた吸収の温度依存性

この大きな吸収の値では、音波はエアロジェル中をほとんど伝播できないことになる。その原因は、 $\tau_{tr}$ の存在であり、それは固定された不純物によって<sup>3</sup>Heの運動量が吸収されてしまうためである。実験で、音波の伝播が観測されているということは、何らかの機構で<sup>3</sup>Heの運動量の吸収が抑えられていることを意味する。次節では、散乱体である不純物の運動を考慮すれば、音波の伝播が可能であることを示す。

#### 4.4 Collision Drag Effect

前節で議論したように、不純物が固定されていると仮定すると、音波の吸収が著しく大きくなる結果を得た。これは衝突によって<sup>3</sup>Heの運動量が不純物に吸収され、消

失ってしまうことが原因である。もし不純物が  $^3\text{He}$  と一緒に動くならば、この消失は減少するはずである (Collision Drag Effect<sup>[71, 72]</sup>)。そこで、本節では、前節でおこなった Landau-Boltzmann 理論を拡張し、不純物の運動も考慮に入れた議論を展開する。この Collision Drag Effect を取り入れることで、図 4.3 および図 4.5 に示す Northwestern グループによるエアロジェル中の超音波吸収の温度依存性および圧力依存性が説明できる<sup>[20]</sup>。

#### 4.4.1 不純物散乱—再考

4.2 節で議論した不純物散乱による衝突項について再び考える。散乱体が速度  $\mathbf{v}$  で動いているときも、衝突項はやはり、

$$I_1(\mathbf{k}) = -2\pi \sum_{\mathbf{k}'} W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta(\tilde{\epsilon}'_{\mathbf{k}} - \tilde{\epsilon}'_{\mathbf{k}'}) [n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}'}) - n_{\mathbf{k}'}(1 - n_{\mathbf{k}})] \quad (4.27)$$

と書ける。しかし、散乱体から見た準粒子のエネルギーは、

$$\tilde{\epsilon}'_{\mathbf{k}} = \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \quad (4.28)$$

であることに注意しなければならない。その結果、局所平衡解は、

$$\delta n_{l.e.} = f'(\delta \epsilon_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (4.29)$$

となる。極めて都合なことに、(4.29) 式は準粒子間衝突項  $I_c$  の局所平衡解でもある。それは準粒子間の衝突がエネルギーと運動量を保存することによる。したがって、衝突項は、やはり分布関数の局所平衡解からのずれ

$$\delta \bar{n}_{\mathbf{k}} = \delta n_{\mathbf{k}} - f'(\delta \epsilon_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (4.30)$$

を用いて、(4.11) 式と (4.12) 式のように表される。

#### 4.4.2 エアロジェルの運動

エアロジェル分子が音波とともに動く可能性を考える。音波の波長はエアロジェルの分子鎖間の距離に比べて圧倒的に長いので、エアロジェルを連続体と考える近似が許される。 $^3\text{He}$  を入れる前の、裸のエアロジェルにおいても音波が伝播し、縦波の音

速  $c_1$  は  $50[\text{m/s}]$  程度であることが知られている。エアロジェル分子の平衡位置からのずれを  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_q e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)}$  とすると、不純物に関する運動方程式は

$$\rho_i \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \rho_i c_1^2 \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{\text{DF}} \quad (4.31)$$

と書けるであろう。ここで、 $\rho_i$  はエアロジェルの密度である。また  $\mathbf{F}_{\text{DF}}$  は  $^3\text{He}$  がエアロジェルに及ぼす単位体積あたりの力 (Drag Force) である。この力は、 $^3\text{He}$  が衝突によって単位時間あたりに失う運動量密度に等しい。

$$\mathbf{F}_{\text{DF}} = -2 \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \delta I(\mathbf{k}) \quad (4.32)$$

いま、縦波の伝播を考えているので、エアロジェル分子の局所速度  $\mathbf{v}$  は

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = -i\Omega \mathbf{u}_q e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)} \equiv -i\Omega u_q \hat{\mathbf{q}} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)} \quad \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q \quad (4.33)$$

と書ける。これを (4.29) 式に入れ、衝突項 (4.14) を書き換えると、P 波成分のみ変更されて、

$$\delta I(\mathbf{k}) = f' \sum_{\ell} \frac{1}{\tau_{\ell}} \left\{ \left( \frac{F_{\ell}^s}{2\ell+1} + 1 \right) \nu_{\ell} + i\Omega k_{\text{F}} u_q \delta_{1\ell} \right\} P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \quad (4.34)$$

となる。(4.32) 式より Drag Force  $\mathbf{F}_{\text{DF}}$  は

$$\mathbf{F}_{\text{DF}} = \left( \frac{2N_0 k_{\text{F}}}{3} \frac{1}{\tau_{\text{tr}}} \left\{ \left( \frac{F_1^s}{3} + 1 \right) \nu_1 + i\Omega k_{\text{F}} u_q \right\} \right) \hat{\mathbf{q}} \quad (4.35)$$

と計算される。これを  $u_q$  の運動方程式 (4.31) に代入すると

$$u_q = - \frac{\frac{1}{\tau_{\text{tr}}} \frac{2N_0 k_{\text{F}}}{3} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \nu_1}{\rho_i \left( \Omega^2 - \Omega_q^2 + \frac{i\Omega}{\tau_{\text{tr}}} \frac{2N_0 k_{\text{F}}^2}{3\rho_i} \right)} \quad (4.36)$$

となる。ここで、 $\Omega_q = c_1 q$  とおいた。

この結果を、再び、衝突項 (4.34) に代入すると、衝突項の P 波成分は

$$f' \frac{1}{\tau_{\text{eff}}} \left( \frac{F_1^s}{3} + 1 \right) \nu_1 P_1(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \quad (4.37)$$

と書け、 $\tau_{\text{eff}}$  は

$$\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_{\text{tr}}} \frac{\Omega^2 - \Omega_q^2}{\Omega^2 - \Omega_q^2 + \frac{i\Omega}{\tau_{\text{tr}}} \frac{2N_0 k_{\text{F}}^2}{3\rho_i}} \quad (4.38)$$

で与えられる。この結果から、エアロジェルの運動の効果は、固定された不純物の場合の  $\tau_1 = \tau_{\text{tr}}$  を繰り込まれた  $\tau_{\text{eff}}$  で置きなおすことになっていることがわかる。



## 4.4.3 エアロジェル中の音波

前節の結果から、Collision Drag Effect を取り入れた時の音波の分散関係は、固定された不純物の場合の (4.19) 式で  $\tau_{\text{tr}}$  を  $\tau_{\text{eff}}$  で置き換えればよいことがわかる。

$$\Omega^2 \left( 1 + \frac{i}{\Omega \tau_{\text{eff}}} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \right) = c_1^2 q^2 \left[ 1 + \frac{4}{5} \frac{\left( 1 + \frac{F_2^s}{5} \right)}{\left( 1 + F_0^s \right)} \frac{\Omega}{\Omega + \frac{i}{\tau_2} \left( 1 + \frac{F_2^s}{5} \right)} \right] \quad (4.39)$$

この結果を、Nomura *et al.*<sup>[14]</sup> の実験と比較する。裸のエアロジェル中を伝わる音波の音速  $c_1 \simeq 50[\text{m/s}]$  は Fermi 速度程度であり、観測されている音速  $c \simeq 300[\text{m/s}]$  と比べて十分遅いため、 $\Omega^2$  に比べて  $\Omega_q^2$  を無視できる。したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{\text{eff}}} &= \frac{1}{\tau_{\text{tr}}} \frac{\Omega^2 - \Omega_q^2}{\Omega^2 - \Omega_q^2 + \frac{i\Omega}{\tau_{\text{tr}}} \frac{2N_0 k_F^2}{3\rho_i}} \\ &\simeq \frac{1}{\tau_{\text{tr}}} \frac{1}{1 + \frac{i}{\Omega \tau_{\text{tr}}} \frac{\rho_3}{\rho_i} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

ここで、 $^3\text{He}$  の密度が  $2N_0 k_F^2/3 = \rho_3(1+F_1^s/3)$  の関係を満たすことを用いた。Northwestern グループの実験では 98% の空孔率を持つエアロジェルを用いており、16[bar] の圧力において  $\rho_i/\rho_3 \sim 0.4$  となる。また振動数は 15[MHz] であり、 $\tau_{\text{tr}}$  を幾何学的に求められた平均自由行程から見積もると  $\Omega \tau_{\text{tr}} \sim 1$  と評価される。したがって、 $\frac{\Omega \tau_{\text{tr}}(\rho_i/\rho_3)}{1+F_1^s/3} \ll 1$  の関係を満たし、

$$\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{-i\Omega(\rho_i/\rho_3)}{1+F_1^s/3} \left( 1 + i\Omega \tau_{\text{tr}} \frac{\rho_i/\rho_3}{1+F_1^s/3} \right) \quad (4.41)$$

とさらに展開できる。ここで、主要項が純虚数となり、式 (4.39) の左辺第一項に繰り込まれることは、Collision Drag Effect を取り入れたために生じた重要な結果である。これは、衝突が頻繁におこり  $\Omega \tau_{\text{tr}} \rightarrow 0$  となった場合、局所平衡が実現され  $^3\text{He}$  と不純物が一緒に動いていて、慣性が増していることを意味する。展開の補正項は、 $^3\text{He}$  とエアロジェルの運動にずれが生じたときそれが音波の減衰の原因になることを意味している。

(4.41) 式を (4.39) 式に代入すると、次のように分散関係が得られる。

$$\Omega^2 \left[ 1 + \frac{i\Omega \tau_{\text{tr}}}{(1+F_1^s/3)} \frac{(\rho_i/\rho_3)^2}{(1+\rho_i/\rho_3)} \right] = c^2 q^2 \left[ 1 + \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_1^2} \frac{1}{1 + \left( \frac{i}{\Omega \tau_\eta} + \frac{i}{\Omega \tau_a} \right)} \right] \quad (4.42)$$

ここで、 $c$ はエアロジェル中<sup>3</sup>Heを伝播する音波の速度であり

$$c^2 = \frac{c_1^2}{1 + \rho_i/\rho_3} \quad (4.43)$$

で与えられる。この結果は、<sup>3</sup>Heとエアロジェルが一緒に動いていることを反映している。また、 $(c_0^2 - c_1^2)/c_1^2 \ll 1$ の条件を用いると吸収 $\alpha$ は

$$\alpha = \frac{\Omega^2}{2c_1} \left( \frac{\tau_{tr}}{(1 + F_1^s/3)(1 + \rho_i/\rho_3)} + \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_1^2} \frac{1}{\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau'_\eta}} \right) \quad (4.44)$$

と求められる。始めに期待したように、Collision Drag Effectを取り入れることによって吸収の $\tau_{tr}$ に関係する分が大幅に小さくなったことが見て取れる。吸収の温度依存性は $\tau'_\eta \propto 1/T^2$ から生じ、低温極限( $\tau'_\eta \gg \tau_a$ )では

$$\alpha = \frac{\Omega^2}{2c_1} \left( \frac{\tau_{tr}}{(1 + F_1^s/3)(1 + \rho_i/\rho_3)} + \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_1^2} \tau_a \right) \quad (4.45)$$

高温極限( $\tau'_\eta \ll \tau_a$ )では

$$\alpha = \frac{\Omega^2}{2c_1} \frac{\tau_{tr}}{(1 + F_1^s/3)(1 + \rho_i/\rho_3)} \quad (4.46)$$

となる。この温度依存性はNorthwesternグループの実験と一致している。

$l_{tr} \equiv v_F \tau_{tr}$ 、 $l_a \equiv v_F \tau_a$ をパラメータとして、解析を行った結果を図4.4に示す。2種類の平均自由行程として、 $l_{tr} \simeq 45[\text{nm}]$ 、 $l_a \simeq 90[\text{nm}]$ と選んだときに最も良く実験と一致する結果が得られた。また、これらの平均自由行程を用いて吸収の圧力依存性を計算した。図4.6に見られるように、実験値を十分に再現している。

ここで得られた平均自由行程の値は、他の実験の解析および幾何学的見積もりから得られた値 $l = 100 \sim 200[\text{nm}]$ よりは小さくなっており<sup>1</sup>、この点は今後の検討が必要である。しかし、音波の吸収が実験で観測された値と同程度の値になること、音速と吸収の温度依存性と圧力依存性を再現できていることから、Collision Drag Effectのシナリオはエアロジェル中の音波の伝播を正しく記述していると考えられる。

Northwesternグループが用いた15[MHz]という振動数は、純粋な系では第0音波が観測できるという意味で、<sup>3</sup>Heの実験で用いられる振動数としては高振動数の部に入る。しかし、エアロジェル中においては、 $\frac{\Omega \tau_{tr}(\rho_i/\rho_3)}{1 + F_1^s/3} \ll 1$ が成立しているという意味で実は低振動数になっている。この不等式が逆転するほどの高振動数では、エアロ

<sup>1</sup>最近、熱伝導率やスピン拡散係数などの輸送係数から見積もられる平均自由行程は20~50[nm]と小さいという報告もある

ジェルは振動についていけず動かない。したがって、音波の吸収は固定された不純物の場合と同じになるはずで、このことを高振動数の実験で確認することが望まれる。

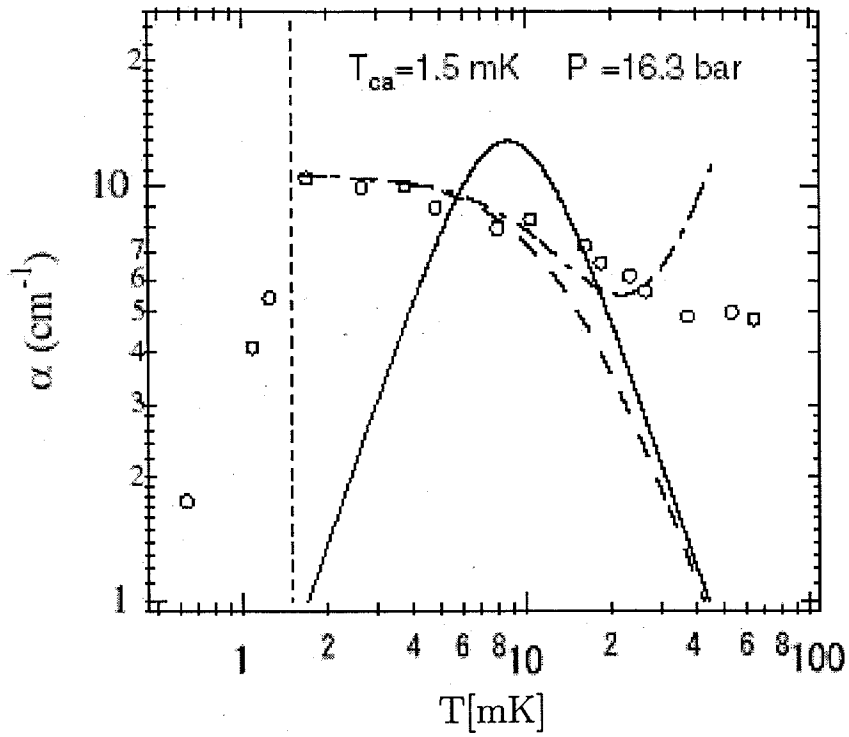


図 4.3: Northwestern のグループによるエアロジェル中の温度依存性 [14, 18]

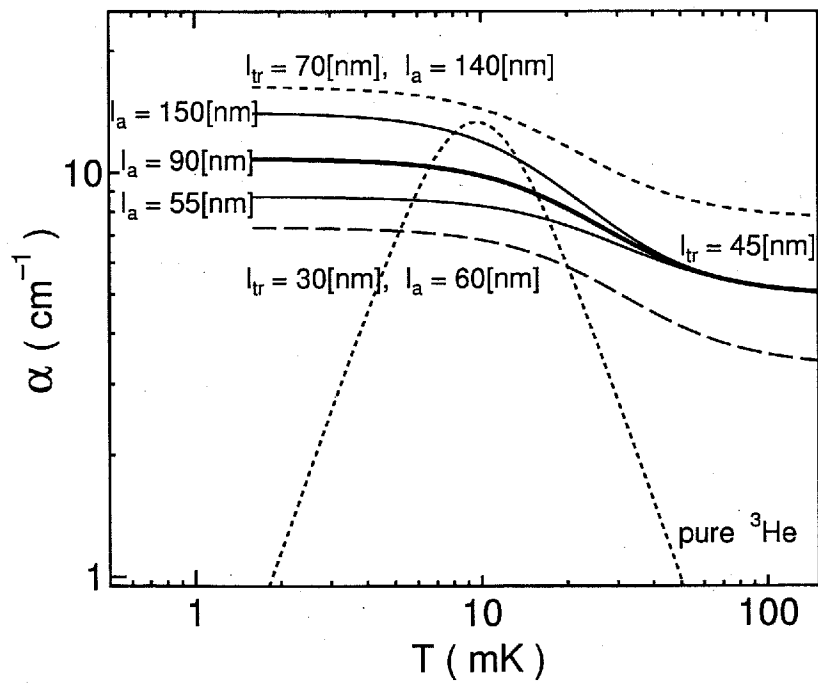


図 4.4: Collision Drag 効果を取り入れた場合の吸収の温度依存性

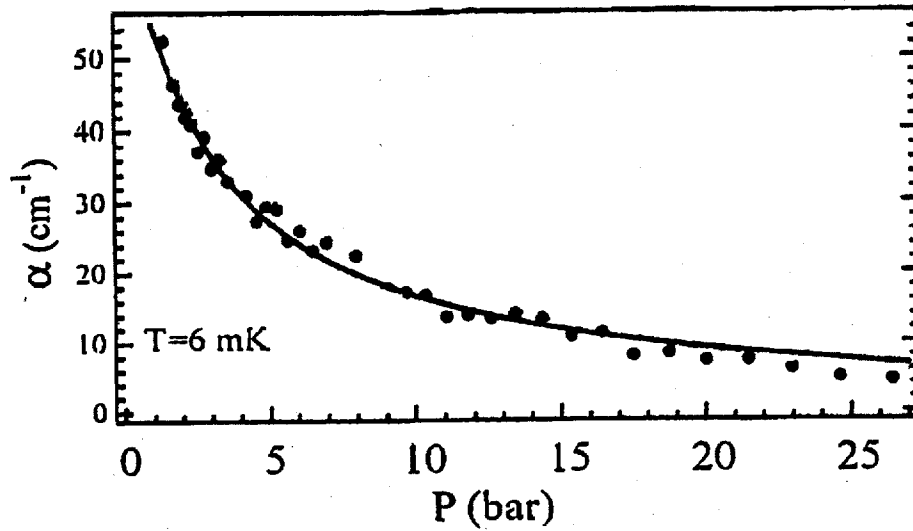


図 4.5: Northwestern のグループによるエアロジェル中の吸収の圧力依存性 [18]

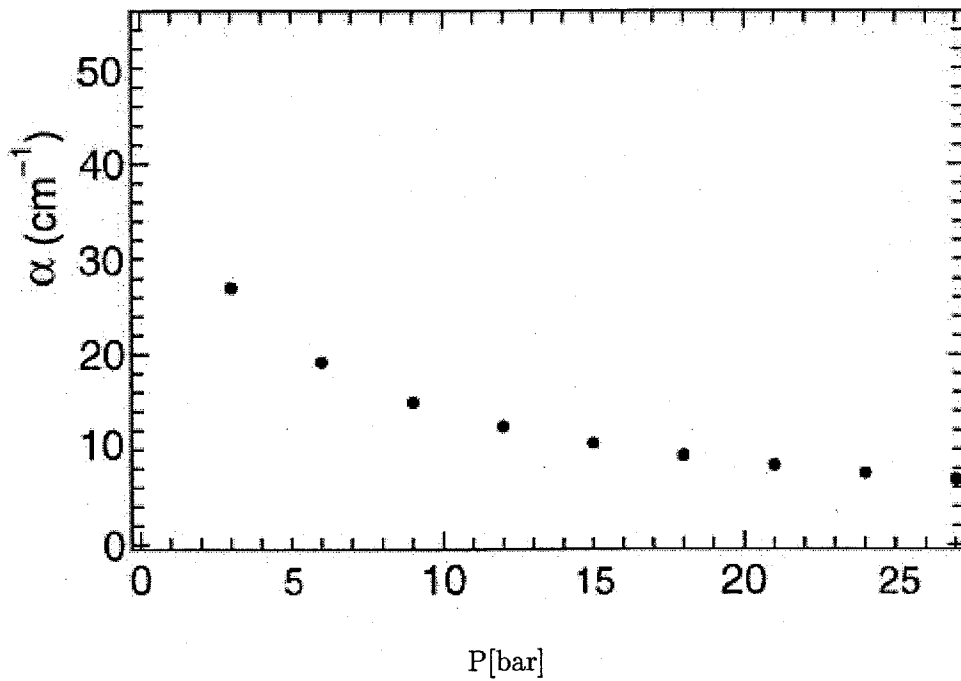


図 4.6: Collision Drag 効果を取り入れた場合の吸収の圧力依存性

## 第5章 Keldysh形式のグリーン関数と準古典的理論

この章以下では、不純物を含む超流動相での音波の微視的理論を展開する。まず、本章では、今回の研究において利用する Keldysh 形式のグリーン関数理論について概要 [73, 74] を述べる。Keldysh 形式のグリーン関数はその独特な時間経路の定義によって、ファイマンダイアグラムの展開の規則が実時間上でも成立する。したがって非平衡系の動的性質を議論するのに優れていて、実数振動数を用いた議論が可能となる。

### 5.1 Hamiltonian

時間、空間に依存する摂動や、不純物ポテンシャルを含む系のハミルトニアンを以下のように書く。

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} + \mathcal{V} \quad \begin{cases} \mathcal{K} = \sum_{\sigma, \sigma'} \int dr dr' \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) h_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}', t) \\ \mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int dr dr' \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \psi_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}', t) v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}', t) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

ここで、 $\psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$  は、準粒子場の生成消滅演算子の Heisenberg 表示である。 $h_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  は一体のエネルギーを意味し、運動エネルギー、不純物ポテンシャルと時間に依存する摂動エネルギーとの和である。また、 $v(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  は有効相互作用ポテンシャルである。

超流動状態を議論するために 2.2 節と同様に、 $\langle \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}', t) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \rangle$  が有限に残ることを仮定し Gorkov 近似を行なう。

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int dr dr' \left[ \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \Delta_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \psi_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}', t) + \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}', t) \Delta_{\sigma\sigma'}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (5.2)$$

$$\Delta_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}', t) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (5.3)$$

$$\Delta_{\sigma\sigma'}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \psi_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}', t) \rangle \quad (5.4)$$

この場合も、準粒子場の演算子  $\psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$  については南部表示

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, t) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}, t) \\ \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Psi(\mathbf{r}, 1, t) \\ \Psi(\mathbf{r}, 2, t) \\ \Psi(\mathbf{r}, 3, t) \\ \Psi(\mathbf{r}, 4, t) \end{pmatrix} \rightarrow \Psi(x, t) \quad (5.5)$$

を用いるのが便利である。ただし、 $x = (\mathbf{r}, n, t)$  であり、後の議論の便宜上導入した particle-hole および spin 空間を同時に含む座標である。

南部表示ではハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}, t) H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \Psi(\mathbf{r}', t) \quad (5.6) \\ H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= \begin{pmatrix} h_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) & h_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) & \Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \\ h_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) & h_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) & \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \\ \Delta_{\uparrow\uparrow}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) & \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) & -h_{\uparrow\uparrow}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) & -h_{\uparrow\downarrow}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \\ \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) & \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) & -h_{\downarrow\uparrow}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) & -h_{\downarrow\downarrow}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \hat{h}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) & \hat{\Delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \\ \hat{\Delta}^{\dagger}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) & -\hat{h}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad (5.7) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $\hat{h}, \hat{\Delta}$  は、スピン空間の行列である。

## 5.2 Keldysh グリーン関数

図 5.1 に示す Keldysh の時間経路に関する T 積 ( $T_C$ ) を用いて Gor'kov グリーン関数を次のように定義する。

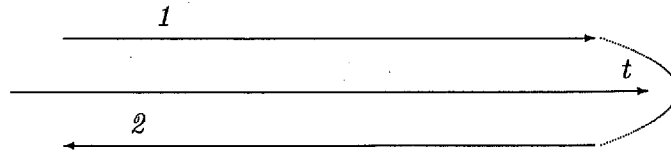


図 5.1: Keldysh contour C

$$G_{ij}(x, t; x', t') = -i \left\langle T_c \Psi(x, t_i) \Psi^\dagger(x', t'_j) \right\rangle \quad (5.8)$$

$\Psi(x, t_i)$  は式 (5.5) により定義した南部スピノールであり、したがって  $G_{ij}$  も 4 行 4 列の行列である。また、 $t_i$  のサフィックス  $i = 1, 2$  は、時刻  $t$  が図 5.1 で表される Keldysh の時間経路のどちらに属するかを区別する。経路 2 の方が先であることに留意すると、各成分は

$$\begin{aligned} G_{11}(x, t; x', t') &= -i \left\langle T \Psi(x, t) \Psi^\dagger(x', t') \right\rangle \\ &\equiv \theta(t - t') G^>(x, t; x', t') + \theta(t' - t) G^<(x, t; x', t') \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} G_{12}(x, t; x', t') &= i \left\langle \Psi^\dagger(x', t') \Psi(x, t) \right\rangle \\ &\equiv G^<(x, t; x', t') \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} G_{21}(x, t; x', t') &= -i \left\langle \Psi(x, t) \Psi^\dagger(x', t') \right\rangle \\ &\equiv G^>(x, t; x', t') \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} G_{22}(x, t; x', t') &= -i \left\langle \tilde{T} \Psi(x, t) \Psi^\dagger(x', t') \right\rangle \\ &\equiv \theta(t - t') G^<(x, t; x', t') + \theta(t' - t) G^>(x, t; x', t') \end{aligned} \quad (5.12)$$

で与えられる。ここで Keldysh 空間の行列

$$\check{G}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ -G_{21} & -G_{22} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

を定義すると、 $\check{G}$  の従う方程式は、

$$\begin{aligned} \sum_{n''=1}^4 \int dr'' \left\{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{n, n''} i \frac{\partial}{\partial t} - H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', t) \right\} \check{G}(x'', t; x', t') \\ = \delta_{n, n'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる。

$\check{G}$  の各成分の間には式 (5.9) ~ 式 (5.12) から

$$G_{11} + G_{22} - G_{12} - G_{21} = 0 \quad (5.15)$$

の関係が成り立ち、Keldysh 空間で定義されたグリーン関数は 3 つの成分が独立である。そこで  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sigma_y)$  なる Keldysh 空間に作用する行列を用いて

$$\underline{G} \equiv R^{-1} \check{G} R = \begin{pmatrix} G^R & G^K \\ 0 & G^A \end{pmatrix} \quad (5.16)$$



を定義する。各々の成分は、

$$\begin{aligned} G^{\text{R}}(x, t; x', t') &= G_{11} - G_{12} = G_{21} - G_{22} \\ &= -i\theta(t - t') \left\langle \left\{ \Psi(x, t), \Psi^\dagger(x', t') \right\} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} G^{\text{A}}(x, t; x', t') &= G_{11} - G_{21} = G_{12} - G_{22} \\ &= i\theta(t' - t) \left\langle \left\{ \Psi(x, t), \Psi^\dagger(x', t') \right\} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} G^{\text{K}}(x, t; x', t') &= G_{11} + G_{22} = G_{12} + G_{21} \\ &= -i \left\langle \left[ \Psi(x, t), \Psi^\dagger(x', t') \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (5.19)$$

で与えられる。ここで、 $G^{\text{R}}$ 、 $G^{\text{A}}$  はそれぞれ遅延、先進グリーン関数であり、また、 $G^{\text{K}}$  は Keldysh グリーン関数と呼ばれる。 $\underline{G}$  の従う方程式は (5.14) と同様

$$\begin{aligned} \sum_{n''=1}^4 \int dr'' \left\{ \delta_{n, n''} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') i \frac{\partial}{\partial t} - H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', t) \right\} \underline{G}(x'', t; x', t') \\ = \delta_{n, n'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (5.20)$$

で与えられる。

ここで Keldysh グリーン関数の意味について述べておこう。一般的に物理量は  $G^<(x, t; x', t) = i \langle \Psi^\dagger(x', t) \Psi(x, t) \rangle$  から計算できる。定義から

$$G^< = (-G^{\text{R}} + G^{\text{A}} + G^{\text{K}})/2 = \frac{i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + G^{\text{K}}}{2} \quad (5.21)$$

が成り立ち、Keldysh グリーン関数を用いて物理量を計算できることがわかる。

### 平衡状態のグリーン関数

まず始めに、2.2 節で議論した純粋な超流動  $^3\text{He}$  の平衡状態でのグリーン関数を求めておこう。ハミルトニアンは (2.27) 式で与えられる  $\mathcal{H}_m$  である。したがって、(5.7) 式の  $H$  は

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = H_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (5.22)$$

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}} & \hat{\Delta}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\Delta}_{\mathbf{k}}^\dagger & -\xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

と書ける。平衡状態では、時間的、空間的に一様なのでグリーン関数は  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $t - t'$  の関数であり、フーリエ変換を次のように定義できる。

$$G_0^{\text{R,A,K}}(x, t; x', t') = \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t'))} G_0^{\text{R,A,K}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (5.24)$$

遅延、先進グリーン関数のフーリエ変換は、運動方程式 (5.20) から直ちに

$$G_0^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\omega \pm i0 - \mathcal{E}_{\mathbf{k}}} \quad (5.25)$$

と求まる。ここで遅延 (先進) グリーン関数のフーリエ変換は  $\omega$  の複素平面の上 (下) 半面で定義されることに留意した。

BW 状態や ABM 状態などの Unitary 状態では、 $(\mathcal{E}_{\mathbf{k}})^2 = E_{\mathbf{k}}^2 \equiv \xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2$  が成り立っている。従ってスペクトル関数

$$A(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \left[ \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right] \left[ \omega + \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}} & \hat{\Delta}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\Delta}_{\mathbf{k}}^\dagger & -\xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \right] \quad (5.26)$$

を用いて、

$$G_0^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) = \int d\omega' \frac{A(\mathbf{k}, \omega')}{\omega \pm i0 - \omega'} \quad (5.27)$$

と書くことも出来る。

平衡状態においては、 $G_0^<(\mathbf{k}, \omega) = -e^{-\beta\omega} G_0^>(\mathbf{k}, \omega)$  の関係が成り立つために、Keldysh グリーン関数は独立ではなく先進、遅延グリーン関数と

$$G_0^{\text{K}}(\mathbf{k}, \omega) = \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) [G_0^{\text{R}}(\mathbf{k}, \omega) - G_0^{\text{A}}(\mathbf{k}, \omega)] \quad (5.28)$$

$$= \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \left[ -2\pi i A(\mathbf{k}, \omega) \right] \quad (5.29)$$

で、関連付けられている。

以上の結果は空間的に非均一な系の平衡状態にも拡張できる。たとえば不純物ポテンシャル  $V^i(\mathbf{r})$  が存在する場合は (5.23) 式中の  $H_0$  は

$$H_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} + V^i(\mathbf{r}) \rho_3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.30)$$

と置き換えられる。この場合、グリーン関数は相対座標  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  のみの関数ではないが、時間に関しては  $t - t'$  のみに依存している。したがって、相対時間  $t - t'$  に関するフーリエ変換を

$$G_0^{\text{R,A,K}}(x, t; x', t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t - t')} G_0^{\text{R,A,K}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \quad (5.31)$$

で定義すると、

$$G_0^{\text{R,A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int d\omega' \frac{A(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega')}{\omega \pm i0 - \omega'} \quad (5.32)$$

と書くことができ、

$$G_0^{\text{K}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) [G_0^{\text{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) - G_0^{\text{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)] \quad (5.33)$$

$$= \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \left[ -2\pi i A(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \right] \quad (5.34)$$

も成り立っている。

### 5.3 線形応答

我々は、液体<sup>3</sup>He中の音波の伝播を自己無撞着な線形応答理論を用いて考える。密度や流れの密度に、

$$\delta n(\mathbf{q}, \Omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{q}, \Omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)}$$

の揺らぎが生じたと仮定しよう。このとき、第2章で述べた Landau 相互作用から、(2.17)、(2.18) 式で与えられる分子場

$$\delta\varepsilon_0(\mathbf{q}, \Omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)}, \quad \delta\varepsilon_1(\mathbf{q}, \Omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)}$$

が生じる。この分子場が系を駆動して密度や流れの密度の揺らぎを引き起こす。この結果と始めに仮定した揺らぎが一致するという条件が音波の分散関係すなわち  $\Omega$  と  $\mathbf{q}$  の関係を与える。さらに、超流動状態では、これらの揺らぎがオーダーパラメータの揺らぎ

$$\delta\hat{\Delta}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)}$$

を誘起し、またその逆も起こっている点を考慮しなければならない。

以上の揺らぎから生じる場を考慮するには、(5.7) 式の  $H$  として

$$\hat{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \hat{H}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + U(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \quad (5.35)$$

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} U_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2 - \Omega t)} \quad (5.36)$$

$$U_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon_0(\mathbf{q}, \Omega) + \delta\varepsilon_1(\mathbf{q}, \Omega) & \delta\hat{\Delta}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) \\ \delta\hat{\Delta}_{\mathbf{k}}^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega) & -\delta\varepsilon_0(\mathbf{q}, \Omega) + \delta\varepsilon_1(\mathbf{q}, \Omega) \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

を考えればよい。ここで、 $H_0$ としては、(5.30)式で与えられる不純物ポテンシャルを含んだものを考えている。

さて、式(5.16)のKeldysh空間で定義されたグリーン関数

$$\underline{G}(x, x') \equiv \begin{pmatrix} G^R(x, x') & G^K(x, x') \\ 0 & G^A(x, x') \end{pmatrix}$$

の  $U$  に対する線形応答は、運動方程式(5.20)から

$$\delta \underline{G}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int dt'' \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \underline{G}_0(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t'') U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t'') \underline{G}_0(\mathbf{r}_2, t''; \mathbf{r}', t') \quad (5.38)$$

と求まる。この結果をフーリエ成分を用いて書き直そう。重心座標  $\mathbf{R} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$ ,  $T = (t + t')/2$  を導入して、

$$\underline{G}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t'))} \underline{G}(\mathbf{k}, \mathbf{R}, \omega, T) \quad (5.39)$$

$$\underline{G}(\mathbf{k}, \mathbf{R}, \omega, T) = \sum_{\mathbf{q}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{R} - \Omega T)} \underline{G}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) \quad (5.40)$$

と書く。また

$$\underline{G}_0(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') - \omega(t - t')} \underline{G}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega) \quad (5.41)$$

と展開する。これらの表式を(5.38)式に代入すると、

$$\delta \underline{G}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) = \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{q}'} \underline{G}_0(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}'_+, \omega_+) U_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}', \Omega) \underline{G}_0(\mathbf{k}'_-, \mathbf{k}_-, \omega_-) \quad (5.42)$$

となる。ただし  $\mathbf{k}_{\pm} = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}/2$ ,  $\mathbf{k}'_{\pm} = \mathbf{k}' \pm \mathbf{q}'/2$ ,  $\omega_{\pm} = \omega \pm \Omega/2$  の略号を用いた。

各成分を書き下すと

$$\delta G^{R,A}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) = \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{q}'} G_0^{R,A}(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}'_+, \omega_+) U_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}', \Omega) G_0^{R,A}(\mathbf{k}'_-, \mathbf{k}_-, \omega_-) \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \delta G^K(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) &= \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{q}'} (G_0^R(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}'_+, \omega_+) U_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}', \Omega) G_0^K(\mathbf{k}'_-, \mathbf{k}_-, \omega_-) \\ &\quad + G_0^K(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}'_+, \omega_+) U_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}', \Omega) G_0^A(\mathbf{k}'_-, \mathbf{k}_-, \omega_-)) \end{aligned} \quad (5.44)$$

となる。ここで、(5.33)式を用いて  $G_0^K$  を消去すると

$$\begin{aligned} \delta G^K(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) &= \tanh \frac{\beta\omega_-}{2} \delta G^R(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) - \tanh \frac{\beta\omega_+}{2} \delta G^A(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) \\ &\quad + \left( \tanh \frac{\beta\omega_+}{2} - \tanh \frac{\beta\omega_-}{2} \right) \delta G^a(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\delta G^a(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) \equiv \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{q}'} G_0^R(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}'_+, \omega_+) U_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}', \Omega) G_0^A(\mathbf{k}'_-, \mathbf{k}_-, \omega_-) \quad (5.46)$$

となる。このように非平衡状態では  $\delta G^K$  は  $\delta G^{R,A}$  とは独立な情報を与える。

## 5.4 準古典的理論

強く縮退した Fermi 流体で物理量をグリーン関数を用いて計算するとき、物理量  $A(\mathbf{k})$  を Fermi 面上での値  $A(\hat{k})$  で置き換え

$$\sum_{\mathbf{k}} A(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) = \int \frac{d\Omega_{\hat{k}}}{4\pi} A(\hat{k}) N_0 \int d\xi G(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega)$$

とすることが良い近似になる。  $N_0$  は Fermi 面での状態密度である。そこで、先にグリーン関数の  $\xi$  積分を済ませたものを準古典的グリーン関数と呼び、以下で定義する。

$$g(\hat{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) = -\frac{1}{\pi} \int d\xi \rho_3 G(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) \quad (5.47)$$

ここで  $\rho_3$  は particle-hole 空間での Pauli 行列である。準古典的グリーン関数は境界条件などを除けばそれだけで閉じた方程式を構成していて、不純物問題、線形応答などはすべて準古典的グリーン関数で記述することが出来る。

### 5.4.1 平衡状態での準古典的グリーン関数

5.2 節で議論した純粋な超流動  $^3\text{He}$  の平衡状態での準古典的グリーン関数を求めておこう。まず、複素変数  $\varepsilon$  の関数  $g(\hat{k}, \varepsilon)$  を

$$g(\hat{k}, \varepsilon) \equiv -\frac{1}{\pi} \int d\xi \rho_3 \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_{\hat{k}}} \quad (5.48)$$

と定義し、留数定理を用いて計算すると

$$g(\hat{k}, \varepsilon) = \frac{1}{x_{\hat{k}}(\varepsilon)} \begin{pmatrix} \varepsilon & \hat{\Delta}_{\hat{k}} \\ -\hat{\Delta}_{\hat{k}}^\dagger & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

ここで、後の便宜上、  $x_{\hat{k}}(\varepsilon) \equiv \sqrt{|\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2 - \varepsilon^2}$  を導入した。平方根は実数部分が正になるように定義しておく。

準古典的先進、遅延グリーン関数は定義から直ちに求まる。

$$g^{\text{R,A}}(\hat{k}, \omega) = g(\hat{k}, \omega \pm i0) \quad (5.50)$$

更に Keldysh グリーン関数は、

$$\frac{1}{\sqrt{|\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2 - (\omega + i0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2 - (\omega - i0)^2}} = 2i \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\theta(\omega^2 - |\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2)}{\sqrt{\omega^2 - |\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}}$$

を用いて

$$g^{\text{K}}(\hat{k}, \omega) = 2i \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \frac{\operatorname{sgn}(\omega) \theta(\omega^2 - |\Delta|^2)}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta|^2}} \quad (5.51)$$

となる。

## 5.4.2 線形応答の準古典的グリーン関数

(5.43)、(5.46) 式で与えられる線形応答のグリーン関数の準古典的表現を定義しておく。

$$\begin{aligned}
& \delta g^{\text{R,A,a}}(\hat{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) \\
& \equiv \frac{-1}{\pi} \int d\xi \rho_3 \delta G^{\text{R,A,a}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) \\
& = \frac{-1}{\pi} \int d\xi \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{q}'} \rho_3 G_0^{\text{R,A,R}}(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}'_+, \omega_+) u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}', \Omega) \rho_3 G_0^{\text{R,A,A}}(\mathbf{k}'_-, \mathbf{k}_-, \omega_-)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

ただし、後の便宜上、 $u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}', \Omega) = U_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}', \Omega) \rho_3$  を定義した。

## 5.4.3 物理量の準古典的グリーン関数による表現

本節では Keldysh 形式の準古典的グリーン関数によって物理量を書き表すことを考える。本論文では主に密度ゆらぎによる輸送現象をテーマとしているため、粒子数密度、流れ、そしてオーダーパラメータについて述べる。

## 粒子数密度

粒子数密度は

$$\delta n(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{2} \text{Tr} \rho_3 \delta G^<(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t) = \frac{-i}{4} \text{Tr} \rho_3 \delta G^K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t) \tag{5.53}$$

で与えられる。ここで (5.21) 式の関係を用いた。(5.39) 式を用いてフーリエ成分で書き直すと、

$$\begin{aligned}
\delta n(\mathbf{r}, t) & = \frac{-i}{4} \text{Tr} \rho_3 \delta G^K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t) \\
& = \frac{-i}{4} \text{Tr} \rho_3 \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta G^K(\mathbf{k}, \mathbf{r}; \omega, t) \\
& = \frac{-i}{4} \text{Tr} N_0 \int d\xi \left\langle \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho_3 \delta G^K(\mathbf{k}, \mathbf{r}; \omega, t) \right\rangle_{\hat{k}} \tag{5.54}
\end{aligned}$$

$$= \frac{i\pi}{4} \text{Tr} N_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} \left\langle \frac{-1}{\pi} \int d\xi \rho_3 \delta G^K(\mathbf{k}, \mathbf{r}; \omega, t) \right\rangle_{\hat{k}} + \delta n^{\text{high}}(\mathbf{r}, t) \tag{5.55}$$

$$= \frac{i\pi}{4} \text{Tr} N_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} \langle \delta g^K(\mathbf{k}, \mathbf{r}; \omega, t) \rangle_{\hat{k}} + \delta n^{\text{high}}(\mathbf{r}, t) \tag{5.56}$$

と準古典的グリーン関数を用いた表現が得られる。(5.54)、(5.55)式は $\xi, \omega$ の2重積分であるが収束が遅く積分の順序を入れ替えると答えが異なる。本来定義から(5.54)式が正しく、(5.55)式に移ると補正項 $\delta n^{\text{high}}(\mathbf{r}, t)$ が必要になる。この補正項を評価するには、 $\xi, \Omega$ が大きい所謂高エネルギー部分でのグリーン関数の振る舞いを調べる必要がある。しかし、高エネルギー部分では超流動相のグリーン関数は常流動相のグリーン関数に一致する。したがって、補正項は常流動状態で評価でき、付録C.1に示すように $\delta n^{\text{high}}(\mathbf{r}, t) = -2N_0\delta\varepsilon_0 = -F_0^s\delta n(\mathbf{r}, t)$ となる。したがって、粒子数密度のゆらぎは

$$\delta n(\mathbf{r}, t) = -F_0^s\delta n(\mathbf{r}, t) + \frac{i\pi}{4}\text{Tr} N_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} \langle \delta g^{\text{K}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}; \omega, t) \rangle_{\hat{k}} \quad (5.57)$$

となる。

### 流れの密度

粒子数密度と同様に、流れの密度はKeldyshのグリーン関数を用いて

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{m} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-i}{4} \text{Tr} \delta G^{\text{K}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}; \omega, t) \quad (5.58)$$

$$= \frac{i\pi}{4} \frac{k_{\text{F}}}{m} \text{Tr} N_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} \langle \hat{k}\rho_3 \delta g^{\text{K}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}; \omega, t) \rangle_{\hat{k}} + \delta \mathbf{J}^{\text{high}}(\mathbf{r}, t) \quad (5.59)$$

粒子数密度における議論と同様に、高エネルギー補正項は付録C.2に示すように

$$\delta \mathbf{J}^{\text{high}} = -\frac{F_1^s}{3} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$$

で与えられる。さらに、有効質量の関係式 $m^*/m = 1 + \frac{F_1^s}{3}$ を使えば

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{i\pi}{4} \frac{k_{\text{F}}}{m^*} \text{Tr} N_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} \langle \hat{k}\rho_3 \delta g^{\text{K}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}; \omega, t) \rangle_{\hat{k}} \quad (5.60)$$

と表すこともできる。

### オーダーパラメータ

オーダーパラメータは式(5.3)で定義されている。

$$\Delta_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}', t) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

相対座標に関してフーリエ変換を行い

$$\hat{\Delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\Delta}_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad (5.61)$$

とすると、オーダーパラメータは、対相互作用  $v_{\hat{k}, \hat{k}'}$  を用いて

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_{\hat{k}}(\mathbf{R}, t) &= -\frac{i}{2} \sum_{\hat{k}'} v_{\hat{k}, \hat{k}'} \int \frac{d\omega}{2\pi} G^K(\hat{k}', \mathbf{R}, \omega, t)_{12} \\ &= \frac{iN_0}{4} \int d\omega \left\langle v_{\hat{k}, \hat{k}'} g^K(\hat{k}', \mathbf{R}, \omega, t)_{12} \right\rangle_{\hat{k}'}\end{aligned}\quad (5.62)$$

と表される。ここで添字 12 は、particle-hole 空間の行列の 12 成分を表す。これはギャップ方程式となり、式 (5.3)、(5.4) で導入した分子場を self-consistent に決める方程式である。今、 $\mathbf{R}, t$  に関するフーリエ変換を行い、平衡状態とゆらぎの部分に分離すると、

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_{\hat{k}} + \delta\hat{\Delta}_{\hat{k}}(\mathbf{q}, \Omega) &= \frac{iN_0}{4} \int d\omega \left\langle v_{\hat{k}, \hat{k}'} g_0^K(\hat{k}', \omega)_{12} \right\rangle_{\hat{k}'} \\ &\quad + \frac{iN_0}{4} \int d\omega \left\langle v_{\hat{k}, \hat{k}'} \delta g^K(\hat{k}', \mathbf{q}, \omega, \Omega)_{12} \right\rangle_{\hat{k}'}\end{aligned}\quad (5.63)$$

のように記述でき、以後、平衡状態およびゆらぎに関するギャップ方程式をそれぞれ、0次、および1次のギャップ方程式と呼ぶ。0次のギャップ方程式はユニタリー状態では

$$\hat{\Delta}_{\hat{k}} = \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left\langle \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)(\hat{k} \cdot \hat{k}') \hat{\Delta}_{\hat{k}'}}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2}} \right\rangle\quad (5.64)$$

で与えられる。



## 第6章 純粋な超流動<sup>3</sup>Heでの音波

本章では純粋な超流動<sup>3</sup>Heでの音波について、Keldysh形式のグリーン関数を用いて議論する。まず、純粋な場合のKeldysh形式での線形応答グリーン関数を準古典的グリーン関数によって記述する。その結果を用いてB相、A相のオーダーパラメータの集団励起を具体的に求める。最後にA相での横波についての議論を行なう。A相での横波の理論は、本研究が初めてである。

### 6.1 純粋な超流動<sup>3</sup>Heでの線形応答グリーン関数

純粋な系では運動量保存が成立し、式(5.52)は、

$$\delta g^{\text{R,A,a}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) = \frac{-1}{\pi} \int d\xi \rho_3 G_0^{\text{R,A,R}}(\mathbf{k}_+, \omega_+) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) \rho_3 G_0^{\text{R,A,A}}(\mathbf{k}_-, \omega_-) \quad (6.1)$$

となる。右辺を全て準古典的グリーン関数で書き換えるために、(5.25)式を、(5.49)式を用いて

$$G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\rho_3}{2i} \left[ \frac{g^{\text{R,A}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega) + i}{\xi_{\mathbf{k}} - ix_{\hat{\mathbf{k}}}^{\text{R,A}}(\omega)} - \frac{g^{\text{R,A}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega) - i}{\xi_{\mathbf{k}} + ix_{\hat{\mathbf{k}}}^{\text{R,A}}(\omega)} \right] \quad (6.2)$$

と書き直すと、 $\xi$ -積分が実行でき

$$\delta g^{\text{R,A,a}}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) = \frac{-i}{2} \sum_{\alpha=\pm} \left( g_+^{\text{R,A,R}} + \alpha i \right) \frac{u_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega)}{i(x_+^{\text{R,A,R}} + x_-^{\text{R,A,A}}) - \alpha \eta} \left( g_-^{\text{R,A,A}} - \alpha i \right) \quad (6.3)$$

が得られる。この表式において、

$$\begin{aligned} g_{\pm}^{\text{R,A}} &= g^{\text{R,A}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega_{\pm}) & x_{\pm}^{\text{R,A}} &= x_{\hat{\mathbf{k}}}^{\text{R,A}}(\omega_{\pm}) & \epsilon^{\text{R,A}} &= \omega \pm i\delta \\ \omega_{\pm} &= \omega \pm \Omega/2 & \eta &= \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \quad (6.4)$$

とおいた。

式(6.3)を具体的に書き下すと(付録D参照)、

$$\begin{aligned}
\delta g &= \begin{pmatrix} [L_1(x_+x_- + \varepsilon_+\varepsilon_-) + L_2(x_+\varepsilon_- - x_-\varepsilon_+)] & [L_1\varepsilon_+ + L_2x_+]\hat{\Delta} \\ -[L_1\varepsilon_- - L_2x_-]\hat{\Delta}^\dagger & -L_1|\hat{\Delta}|^2 \end{pmatrix} (\delta\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_1) \\
&+ \begin{pmatrix} -L_1|\hat{\Delta}|^2 & -[L_1\varepsilon_- + L_2x_-]\hat{\Delta} \\ [L_1\varepsilon_+ - L_2x_+]\hat{\Delta}^\dagger & [L_1(x_+x_- + \varepsilon_+\varepsilon_-) - L_2(x_+\varepsilon_- - x_-\varepsilon_+)] \end{pmatrix} (\delta\varepsilon_0 - \delta\varepsilon_1) \\
&- \begin{pmatrix} -[L_1\varepsilon_+ + L_2x_+]\delta\hat{\Delta}\hat{\Delta}^\dagger & [L_1(x_+x_- - \varepsilon_+\varepsilon_-) - L_2(x_+\varepsilon_- + x_-\varepsilon_+)]\delta\hat{\Delta} \\ L_1\hat{\Delta}^\dagger\delta\hat{\Delta}\hat{\Delta}^\dagger & [L_1\varepsilon_- + L_2x_-]\hat{\Delta}^\dagger\delta\hat{\Delta} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} [L_1\varepsilon_- - L_2x_-]\hat{\Delta}\delta\hat{\Delta}^\dagger & L_1\hat{\Delta}\delta\hat{\Delta}^\dagger\hat{\Delta} \\ [L_1(x_+x_- - \varepsilon_+\varepsilon_-) + L_2(x_+\varepsilon_- + x_-\varepsilon_+)]\delta\hat{\Delta}^\dagger & -[L_1\varepsilon_+ - L_2x_+]\delta\hat{\Delta}^\dagger\hat{\Delta} \end{pmatrix} \quad (6.5)
\end{aligned}$$

となる<sup>1</sup>。また、 $L_1$ 、 $L_2$ はそれぞれ、

$$L_1^{\text{R,A,a}} = -\frac{x_+^{\text{R,A,R}} + x_-^{\text{R,A,A}}}{x_+^{\text{R,A,R}}x_-^{\text{R,A,A}}[(x_+^{\text{R,A,R}} + x_-^{\text{R,A,A}})^2 + \eta^2]} \quad (6.6)$$

$$L_2^{\text{R,A,a}} = -\frac{\eta}{x_+^{\text{R,A,R}}x_-^{\text{R,A,A}}[(x_+^{\text{R,A,R}} + x_-^{\text{R,A,A}})^2 + \eta^2]} \quad (6.7)$$

である。更に、

$$L_1^K \equiv \tanh\left(\frac{\beta\omega_-}{2}\right) [L_1^{\text{R}} - L_1^{\text{a}}] - \tanh\left(\frac{\beta\omega_+}{2}\right) [L_1^{\text{A}} - L_1^{\text{a}}]$$

とにおいて、線形応答グリーン関数の Keldysh 成分を particle-hole 空間の 11 成分と 12 成分について書き下す。

$$\begin{aligned}
\delta g_{11}^{\text{K}} &= \frac{2i}{\Omega - \eta} \left[ \frac{\omega_- \tanh(\beta|\omega_-|/2)}{\sqrt{\omega_-^2 - |\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}} - \frac{\omega_+ \tanh(\beta|\omega_+|/2)}{\sqrt{\omega_+^2 - |\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}} \right] (\delta\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_1) \\
&- L_1^K \left[ \frac{2|\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}{\Omega - \eta} (\Omega\delta\varepsilon_0 + \eta\delta\varepsilon_1) + \frac{\Omega + \eta}{2} (\hat{\Delta}_{\hat{k}}\delta\hat{\Delta}_{\hat{k}}^\dagger - \delta\hat{\Delta}_{\hat{k}}\hat{\Delta}_{\hat{k}}^\dagger) \right] \quad (6.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta g_{12}^{\text{K}} &= i \left[ \frac{\tanh(\beta|\omega_-|/2)}{\sqrt{\omega_-^2 - |\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}} + \frac{\tanh(\beta|\omega_+|/2)}{\sqrt{\omega_+^2 - |\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}} \right] \delta\hat{\Delta}_{\hat{k}} \\
&+ L_1^K \left[ (\Omega\delta\varepsilon_0 + \eta\delta\varepsilon_1)\hat{\Delta}_{\hat{k}} - \frac{1}{2}(\Omega^2 - 2|\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2 - \eta^2)\delta\hat{\Delta}_{\hat{k}} + \hat{\Delta}_{\hat{k}}\delta\hat{\Delta}_{\hat{k}}^\dagger\hat{\Delta}_{\hat{k}} \right] \quad (6.9)
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>R,A,a の添え字を省略した。 $\delta g^{\text{R,A,a}}$  に対応して、各々  $x_+^{\text{R,A,R}}$ 、 $x_-^{\text{R,A,A}}$  をとる。

## 6.2 オーダーパラメータの集団励起

以上の結果を用いて、超流動<sup>3</sup>HeのA相、B相での集団励起を考えよう。簡単のため $|\mathbf{q}| = 0$ を仮定し、

$$L_0^{\text{R,A,a}} \equiv -\frac{1}{x_+^{\text{R,A,R}} x_-^{\text{R,A,A}} (x_+^{\text{R,A,R}} + x_-^{\text{R,A,A}})} \quad (6.10)$$

$$L_0^K \equiv \tanh\left(\frac{\beta\omega_-}{2}\right) [L_0^{\text{R}} - L_0^{\text{a}}] - \tanh\left(\frac{\beta\omega_+}{2}\right) [L_0^{\text{A}} - L_0^{\text{a}}] \quad (6.11)$$

と定義する。式(5.63)における、1次のギャップ方程式は以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned} \delta\hat{\Delta}_{\hat{k}}(\mathbf{q}, \Omega) &= \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left\langle \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) (\hat{k} \cdot \hat{k}') \delta\hat{\Delta}_{\hat{k}'}}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2}} \right\rangle \\ &\quad - \frac{3iv_1 N_0}{4} \int d\omega \langle (\hat{k} \cdot \hat{k}') L_0^K \hat{\Delta}_{\hat{k}'} \rangle \Omega \delta\varepsilon_0 \\ &\quad + \frac{3iv_1 N_0}{4} \int d\omega \left\langle (\hat{k} \cdot \hat{k}') L_0^K \frac{\Omega^2 - 2|\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}{2} \delta\hat{\Delta}_{\hat{k}'} \right\rangle \\ &\quad - \frac{3iv_1 N_0}{4} \int d\omega \langle (\hat{k} \cdot \hat{k}') L_0^K \hat{\Delta}_{\hat{k}'} \delta\hat{\Delta}_{\hat{k}'}^\dagger \hat{\Delta}_{\hat{k}'} \rangle \end{aligned} \quad (6.12)$$

### 6.2.1 B相

まず、ギャップが等方的なB相(BW状態)を考える。平衡状態のオーダーパラメータとして(2.36)式の

$$\hat{\Delta}_{\hat{k}} = i\Delta_B \hat{k}_\mu \sigma_\mu \sigma_y \quad (6.13)$$

と考える。ゆらぎ $\delta\hat{\Delta}(\Omega) = i\delta d_\mu(\Omega) \sigma_\mu \sigma_y$ ,  $\delta\hat{\Delta}^\dagger(-\Omega) = -i\sigma_y \delta d_\mu^*(-\Omega) \sigma_\mu$ については

$$\delta d(\Omega)_\mu = \delta d_{\mu\nu} \hat{k}_\nu, \quad \delta d^*(-\Omega)_\mu = \delta d_{\mu\nu} \hat{k}_\nu$$

と展開して、(6.12)式に代入する。0次のギャップ方程式(5.64)を用いると、(6.12)式の左辺と右辺第1項が消しあい

$$\begin{aligned} \langle \hat{k}_\alpha \hat{k}_\mu \rangle \Delta_B \Omega \delta\varepsilon_0 &= \left( \frac{\Omega^2}{2} - \Delta_B^2 \right) \langle \hat{k}_\alpha \hat{k}_\nu \rangle \delta d_{\mu\nu} + \Delta_B^2 \langle \hat{k}_\alpha \hat{k}_\nu \rangle \delta d_{\mu\nu}^* \\ &\quad - 2\Delta_B^2 \langle \hat{k}_\alpha \hat{k}_j \hat{k}_i \hat{k}_\mu \rangle \delta d_{ij}^* \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、ゆらぎの実部 $\delta d'_{\mu\nu}$ と虚部 $\delta d''_{\mu\nu}$ をそれぞれ

$$\delta d'_{\mu\nu} = \frac{\delta d_{\mu\nu}(\Omega) + \delta d_{\mu\nu}^*(-\Omega)}{2}, \quad \delta d''_{\mu\nu} = \frac{\delta d_{\mu\nu}(\Omega) - \delta d_{\mu\nu}^*(-\Omega)}{2} \quad (6.14)$$

で定義すると、以下のように実部と虚部が分離できる。

$$2\Omega\delta_{\alpha\mu}\Delta_B\delta\varepsilon_0 = (\Omega^2 - 4\Delta_B^2)\delta d''_{\mu\nu} + \frac{4}{5}\Delta_B^2[\delta_{\alpha\mu}\delta d''_{ii} + \delta d''_{\alpha\mu} + \delta d''_{\mu\alpha}] \quad (6.15)$$

$$0 = \Omega^2\delta d'_{\mu\nu} + \frac{4}{5}\Delta_B^2[\delta_{\alpha\mu}\delta d'_{ii} + \delta d'_{\alpha\mu} + \delta d'_{\mu\alpha}] \quad (6.16)$$

この結果では、粒子数のゆらぎと結合するのはオーダーパラメータのゆらぎの虚数部分のみになっている。これは、準古典的グリーン関数を用いたときに、 $\xi$ -積分を行い、その際に状態密度を Fermi 面での値  $N_0$  に置いて Particle-hole symmetry を仮定したためである。しかし、実際には particle-hole の対称性は  $\xi/E_F$  のオーダーで破れており実数部分も音波と結合することが知られている。数 [MHz] の音波を用いた場合、虚数部分の吸収ピークに対して実数部分の吸収ピークは  $10^{-5}$  程度弱いものとなる。(6.15)、(6.16)式から得られる、音波と結合する集団励起の振動数と基準座標を表 6.1 に示しておく。

モード名	固有振動数	基準座標
GS モード	$\Omega^2 = 0$	$\delta d''_{xx} + \delta d''_{yy} + \delta d''_{zz}$
rsq モード	$\Omega^2 = \frac{8}{5}\Delta^2$	$\delta d'_{xx} + \delta d'_{yy} - 2\delta d'_{zz}$ $\delta d'_{zx} + \delta d'_{xz} \pm i(\delta d'_{zy} + \delta d'_{yz})$ $\delta d'_{xx} - \delta d'_{yy} \pm i(\delta d'_{xy} + \delta d'_{yx})$
sq モード	$\Omega^2 = \frac{12}{5}\Delta^2$	$\delta d''_{xx} + \delta d''_{yy} - 2\delta d''_{zz}$ $\delta d''_{zx} + \delta d''_{xz} \pm i(\delta d''_{zy} + \delta d''_{yz})$ $\delta d''_{xx} - \delta d''_{yy} \pm i(\delta d''_{xy} + \delta d''_{yx})$

表 6.1: BW 状態での音波と結合する集団励起 [53]

## 6.2.2 A相

A相ではABM状態が実現しており、ギャップが閉じている $l$ ベクトルの方向を $z$ 軸方向にとると、オーダーパラメータは

$$\hat{\Delta}_{\hat{k}} = \Delta_A(\hat{k}_x + i\hat{k}_y)\sigma_0 \quad (6.17)$$

と記述され、 $L_z = 1$ の角運動量を持つことが分かる。これにより $|\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2 = \Delta_A^2 \sin^2 \theta$ となる。このようにABM状態では異方的なオーダーパラメータを有し、音波の伝播に対して異方性が現れることを示唆している。

ここで、

$$\mathcal{K}_\alpha \equiv \int d\omega \left\langle \hat{k}_\alpha^2 \frac{\tanh(\beta|\omega|/2) \theta(\omega^2 - \Delta_A^2 \sin^2 \theta)}{\sqrt{\omega^2 - \Delta_A^2 \sin^2 \theta}} \right\rangle_{\hat{k}} \quad (6.18)$$

$$\mathcal{L}_\alpha^K \equiv i \int d\omega \left\langle \hat{k}_\alpha^2 L_0^K \right\rangle_{\hat{k}} \quad (6.19)$$

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta}^K \equiv i \int d\omega \left\langle \hat{k}_\alpha^2 \hat{k}_\beta^2 L_0^K \right\rangle_{\hat{k}} \quad (6.20)$$

と定義すると、0次のギャップ方程式は、

$$1 = \frac{3v_1 N_0}{2} \mathcal{K}_x = \frac{3v_1 N_0}{2} \mathcal{K}_y = \frac{3v_1 N_0}{2} \left( \mathcal{K}_z - \left\langle \hat{k}_z^2 (1 - Y(T, \theta)) \right\rangle \right)$$

と表すことができる。ただし、上記の表式において、

$$Y(T, \theta) = \frac{1}{2T} \int_0^\infty d\xi \operatorname{sech}^2(E(\theta)/2T) \quad (6.21)$$

$$E(\theta) = \sqrt{\xi^2 + \Delta_A(T)^2 \sin^2 \theta}$$

はYosida関数である(付録F参照)。

今、式(6.17)のようにABM状態のオーダーパラメータがスピン空間に対して対角形になるようにとったが、ここでは、スピン空間に関するゆらぎを考慮しないため、オーダーパラメータのゆらぎも、式(6.17)と同様にスピン空間に対して対角形にとり、

$$\delta \hat{\Delta}(\Omega) = \delta D_\mu(\Omega) \hat{k}_\mu, \quad \delta \hat{\Delta}^\dagger(-\Omega) = \delta D_\mu^*(-\Omega) \hat{k}_\mu$$

と展開する。この場合、オーダーパラメータのゆらぎの自由度は6となる。

以上を用いて1次のギャップ方程式をまとめると次のようになる。

$$2\mathcal{K}_x \delta D_z \hat{k}_z = 2\mathcal{K}_z \delta D_z \hat{k}_z - \Delta_A \Omega \delta \varepsilon_0 \mathcal{L}_x^K (\hat{k}_x + i\hat{k}_y)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Omega^2}{2} \left( \mathcal{L}_x^K \delta D_x \hat{k}_x + \mathcal{L}_y^K \delta D_y \hat{k}_y + \mathcal{L}_z^K \delta D_z \hat{k}_z \right) \\
& - 2\Delta_A^2 \left( 2\mathcal{L}_{xy}^K \delta D_x \hat{k}_x + 2\mathcal{L}_{xy}^K \delta D_y \hat{k}_y + \mathcal{L}_{xz}^K \delta D_z \hat{k}_z \right) \\
& - 2\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K \delta D_x^* \hat{k}_x + 2\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K \delta D_y^* \hat{k}_y \\
& - 2\Delta_A^2 i \mathcal{L}_{xy}^K \delta D_y^* \hat{k}_x - 2\Delta_A^2 i \mathcal{L}_{xy}^K \delta D_x^* \hat{k}_y
\end{aligned} \tag{6.22}$$

ここで、前節の場合と同様に、ゆらぎの実部  $\delta D'_\mu$  と虚部  $\delta D''_\mu$  をそれぞれ

$$\delta D'_\mu = \frac{\delta D_\mu(\Omega) + \delta D_\mu^*(-\Omega)}{2}, \quad \delta D''_\mu = \frac{\delta D_\mu(\Omega) - \delta D_\mu^*(-\Omega)}{2} \tag{6.23}$$

と定義すると、軌道角運動量の各成分について以下のようにまとめられる。

$\hat{k}_x$  成分

$$\begin{aligned}
2\Delta_A \Omega \delta \varepsilon_0 \mathcal{L}_x^K &= (\Omega^2 \mathcal{L}_x^K - 4\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K) \delta D'_x - 4i\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K \delta D'_y \\
0 &= (\Omega^2 \mathcal{L}_x^K - 12\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K) \delta D'_x + 4i\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K \delta D'_y
\end{aligned}$$

$\hat{k}_y$  成分

$$\begin{aligned}
2i\Delta_A \Omega \delta \varepsilon_0 \mathcal{L}_x^K &= (\Omega^2 \mathcal{L}_x^K - 4\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K) \delta D'_y + 4i\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K \delta D'_x \\
0 &= (\Omega^2 \mathcal{L}_x^K - 12\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K) \delta D'_y - 4i\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K \delta D'_x
\end{aligned}$$

$\hat{k}_z$  成分

$$0 = 4(\mathcal{K}_z - \mathcal{K}_x) \delta D_z + \Omega^2 \mathcal{L}_z^K \delta D_z - 4\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xz}^K \delta D_z$$

以上の方程式から、 $q=0$ において、外場と結合する集団励起は、Goldstone(GS)モードのみとなる。これは  $\delta D'_y + i\delta D''_x$  を基準座標とし、 $L_z = 1$  のゆらぎに対応する。更に有限の  $q$  を考慮すると、その他の集団励起 (Clapping モードと Flapping モード) も音波と結合することが知られている。しかし、上記の方程式は、全て対破壊効果により有限の虚部を有するため、明確に固有振動数を定義することはできない。よって、共鳴のみが存在しこの共鳴を固有振動として定義する。以下に、音波と結合する集団励起をあげる。

**Clapping モード**

$$\Omega^2 = (2\Delta_A)^2 \frac{2\text{Re}\mathcal{L}_{xy}^K}{\text{Re}\mathcal{L}_x^K} \tag{6.24}$$

このモードは、 $\delta D'_y - i\delta D''_x$  および  $\delta D'_x + i\delta D''_y$  を基準座標とするモードであり、 $L_z = -1$  のゆらぎとなる。また、再度示した図 6.1 のように、両手をたたく (Clap) ように、ゆ

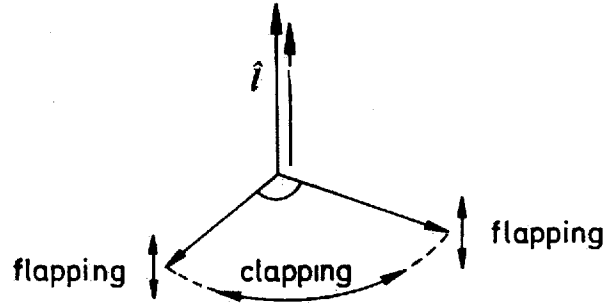


図 6.1: cl モードと fl モードに対応するオーダーパラメータの振動

らぎの成分が振動するモードである。

### Flapping モード

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= (2\Delta_A)^2 \frac{\text{Re}\mathcal{L}_{xz}^K}{\text{Re}\mathcal{L}_z^K} - 4 \frac{\mathcal{K}_z - \mathcal{K}_x}{\text{Re}\mathcal{L}_z^K} \\ &= (2\Delta_A)^2 \frac{\text{Re}\mathcal{L}_{xz}^K}{\text{Re}\mathcal{L}_z^K} - 4 \frac{(\hat{k}_z^2(1 - Y(T, \theta)))}{\text{Re}\mathcal{L}_z^K}\end{aligned}\quad (6.25)$$

このモードは、 $\delta D'_z$  および  $\delta D''_z$  を基準座標とするモードであり、 $L_z = 0$  のゆらぎを生じさせる。図 6.1 のように、 $l$  ベクトルから見ると、両手を羽ばたかせる (Flap) ようにゆらぎの成分が振動するモードである。また、二つの共鳴を含んでいるのが特徴で、高エネルギー側のモードは super Flapping モード、低エネルギー側のモードは normal Flapping モードと呼ばれている。

更に、 $\delta D'_x - i\delta D''_y$  を基準座標とする  $L_z = 1$  のゆらぎを生じさせるモードも考えられるが、

$$\Omega^2 = (4\Delta_A)^2 \frac{\text{Re}\mathcal{L}_{xy}^K}{\text{Re}\mathcal{L}_x^K}\quad (6.26)$$

となり、共鳴を与えないことが分かっている。

図 6.2 にこれらのモードの温度依存性、表 6.2 にはモードの固有振動数と基準座標を示した。

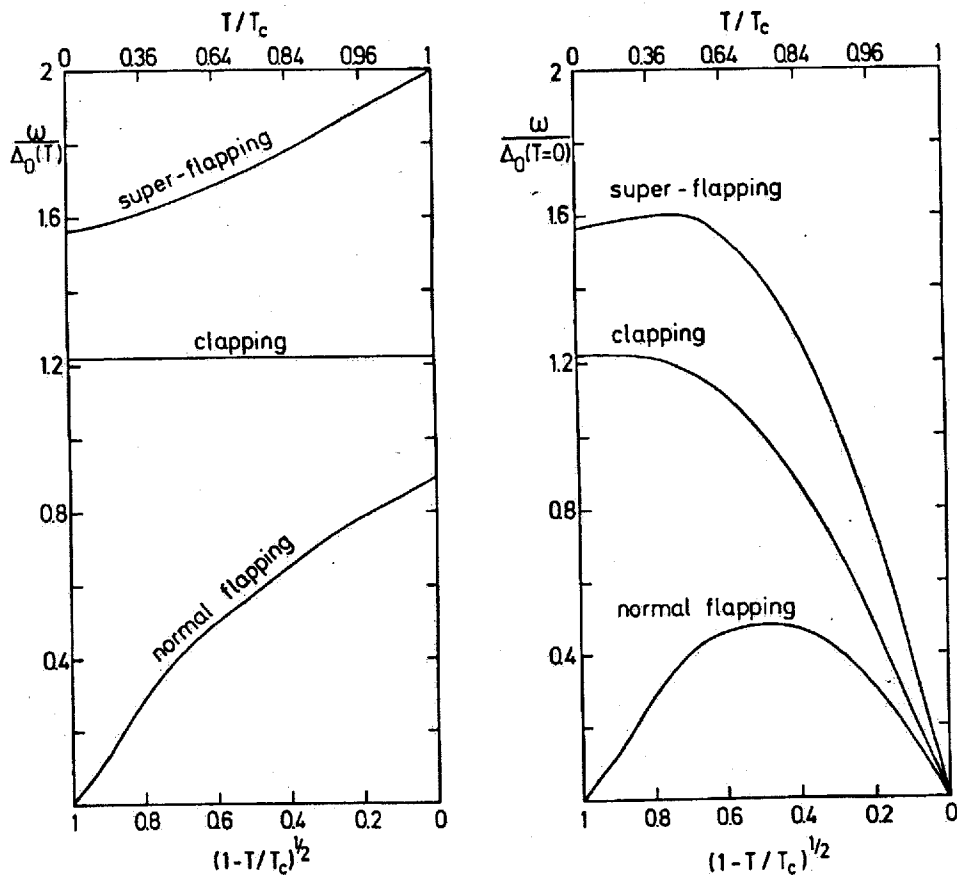


図 6.2: Clapping モード、Flapping モードの温度依存性



モード名	固有振動数	基準座標
GS モード	$\Omega^2 = 0$	$\delta D'_x - i\delta D'_y$
cl モード	$\Omega^2 = \frac{8\Delta_A^2 \text{Re}\mathcal{L}_{xy}^K}{\text{Re}\mathcal{L}_x^K}$	$\delta D'_x + i\delta D''_y, \delta D''_x + i\delta D'_y$
fl モード	$\Omega^2 = \frac{4(\Delta_A^2 \text{Re}\mathcal{L}_{xz}^K - \langle \hat{k}_z^2(1 - Y(T, \theta)) \rangle)}{\text{Re}\mathcal{L}_z^K}$	$\delta D'_z, \delta D''_z$

表 6.2: ABM 状態での音波と結合する集団励起

### 6.3 ABM 状態での横波

本節では ABM 状態での横波の伝播について議論する。A-相では  $l$  ベクトルの存在により、自発的に 1 軸性の異方性が生じている。従って、外部磁場等が無くても、音響 Faraday 効果が生じる、すなわち、横波の分極方向が  $l$  ベクトルと平行か垂直かによって音速の違いが生じ、横波の伝播と共に分極がリサージュ図形を描くことが期待される。

1 次のギャップ方程式を再び書き下す。

$$\begin{aligned}
\delta \hat{\Delta}_{\hat{k}}(\mathbf{q}, \Omega) = & \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left\langle \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)(\hat{k} \cdot \hat{k}') \delta \hat{\Delta}_{\hat{k}'}}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2}} \right\rangle \\
& - \frac{3iv_1 N_0}{4} \int d\omega \left\langle (\hat{k} \cdot \hat{k}') L_1^K \hat{\Delta}_{\hat{k}'} (\Omega \delta \varepsilon_0 + \eta \delta \varepsilon_1) \right\rangle \\
& + \frac{3iv_1 N_0}{4} \int d\omega \left\langle (\hat{k} \cdot \hat{k}') L_1^K \frac{\Omega^2 - 2|\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2 - \eta^2}{2} \delta \hat{\Delta}_{\hat{k}'} \right\rangle \\
& - \frac{3iv_1 N_0}{4} \int d\omega \left\langle (\hat{k} \cdot \hat{k}') L_1^K \hat{\Delta}_{\hat{k}'} \delta \hat{\Delta}_{\hat{k}'}^\dagger \hat{\Delta}_{\hat{k}'} \right\rangle \quad (6.27)
\end{aligned}$$

このとき、音波は横波を考えているので、密度ゆらぎは伝播しないため、 $\delta \varepsilon_0 = 0$  となる。また、前節同様  $l$  ベクトルを  $z$  軸方向にとり、 $l \perp \hat{q}$  として、ここでは特に  $\hat{q}$  の方向として、 $x$  軸方向の場合を考える。こうすると、外場によって誘起された分子場は、

$$\delta \varepsilon_1 = k_y V_y + k_z V_z \quad (6.28)$$

と記述できる。

$q^2$  のオーダーを落とし、ギャップ方程式 (6.27) の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned}
& -i \int d\omega \left\langle \hat{k} \cdot \hat{k}' \eta \hat{\Delta}_{\hat{k}'} L_0^K \delta \varepsilon_1 \right\rangle_{\hat{k}'} \\
& = -qv_F k_F \Delta_A V_y (\hat{k}_y + i\hat{k}_x) \mathcal{L}_{xy}^K - qv_F k_F \Delta_A V_z \hat{k}_z \mathcal{L}_{xz}^K \quad (6.29)
\end{aligned}$$

となる。すなわち、分極ベクトルを  $y$  方向に持つ音波は、オーダーパラメタのゆらぎである  $\delta D'_x + i\delta D''_y$  を基準座標とするゆらぎの成分である Clapping モードと結合する。同様に、分極ベクトルを  $z$  方向に持つ音波はオーダーパラメタのゆらぎである  $\delta D''_z$  を基準座標とするゆらぎの成分である Flapping モードと結合する。以下に、外場と結合したオーダーパラメタのゆらぎを書き下す。

$$\delta D'_x = \frac{2iv_F q k_F \Delta_A \mathcal{L}_{xy}^K}{\Omega^2 \mathcal{L}_x^K - 8\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K} V_y \quad (6.30)$$

$$\delta D''_y = \frac{2v_F q k_F \Delta_A \mathcal{L}_{xy}^K}{\Omega^2 \mathcal{L}_x^K - 8\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K} V_y \quad (6.31)$$

$$\delta D''_z = \frac{2v_F q k_F \Delta_A \mathcal{L}_{xz}^K}{\Omega^2 \mathcal{L}_z^K + 4(\hat{k}_z^2(1 - Y(T, \theta))) - 4\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xz}^K} V_z \quad (6.32)$$

今、振動数  $\Omega$ 、波数ベクトル  $q$ 、吸収 (減衰定数)  $\alpha$  を用いて、無次元化した複素位相速度  $s$  を次のように定義する。

$$s \equiv \frac{\Omega}{v_F(q + i\alpha)} = \frac{V - iX}{v_F} \quad (6.33)$$

このとき、流体力学的考察から得られる音響インピーダンスは、流体の密度  $\rho$  を用いて、 $Z = \rho(V - iX)$  と表される事が知られている。また実験的には、音響インピーダンスの測定から、上式における  $V$  および  $X$  を求めることにより、音速および吸収の評価が行なわれている。

さて、線形応答関数の 11 成分は、

$$\begin{aligned} \delta g_{11}^K &= \frac{2ik_F}{\Omega - \eta} \left[ \frac{\omega_- \tanh(\beta|\omega_-|/2)}{\sqrt{\omega_-^2 - |\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}} - \frac{\omega_+ \tanh(\beta|\omega_+|/2)}{\sqrt{\omega_+^2 - |\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}} \right] (\hat{k}_y V_y + \hat{k}_z V_z) \\ &\quad - 2\Delta_A^2 k_F L_0^K \frac{\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2}{\Omega - \eta} \eta (\hat{k}_y V_y + \hat{k}_z V_z) \\ &\quad - iv_F q \Delta_A L_0^K \hat{k}_x^2 (\hat{k}_y (\delta D'_x + i\delta D''_y) + \hat{k}_z \delta D''_z) \end{aligned}$$

と書けるので、超流動状態での準粒子の流れは、式 (5.60) から次のように記述できる。

$$\begin{aligned} J_y &= 2N_0 k_F v_F V_y \left\langle \frac{s \hat{k}_y^2}{s - \hat{k}_x} \right\rangle - N_0 \Delta_A^2 v_F k_F V_y \int d\omega \left\langle \frac{iL_0^K (\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2) \hat{k}_x^2 \hat{k}_y^2}{s^2 - \hat{k}_x^2} \right\rangle \\ &\quad + 2N_0 v_F k_F V_y \frac{(\Delta_A \Omega \mathcal{L}_{xy}^K)^2}{\Omega^2 \mathcal{L}_x^K - 8\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xy}^K} \frac{1}{s^2} \\ J_z &= 2N_0 v_F k_F V_z \left\langle \frac{s \hat{k}_z^2}{s - \hat{k}_x} \right\rangle - N_0 \Delta_A^2 v_F k_F V_z \int d\omega \left\langle \frac{iL_0^K (\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2) \hat{k}_x^2 \hat{k}_z^2}{s^2 - \hat{k}_x^2} \right\rangle \\ &\quad + N_0 v_F k_F V_z \frac{(\Delta_A \Omega \mathcal{L}_{xz}^K)^2}{\Omega^2 \mathcal{L}_z^K + 4(\hat{k}_z^2(1 - Y(T, \theta))) - 4\Delta_A^2 \mathcal{L}_{xz}^K} \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

**normal 状態** 常流動の極限について確認しておく。 $T \rightarrow T_C$  すなわち、 $\Delta_A \rightarrow 0$  と  
して、

$$J_{y,z} = N_0 v_F k_F \left\langle \hat{k}_z^2 \frac{2s}{s - \hat{k}_x} \right\rangle_{\hat{k}} V_{y,z} \quad (6.34)$$

一方で、Fermi 流体理論により、外場によって誘起された速度場は、

$$V = \frac{1}{3} \frac{m}{m^*} F_1^s \frac{J}{n} \quad (6.35)$$

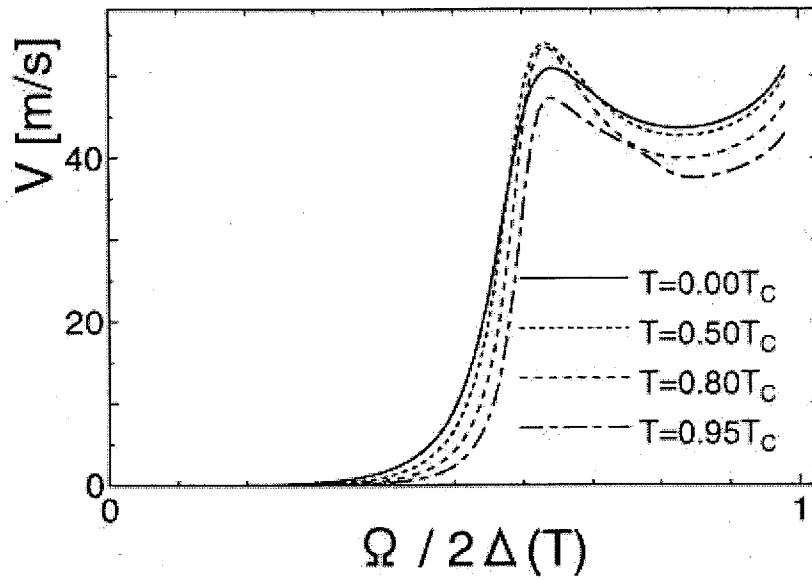
と表されるため、以下のように音速に対する条件式が得られる。

$$\frac{6}{F_1^s} = (3s^2 - 2) + \frac{3s(s^2 - 1)}{2} \ln \frac{s-1}{s+1} \equiv f(s)$$

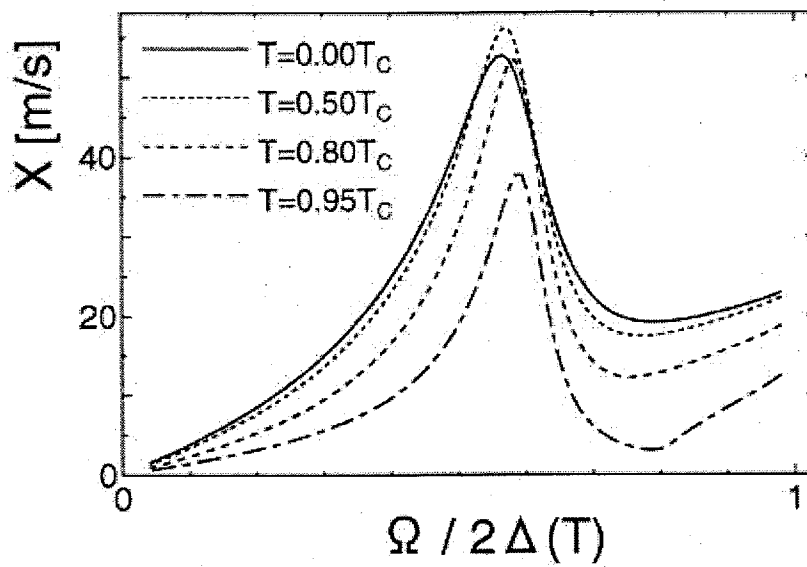
また、この条件式は、3.1.3 節で得られたものと一致している。

**超流動  $^3\text{He-A}$  相** 続いて超流動  $^3\text{He-A}$  相での議論にうつる。A-相では  $l$  ベクトルの存在により、自発的に 1 軸性の異方性が生じている。従って、外部磁場等が無くても、音響 Faraday 効果が生じる。すなわち、横波の分極方向が  $l$  ベクトルと平行か垂直かによって音速が異なり、横波の伝播と共に分極がリサージュ図形を描くことが期待される。圧力  $P=16[\text{bar}]$  として、 $V$  及び  $X$  の各温度における振動数依存性を、cl モードと結合する横波に関しては図 6.3 に、fl モードと結合する横波に関しては図 6.4 に示す。

結果は cl 及び fl モードによるエネルギー吸収に伴う音速の変化が見られ、各々は全く異なる振動数依存性を示している。cl モードではエネルギーの吸収線が比較的狭いため音速の変化が大きなものとなっているが、fl モードでは対破壊の影響を強く受けエネルギー吸収線はかなりブロードなものとなっている。また、sfl モードに至っては、その吸収線が対破壊のエネルギー吸収線に完全に隠れている。更に、cl モードの場合、全ての温度領域で低周波側の音速がほぼ 0 となるが、fl モードにおいては、大半の振動数領域で横波の音速は Fermi 速度程度もしくはそれ以下であり、音速の変化は緩やかなものとなる結果となった。しかし、双方とも音速の実部が小さい、あるいは虚部の絶対値が大きなものとなり、音響インピーダンスの実験的な横波の観測は難しいかもしれない。

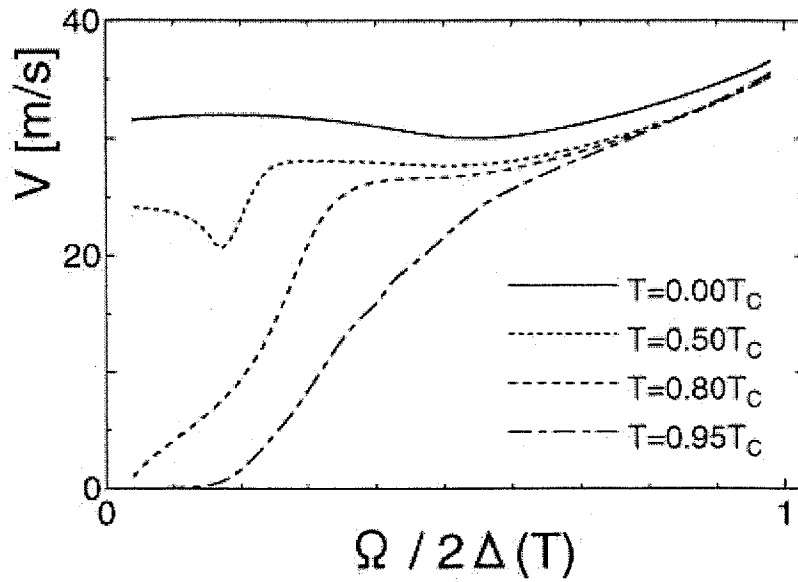


(a)

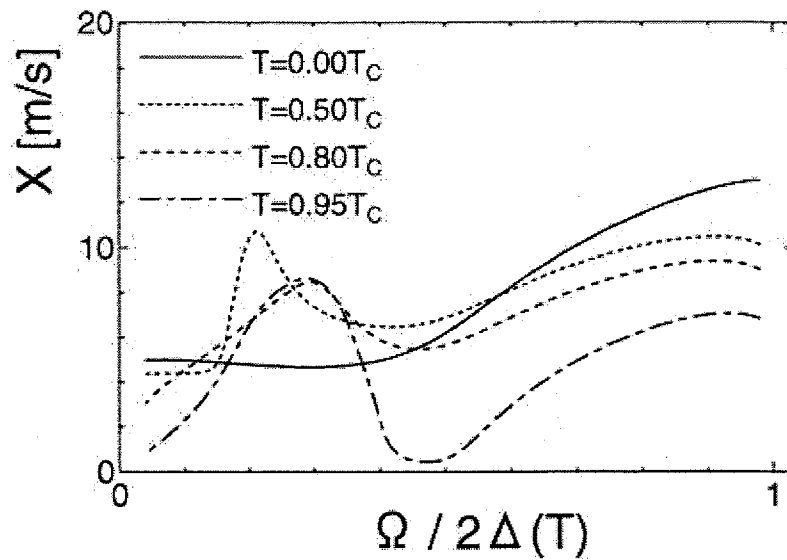


(b)

図 6.3: Clapping モードと結合した場合 (分極方向が  $\mathbf{l}$  ベクトルと垂直) の位相速度の実部  $V$  : (a) と虚部  $X$  : (b)



(a)



(b)

図 6.4: Flapping モードと結合した場合 (分極方向が  $l$  ベクトルと平行) の位相速度の実部  $V$  : (a) と虚部  $X$  : (b)

## 第7章 不純物を含む超流動相での音波

本章では第5章で行った定式化に基づき、不純物を含むBW状態を想定して具体的に超流動相における音波の伝播の解析を行う事を目的とする。そのために、まずグリーン関数の不純物平均をT-matrix近似に基づいて行い、次に応答関数のパーテックス補正項の表式を得る。このパーテックス補正項とオーダーパラメータのゆらぎをセルフコンシステントに求めることにより、音波の分散関係を求める。

### 7.1 不純物効果

本節では、平衡状態に現れる不純物効果について議論を行なう。 $N_i$  個の不純物があるとし、それぞれの位置を  $\mathbf{r}_\alpha$  とする。このとき式 (5.30) に現れる不純物ポテンシャルは、

$$V^i(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^{N_i} v^i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)$$

と書け、(5.32) 式のグリーン関数の従う方程式は、

$$\begin{aligned} G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega) &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') G_0^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{N_i} G_0^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) \sum_{\mathbf{k}''} v_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}^i e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{r}_\alpha} \rho_3 G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}', \omega) \end{aligned} \quad (7.1)$$

となる。ただし、 $v_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^i \equiv v^i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  は散乱ポテンシャルのフーリエ成分であり、 $G_0^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega)$  は式 (5.25) により定義された純粋な系でのグリーン関数である。また、 $\rho_3$  は particle-hole 空間での Pauli 行列である。

ここでグリーン関数 (7.1) を不純物ポテンシャルについて展開し、不純物の位置に関する平均を行う。第2章で指摘したように、不純物の分布に関する統一的な見解は無いが、本研究ではエアロジェルを均一に分布した散乱体とみなして、その効果を調べる。すなわち平均操作としては

$$\langle \cdots \rangle_{\text{imp}} = \frac{1}{V^{N_i}} \int \prod_{\alpha=1}^{N_i} d\mathbf{r}_\alpha (\cdots) \quad (7.2)$$

を行なう ( $V$  は系全体の体積で、 $n_i = N_i/V$  は不純物の数密度である)。一方、個々の不純物による散乱については無限次まで取り入れる。すなわち、図 7.1 に示すように、不純物散乱の自己エネルギーとしてはセルフコンシステント T-Matrix 近似を用いる。

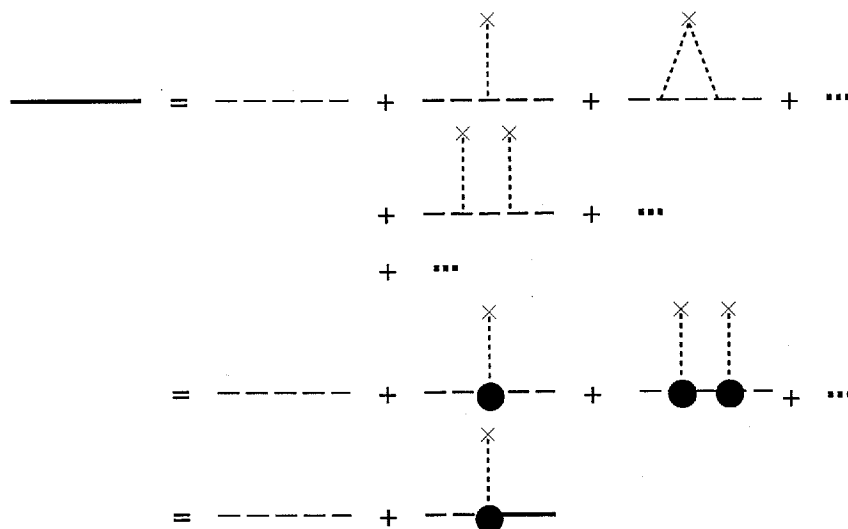


図 7.1: グリーン関数: (×: 不純物ポテンシャル、●: T-Matrix、——: 不純物を含むグリーン関数、----: 純粋な系でのグリーン関数)

平均操作 (7.2) の後、明らかに式 (7.1) は、

$$\langle G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega) \rangle_{\text{imp}} = G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

となる。図 7.1 のダイアグラムを表式化すると、グリーン関数は次のように記述できる。

$$\begin{aligned} G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) &= G_0^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) + G_0^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) \Sigma^{\text{R,A}}(\omega) G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) \\ &= \frac{1}{G_0^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega)^{-1} - \Sigma^{\text{R,A}}(\omega)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

上式において、 $\Sigma^{\text{R,A}}(\omega)$  は不純物自己エネルギーであり、T-Matrix  $T_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}^{\text{R,A}}(\omega)$  を用いて次のように記述できる。

$$\Sigma^{\text{R,A}}(\omega) = n_i T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}^{\text{R,A}}(\omega) \quad (7.4)$$

$$T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\text{R,A}}(\omega) = v_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^i + \sum_{\mathbf{k}''} v_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}^i G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}'', \omega) T_{\mathbf{k}'', \mathbf{k}'}^{\text{R,A}}(\omega) \quad (7.5)$$

## S 波散乱近似

本論文では、不純物散乱として S 波散乱を仮定して以下の解析を行なう。量子力学では、 $^3\text{He}$  準粒子が感じる散乱体の大きさ  $R$  が Fermi 波長  $\lambda_F = 2\pi/k_F$  に比べて小さい場合、S 波散乱近似が有効である事が知られているが、本研究で扱う不純物体はエアロジェルを想定しており、フェルミ波長 ( $\lambda_F \simeq 0.1[\text{nm}]$ ) と散乱体の大きさ ( $R \simeq 3[\text{nm}]$ ) の比較から必ずしも S 波散乱近似は正当化されない。しかし、Higashitani<sup>[13]</sup> による S 波散乱を仮定して、セルフコンシステント T-Matrix 近似で解析を行い、散乱ポテンシャルの弱い極限 (ボルン近似) よりはむしろ強い極限 (ユニタリティー極限) で超流動密度の振る舞いが説明できる事を示している。このことを踏まえ、本研究でも S 波散乱近似のもとでユニタリティー極限を考えて音波の伝播を調べる。

S 波散乱では、 $v_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^i \rightarrow v_i$  であり、これに伴ない、T-Matrix も  $T_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}^{\text{R,A}}(\omega) \rightarrow T^{\text{R,A}}(\omega)$  となる。この結果、自己エネルギーおよび T-Matrix は次のように記述される。

$$\Sigma^{\text{R,A}}(\omega) = n_i T^{\text{R,A}}(\omega) \equiv n_i t^{\text{R,A}}(\omega) \rho_3 \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} t^{\text{R,A}}(\omega) &= v_i + v_i t^{\text{R,A}}(\omega) \sum_{\mathbf{k}} \rho_3 G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) \\ &= \frac{v_i}{1 + \bar{v}_i \langle g^{\text{R,A}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega) \rangle} \end{aligned} \quad (7.7)$$

ここで  $\bar{v}_i = \pi N_0 v_i$  とおいた。

この表式において現れる準古典的グリーン関数は、不純物自己エネルギーを含むものであり、

$$g^{\text{R,A}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \int d\xi \rho_3 G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{x_{\hat{\mathbf{k}}}^{\text{R,A}}} \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{\text{R,A}} & \tilde{\Delta} \\ -\tilde{\Delta}^\dagger & -\tilde{\varepsilon}^{\text{R,A}} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

の形を持つことが示せる。ただし、 $x_{\hat{\mathbf{k}}}^{\text{R,A}} = \sqrt{|\hat{\Delta}|^2 - (\tilde{\varepsilon}^{\text{R,A}})^2}$  である。このとき、Keldysh グリーン関数は

$$g^K(\hat{\mathbf{k}}, \omega) = \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \left(g^{\text{R}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega) - g^{\text{A}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega)\right) \quad (7.9)$$

となる。

P 波の軌道角運動量を有するクーパー対を仮定すると、準古典的グリーン関数  $g^{\text{R,A}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega)$  の角度平均は対角型となる。

$$\langle g^{\text{R,A}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega) \rangle = \tilde{\varepsilon}^{\text{R,A}} \left\langle \frac{1}{x_{\hat{\mathbf{k}}}^{\text{R,A}}} \right\rangle \rho_3 \equiv h^{\text{R,A}}(\omega) \rho_3 \quad (7.10)$$



これにより、T-Matrix は、

$$t^{R,A}(\omega) = \frac{v_i}{1 + \bar{v}_i h^{R,A}(\omega) \rho_3} \quad (7.11)$$

となり、同様に不純物自己エネルギーは、

$$\begin{aligned} \Sigma^{R,A}(\omega) &= n_i \frac{v_i \rho_3}{1 + \bar{v}_i h^{R,A}(\omega) \rho_3} \\ &= n_i \frac{v_i \rho_3}{1 - [\bar{v}_i h^{R,A}(\omega)]^2} - n_i \frac{v_i \bar{v}_i h^{R,A}(\omega)}{1 - [\bar{v}_i h^{R,A}(\omega)]^2} \end{aligned} \quad (7.12)$$

と記述できるため、frequency、およびエネルギーへの繰り込みは

$$\tilde{\xi}_k = \xi_k - \frac{n_i v_i}{1 - [\bar{v}_i h^{R,A}(\omega)]^2} \quad (7.13)$$

$$\tilde{\varepsilon}^{R,A} = \varepsilon^{R,A} + \frac{n_i}{\pi N_0} \frac{\bar{v}_i^2 h^{R,A}(\omega)}{1 - [\bar{v}_i h^{R,A}(\omega)]^2} \equiv \varepsilon^{R,A} + \frac{1}{2\tau} N(\tilde{\varepsilon}^{R,A}) \quad (7.14)$$

によって与えられる。ここで、 $\tau$  は不純物散乱による緩和時間であり、散乱ポテンシャルの弱い極限（ボルン近似）では

$$\frac{1}{2\tau} = \frac{n_i \bar{v}_i^2}{\pi N_0}, \quad N(\tilde{\varepsilon}^{R,A}) = h^{R,A}(\omega)$$

逆に散乱ポテンシャルの強い極限（ユニタリティー極限）では

$$\frac{1}{2\tau} = \frac{n_i}{\pi N_0}, \quad N(\tilde{\varepsilon}^{R,A}) = -\frac{1}{h^{R,A}(\omega)}$$

で定義される。

P 波の軌道角運動量を持つオーダーパラメータの場合、S 波散乱近似の範疇ではオーダーパラメータへの自己エネルギーの繰り込みは無い。

### BW 状態での準粒子状態密度

BW 状態を仮定すると、エネルギーギャップは等方的で、温度のみに依存するため  $|\hat{\Delta}| \rightarrow \Delta(T)$  となる。この場合の準粒子状態密度を式 (7.14) を用いて数値的に求めた。図 7.2 にはボルン近似の場合、図 7.3 にはユニタリティー極限の場合について、 $\tau \Delta_0(0) = 2.0 \sim 1000$  における結果を示す ( $\Delta_0(0)$  は絶対零度における純粋な BW 状態でのエネルギーギャップ)。不純物を含む  $^3\text{He}$  の超流動転移温度  $T_{CA}$  を基準に  $T = 0.05T_{CA}$ 、 $0.70T_{CA}$ 、 $0.95T_{CA}$  の温度におけるプロットを示した。ボルン近似では  $\tau \Delta_0(0)$  が小さくなるにつれ状態密度のギャップが小さくなる傾向を示している。これに対し、ユニタリティー極限では、低エネルギー領域に状態ができ、 $\Delta_0(0)\tau \simeq 2.0$  以下においてギャップレス状態となるのが特徴である。

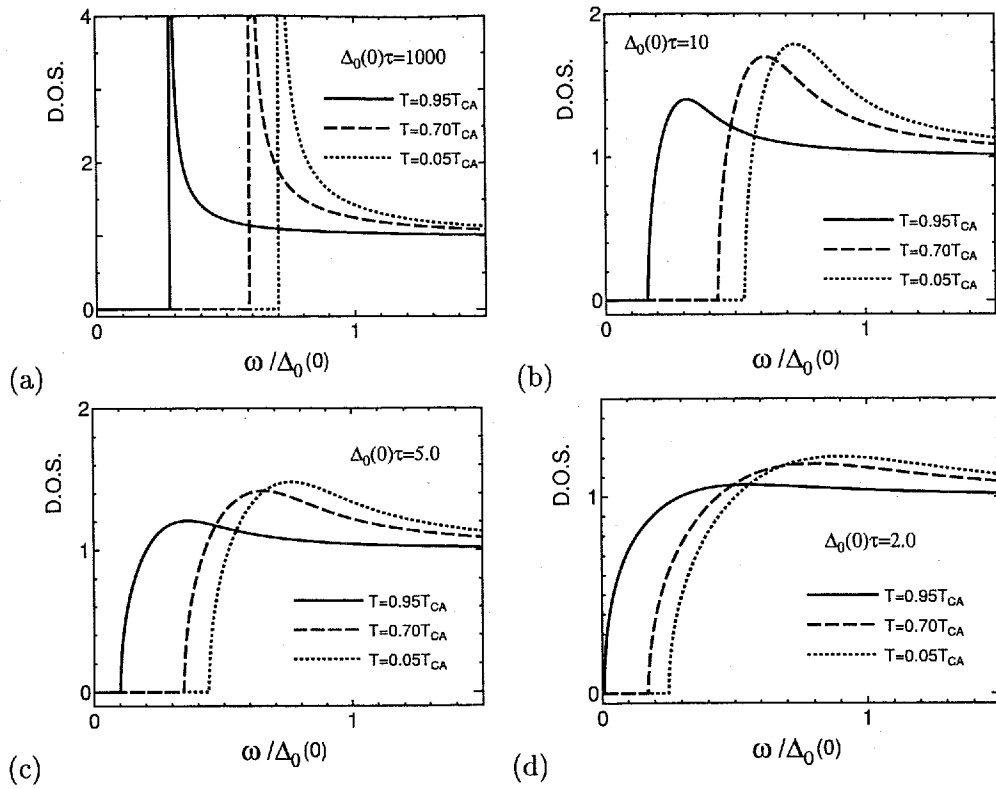


図 7.2: ボルン近似での準粒子状態密度 ( $N_0$  でスケール)

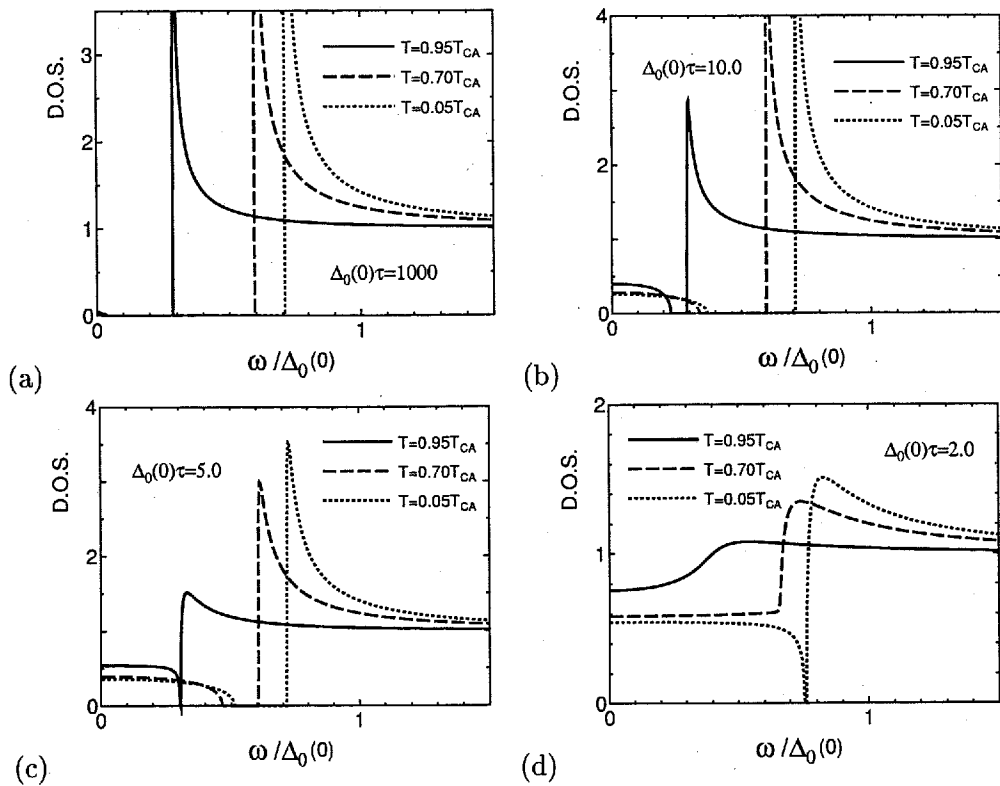


図 7.3: ユニタリティー極限での準粒子状態密度 ( $N_0$  でスケール)

## 7.2 不純物を含む系での線形応答グリーン関数

5.4.2 節において得た線形応答グリーン関数 (5.52)

$$\delta G^{\text{R,A,a}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) = \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{q}'} G^{\text{R,A,R}}(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}'_+, \omega_+) U_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}', \Omega) G^{\text{R,A,A}}(\mathbf{k}'_-, \mathbf{k}_-, \omega_-)$$

の不純物平均を考える。

それぞれのグリーン関数  $G^{\text{R,A,R}}(\mathbf{k}_\pm, \mathbf{k}'_\pm, \omega_\pm)$  を不純物ポテンシャルに関して展開し、不純物平均を行う。その結果、図 7.4 に示すように、左側のグリーン関数に繰り込める部分と右側のグリーン関数に繰り込める部分、および両側のグリーン関数にまたがる部分が現われる。この最後の部分がバーテックス補正と呼ばれる部分である。

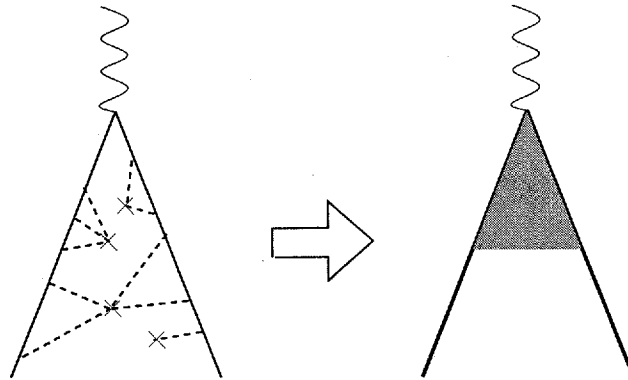


図 7.4: 不純物平均を施した線形応答グリーン関数

この結果を式に表すと次のように書ける。

$$\begin{aligned} \langle \delta G^{\text{R,A,a}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) \rangle_{\text{imp}} &\equiv \delta G^{\text{R,A,a}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; \omega, \Omega) \\ &= G^{\text{R,A,R}}(\mathbf{k}_+, \omega_+) \Gamma_{\mathbf{k}}^{\text{R,A,a}}(\mathbf{q}, \omega, \Omega) G^{\text{R,A,A}}(\mathbf{k}_-, \omega_-) \end{aligned} \quad (7.15)$$

ここで、 $G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega)$  は不純物による自己エネルギーを繰り込んだグリーン関数であり、 $\Gamma_{\mathbf{k}}^{\text{R,A,a}}(\mathbf{q}, \omega, \Omega)$  はバーテックス部分を意味する。

グリーン関数の自己エネルギーとして T-Matrix 近似を採用したことに対応して、バーテックス補正項は図 7.5 で示すような T-Matrix の Ladder ダイアグラムを足し合わせる必要がある。このことによって、Ward-Takahashi の恒等式が満足される。言い換えれば、保存則を満たす近似になる。バーテックス部分のみを書き下すと、図

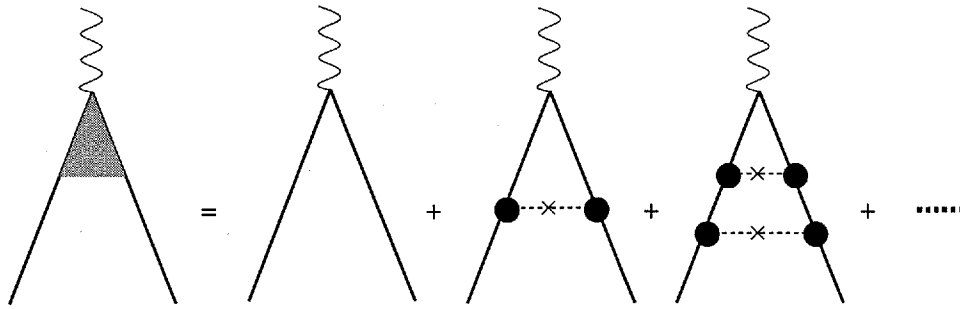


図 7.5: 不純物平均された線形応答グリーン関数 (ladder ダイアグラム)

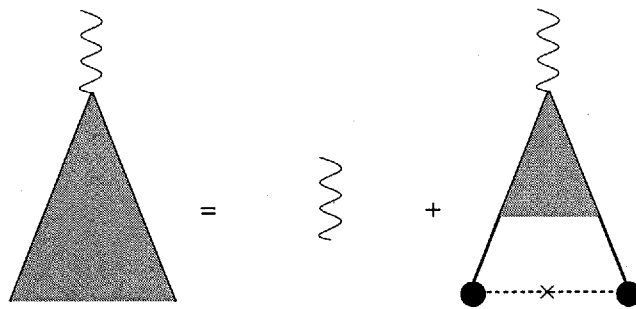


図 7.6: バーテックス

7.6 のようになり、このダイアグラムから、バーテックス補正項の満たす積分方程式が得られる。

$$\Gamma_{\mathbf{k}}^{\text{R,A,a}}(\mathbf{q}, \omega, \Omega) = U_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) + n_i \sum_{\mathbf{k}'} T_{\mathbf{k}_+, \mathbf{k}'_+}^{\text{R,A,R}}(\omega_+) \delta G^{\text{R,A,a}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) T_{\mathbf{k}'_-, \mathbf{k}}^{\text{R,A,A}}(\omega_-) \quad (7.16)$$

### 準古典的グリーン関数

式 (7.15)、(7.16) よって記述されるバーテックスの補正項を含む線形応答グリーン関数を、準古典的グリーン関数を用いて記述する。

$$\begin{aligned} \delta g^{\text{R,A,a}}(\hat{k}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) &= -\frac{1}{\pi} \int d\xi \rho_3 \delta G^{\text{R,A,a}} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int d\xi \rho_3 \left[ G^{\text{R,A,R}} \left( \Gamma^{\text{R,A,a}} \rho_3 \right) \rho_3 G^{\text{R,A,A}} \right] \quad (7.17) \end{aligned}$$

ここで、T-matrix が  $\xi$  によらないことを使うと、バーテックス補正項は次のように書き下すことができる。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathbf{k}}^{\text{R,A,a}}(\mathbf{q}, \omega, \Omega)\rho_3 &\equiv \gamma_{\mathbf{k}}^{\text{R,A,a}}(\mathbf{q}, \omega, \Omega) \\
&= u_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) \\
&\quad - n_i \pi N_0 \left\langle t_{\mathbf{k}_+, \mathbf{k}'_+}^{\text{R,A,R}}(\omega_+) \delta g^{\text{R,A,a}}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) t_{\mathbf{k}'_-, \mathbf{k}_-}^{\text{R,A,A}}(\omega_-) \right\rangle \quad (7.18)
\end{aligned}$$

$$t_{\mathbf{k}_{\pm}, \mathbf{k}'_{\pm}}^{\text{R,A}}(\omega_{\pm}) \equiv T_{\mathbf{k}_{\pm}, \mathbf{k}'_{\pm}}^{\text{R,A}}(\omega_{\pm})\rho_3 \quad (7.19)$$

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) \equiv U_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega)\rho_3 = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_1 & -\delta\hat{\Delta} \\ \delta\hat{\Delta}^\dagger & \delta\varepsilon_0 - \delta\varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

以上までの議論により、Keldysh形式の線形応答グリーン関数を準古典的グリーン関数により記述することが可能となった。

### S波散乱近似

前節の議論と同様にS波散乱を仮定するとバーテックスの補正は次式で与えられる。

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\text{R,A,a}}(\mathbf{q}, \omega, \Omega) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \Omega) - n_i \pi N_0 t_+^{\text{R,A,R}} \left\langle \delta g^{\text{R,A,a}}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) \right\rangle t_-^{\text{R,A,A}} \quad (7.21)$$

ただし  $t_{\pm}^{\text{R,A}} = t^{\text{R,A}}(\omega \pm \Omega/2)$  とした。6.1節で行なった議論と同様に、考える超流動状態がユニタリー状態であることを仮定すると次の関係を満たす。

$$G^{\text{R,A}}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\rho_3}{2i} \left[ \frac{g^{\text{R,A}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega) + i}{\tilde{\xi}_{\mathbf{k}} - ix_{\mathbf{k}}^{\text{R,A}}(\omega)} - \frac{g^{\text{R,A}}(\hat{\mathbf{k}}, \omega) - i}{\tilde{\xi}_{\mathbf{k}} + ix_{\mathbf{k}}^{\text{R,A}}(\omega)} \right] \quad (7.22)$$

したがって、式(7.17)に関して  $\xi$ -積分を実行することで線形応答の準古典的グリーン関数は次のように書き下すことができる。

$$\delta g^{\text{R,A,a}}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{q}, \omega, \Omega) = \frac{-i}{2} \sum_{\alpha=\pm} \left( g_+^{\text{R,A,R}} + \alpha i \right) \frac{\gamma^{\text{R,A,a}}}{i(x_+^{\text{R,A,R}} + x_-^{\text{R,A,A}}) - \alpha \eta} \left( g_-^{\text{R,A,A}} - \alpha i \right) \quad (7.23)$$

ここで、式(6.4)と同様に、

$$\eta = \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{q} \quad (7.24)$$

$$\omega_{\pm} = \omega \pm \Omega/2 \quad (7.25)$$

$$x_{\pm}^{\text{R,A}} = \sqrt{|\hat{\Delta}|^2 - (\tilde{\varepsilon}_{\pm}^{\text{R,A}})^2} \quad (7.26)$$

$$g_{\pm}^{\text{R,A}} = \frac{1}{x_{\pm}^{\text{R,A}}} \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\pm}^{\text{R,A}} & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^\dagger & -\tilde{\varepsilon}_{\pm}^{\text{R,A}} \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

である。

S 波散乱の仮定から  $t_{\pm}$  は  $\mathbf{k}$  によらない。また、後で示すように  $\langle \delta g^{R,A,a} \rangle$  の対角成分、11 成分と 22 成分、は等しい。したがって、式 (7.21) は

$$\gamma^{R,A,a} = u - n_i \pi N_0 t_+^{R,A,R} \langle \delta g^{R,A,a} \rangle t_-^{R,A,A} \equiv u + \delta \gamma^{R,A,a} \quad (7.28)$$

$$u = U \rho_3 = \begin{pmatrix} \delta \varepsilon_0 + \delta \varepsilon_1 & -\delta \hat{\Delta} \\ \delta \hat{\Delta}^\dagger & \delta \varepsilon_0 - \delta \varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

$$\delta \gamma = \begin{pmatrix} \delta \gamma_1 & -\delta \hat{\gamma}_2 \\ \delta \hat{\gamma}_2^\dagger & \delta \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

とおくことが出来る。以後の議論において  $\delta g, \delta \gamma$  に現れる、R,A,a の上付き文字は必要のない限り省略する。R,A,a の付いた量を計算するときには、含まれる  $x_+, x_-$  を  $x_+^{R,A,R}, x_-^{R,A,A}$  と解釈すればよい。

### 7.3 BW 状態でのバーテックス補正

本節では BW 状態を仮定し、(7.28) 式を解いて、バーテックス補正項を  $\delta \gamma$  を外場  $\delta \varepsilon_0, \delta \varepsilon_1, \delta \hat{\Delta}$  で表す。

以下、話を簡単にするために不純物散乱としてボルン近似とユニタリティー極限のみを考える。式 (7.11) よりボルン近似では

$$t^{R,A}(\omega) = v^i$$

ユニタリティー極限では

$$t^{R,A}(\omega) = \frac{1}{h^{R,A}(\omega)} \rho_3$$

となり、行列演算が簡単になって、式 (7.28) において定義したバーテックス補正項  $\delta \gamma$  は次のように書ける。

$$\delta \gamma = \begin{pmatrix} \delta \gamma_1 & -\delta \hat{\gamma}_2 \\ \delta \hat{\gamma}_2^\dagger & \delta \gamma_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \beta_D \langle \delta g_{11} \rangle & \beta_{OD} \langle \delta g_{12} \rangle \\ \beta_{OD} \langle \delta g_{21} \rangle & \beta_D \langle \delta g_{22} \rangle \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

ここで

$$\begin{cases} \beta_D = \beta_{OD} = \frac{1}{2\tau} & \text{Born approximation} \\ \beta_D = -\beta_{OD} = \frac{1}{2\tau} \frac{1}{h_+ h_-} & \text{Unitarity limit} \end{cases} \quad (7.32)$$

と置いた。また、 $\delta g_{11}, \delta g_{12}, \delta g_{21}, \delta g_{22}$  の具体的な表式については、付録 D に示した。

ここで、オーダーパラメータのゆらぎ  $\delta\hat{\Delta} = i(\delta\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma})\sigma_y$  は、

$$\delta d_\mu = \delta d_{\mu\nu} \hat{k}_\nu$$

と展開し、同様に、バーテックス補正項の非対角成分についても

$$\delta\hat{\gamma}_2 = i(\delta\gamma_2 \cdot \boldsymbol{\sigma})\sigma_y \quad (7.33)$$

と展開する。

式(7.28)から、線形応答グリーン関数の各成分の角度平均は次のように書き下せる。

$$\begin{aligned} \langle \delta g_{11} \rangle &= \langle \delta g_{22} \rangle \\ &= (P_+ - |\hat{\Delta}|^2) \langle L_1 \rangle (\delta\varepsilon_0 + \delta\gamma_1) + Q_- \langle L_1 \eta \delta\varepsilon_1 \rangle \\ &\quad + \left( (\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-) \delta d''_{\mu\nu} \Delta \langle L_1 \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu \rangle + \bar{Q} \Delta \langle \eta L_1 \hat{k}_i \rangle (\delta\gamma_{2i} + \delta\gamma_{2i}^*) / 2 \right) \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta g_{12} \rangle &= (i\sigma_\mu \sigma_y) \left( \bar{Q} \Delta \langle \hat{k}_\mu \eta L_1 \rangle (\delta\varepsilon_0 + \delta\gamma_1) + (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \langle L_1 \hat{k}_\mu \delta\varepsilon_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \Delta^2 \langle L_1 (2\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu - 1) \rangle \delta\gamma_{2\nu}^* - \langle L_1 \rangle P_- \delta\gamma_{2\mu} + Q_+ \langle \hat{k}_\nu \eta L_1 \rangle \delta d_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta g_{21} \rangle &= (-i\sigma_y \sigma_\mu) \left( -\bar{Q} \Delta \langle \hat{k}_\mu \eta L_1 \rangle (\delta\varepsilon_0 + \delta\gamma_1) - (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \langle L_1 \hat{k}_\mu \delta\varepsilon_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. - \Delta^2 \langle L_1 (2\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu - 1) \rangle \delta\gamma_{2\nu} + \langle L_1 \rangle P_- \delta\gamma_{2\mu}^* + Q_+ \langle \hat{k}_\nu \eta L_1 \rangle \delta d_{\mu\nu}^* \right) \end{aligned} \quad (7.36)$$

ここで、

$$L_1 = \frac{-(x_+ + x_-)}{x_+ x_- [(x_+ + x_-)^2 + \eta^2]} \quad (7.37)$$

$$P_\alpha = x_+ x_- + \alpha \tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_- \quad (7.38)$$

$$Q_\alpha = \frac{x_+ \tilde{\varepsilon}_- + \alpha x_- \tilde{\varepsilon}_+}{x_+ + x_-} \quad (7.39)$$

$$\bar{Q} = \frac{x_+ - x_-}{x_+ + x_-} \quad (7.40)$$

と定義した。上の結果を用いると、式(7.28)から、

$$\begin{aligned} \delta\gamma_1 &= -\beta_D \left\{ (P_+ - |\hat{\Delta}|^2) \langle L_1 \rangle (\delta\varepsilon_0 + \delta\gamma_1) + Q_- \langle L_1 \eta \delta\varepsilon_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-) \sum_i \delta d''_{ii} \Delta \langle L_1 \hat{k}_i^2 \rangle + \bar{Q} \delta\gamma'_{2z} \Delta \langle \eta L_1 \hat{k}_z \rangle \right\} \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma'_{2i} &\equiv \frac{\delta\gamma_{2i} + \delta\gamma_{2i}^*}{2} \\ &= \beta_{OD} \left\{ \Delta^2 \langle L_1 (2\hat{k}_i^2 - 1) \rangle \delta\gamma'_{2i} - \langle L_1 \rangle P_- \delta\gamma'_{2i} + \delta_{iz} \bar{Q} \Delta \langle v_{Fq} \rangle \langle \hat{k}_z^2 L_1 \rangle \delta\gamma_1 \right. \\ &\quad \left. + \delta_{iz} \left( (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \frac{\Omega E_1}{v_{Fq}} \delta\varepsilon_0 + \bar{Q} \Delta \langle v_{Fq} \rangle \delta\varepsilon_0 + Q_+ \langle v_{Fq} \rangle \delta d''_{zz} \right) \langle \hat{k}_z^2 L_1 \rangle \right\} \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_{2i}'' &\equiv \frac{\delta\gamma_{2i} - \delta\gamma_{2i}^*}{2} \\
&= -\beta_{OD} \left\{ \Delta^2 \langle L_1 (2\hat{k}_i^2 - 1) \rangle \delta\gamma_{2i}'' + \langle L_1 \rangle P_- \delta\gamma_{2i}'' - \delta_{iz} Q_+ (v_F q) \delta d_{zz}' \langle \hat{k}_z^2 L_1 \rangle \right\}
\end{aligned} \tag{7.43}$$

が得られる。ただし、音波の伝播方向  $\mathbf{q}$  を  $z$  軸とし、式 (2.20)、(2.21) により定義した、 $\eta\delta\varepsilon_1 = (\hat{k} \cdot \hat{q})^2 \Omega E_1 \delta\varepsilon_0$  の関係を用いた。

これらの式から、バーテックス補正項において対角成分は音波と結合することがわかる。また、非対角項はスピン空間の  $z$  成分のみが音波と結合している。オーダーパラメータのゆらぎについては、 $\delta d_{ii}''$  のみを含んでいることから、純粋な系の場合と同様、GS モードと sq モードの基準座標

$$\delta d_G = \delta d_{xx}'' + \delta d_{yy}'' + \delta d_{zz}'' \tag{7.44}$$

$$\delta d_s = \delta d_{xx}'' + \delta d_{yy}'' - 2\delta d_{zz}'' \tag{7.45}$$

が現れる。

ここで、無次元音速  $s = \Omega/(v_F q)$  を定義する。  $s$  は  $^3\text{He}$  の常流動状態において、第 0 音波の音速に帰着し、 $s^2 = (c_0/v_F)^2 \sim F_0^s \gg 1$  となる。このことから  $|s| \gg 1$  が予想されるので、 $L_1$  については次のように展開する。

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{-(x_+ + x_-)}{x_+ x_- [(x_+ + x_-)^2 + \eta^2]} \\
&\simeq \frac{-1}{x_+ x_- (x_+ + x_-)} \left( 1 - \frac{\eta^2}{(x_+ + x_-)^2} \right) \equiv L_0 \left( 1 + \frac{R}{s^2} (\hat{k} \cdot \hat{q})^2 \right)
\end{aligned} \tag{7.46}$$

ただし、

$$R = -\frac{\Omega^2}{(x_+ + x_-)^2}$$

とする。この展開形を用いて角度積分を行うと、

$$\sum_i \langle L_1 \hat{k}_i^2 \rangle \delta d_{ii}'' = \frac{L_0}{3} \left( 1 + \frac{R}{3s^2} \right) \delta d_G - \frac{2L_0 R}{45s^2} \delta d_s \tag{7.47}$$

となる。この結果から、式 (7.41)、(7.42)、(7.43) の方程式を解くと、

$$\begin{pmatrix} \delta\gamma_1 \\ \delta\gamma_{2z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{1e} \\ \Gamma_{2e} \end{pmatrix} \delta\varepsilon_0 + \begin{pmatrix} \Gamma_{1dg} \\ \Gamma_{2dg} \end{pmatrix} \delta d_G + \begin{pmatrix} \Gamma_{1ds} \\ \Gamma_{2ds} \end{pmatrix} \delta d_s \tag{7.48}$$

となる (具体的な導出は付録 E に記した。)



## 7.4 1次のギャップ方程式

この節では、1次のギャップ方程式を解いて、オーダーパラメータのゆらぎ  $\delta d_G$ 、 $\delta d_s$  を  $\delta \varepsilon_0$  で表す。オーダーパラメータのゆらぎに関するギャップ方程式は、式 (2.32)、(5.62) より、

$$\delta \hat{\Delta} = \frac{-3v_1 i N_0}{4} \int d\omega \langle \hat{k}' \delta g_{12}^K \rangle \hat{k} \quad (7.49)$$

$$\delta \hat{\Delta}^\dagger = \frac{-3v_1 i N_0}{4} \int d\omega \langle \hat{k}' \delta g_{12}^K \rangle \hat{k} \quad (7.50)$$

となる。今、

$$\begin{aligned} -P_- L_1 &= -\frac{-(x_+ + x_-)}{x_+ x_- \{(x_+ + x_-)^2 + \eta^2\}} (x_+ x_- - \tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_-) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_+} + \frac{1}{x_-} \right) + L_1 \frac{2\Delta^2 + \eta^2 - (\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-)^2}{2} \end{aligned} \quad (7.51)$$

の関係を用いると、式 (D.4) から、

$$\begin{aligned} \langle \hat{k}_i \delta g_{12} \rangle &= (i\sigma_\mu \sigma_y) \left\{ \frac{1}{6} \left( \frac{1}{x_+} + \frac{1}{x_-} \right) \delta d_{\mu i} \right. \\ &\quad + (\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \langle L_1 \hat{k}_i \hat{k}_\mu \rangle (\delta \varepsilon_0 + \delta \gamma_1) + \Delta \langle \hat{k}_i \hat{k}_\mu L_1 \eta \delta \varepsilon_1 \rangle \\ &\quad + \left( \Delta^2 - \frac{(\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-)^2}{2} \right) \langle L_1 \hat{k}_i \hat{k}_\nu \rangle \delta d_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle L_1 \eta^2 \hat{k}_i \hat{k}_\nu \rangle \delta d_{\mu\nu} + 2\Delta^2 \langle L_1 \hat{k}_i \hat{k}_\nu \hat{k}_j \hat{k}_\mu \rangle \delta d_{j\nu}^* \\ &\quad \left. - \Delta^2 \langle L_1 \hat{k}_i \hat{k}_\nu \rangle \delta d_{\mu\nu}^* + Q_+ \langle \hat{k}_i \eta L_1 \rangle \delta \gamma_{2\mu} \right\} \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{k}_i \delta g_{21} \rangle &= (-i\sigma_y \sigma_\mu) \left\{ -\frac{1}{6} \left( \frac{1}{x_+} + \frac{1}{x_-} \right) \delta d_{\mu i}^* \right. \\ &\quad + (\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \langle L_1 \hat{k}_i \hat{k}_\mu \rangle (\delta \varepsilon_0 + \delta \gamma_1) + \Delta \langle \hat{k}_i \hat{k}_\mu L_1 \eta \delta \varepsilon_1 \rangle \\ &\quad - \left( \Delta^2 - \frac{(\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-)^2}{2} \right) \langle L_1 \hat{k}_i \hat{k}_\nu \rangle \delta d_{\mu\nu}^* \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle L_1 \eta^2 \hat{k}_i \hat{k}_\nu \rangle \delta d_{\mu\nu}^* - 2\Delta^2 \langle L_1 \hat{k}_i \hat{k}_\nu \hat{k}_j \hat{k}_\mu \rangle \delta d_{j\nu} \\ &\quad \left. + \Delta^2 \langle L_1 \hat{k}_i \hat{k}_\nu \rangle \delta d_{\mu\nu} + Q_+ \langle \hat{k}_i \eta L_1 \rangle \delta \gamma_{2\mu}^* \right\} \end{aligned} \quad (7.53)$$

となる。式 (7.44)、(7.45) を考慮して GS モードと sq モードの基準座標にのみ注目し、1次のギャップ方程式に式 (7.52)、(7.53) を代入し、式 (2.20) を用いると、

$$\begin{aligned} &\int d\omega [2L_0 \{ \Delta (3(\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-)(1 + \Gamma_{1e}) + \Omega E_1) + \Omega Q_+ (\Gamma_{2e}/s) \}]^K \delta \varepsilon_0 \\ &= \int d\omega [L_0 ((\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-)^2 - 6(\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \Gamma_{1dg} - 2\Omega Q_+ (\Gamma_{2dg}/s)) \delta d_G \\ &\quad - 2L_0 (3(\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \Gamma_{1ds} + \Omega Q_+ (\Gamma_{2ds}/s)) \delta d_s]^K \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned}
& \int d\omega [-4L_0\Omega(2\Delta E_1/5 + Q_+(\Gamma_{2e}/s))]^K \delta\varepsilon_0 \\
&= \int d\omega \left[ \left( (\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-)^2 - \frac{12\Delta^2}{5} + 4\Omega Q_+(\Gamma_{2ds}/s) \right) L_0 \delta d_s \right. \\
&\quad \left. + 4\Omega Q_+ L_0 (\Gamma_{2dg}/s) \delta d_G \right]^K
\end{aligned} \tag{7.55}$$

の関係が得られる。式(7.54)、(7.55)をそれぞれ、

$$A_G^K \delta\varepsilon_0 = B_G^K \delta d_G + C_G^K \delta d_s$$

$$A_s^K \delta\varepsilon_0 = B_s^K \delta d_s + C_s^K \delta d_G$$

とおく<sup>1</sup>。今、式(E.36)～式(E.41)を考慮し $\mathcal{O}(1/s^2)$ 以上のオーダーを無視すると、

$$A_G^K = \int d\omega \left[ 2L_0\Delta \left( 3(\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-)(1 + \Gamma_{1e}^0) + \Omega E_1 \right) + 2L_0\Omega Q_+ \Gamma_{2e}^0 \right]^K \tag{7.56}$$

$$B_G^K = \int d\omega \left[ L_0 \left( (\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-)^2 - 6(\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \Gamma_{1dg}^0 \right) \right]^K \tag{7.57}$$

$$C_G^K = 0 \tag{7.58}$$

$$A_s^K = -4 \int d\omega \left[ L_0\Omega \left( 2\Delta E_1/5 + Q_+ \Gamma_{2e}^0 \right) \right]^K \tag{7.59}$$

$$B_s^K = \int d\omega \left[ L_0 \left( (\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-)^2 - \frac{12\Delta^2}{5} \right) \right]^K \tag{7.60}$$

$$C_s^K = 0 \tag{7.61}$$

となるため、これらの方程式は、

$$\delta d_G = (A_G^K/B_G^K) \delta\varepsilon_0 \equiv X_G \delta\varepsilon_0 \tag{7.62}$$

$$\delta d_s = (A_s^K/B_s^K) \delta\varepsilon_0 \equiv X_s \delta\varepsilon_0 \tag{7.63}$$

と解くことができる。

<sup>1</sup> $A^K$  や  $B^K$  などは、

$$A^K = \tanh \frac{\beta\omega_-}{2} [A^R - A^a] - \tanh \frac{\beta\omega_+}{2} [A^A - A^a]$$

を $\omega$ -積分して得られる Keldysh グリーン関数

$$A^K \equiv \int d\omega (A^K)$$

である。

## 7.5 不純物を含む $^3\text{He-B}$ 相での縦波

以上の結果を用いて、不純物を含む超流動 $^3\text{He-B}$ 相における縦波の分散関係を求めることができる。連続の式

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{J} = \Omega \delta n$$

を用いて、

$$\Omega \delta n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{J} = \frac{iN_0}{2} \int d\omega \langle \eta \delta g_{11}^K \rangle$$

と書く。 $\langle \eta \delta g_{11}^K \rangle$  を  $1/s^2$  の1次まで展開すると

$$\begin{aligned} \langle \eta \delta g_{11} \rangle &= (P_+ + |\hat{\Delta}|^2) \langle L_1 \eta \delta \varepsilon_1 \rangle + \langle \eta^2 L_1 \rangle Q_- (\delta \varepsilon_0 + \delta \gamma_1) \\ &\quad + \Delta \delta d_{ii}'' \langle \hat{k}_i^2 \eta^2 L_1 \rangle + (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) (v_F q) \Delta \delta \gamma'_{2z} \langle L_1 \hat{k}_z^2 \rangle \\ &= \frac{\Omega}{3} \left[ L_0 \left( (P_+ + |\hat{\Delta}|^2) E_1 + (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \Gamma_{2e}^0 \right) \right. \\ &\quad + \left. \left\{ L_0 \left( Q_- \Omega (1 + \Gamma_{1e}^0) + (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \Delta (\Gamma_{2e}^2 + 3\Gamma_{2e}^0 R/5) \right) \right. \right. \\ &\quad + \left. L_0 \left( Q_- \Omega \Gamma_{1dg}^0 + \frac{\Omega \Delta}{3} + (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \Gamma_{2dg}^2 \right) X_G \right. \\ &\quad \left. \left. - L_0 \Delta \left( \frac{2\Omega}{15} - (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \Gamma_{2ds}^2 \right) X_s \right\} \frac{1}{s^2} \right] \delta \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (7.64)$$

となり、 $\delta \varepsilon_0 = F_0^s \delta n / 2N_0$  の関係から

$$1 = \frac{iF_0^s}{12} \int d\omega \left[ E^K E_1 + (F^K + G^K X_G + S^K X_s) \frac{1}{s^2} \right]^K \quad (7.65)$$

を得る。ただし式(2.21)で定義したように  $E_1 = \frac{1}{F_0^s} \frac{F_1^s}{1 + F_1^s/3}$  である。以上のことから、音速の表式は、

$$s^2/s_1^2 = i \frac{F^K + G^K X_G + S^K X_s}{4 + (4 - iE^K) F_1^s/3} \quad (7.66)$$

となる。ここで、 $s_1$  は第1音波の無次元音速で、

$$s_1^2 = \frac{F_1^s}{3E_1} = \frac{F_0^s(1 + F_1^s/3)}{3}$$

で与えられる。第4章の結果と少し異なるのは、上で行なった  $1/s^2$  の展開では、 $1/F_0^s$  の寄与が全ては取り込めていないからである。音速の表式に現れた各々の Keldysh グ

リーマン関数は、次のように書ける。

$$\mathcal{E}^K = \int d\omega \left[ L_0 \left( (P_+ + |\hat{\Delta}|^2) + (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \Gamma_{2e}^0 / E_1 \right) \right]^K \quad (7.67)$$

$$\mathcal{F}^K = -\frac{1}{2} \int d\omega \left[ L_0 \left( (\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-) \Omega (1 + \Gamma_{1e}^0) - (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \left\{ \bar{Q} \Omega (1 + \Gamma_{1e}^0) + 2\Delta (\Gamma_{2e}^2 + 3\Gamma_{2e}^0 R/5) \right\} \right) \right]^K \quad (7.68)$$

$$\mathcal{G}^K = \int d\omega \left[ L_0 \left( \frac{\Omega \Delta}{3} + Q_- \Omega \Gamma_{1dg}^0 + (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \Delta \Gamma_{2dg}^2 \right) \right]^K \quad (7.69)$$

$$\mathcal{S}^K = \int d\omega \left[ -L_0 \Delta \left( \frac{2\Omega}{15} - (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \Gamma_{2ds}^2 \right) \right]^K \quad (7.70)$$

$$X_G = \mathcal{A}_G^K / \mathcal{B}_G^K \quad (7.71)$$

$$X_s = \mathcal{A}_s^K / \mathcal{B}_s^K \quad (7.72)$$

### 7.5.1 常流動状態

Keldysh グリーン関数を用いた理論と、Landau-Boltzmann 理論の関係を見るために、常流動状態における音波の吸収について議論しておく。常流動状態では、 $\Delta \rightarrow 0$ により、

$$\tilde{\varepsilon}^R = \omega + \frac{i}{2\tau}, \quad \tilde{\varepsilon}^A = \omega - \frac{i}{2\tau} \quad (7.73)$$

$$x^R = -i\omega + \frac{1}{2\tau} = -i\tilde{\varepsilon}^R \quad (7.74)$$

$$x^A = i\omega + \frac{1}{2\tau} = i\tilde{\varepsilon}^A \quad (7.75)$$

となるため、解析的に $\omega$ -積分が実行できる。

$$\mathcal{E}^K = \int d\omega [L_0 P_+]^K = \frac{-4i\Omega}{\Omega + \frac{1}{\tau}}$$

$$\mathcal{F}^K = -\frac{\Omega}{2} \int d\omega \left[ L_0 (1 + \Gamma_{1e}^0) \left( (\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-) - (\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-) \bar{Q} \right) \right]^K = -\frac{4i\Omega\tau}{\Omega\tau + i}$$

したがって、複素音速の表式は、

$$s^2/s_1^2 = i \frac{\mathcal{F}^K}{4 + (4 - i\mathcal{E}^K)F_1^s/3} = \frac{1}{1 + \frac{i}{\Omega\tau}(1 + F_1^s/3)} \quad (7.76)$$

となる。

#### A. $\Omega\tau \gg 1$ の場合

$$\alpha = \frac{\Omega}{2s_1 v_F} \frac{1}{\Omega\tau} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) = \frac{1}{2c_1\tau} \left( 1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \quad (7.77)$$

この表式は、第4章で議論した、固定された不純物散乱を扱った場合の高温極限である式(4.25)と等しいものである。しかし、今行なっている議論では、準粒子間の散乱、および不純物散乱の高次の部分波の寄与を無視しているため、むしろ低温極限と等価な表式であると言える。

### B. $\Omega\tau \ll 1$ の場合

$$\frac{i\Omega}{\tau} \left(1 + \frac{F_1^s}{3}\right) = c_1^2 q^2 \quad (7.78)$$

となり、式(4.26)と全く等しく、過減衰の解となる。

## 7.5.2 超流動状態におけるクリーンな極限

ここでは超流動状態における音速、吸収についてクリーンな極限すなわち  $\Omega\tau \rightarrow \infty$  を考察しておく。クリーンな極限で有限に残るのは、式(7.67)～(7.72)のうち、次の成分のみである。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^K &= \int d\omega \left[ L_0(x_+x_- + \varepsilon_+\varepsilon_- + |\hat{\Delta}|^2) \right]^K \\ &= \frac{1}{\Omega} \int d\omega \left[ \frac{\varepsilon_+}{x_+} + \frac{\varepsilon_-}{x_-} \right]^K = -4i \end{aligned} \quad (7.79)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^K &= \Omega \int d\omega [L_0 Q_-]^K \\ &= -4i - 2\Delta^2 \int d\omega [L_0]^K \end{aligned} \quad (7.80)$$

$$\mathcal{G}^K X_g + \mathcal{S}^K X_s = 2\Delta^2 \int d\omega [L_0]^K + \frac{2\Delta^2 E_1}{5} \frac{11\Omega^2 - 20\Delta^2}{5\Omega^2 - 12\Delta^2} \int d\omega [L_0]^K \quad (7.81)$$

したがって、音速の表式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} s^2/s_1^2 &= i \frac{\mathcal{F}^K + \mathcal{G}^K X_g + \mathcal{S}^K X_s}{(4 - i(-4i))F_1^s/3 + 4} \\ &= 1 + i \left[ \frac{\Delta^2 E_1}{10} \frac{11\Omega^2 - 20\Delta^2}{5\Omega^2 - 12\Delta^2} \right] \int d\omega [L_0]^K \end{aligned} \quad (7.82)$$

$$= 1 + \mathcal{O}(1/F_0^s) \quad (7.83)$$

この式から、オーダーパラメータの集団励起、および対破壊効果の音速への影響は  $1/F_0^s$  のオーダーの寄与となることがわかる。本議論では、不純物効果を主題として議論してきたため、音速のリーディングオーダー  $s^2 \sim F_0^s$  と比較して、 $1/F_0^s$  のオーダーの寄与全ては取り込んでいない。したがって、クリーンな系での音速と吸収を議論するためには、式(7.82)では不十分である。

### 7.5.3 ギャップレス状態での hydrodynamic 極限

この節では不純物散乱に関してはユニタリティー極限で、準粒子状態密度がギャップレスとなる状態を想定し、hydrodynamic 極限 ( $\Omega \rightarrow 0$ ) を考える。

Keldysh 形式におけるバーテックス補正項を含む表式の解析的な計算は不可能なので、 $\Omega \rightarrow 0$  で数値的に得た結果を示す。 $\Omega \rightarrow 0$  では、ほとんどの項が 0 となるが、以下に示す項のみが有限にとどまった。

$$s^2/s_1^2 = i \frac{\mathcal{F}^K + \mathcal{G}^K X_g + S^K X_s}{4 + (4 - i\mathcal{E}^K)F_1^s/3}$$

$$\rightarrow \text{Re} \frac{i\mathcal{G}^K X_g/4}{1 + (1 - i\mathcal{E}^K/4)F_1^s/3} > 0 \quad (7.84)$$

このことから低周波領域において、吸収のない音波の伝播が可能となることがわかる。式 (7.84) の分子に現れる、 $\mathcal{G}^K X_g$  で記述される成分は、オーダーパラメータの集団励起である GS モードと結合する成分を表しており、このモードを介しての音波の伝播、すなわち第 4 音波の伝播を示唆している。超流動  $^3\text{He}$  の 2 流体力学から、常流動成分は動けず、超流動成分のみが動ける場合に第 4 音波が伝播することが知られており、その音速は

$$s_4^2/s_1^2 = \frac{\rho_s^0/\rho}{1 + (1 - \rho_s^0/\rho)F_1^s/3} \quad (7.85)$$

で与えられる。ただし  $\rho_s^0$  は Fermi 液体効果を含まない超流動密度である [3, 70]。式 (7.84) において分子に現れる  $\text{Re}(i\mathcal{G}^K X_g/4)$ 、分母に現れる  $\text{Re}(i\mathcal{E}^K/4)$  の項が Fermi 液体効果を含まない超音波密度に対応していることが伺える。事実、 $\Omega \rightarrow 0$  においてこれらは数値的に一致している。これらの温度依存性を図 7.7 に示す。

## 7.6 吸収の数値計算結果

この節では、式 (7.66) を用いて、吸収の数値計算を行った結果を示す。

図 4.1 に示した、Nomura *et al.*<sup>[14]</sup> によるエアロジェル中の超音波吸収の実験では、温度を下げて超流動相に入っても、対破壊を起源とした吸収のピークは観測されなかった。これは、純粋な液体  $^3\text{He}$  超流動相における超音波吸収では、温度を下げていく過程で超流動転移に伴い、大きな対破壊効果による吸収が現れるのと対照的である。このことから、エアロジェル中の超流動状態では明確なエネルギーギャップは存在せず、

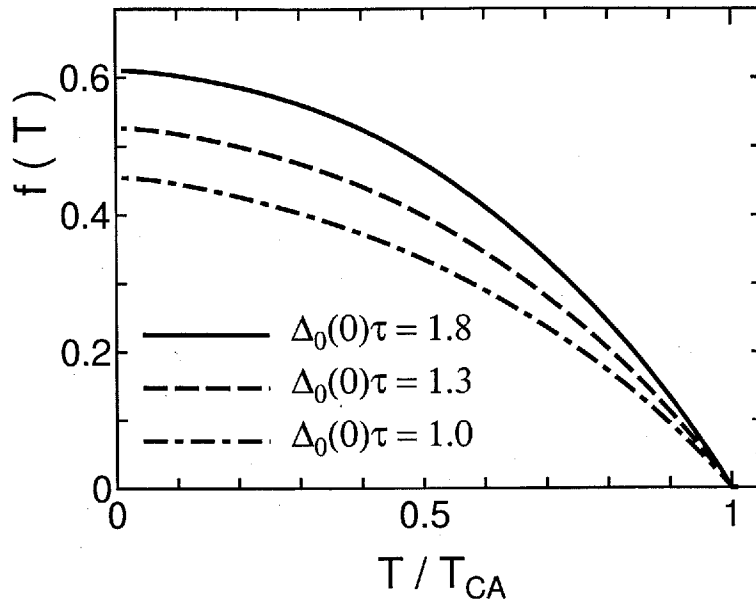


図 7.7:  $\Omega \rightarrow 0$  の極限における  $f(T) \equiv \text{Re}(i\mathcal{E}^K X_g/4) = \text{Re}(i\mathcal{E}^K/4)$  の温度依存性。(温度は不純物を含む超流動相への転移温度でスケールした。また、純粋な超流動  $^3\text{He-B}$  相での絶対 0 度での対振幅を  $\Delta_0(0)$  とし、緩和時間を  $\tau$  とした。)

むしろ 7.1 節で述べたようなギャップレスの状態が実現していると考えられる。そこで、以下の計算ではユニタリティー極限の T-matrix を用いる。

純粋な超流動  $^3\text{He-B}$  相の絶対 0 度でのエネルギーギャップを  $\Delta_0(0)$  とし、緩和時間  $\tau$  との積、 $\Delta_0(0)\tau$  をパラメータとして、吸収の温度依存性と振動数依存性を数値的に計算した。特にギャップレス状態を想定して、 $\Delta_0(0)\tau = 1.8, 1.3, 1.0$  の場合を調べた。超流動転移温度  $T_{CA}$  は、Nomura *et al.*<sup>[14]</sup> の報告での値  $T_{CA} = 1.5[\text{mK}]$  (圧力は  $16[\text{bar}]$ ) を用いた。また、エアロジェル中でエネルギーギャップ  $\Delta_{\text{imp}}(T)$  はギャップ方程式を解いて求めるべきであるが、ここでは

$$\Delta_{\text{imp}}(T) = \frac{T_{CA}}{T_{C0}} \Delta_0(TT_C/T_{CA}) \quad (7.86)$$

と置いて、純粋な超流動  $^3\text{He}$  相でのエネルギーギャップを相似変換して用いた。

吸収は第 4 章等の議論同様、式 (7.66) で定義した無次元複素音速  $s$  により、

$$\alpha(\Omega, T) = \frac{\Omega}{v_F} \text{Im} \left( \frac{1}{s} \right)$$

によって表される。また、結果は超流動転移温度  $T = T_{CA}$  での吸収の値でスケールした  $\alpha(\Omega, T)/\alpha(\Omega, T_{CA})$  の値を示した。

まず、温度  $T/T_{CA} = 0.05, 0.30, 0.50, 0.70, 0.95$  における吸収の振動数依存性を図 7.8、図 7.9、図 7.10 に示す。振動数は  $\Delta_0(0)$  でスケールし、温度はエアロジェル中の超流動転移温度  $T_{CA}$  でスケールしてプロットを行った。結果は  $\Omega = \Delta_{imp}(T)$  あたりに大きなピークが現れ、 $\Delta_0(0)\tau$  を大きくするに従いシャープなものになる傾向を示している。このピークはオーダーパラメータの集団励起ではなく、準粒子散乱を反映したものであると考えられる。低周波の極限では吸収が 0 になり、この傾向は低温ほど強く現れている。高周波の極限では、いずれの温度領域においても常流動状態 ( $T = T_{CA}$ ) での吸収値に漸近していく振舞いを示している。

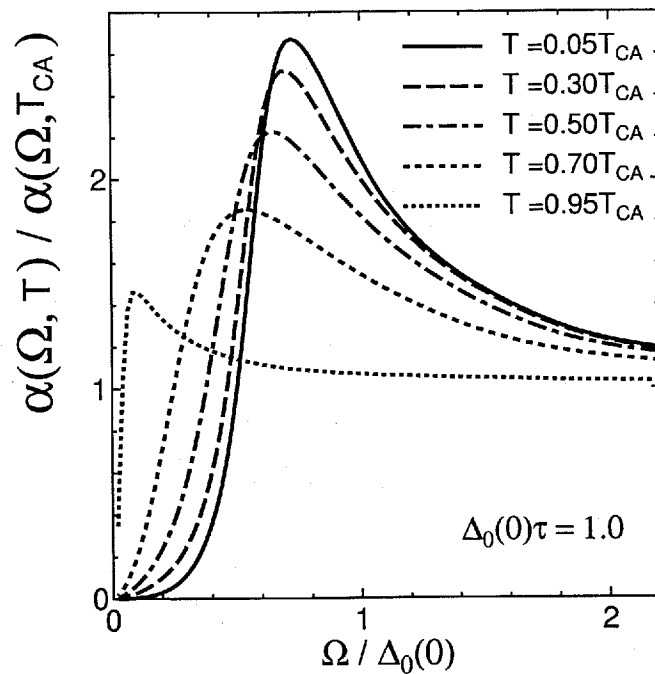


図 7.8: 吸収の振動数依存性 ( $\Delta_0(0)\tau = 1.0$ )



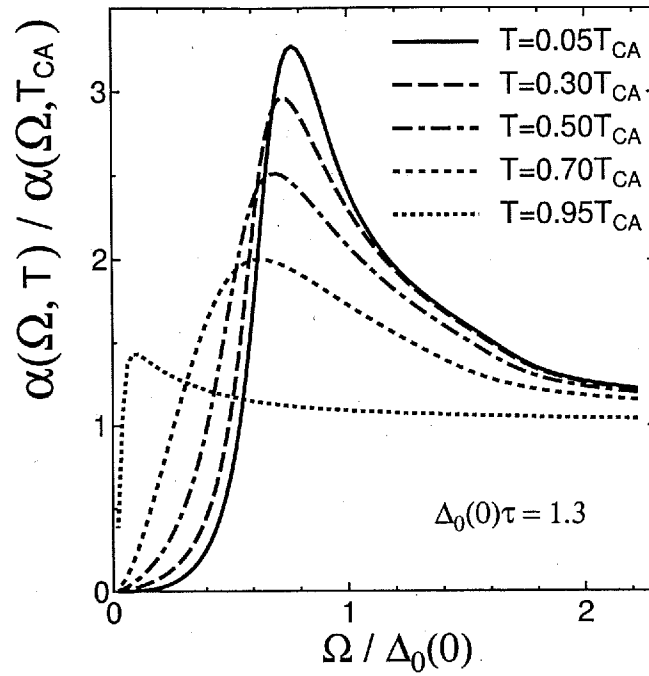


図 7.9: 吸収の振動数依存性 ( $\Delta(0)\tau = 1.3$ )

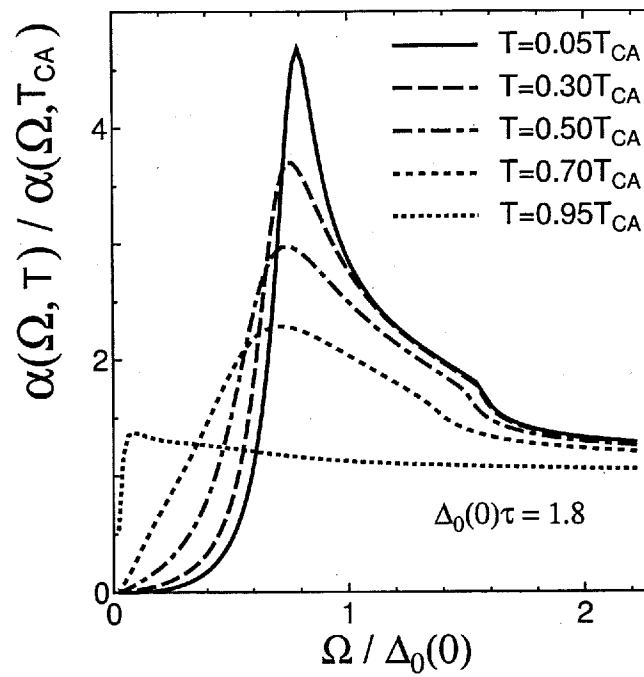


図 7.10: 吸収の振動数依存性 ( $\Delta(0)\tau = 1.8$ )

続いて、振動数を  $\Omega/\Delta_0(0) = 0.1, 0.6, 1.0, 1.4, 2.0$  とした場合の吸収の温度依存性を図 7.11、図 7.12、図 7.13 に示す。振動数依存性において低周波の極限で吸収が消失することを反映し、低周波における温度依存性は、超流動転移直下での小さなピークを除いて、低温側で吸収が 0 に近づいている。Northwestern グループの実験で用いた振動数 15 [MHz] の場合は、 $\Omega/\Delta_0(0) = 0.1$  程度であり、上で調べた低振動数領域にあたり、温度の低下とともに吸収が減少するという点で一致している。一方、今回の計算では、 $\Omega \simeq \Delta_{\text{imp}}(T)$  程度の振動数領域では、超流動転移に伴なって吸収が増大する傾向を示している。したがって、吸収は振動数に依存しており、より高い振動数での実験が望まれる。

数値解析における結果から、音速の式 (7.66)、

$$s^2/s_0^2 = \frac{i\mathcal{F}^K}{4 + (4 - i\mathcal{E}^K)F_1^s/3} + \frac{i\mathcal{G}^K X_G}{4 + (4 - i\mathcal{E}^K)F_1^s/3} + \frac{i\mathcal{S}^K X_s}{4 + (4 - i\mathcal{E}^K)F_1^s/3}$$

における第 1 項は準粒子散乱によるもので準粒子状態密度を反映した寄与を与え、第 2 項は GS モードからの寄与を与えることがわかった。振動数が小さい場合は、第 1 項の寄与は小さく第 2 項が有限の音速を与えている。更に clean な極限において、sq モードの影響を担う第 3 項は重要な役割を示したが、本研究における解析では吸収のピークは全く現れず、対象としたギャップレスとなる比較的 dirty な状態では、結果に定量的影響を与えない。

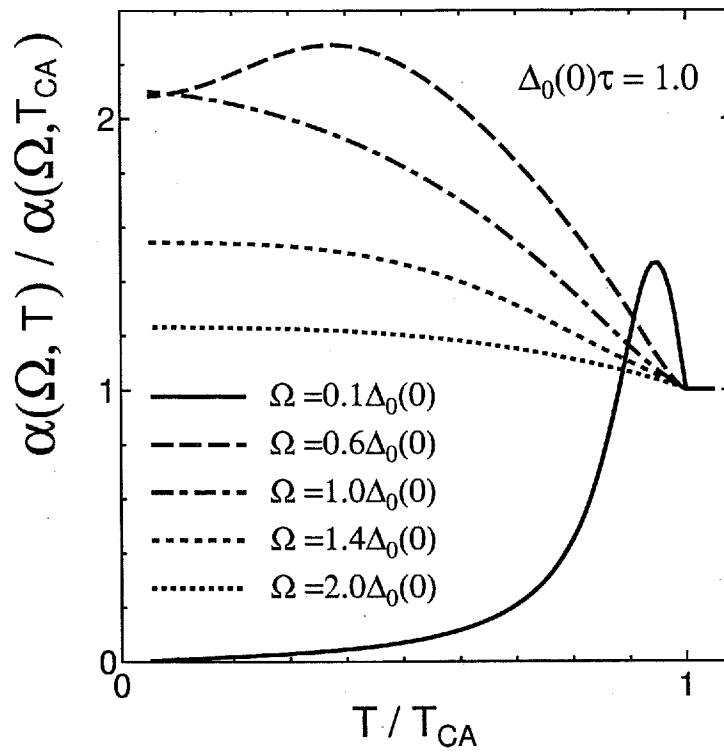
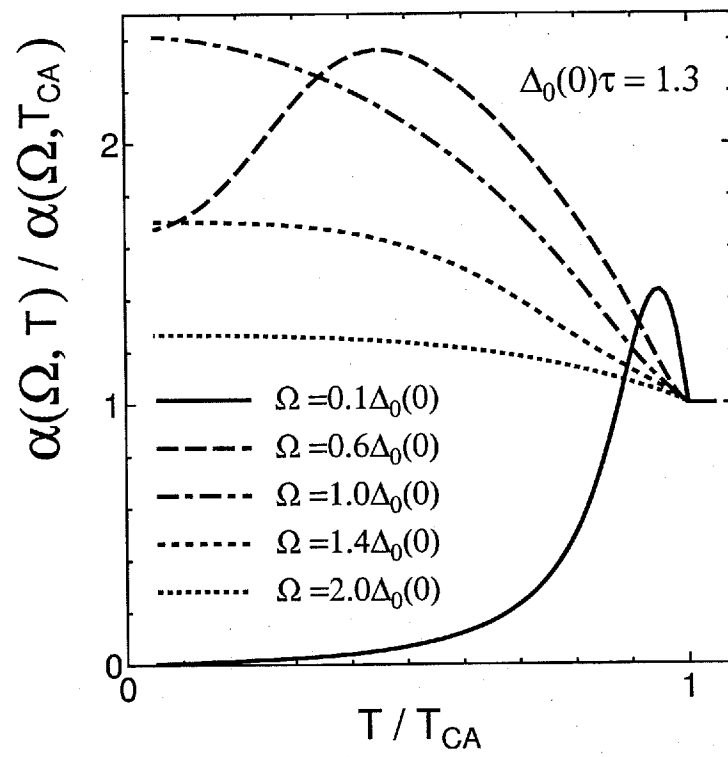


図 7.11: 吸収の温度依存性 ( $\Delta(0)\tau = 1.0$ )

図 7.12: 吸収の温度依存性 ( $\Delta(0)\tau = 1.3$ )

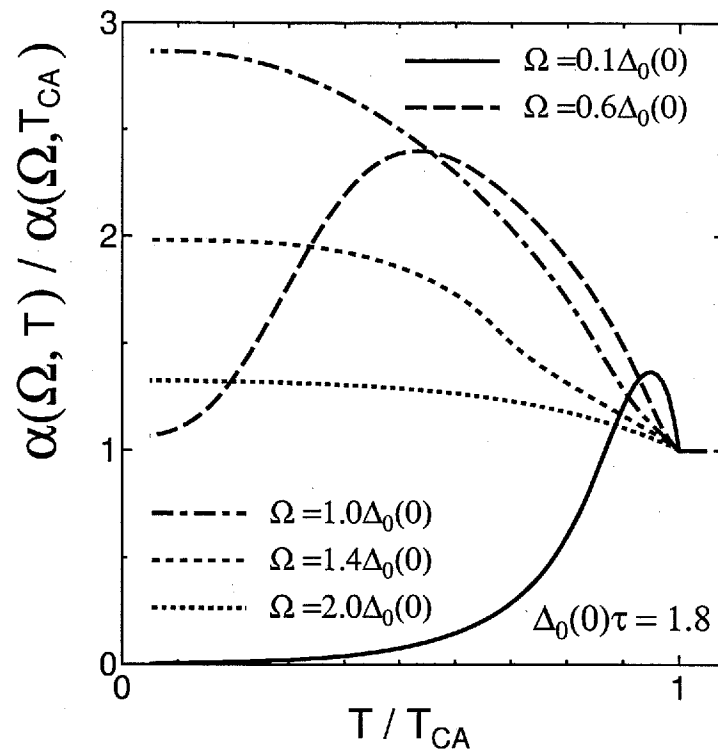


図 7.13: 吸収の温度依存性 ( $\Delta(0)\tau = 1.8$ )

## 第8章 まとめと考察

本研究では、Northwestern グループ [14, 18] によって行われたエアロジェル中  $^3\text{He}$  での超音波吸収の実験を対象として、常流動  $^3\text{He}$  および超流動  $^3\text{He}$  中を伝播する音波に対する不純物効果の理論的解析を行った。

まず、常流動相では、Landau-Boltzmann 理論を用いて、不純物散乱と準粒子間の相互散乱の効果を調べ、さらに不純物の運動すなわち Collision Drag 効果について論じた。

次に、超流動相については、Keldysh 形式における準古典的グリーン関数を用いた線形応答理論を定式化し音波伝播を考察した。不純物散乱について、グリーン関数の自己エネルギーには T-Matrix 近似を用い、対応するバーテックス補正を行って線形応答を議論した。

本章では、これらの結果についてまとめ、更に問題点および今後の課題について述べる。

### 8.1 常流動状態

#### 8.1.1 衝突項の評価

本研究では、Landau-Boltzmann 理論において Boltzmann 輸送方程式に現れる衝突項について、準粒子間の相互散乱による寄与と不純物との衝突の寄与を同時に取り入れて、音波の伝播に与える影響の考察を行った。準粒子間相互散乱における衝突項に関しては、保存則を考慮した緩和時間近似を用いた。

縦波の場合、準粒子の分布のゆらぎ  $\delta n_{\mathbf{k}}$  は、 $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} = \cos \theta$  のみの関数であり、部分波展開が出来る。これに対応して、各部分波に対する緩和時間  $\tau_l$  が定義できる。準粒子相互散乱においては衝突の前後で粒子数保存則と運動量保存則を満たすが、不純物散乱においては、粒子数保存則のみしか満たさない。このため準粒子相互散乱の衝突

項では、緩和時間の S 波成分および P 波成分は現れず、準粒子相互散乱における特徴的な緩和時間は D 波成分のみである。これに対し不純物散乱では運動量保存則の破綻から、P 波および D 波の部分波成分が特徴的な緩和時間として現れる。

### 8.1.2 超音波吸収に現れる不純物効果

不純物散乱により現れた衝突項の D 波成分は、準粒子相互散乱での緩和時間と相和的に働く。この項の存在により、温度低下時の第 0 音波転移に伴った吸収の減少が見られず、低温極限において吸収の値が有限の値にとどまる。ここまでは、Northwestern グループの visco-elastic モデルを用いた解析と等価である。しかし、visco-elastic モデルを用いた表式では現れない、緩和時間の P 波成分の存在により、高温極限において吸収値が有限の値にとどまる。これは、Northwestern グループの実験において、温度上昇時の第 1 音波転移に伴う吸収の減少が見られていないことに対応している。

しかし、実際に、Northwestern グループの実験に対応したパラメータと、従来知られている平均自由行程の値を用いて、音波の吸収を計算すると、結果は測定値に比べて数百倍大きくなり、音波の伝播は不可能という結論になる。これは、不純物が固定されている場合、散乱過程で不純物が  $^3\text{He}$  の運動量を吸収し、音波の伝播に伴う流れを著しく減衰させるからである。

### 8.1.3 Collision Drag 効果

Northwestern グループの実験結果において、音波の吸収の値が純粋な液体  $^3\text{He}$  での値と同程度であるという点に注目すると、不純物が  $^3\text{He}$  とともに動く可能性 (Collision Drag 効果) を考慮する必要がある。我々は、準粒子が不純物と衝突して単位時間に失う運動量が不純物に働く力になると考えて不純物の運動方程式を立て、これと準粒子のボルツマン方程式を連立させて解くことにより、不純物の運動の効果を取り入れた。Collision Drag 効果のシナリオでは、 $^3\text{He}$  と不純物が局所平衡に在って一緒に動いている場合は全系の運動量は保存され、音波は減衰しない。音波の減衰を決めるのは、局所平衡からのずれであり、それを決めるパラメータが

$$\frac{\Omega\tau_{\text{tr}}(\rho_1/\rho_3)}{1 + F_1^s/3}$$

である。Northwestern グループが行った実験の場合、このパラメータが小さく、その結果音波の吸収が純粋な液体  $^3\text{He}$  での値と同程度になっていると考えられる。音速と吸収の温度依存性と圧力依存性が再現されたことから、Collision Drag 効果のシナリオはエアロジェル中の音波の伝播を正しく記述していると思われる。エアロジェルが  $^3\text{He}$  と一緒に動く可能性はすでに指摘されているが、微視的な立場からその機構を明らかにしたのは本研究が初めてである。

## 8.2 超流動状態

### 8.2.1 Keldysh 形式での準古典的グリーン関数

超流動状態における吸収の考察は、Keldysh 形式の準古典的グリーン関数の方法を用いて行った。Keldysh 形式のグリーン関数はその特徴的な時間経路の取り方から、ファイマンダイアグラムを用いた摂動展開が可能となっている。

不純物散乱の効果を評価するに当たり、グリーン関数については、セルフコンシステント T-matrix 近似を用い、対応するバーテックス補正項に T-matrix の Ladder ダイアグラムを取り入れて線形応答を議論した。このことにより理論は保存則を満たし、常流動相では Landau-Boltzmann 理論と等価になっている。P 波のオーダーパラメータは内部自由度を有するため、ゆらぎとして、特定の振動数において集団励起が生じる。したがって本研究では、集団励起の寄与も取り入れ、バーテックス補正項および集団励起の寄与を全てコンシステントに解いた。

### 8.2.2 純粋な超流動 $^3\text{He}$ -A 相での横波

Keldysh 形式のグリーン関数理論の応用例として、純粋な  $^3\text{He}$  の A 相での横波伝播を考察した。A 相の gap は  $l$  ベクトルの方向にポイントノードを持つため、全ての振動数の外場に対して対破壊が生じる。この影響により集団励起のエネルギー吸収はブロードなものとなる。このため B 相で得られるような著しい音速のエンハンスは A 相では見られなかった。しかし、 $l$  ベクトルに垂直に伝播する横波の場合、分極方向によって結合する集団励起が異なることから音速が異なり、伝播に伴い分極がリサージュ図形を描くことが期待される。また、片方の振動成分しか伝播できない振動数領域において、特定の偏極波を取り出せると言う意味で、超流動  $^3\text{He}$ -A 相は *Collective*



*mode polarizer* の働きを担うことが期待できる。

### 8.2.3 不純物を含む超流動<sup>3</sup>He-B相での縦波

Northwestern グループによる超流動相での音波の吸収は、温度低下とともに単調に減少している。これに対応して、ギャップレス状態が実現していると考え、ユニタリティー極限の T-matrix を採用し、吸収の温度依存性、振動数依存性を調べた。オーダーパラメータのゆらぎの寄与は、Goldstone モードのみが支配的であることがわかった。吸収の周波数依存性では、準粒子状態密度を反映すると思われるピークが存在する。吸収の振る舞いは、高振動数の極限においては常流動状態の値に漸近し、低振動数、すなわち hydrodynamic 極限において、は、全ての温度領域において有限の音速のもと吸収が0になる傾向を示した。これは、第4音波の伝播を示唆している。実際、詳しい数値解析の結果、hydrodynamic 極限において、第4音波の表式と一致する結論を得た。

Northwestern グループの実験で用いた振動数 15[MHz] の場合は、 $\Omega/\Delta_0(0) = 0.1$  程度であり、上で調べた低振動数領域にあたり、温度の低下とともに吸収が減少するという点で一致している。しかし、超流動相においても Collision Drag 効果は重要であると考えられ、更なる検討が必要である。

## 8.3 問題点と今後の課題

### 8.3.1 常流動状態

**常流動状態における平均自由行程の評価** 常流動状態において Collision Drag 効果を取り入れることで実験における音波吸収の温度依存性を説明することができた。しかし、実験を説明するために用いた平均自由行程は、 $l_{tr} = \tau_{tr} v_F \simeq 50[\text{nm}]$  および  $l_a = \tau_a \simeq 100[\text{nm}]$  となり、超流動転移温度による見積もり (Nomra *et al.*<sup>[14]</sup>: 240[nm]、Rainer and Souls<sup>[12]</sup>: 175[nm]、Porto and Parpia<sup>[32]</sup>: 130[nm]) と比較して小さい結果となった。しかし、最近の熱伝導とスピン拡散の実験で見積もられる平均自由行程はそれぞれ、80[nm]、20[nm] という報告もあり、今後の検討が必要である。

**横波における不純物効果の影響の評価** 最近の実験ではエアロジェル中での横応答の結果も報告されている<sup>[42]</sup>。したがって、横波において Collision Drag 効果も含めた

衝突項の取り扱いを行い、吸収の温度依存性に与える影響を評価する必要がある。

### 8.3.2 超流動状態

**ABM 状態への不純物効果の導入** 最近の実験において、エアロジェル中  $^3\text{He}$ -A 相における超音波吸収の結果 [42] も報告されている。A 相は、純粋な系での実験結果からも明らかなように顕著な異方性を示す。したがって、不純物を含む ABM 状態での音波の伝播の異方性は今後研究すべき課題である。

**超流動状態への collision Drag 効果の導入** 本研究で得られた吸収の温度依存性を、常流動領域から超流動領域にわたる全温度領域で、エアロジェル中での転移温度  $T_{CA}$  の値でスケールして図 8.1 に示した。ただし、常流動状態での温度依存性はエアロジェルの運動を考慮したものであり、超流動状態での温度依存性は、固定した不純物モデルによるものを用いている。この結果は、転移近傍に見られる小さなピークを除き、実験における温度依存性を再現していると考えられる。しかし、Collision drag 効果により、吸収の絶対値は大きく変化するため、超流動状態における collision drag 効果の定量的評価を行う必要がある。

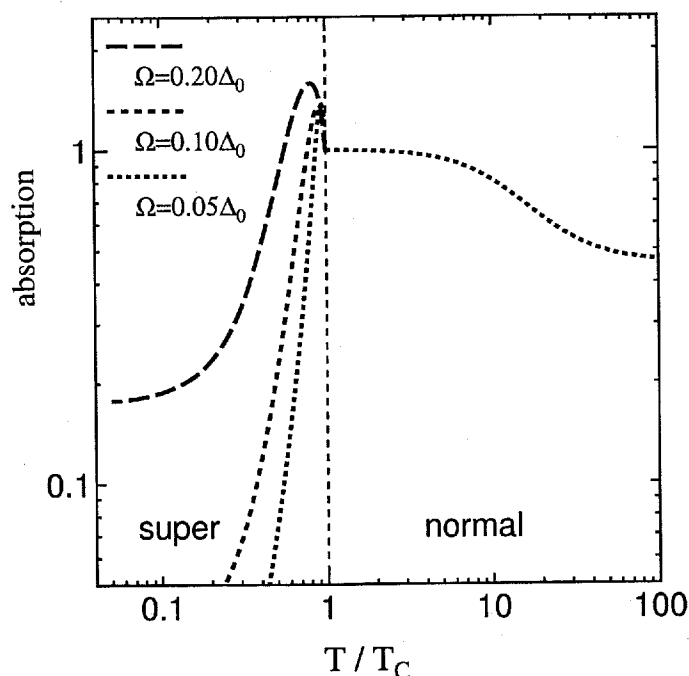


図 8.1: 吸収の温度依存性

## 謝 辞

本論文を作成するにあたり、丁寧な指導、細やかな指摘、激励を下さった永井克彦教授にまず心から感謝いたします。また、東谷誠二助手には、投げかける疑問に対して真摯に受け止めていただき、数々のディスカッションから多くの知識を得ることができました。有難うございました。宇田川眞行教授、中村純教授、星野公三教授、松田正典教授にも、多くの価値あるコメントを頂きました。これらのご指摘は論文作成時の様々な個所で参考にさせていただきました。心より謝意を表明いたします。永井研究室の皆様方には、数々のディスカッションにお付き合い頂き、有益な議論の場を得ることができました。先輩の山本幹雄さん、松尾繁政さん、山田耕太郎さん、長登康さんおよび後輩の三浦真毅君に心から感謝致します。

## 付録A 不純物中での超流動転移温度

本章では Abrikosov-Gorkov による不純物中での  $T_C$  の評価について説明する。

式 (7.9) より、不純物を含む Keldysh 形式の準古典的グリーン関数の 12 成分は、P 波対状態を仮定すると、

$$\begin{aligned} g_i^K(\hat{k}, \omega)^{12} &= \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) (g^R(\hat{k}, \omega) - g^A(\hat{k}, \omega)) \\ &= \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \left( \frac{1}{\sqrt{|\hat{\Delta}|^2 - (\tilde{\varepsilon}^R)^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\hat{\Delta}|^2 - (\tilde{\varepsilon}^A)^2}} \right) \hat{\Delta}_{\hat{k}} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

したがって、式 (5.62) のギャップ方程式を用いて

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_{\hat{k}} &= -\frac{3iN_0v_1}{4} \int d\omega \langle \hat{k} \cdot \hat{k}' g^K(\hat{k}', \omega)^{12} \rangle \\ 1 &= -\frac{3iN_0v_1}{4} \int d\omega \left\langle \hat{k} \cdot \hat{k}' \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \left( \frac{1}{\sqrt{|\hat{\Delta}|^2 - (\tilde{\varepsilon}^R)^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\hat{\Delta}|^2 - (\tilde{\varepsilon}^A)^2}} \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ここで  $T_C$  を議論するため  $\Delta = 0$  とすると、

$$1 = \frac{N_0v_1}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \left( \frac{1}{\omega + i/(2\tau)} \right) = N_0v_1 \ln \frac{2\omega_D\gamma}{\pi T_C} \quad (\text{A.3})$$

一方、純粋な系では、

$$1 = \frac{N_0v_1}{6} \int d\omega \frac{\tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)}{\omega} = \frac{N_0v_1}{3} \ln \frac{2\omega_D\gamma}{\pi T_{C0}} \quad (\text{A.4})$$

また、 $\omega_n = (2n+1)\pi T_C$  とすると、

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N_0v_1}{6} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \left( \frac{1}{\omega + i/(2\tau)} \right) \\ &= \frac{2\pi T_C N_0v_1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_n + 1/(2\tau)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

同様に純粋な系では、

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N_0v_1}{6} \int d\omega \frac{\tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)}{\omega} \\ &= \frac{2\pi T_C N_0v_1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

したがって、

$$\ln \frac{2\omega_D \gamma}{\pi T_C} - \ln \frac{2\omega_D \gamma}{\pi T_{C0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n + 1/2 + 1/(4\pi T_C \tau)} - \frac{1}{n + 1/2} \right) \quad (\text{A.7})$$

ここで、

$$\frac{1}{4\pi T_C \tau} = \frac{1}{4\pi} \frac{T_{C0}}{T_C} \frac{v_F}{T_{C0}} \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2} \frac{\xi_0}{\ell} \frac{T_{C0}}{T_C} \quad (\text{A.8})$$

とおく。したがって、ディガンマ関数  $\Psi$  を用いて、

$$\ln \left( \frac{T_{C0}}{T_C} \right) = \Psi \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\xi_0}{\ell} \frac{T_{C0}}{T_C} \right) - \Psi \left( \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.9})$$

と書くことができる。

この議論において、不純物散乱において S 波散乱近似を行なったが、散乱の角度依存性を考慮した場合、P 波三重項の対を形成することに対応して、平均自由行程は新たに、輸送平均自由行程と呼ばれる

$$\begin{aligned} \ell_{tr} &= v_F \left( n_i N_0 \int d\Omega |v(\theta)|^2 (1 - \cos \theta) \right)^{-1} \\ &= \ell \left( 1 - 3\lambda_1 \int d\Omega \cos^2 \theta \right)^{-1} = \frac{\ell}{1 - \lambda_1} \end{aligned}$$

となる<sup>1</sup>ことが示されている [29]。

---

<sup>1</sup>式 (4.16) の等しい表式で記述した。

## 付録B Faraday効果

### B.1 運動方程式

物質中の電子の運動方程式を  $\mathbf{r}$  を平衡位置を原点に取る座標系として、以下に書き下す。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \alpha \mathbf{r} - e\mathbf{E} - e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (\text{B.1})$$

ここでは、格子による調和型のポテンシャルから受ける力、速度に比例する抵抗力、電場そして磁場から受ける力を考慮した。各方向成分について各々書き下すと。

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x + 2\omega_L \frac{dy}{dt} = -\frac{e}{m} E_x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y - 2\omega_L \frac{dx}{dt} = -\frac{e}{m} E_y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = -\frac{e}{m} E_z \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

ここで  $\omega_0$  は固有振動数、 $\omega_L = \frac{\mu_0 e H}{2m}$  はラーモア振動数である。

ここで、

$$\begin{cases} x \pm iy = x_{\pm} \\ E_x \pm iE_y = E_{\pm} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

と新しい座標を定義することで、各成分を分離できる。 $\mathbf{r} \propto e^{-i\omega t}$  の振動を仮定すると、方程式は簡単にとくことができ、解は

$$\begin{cases} x_+ = -\frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega(2\omega_L + i\gamma)} E_+ \\ x_- = -\frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega(2\omega_L - i\gamma)} E_- \\ x_z = -\frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma} E_z \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

今、 $\mathbf{r}$  は平衡位置からのずれなので、分極ベクトルを  $\mathbf{P} = -eN\mathbf{r}$  として各成分書き下すと、

$$\begin{cases} P_{\pm} = -eNx_{\pm} \equiv \alpha_{\pm} E_{\pm} \\ P_z = -eNz \equiv \alpha_z E_z \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

となりここで複素分極率  $\alpha$  は

$$\begin{cases} \alpha_{\pm} = \frac{e^2 N/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega(2\omega \pm i\gamma)} \\ \alpha_z = \frac{e^2 N/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

ここで再び座標変換をすると、分極率テンソルが

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_+ + \alpha_-)/2 & i(\alpha_+ - \alpha_-)/2 & 0 \\ -i(\alpha_+ - \alpha_-)/2 & (\alpha_+ + \alpha_-)/2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

更に誘電率テンソルを  $\epsilon$  とすると、電束密度は

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \alpha \mathbf{E} \equiv \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{B.8})$$

となり、比誘電率

$$\epsilon_e = 1 + \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{\epsilon_0} \quad (\text{B.9})$$

$$\epsilon'_e = \frac{\alpha_- - \alpha_+}{\epsilon_0} \quad (\text{B.10})$$

$$\epsilon_z = 1 + \frac{\alpha_z}{\epsilon_0} \quad (\text{B.11})$$

を用いて、電束密度は

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_e & -i\epsilon'_e & 0 \\ i\epsilon'_e & \epsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \mathbf{E} \quad (\text{B.12})$$

とかける。

## B.2 物質中での電磁波

マクスウェル方程式を用いて電磁波の解を求める。

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

より、真空中での光速を  $c$ 、物質中での光速を  $v$  とすると

$$\begin{cases} E_x = \frac{v^2}{c^2} (\epsilon_e E_x - i\epsilon'_e E_y) \\ E_y = \frac{v^2}{c^2} (i\epsilon'_e E_x + \epsilon_e E_y) \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

となり

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{i\epsilon'_e}{(\epsilon_e \pm \epsilon'_e) - \epsilon_2} = \mp i \quad (\text{B.15})$$

の関係を示すため、磁場のかかった物質中において左右の円偏光は縮退が解け右および左まわりの円偏光<sup>1</sup>に分離することが明らかとなった。

ここで左右円偏光に対する物質中での屈折率は

$$n_{\pm}^2 = \epsilon_e \pm \epsilon'_e = 1 + \frac{\alpha_{\mp}}{\epsilon_0} \quad (\text{B.16})$$

となり、更に

$$n_- - n_+ = \frac{2\omega_L\omega}{n\epsilon_0} \frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (\text{B.17})$$

の関係を得る。

ここで、物質中に入射された直線偏光は物質中で円偏光に分離することが得られた。その分離した円偏光は独立な屈折率に属するため各々違う速度で進行する。したがって電磁波の振動電場の各成分比は物質中での進行距離を  $z$  とすると、

$$\tan \theta = \text{Re} \frac{E_y}{E_x} = \tan \left\{ \frac{\omega}{2} \left( \frac{1}{v_-} - \frac{1}{v_+} \right) z \right\} \quad (\text{B.18})$$

となり、微小距離を扱う場合は

$$\begin{aligned} \theta &\simeq \frac{\omega}{2c}(n_- - n_+)z \\ &= \frac{\pi}{\lambda}(n_- - n_+)z \\ &= \frac{\pi}{\lambda} \frac{2\omega_L\omega_0}{n\epsilon_0} \frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} z \\ &\downarrow \\ &\downarrow \quad \omega_L = \frac{e\mu H}{2m} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &= \frac{\pi}{\lambda} \frac{\omega_0}{n\epsilon_0} \frac{e\mu H}{m} \frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} z \\ &\equiv C_v z H \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

ここで  $C_v$  はベルデ定数と呼ばれる。

<sup>1</sup>  $\mathbf{E} = (E_{0x}, E_{0y})e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = E_0(e^{-i\delta}, e^{-i(\delta \pm \pi/2)})e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  (+: 右円偏光、-: 左円偏光) と表記される。ここで

$$\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \frac{e^{-i(\delta \pm \pi/2)}}{e^{-i\delta}} = \mp i$$

の関係を有することをここでは円偏光の定義とする。



## 付録C 高エネルギーの寄与

本章では準古典的グリーン関数を導入するに当たってカットされた高エネルギーの寄与を具体的に見積もる。 $\xi$ -積分に高エネルギー部分は Fermi 面から大きく離れているため、超流動性および不純物の影響が極めて小さい。したがって高エネルギー部分の寄与を見積もるに当たっては、常流動状態に限定して議論を進めればよいことを予め断っておく。

### C.1 粒子数密度

これはローカルなゲージ変換に対する不変性を確認することで示される。  
まず波動場に対するゲージ変換を次のように定義する。

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \exp[i\chi(\mathbf{r}, t)]\psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{C.1})$$

この変化に伴い、Schrödinger 演算子  $i\partial/\partial t - (1/2m)\mathbf{k}^2$  に関して、

$$\left[ i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\mathbf{k}^2 \right] \rightarrow \left[ i\frac{\partial}{\partial t} - \left( \frac{1}{2m}(\mathbf{k} - \nabla\chi)^2 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \right) \right] \quad (\text{C.2})$$

の変換が必要になる。したがって、ゲージ変換によりポテンシャルが

$$-\frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \delta\varepsilon_0 \quad (\text{C.3})$$

$$-(\mathbf{k}_F/m) \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}, t) = \delta\varepsilon_1 \quad (\text{C.4})$$

の変更を受ける。

さて、1次のグリーン関数は、

$$\delta G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')^{11} = i[\chi(\mathbf{r}, t) - \chi(\mathbf{r}', t')] G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')^{11} \quad (\text{C.5})$$

となる。フーリエ変換の後、

$$\delta G(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \omega, 1) = \sum_{\mathbf{q}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} i\chi(\mathbf{q}, \Omega) \left[ G(\mathbf{k}_-, \omega_-)^{11} - G(\mathbf{k}_+, \omega_+)^{11} \right] e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\Omega t}$$

(C.6)

↓ quasi classical

$$\delta g(\hat{k}, \mathbf{r}, \omega, t)^{11} = -\frac{1}{\pi} \int d\xi \sum_{\mathbf{q}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} i\chi(\mathbf{q}, \Omega) [G_-^{11} - G_+^{11}] e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\Omega t} \quad (\text{C.7})$$

↓ Keldysh

$$\delta g^K(\hat{k}, \mathbf{r}, \omega, t)^{11} = \int \frac{d\Omega}{2\pi} [-2\chi(\mathbf{r}, \Omega)] \{ \tanh(\beta\omega_-/2) - \tanh(\beta\omega_+/2) \} e^{-i\Omega t} \quad (\text{C.8})$$

したがって、

$$\begin{aligned} \delta n &= \frac{iN_0}{2} \int d\omega \langle \delta g^K(\hat{k}, \mathbf{r}, \omega, t) \rangle \\ &= -iN_0 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \chi(\mathbf{r}, \Omega) (-2\Omega) e^{-i\Omega t} \\ &= -2N_0 \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= 2N_0 \delta \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

この密度ゆらぎはゲージ変換によって現れたものであり、ゲージ不変性に抵触する。これは $\omega$ -積分より先に $\xi$ -積分を実行したことによる矛盾であり、外場による線形応答に現れた高エネルギーの寄与はこの項を打ち消す必要がある。

したがって

$$\delta n^{\text{high}} = -2N_0 \delta \varepsilon_0 \quad (\text{C.10})$$

## C.2 準粒子の流れ

次に流れに関してであるが、ゲージ不変性ではなくガリレイ不変性の要請を用いて高エネルギーの寄与に関する見積もりを行う。

まず波動場に対するガリレイ変換を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) &= \psi(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t), t) \\ &\simeq (1 - \mathbf{R} \cdot \nabla) \psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = i \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{R}(t)}{\partial t} \cdot \nabla \right) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{C.12})$$

この変化に伴い、Schrödinger 演算子  $i\partial/\partial t - (1/2m)\mathbf{k}^2$  に関して、

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} \mathbf{k}^2 \right] \rightarrow \left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \left( \frac{1}{2m} \mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}(t)}{\partial t} \right) \right] \quad (\text{C.13})$$

の変換が必要になる。したがって、ゲージ変換によりポテンシャルが

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}(t)}{\partial t} &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} \\ &= \mathbf{k} \cdot \left( \frac{1}{3} \frac{m}{m^*} F_1^s \frac{\mathbf{J}}{n} \right) = \delta \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

の変更を受ける。

さて、1次のグリーン関数は、C.1での議論と同様に

$$\delta G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t)^{11} = -[\mathbf{R} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{R} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}] G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t)^{11} \quad (\text{C.15})$$

となる。フーリエ変換の後、

$$\delta G(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \omega, 1) = -i \int \frac{d\Omega}{2\pi} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{k}) [G(\mathbf{k}_-, \omega_-)^{11} - G(\mathbf{k}_+, \omega_+)^{11}] e^{-i\Omega t} \quad (\text{C.16})$$

↓ quasi classical

$$\delta g(\hat{k}, \mathbf{r}, \omega, t)^{11} = -\frac{1}{\pi} \int d\xi \int \frac{d\Omega}{2\pi} (-i\mathbf{R} \cdot \mathbf{k}) [G_-^{11} - G_+^{11}] e^{-i\Omega t} \quad (\text{C.17})$$

↓ Keldysh

$$\delta g^K(\hat{k}, \mathbf{r}, \omega, t)^{11} = 2ik_F \int \frac{d\Omega}{2\pi} (-i\mathbf{R} \cdot \hat{k}) \{ \tanh(\beta\omega_-/2) - \tanh(\beta\omega_+/2) \} e^{-i\Omega t} \quad (\text{C.18})$$

したがって、

$$\begin{aligned} \delta j &= \frac{iN_0}{2m} \int d\omega \langle \mathbf{k} \delta g^K(\hat{k}, \mathbf{r}, \omega, t) \rangle \\ &= -\frac{iN_0}{2m} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{1}{3} (-2\Omega) [-i\mathbf{R}] e^{-i\Omega t} \\ &= \frac{m^*}{m} n \mathbf{V} = \frac{F_1^s}{3} \mathbf{J} \longrightarrow -\delta j^{\text{high}} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

## 付録D 線形応答関数の展開

$$\begin{aligned}
\delta g &= -\frac{i}{2} \sum_{\alpha=\pm} (g_{\pm} + \alpha i) \frac{\hat{\gamma}}{i(x_{+} + x_{-}) - \alpha\eta} (g_{-} - \alpha i) \\
&= -\frac{i}{2} \sum_{\alpha=\pm} \left[ \frac{1}{x_{\pm} y_{\pm}^{\alpha}} \begin{pmatrix} y_{\pm}^{\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} (y_{\pm}^{\alpha} \ \hat{\Delta}) \right] \\
&\quad \times \frac{\hat{\gamma}}{i(x_{+} + x_{-}) - \alpha\eta} \frac{1}{x_{-} y_{-}^{-\alpha}} \begin{pmatrix} y_{-}^{-\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} (y_{-}^{-\alpha} \ \hat{\Delta}) \\
&= -\frac{i}{2x_{+}x_{-}} \sum_{\alpha=\pm} \frac{1}{i(x_{+} + x_{-}) - \alpha\eta} \\
&\quad \times \left[ \frac{1}{y_{\pm}^{\alpha}} \begin{pmatrix} y_{\pm}^{\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} (y_{\pm}^{\alpha} \ \hat{\Delta}) \hat{\gamma} \frac{1}{y_{-}^{-\alpha}} \begin{pmatrix} y_{-}^{-\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} (y_{-}^{-\alpha} \ \hat{\Delta}) \right] \tag{D.1}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\tilde{\varepsilon}_{\pm} + i\alpha x_{\pm} \equiv y_{\pm}^{\alpha} \tag{D.2}$$

とし、

$$g_{\pm} + \alpha i = \frac{1}{x_{\pm} y_{\pm}^{\alpha}} \begin{pmatrix} y_{\pm}^{\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} (y_{\pm}^{\alpha} \ \hat{\Delta}) \tag{D.3}$$

の関係を用いた。

さて、

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{1}{y_{+}^{\alpha}} \begin{pmatrix} y_{+}^{\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} (y_{+}^{\alpha} \ \hat{\Delta}) \hat{\gamma} \frac{1}{y_{-}^{-\alpha}} \begin{pmatrix} y_{-}^{-\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} (y_{-}^{-\alpha} \ \hat{\Delta}) \right] \\
&= \begin{pmatrix} y_{+}^{\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} \frac{1}{y_{+}^{\alpha}} (y_{+}^{\alpha} \ \hat{\Delta}) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{y_{-}^{-\alpha}} \begin{pmatrix} y_{-}^{-\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} (y_{-}^{-\alpha} \ \hat{\Delta}) \\
&= \begin{pmatrix} y_{+}^{\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} \gamma_{11} (y_{-}^{-\alpha} \ \hat{\Delta}) - \begin{pmatrix} \hat{\Delta} \\ -y_{+}^{-\alpha} \end{pmatrix} \gamma_{22} (\hat{\Delta}^{\dagger} \ y_{-}^{\alpha}) \\
&\quad - \begin{pmatrix} y_{+}^{\alpha} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} \end{pmatrix} \gamma_{12} (\hat{\Delta}^{\dagger} \ y_{-}^{\alpha}) + \begin{pmatrix} \hat{\Delta} \\ -y_{+}^{-\alpha} \end{pmatrix} \gamma_{21} (y_{-}^{-\alpha} \ \hat{\Delta}) \\
&= \left[ \begin{pmatrix} (x_{+}x_{-} + \tilde{\varepsilon}_{+}\tilde{\varepsilon}_{-})\gamma_{11} & \tilde{\varepsilon}_{+}\gamma_{11}\hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger}\gamma_{11}\tilde{\varepsilon}_{-} & -\hat{\Delta}^{\dagger}\gamma_{11}\hat{\Delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{\Delta}\gamma_{22}\hat{\Delta}^{\dagger} & -\hat{\Delta}\gamma_{22}\tilde{\varepsilon}_{-} \\ \tilde{\varepsilon}_{+}\gamma_{22}\hat{\Delta}^{\dagger} & (x_{+}x_{-} + \tilde{\varepsilon}_{+}\tilde{\varepsilon}_{-})\gamma_{22} \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \begin{array}{cc} -\tilde{\varepsilon}_+ \gamma_{12} \hat{\Delta}^\dagger & (x_+ x_- - \tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_-) \gamma_{12} \\ \hat{\Delta}^\dagger \gamma_{12} \hat{\Delta}^\dagger & \hat{\Delta}^\dagger \gamma_{12} \tilde{\varepsilon}_- \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cc} \hat{\Delta} \gamma_{21} \tilde{\varepsilon}_- & \hat{\Delta} \gamma_{21} \hat{\Delta} \\ (x_+ x_- - \tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_-) \gamma_{21} & -\tilde{\varepsilon}_+ \gamma_{21} \hat{\Delta} \end{array} \right) \\
& + i\alpha \left[ \left( \begin{array}{cc} (x_+ \tilde{\varepsilon}_- - x_- \tilde{\varepsilon}_+) \gamma_{11} & x_+ \gamma_{11} \hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^\dagger \gamma_{11} x_- & 0 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cc} 0 & -\hat{\Delta} \gamma_{22} x_- \\ -x_+ \gamma_{22} \hat{\Delta}^\dagger & -(x_+ \tilde{\varepsilon}_- - x_- \tilde{\varepsilon}_+) \gamma_{22} \end{array} \right) \right. \\
& \left. + \left( \begin{array}{cc} -x_+ \gamma_{12} \hat{\Delta}^\dagger & -(x_+ \tilde{\varepsilon}_- + x_- \tilde{\varepsilon}_+) \gamma_{12} \\ 0 & \hat{\Delta}^\dagger \gamma_{12} x_- \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cc} -\hat{\Delta} \gamma_{21} x_- & 0 \\ (x_+ \tilde{\varepsilon}_- + x_- \tilde{\varepsilon}_+) \gamma_{21} & x_+ \gamma_{21} \hat{\Delta} \end{array} \right) \right] \\
& \equiv \hat{M}_1 + i\alpha \hat{M}_2
\end{aligned}$$

であるから、式(D.1)を再び書き直すと、

$$\begin{aligned}
\delta g(\hat{k}, q, \omega, \Omega) &= -\frac{i}{2x_+ x_-} \sum_{\alpha=\pm} \frac{1}{i(x_+ + x_-) - \alpha\eta} (\hat{M}_1 + i\alpha \hat{M}_2) \\
&= -\frac{i\hat{M}_1}{2x_+ x_-} \left( \frac{1}{i(x_+ + x_-) - \eta} + \frac{1}{i(x_+ + x_-) + \eta} \right) \\
&\quad - \frac{i\hat{M}_2}{2x_+ x_-} \left( \frac{i}{i(x_+ + x_-) - \eta} - \frac{i}{i(x_+ + x_-) + \eta} \right) \\
&\equiv \hat{M}_0 L_1 + \hat{M}_2 L_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1 &\equiv -\frac{x_+ + x_-}{x_+ x_- [(x_+ + x_-)^2 + \eta^2]} \\
L_2 &\equiv -\frac{\eta}{x_+ x_- [(x_+ + x_-)^2 + \eta^2]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta g &= \hat{M}_0 L_1 + \hat{M}_2 L_2 \\
&= \left( \begin{array}{cc} [L_1(x_+ x_- + \tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_-) + L_2(x_+ \tilde{\varepsilon}_- - x_- \tilde{\varepsilon}_+)] \gamma_{11} & [L_1 \tilde{\varepsilon}_+ + L_2 x_+] \gamma_{11} \hat{\Delta} \\ -[L_1 \tilde{\varepsilon}_- - L_2 x_-] \hat{\Delta}^\dagger \gamma_{11} & -L_1 \hat{\Delta}^\dagger \gamma_{11} \hat{\Delta} \end{array} \right) \\
&+ \left( \begin{array}{cc} -L_1 \hat{\Delta} \gamma_{22} \hat{\Delta}^\dagger & -[L_1 \tilde{\varepsilon}_- + L_2 x_-] \hat{\Delta} \gamma_{22} \\ [L_1 \tilde{\varepsilon}_+ - L_2 x_+] \gamma_{22} \hat{\Delta}^\dagger & [L_1(x_+ x_- + \tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_-) - L_2(x_+ \tilde{\varepsilon}_- - x_- \tilde{\varepsilon}_+)] \gamma_{22} \end{array} \right) \\
&+ \left( \begin{array}{cc} -[L_1 \tilde{\varepsilon}_+ + L_2 x_+] \gamma_{12} \hat{\Delta}^\dagger & [L_1(x_+ x_- - \tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_-) - L_2(x_+ \tilde{\varepsilon}_- + x_- \tilde{\varepsilon}_+)] \gamma_{12} \\ L_1 \hat{\Delta}^\dagger \gamma_{12} \hat{\Delta}^\dagger & [L_1 \tilde{\varepsilon}_- + L_2 x_-] \hat{\Delta}^\dagger \gamma_{12} \end{array} \right) \\
&+ \left( \begin{array}{cc} [L_1 \tilde{\varepsilon}_- - L_2 x_-] \hat{\Delta} \gamma_{21} & L_1 \hat{\Delta} \gamma_{21} \hat{\Delta} \\ [L_1(x_+ x_- - \tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_-) + L_2(x_+ \tilde{\varepsilon}_- + x_- \tilde{\varepsilon}_+)] \gamma_{21} & -[L_1 \tilde{\varepsilon}_+ - L_2 x_+] \gamma_{21} \hat{\Delta} \end{array} \right) \tag{D.4}
\end{aligned}$$

## 付録E バーテックス補正項

式(7.41)、(7.42)、(7.43)は次のようにまとめられる。

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\gamma_1 \\ \delta\gamma'_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_e \\ U_e \end{pmatrix} \delta\varepsilon_0 + \begin{pmatrix} V_{dg} \\ U_{dg} \end{pmatrix} \delta d_G + \begin{pmatrix} V_{ds} \\ U_{ds} \end{pmatrix} \delta d_s \quad (\text{E.1})$$

式(E.1)に現れる各成分を、 $s$ について、1のオーダーと $1/s^2$ のオーダーに関して書き下す。

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.2})$$

$$\Gamma_{22} = \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{22}^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.3})$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{12}^1 \frac{1}{s} \quad (\text{E.4})$$

$$\Gamma_{21} = \Gamma_{21}^1 \frac{1}{s} \quad (\text{E.5})$$

$$V_e = V_e^0 + V_e^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.6})$$

$$U_e = U_e^{-1} E_1 s + U_e^1 \frac{1}{s} \quad (\text{E.7})$$

$$V_{dg} = V_{dg}^0 + V_{dg}^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.8})$$

$$V_{ds} = V_{ds}^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.9})$$

$$U_{dg} = U_{dg}^1 \frac{1}{s} \quad (\text{E.10})$$

$$U_{ds} = U_{ds}^1 \frac{1}{s} \quad (\text{E.11})$$

として、

$$\Gamma_{11}^0 = 1 + \beta_D (P_+ - \Delta^2) L_0 \quad (\text{E.12})$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\beta_D L_0 R (P_+ - \Delta^2)}{3} \quad (\text{E.13})$$

$$\Gamma_{22}^0 = - \left( 1 + \beta_{OD} L_0 (P_- + \Delta^2/3) \right) \quad (\text{E.14})$$

$$\Gamma_{22}^2 = - \frac{\beta_{OD} L_0 R (P_- - \Delta^2/5)}{3} \quad (\text{E.15})$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\beta_D \bar{Q} \Delta \Omega L_0}{3} \quad (\text{E.16})$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{\beta_{OD}\bar{Q}\Delta\Omega L_0}{3} \quad (\text{E.17})$$

$$V_e^0 = -\beta_D((P_+ - \Delta^2)L_0 + Q - \Omega E_1 L_0/3) \quad (\text{E.18})$$

$$V_e^2 = -\Gamma_{11}^2 \quad (\text{E.19})$$

$$V_{dg}^0 = -\frac{\beta_D L_0 \Delta(\tilde{\varepsilon}_+ - \tilde{\varepsilon}_-)}{3} \quad (\text{E.20})$$

$$V_{dg}^2 = \frac{V_{dg}^0 R}{3} \quad (\text{E.21})$$

$$V_{ds}^2 = -\frac{2V_{dg}^0 R}{15} \quad (\text{E.22})$$

$$U_e^{-1} = -\frac{\beta_{OD}L_0\Delta(\tilde{\varepsilon}_+ + \tilde{\varepsilon}_-)}{3} \quad (\text{E.23})$$

$$U_e^1 = -\Gamma_{21}^1 \quad (\text{E.24})$$

$$U_{ds}^1 = \frac{\beta_{OD}L_0Q + \Omega}{9} \quad (\text{E.25})$$

$$U_{dg}^1 = -U_{ds}^1 \quad (\text{E.26})$$

である。この方程式を解くと式(7.48)で表された、バーテックス補正項の具体的表式は、

$$\begin{aligned} \delta\gamma_1 &= \Gamma_{1e}\delta\varepsilon_0 + \Gamma_{1dg}\delta d_G + \Gamma_{1ds}\delta d_s \\ &= \frac{\Gamma_{22}V_e - \Gamma_{12}U_e}{\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}}\delta\varepsilon_0 + \frac{\Gamma_{22}V_{dg} - \Gamma_{12}U_{dg}}{\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}}\delta d_G + \frac{\Gamma_{22}V_{ds} - \Gamma_{12}U_{ds}}{\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}}\delta d_s \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma'_{22} &= \Gamma_{2e}\delta\varepsilon_0 + \Gamma_{2dg}\delta d_G + \Gamma_{2ds}\delta d_s \\ &= \frac{\Gamma_{11}U_e - \Gamma_{21}V_e}{\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}}\delta\varepsilon_0 + \frac{\Gamma_{11}U_{dg} - \Gamma_{21}V_{dg}}{\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}}\delta d_G + \frac{\Gamma_{11}U_{ds} - \Gamma_{21}V_{ds}}{\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}}\delta d_s \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

この表式において、

$$\frac{1}{\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}} = \frac{1}{\Gamma_{11}^0\Gamma_{22}^0} \left( 1 - \left( \frac{\Gamma_{11}^2}{\Gamma_{11}^0} + \frac{\Gamma_{22}^2}{\Gamma_{22}^0} - \frac{\Gamma_{12}^1\Gamma_{21}^1}{\Gamma_{11}^0\Gamma_{22}^0} \right) \frac{1}{s^2} \right) \quad (\text{E.29})$$

$$\Gamma_{22}V_e - \Gamma_{12}U_e = (\Gamma_{22}^0V_e^0 - \Gamma_{12}^1U_e^{-1}E_1) + (\Gamma_{22}^2V_e^0 + \Gamma_{22}^0V_e^2 - \Gamma_{12}^1U_e^1) \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.30})$$

$$\Gamma_{22}V_{dg} - \Gamma_{12}U_{dg} = \Gamma_{22}^0V_{dg}^0 + (\Gamma_{22}^2V_{dg}^0 + \Gamma_{22}^0V_{dg}^2 - \Gamma_{12}^1U_{dg}^1) \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.31})$$

$$\Gamma_{22}V_{ds} - \Gamma_{12}U_{ds} = (\Gamma_{22}^0V_{ds}^2 - \Gamma_{12}^1U_{ds}^1) \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.32})$$

$$\Gamma_{11}U_e - \Gamma_{21}V_e = s \left\{ \Gamma_{11}^0 U_e^{-1} E_1 + (\Gamma_{11}^0 U_e^1 - \Gamma_{21}^1 V_e^0) \frac{1}{s^2} \right\} \quad (\text{E.33})$$

$$\Gamma_{11}U_{dg} - \Gamma_{21}V_{dg} = s \left\{ (\Gamma_{11}^0 U_{dg}^1 - \Gamma_{21}^1 V_{dg}^0) \frac{1}{s^2} \right\} \quad (\text{E.34})$$

$$\Gamma_{11}U_{ds} - \Gamma_{21}V_{ds} = s \left\{ \Gamma_{11}^0 U_{ds}^1 \frac{1}{s^2} \right\} \quad (\text{E.35})$$

これらをまとめると、式 (E.27)、(E.28) の具体的表式は、

$$\Gamma_{1e} = \Gamma_{1e}^0 + \Gamma_{1e}^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.36})$$

$$\Gamma_{1dg} = \Gamma_{1dg}^0 + \Gamma_{1dg}^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.37})$$

$$\Gamma_{1ds} = \Gamma_{1ds}^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.38})$$

$$(\Gamma_{2e}/s) = \Gamma_{2e}^0 + \Gamma_{2e}^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.39})$$

$$(\Gamma_{2dg}/s) = \Gamma_{2dg}^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.40})$$

$$(\Gamma_{2ds}/s) = \Gamma_{2ds}^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{E.41})$$

として、

$$\begin{aligned} \Gamma_{2e}^0 &= \frac{\beta_{OD} L_0 \Delta (\tilde{\epsilon}_+ + \tilde{\epsilon}_-)}{3 + \beta_{OD} L_0 (3P_- + \Delta^2)} E_1 \\ 1 + \Gamma_{1e}^0 &= \frac{1}{1 + \beta_D (P_+ - |\hat{\Delta}|^2) L_0} \\ \Gamma_{2e}^2 + 3\Gamma_{2e}^0 R/5 &= \frac{\beta_{OD} \bar{Q} \Delta \Omega L_0 (1 + \Gamma_{1e}^0)}{3(1 + \beta_{OD} L_0 (P_- + \Delta^2/3))} \\ \Gamma_{1dg}^0 &= -\frac{\beta_D L_0 \Delta (\tilde{\epsilon}_+ - \tilde{\epsilon}_-)}{3(1 + \beta_D (P_+ - \Delta^2) L_0)} \\ \Gamma_{2dg}^2 &= \frac{\beta_{OD} L_0 \Omega}{9(1 + \beta_{OD} L_0 (P_- + \Delta^2/3))} \left[ Q_+ - \frac{\beta_D L_0 \bar{Q} \Delta^2 (\tilde{\epsilon}_+ - \tilde{\epsilon}_-)}{1 + \beta_D (P_+ - \Delta^2) L_0} \right] \\ \Gamma_{2ds}^2 &= -\frac{\beta_{OD} L_0 Q_+ \Omega}{9(1 + \beta_{OD} L_0 (P_- + \Delta^2/3))} \end{aligned}$$

と記述される。



## 付録F Yosida関数についての恒等式

ここでは、ABM状態に対して微小回転をほどこすときの不変性から得られる関係式を導入する。 $l$ -ベクトルに垂直で、さらにお互い直行しあう二つの単位ベクトルを  $\mathbf{m}$ 、 $\mathbf{n}$  とするとオーダーパラメータは、

$$\hat{\Delta}_{\hat{k}} = \Delta_A \hat{k} (\mathbf{m} + i\mathbf{n})$$

と記述できる。さて、gap方程式は、

$$\hat{\Delta}_{\hat{k}} = \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left\langle \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) (\hat{k} \cdot \hat{k}') \hat{\Delta}_{\hat{k}'}}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2}} \right\rangle \quad (\text{F.1})$$

座標系にかかわらず常に成立するため、初期状態のオーダーパラメータを

$$\Delta_{\hat{k}}^0 = \Delta_{A0} (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \quad (\text{F.2})$$

として、座標系に対して  $\delta\Omega$  の回転を行なう。すなわち、 $\mathbf{m}$ 、 $\mathbf{n}$  の変化は、

$$\begin{cases} \delta\mathbf{m} = \delta\Omega \times \mathbf{m} = (0, \delta\Omega_z, -\delta\Omega_y) \\ \delta\mathbf{n} = \delta\Omega \times \mathbf{n} = (-\delta\Omega_z, 0, \delta\Omega_x) \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

となる。もちろん、この座標系に関する微小回転を施したとしても gap方程式は常に成立するため、

$$\begin{aligned} \delta\hat{\Delta}_{\hat{k}} &= \Delta_A \hat{k} \cdot (\delta\mathbf{m} + i\delta\mathbf{n}) \\ &= \Delta_A \left\{ (i\delta\Omega_x - \delta\Omega_y) \hat{k}_z - i\delta\Omega_z (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

さて、式(F.1)からオーダーパラメータの微小変化は、 $E(\omega) = \sqrt{\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2}$  として、

$$\begin{aligned} \delta\hat{\Delta}_{\hat{k}} &= \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left\langle \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) (\hat{k} \cdot \hat{k}') \delta\hat{\Delta}_{\hat{k}'}}{E(\omega)} \right\rangle \\ &\quad + \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left\langle (\hat{k} \cdot \hat{k}') \hat{\Delta}_{\hat{k}'}^0 \delta\left(\frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)}\right) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

ここで、

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)}\right) &= -\frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)}\right) \times \frac{\Delta\delta\Delta^\dagger + \Delta^\dagger\delta\Delta}{2E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)}\right) \times \frac{2\Delta_A^2 \hat{k}_z (\hat{k}_y \delta\Omega_x - \hat{k}_x \delta\Omega_y)}{2E} \end{aligned}$$

となるため、次の関係を満たさなければならないことがわかる。

$$\begin{aligned}
& \Delta_A (i\delta\Omega_x - \delta\Omega_y) \hat{k}_z \\
= & \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left\langle \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) (\hat{k} \cdot \hat{k}') \Delta_A (i\delta\Omega_x - \delta\Omega_y) \hat{k}_z}{E(\omega)} \right\rangle \\
& - \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left\langle (\hat{k} \cdot \hat{k}') \hat{\Delta}_{\hat{k}'}^0 \right. \\
& \quad \left. \times \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} \right) \frac{2\Delta_A^2 \hat{k}_z (\hat{k}_y \delta\Omega_x - \hat{k}_x \delta\Omega_y)}{2E} \right\rangle \quad (F.6)
\end{aligned}$$

まとめなおすと、

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left\langle \hat{k}_z^2 \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} \right\rangle \\
& \quad - \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \frac{\Delta_A^2}{E} \left\langle \hat{k}_x^2 \hat{k}_z^2 \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} \right) \right\rangle \\
&= \frac{3v_1 N_0}{2} \mathcal{K}_z - \frac{3v_1 N_0}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \frac{\Delta_A^2}{E(\omega)} \left\langle \hat{k}_x^2 \hat{k}_z^2 \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} \right) \right\rangle \quad (F.7)
\end{aligned}$$

今、恒等式

$$\int d\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} \right) = 2$$

より、

$$\begin{aligned}
2 &= \int d\omega \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} + \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) \beta|\omega|}{E(\omega) 2} \operatorname{sech}^2(\beta|\omega|/2) \right. \\
& \quad \left. - \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \frac{\omega^2 \theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)^3} + \frac{2\omega^2 \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \delta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} \right\}
\end{aligned}$$

となる。この表式をまとめなおすと、

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{2} \int d\omega \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} + \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) \beta|\omega|}{E(\omega) 2} \operatorname{sech}^2(\beta|\omega|/2) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left\{ \frac{2\omega^2 \delta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} - \frac{\omega^2 \theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)^3} \right\}
\end{aligned}$$

となる。

ここで、

$$\begin{aligned}
& \hat{k}_x^2 \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \frac{\Delta_A^2}{E(\omega)} \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \frac{\omega^2 - E(\omega)^2}{E(\omega)} \left( 2\delta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) - \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left( \frac{2\omega^2\delta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} - \frac{\omega^2\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)^3} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left( 2E(\omega)\delta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) - \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} \int d\omega \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} + \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) \beta|\omega|}{E(\omega) 2} \operatorname{sech}^2(\beta|\omega|/2) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d\omega \tanh\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right) \left( 2E(\omega)\delta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) - \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2)}{E(\omega)} \right) \\
&= 1 - \int_0^\infty d\omega \left\{ \frac{\theta(\omega^2 - |\Delta_{\hat{k}'}|^2) \beta\omega}{E(\omega) 2} \operatorname{sech}^2(\beta|\omega|/2) \right\} \\
&= 1 - \frac{1}{2T} \int_0^\infty d\xi \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\xi^2 + |\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}/2T\right) \\
&= 1 - Y(T, \theta)
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $T(T, \theta)$  は Yosida 関数であり、

$$\begin{aligned}
Y(T, \theta) &= \frac{1}{2T} \int_0^\infty d\xi \operatorname{sech}^2(E(\theta)/2T) \\
E(\theta) &= \sqrt{\xi^2 + |\hat{\Delta}_{\hat{k}}|^2}
\end{aligned} \tag{F.8}$$

である。

このことから式 (F.7) は次のように変形される。

$$\mathcal{K}_x = \mathcal{K}_z - \langle \hat{k}_z^2 (1 - Y(T, \theta)) \rangle$$

## 参考文献

- [1] L.D. Landau, Sov. Phys. JETP **3** (1957) 920
- [2] D.D. Osheroff, R.C. Richardson and D.M. Lee, Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 885
- [3] A.J. Leggett, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 331
- [4] J.C. Wheatley, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 415
- [5] E.R. Dobbs, *Helium Three* (Oxford University Press, 2000)
- [6] Y. Maeno, H. Hashimoto, K. Yoshida, S. Nishizaki, T. Fujita, J. G. Bednorz and F. Lichtenberg, Nature **372** (1994) 532
- [7] K. Ishida, Y. Kitaoka, K. Asayama, S. Ikeda, S. Nishizaki, Y. Maeno, K. Yshida and T. Fujita, Phys. Rev. B, **56** (1997), R505
- [8] H. Tou, Y. Kitaoka, K. Asayama, N. Kimura, Y. Onuki, E. Yamamoto and K. Maezawa, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 1374
- [9] E.V. Thuneberg, S.K. Yip, M. Fogelström and J.A. Sauls, Phys. Rev. Lett. **80** (1999) 2861
- [10] J.V. Porto and J.M. Papia, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 4667
- [11] A.A. Abrikosov and L.P. Gorkov, Sov. Phys. JETP **12** (1961) 1243
- [12] D. Rainar and J.A. Sauls, J. Low Temp. Phys. **110** (1998) 525
- [13] S. Higashitani, J. Low Temp. Phys. **114** (1999) 161
- [14] R. Nomura, G. Gervais, T.M. Haard, Y. Lee, N. Mulders and W.P. Halperin, Phys. Rev. Lett. **87** (2000) 4325

- [15] I. Rudnick, *J. Low Temp. Phys.* **40** (1980) 287
- [16] L.D. Landau, *Sov. Phys. JETP* **5** (1957) 101
- [17] W.R. Abel, A.C. Anderson and J.C. Wheatley, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 74
- [18] G. Gervais, R. Nomura, T.M. Haard, Y. Lee, N. Mulders and W.P. Halperin, *J. Low Temp. Phys.* **122** (2001) 1
- [19] M.J. McKenna, T. Slawecki and J.D. Maynard, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 1878
- [20] T. Ichikawa, M. Yamamoto, S. Higashitani and K. Nagai, *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** (2001) 3483
- [21] D. Pines and P. Nozières *The Theory of Quantum Liquids* (Benjamin, New York, 1966)
- [22] W. P. Halperin and E. Varoquaux *Helium Three* (Elsevier, Amsterdam, 1990)
- [23] R. Balian and N.R. Werthamer, *Phys. Rev.* **131** (1963) 1553
- [24] P.W. Anderson and P. Morel, *Phys. Rev.* **123** (1961) 1911
- [25] P.W. Anderson and W.F. Brinkman, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1963) 1108
- [26] Y. Kuroda, *Prog. Theor. Phys.* **51** (1974) 1269
- [27] K. Matsumoto, J.V. Porto, L. Pollack, E.N. Smith, T.L. Ho and J.M. Pappia, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 253
- [28] L.J. Buchholtz and G. Zwirner, *Phys. Rev. B* **23** (1981) 5788
- [29] A.I. Larkin, *JETP Lett.* **2** (1965) 2
- [30] G.E. Volovik, *JETP Lett.* **63** (1996) 301
- [31] V.P. Mineev, *JETP Lett.* **66** (1997) 693
- [32] J.V. Porto and J.M. Pappia, *Phys. Rev. B* **59** (1999) 14584
- [33] D.T. Sprague, T.M. Haard, J.B. Kycia, M.R. Rand, Y. Lee, P.J. Hamot and W.P. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 661

- [34] D.T. Sprague, T.M. Haard, J.B. Kycia, M.R. Rand, Y. Lee, P.J. Hamot and W.P. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4568
- [35] H. Alles, J.J. Kaplinsky, P.S. Wootton, J.D. Reppy, J.H. Naish and J.R. Hook, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1367
- [36] B.I. Baker, Y. Lee, L. Polukhina, D.D. Osheroff, L.W. Hrubesh and J.F. Poco, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 2148
- [37] Yu.M. Bunkov, A.S. Chen, D.J. Cousins and H. Godfrin, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3456
- [38] P. Brussard, S.N. Fisher, A.M. Guénault, A.J. Hale, N. Mulders and G.R. Pickett, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 4580
- [39] A. Golov, D.A. Geller, J.M. Parpia and N. Mulders, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 3492
- [40] A. Matsubara, T. Ukawa, T. Takebayashi, O. Ishikawa, T. Hata, T. Kodama and N. Mulders, *Physica (Amsterdam)*. **284B** (2000) 301
- [41] G. Lawes, S.C.J. Kingsley, N. Mulders, and J.M. Parpia, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2001) 4148
- [42] G. Gervais, T.M. Haard, R. Nomura, N. Mulders and W.P. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 035701
- [43] P. Wölfle, *Phys. Rev. B* **14** (1976) 89
- [44] A.A. Abrikosov and I.M. Khalatnikov, *Sov. Phys. JETP* **5** (1957) 887
- [45] K. Matsumoto, T. Ikegami, K. Karaki and Y. Okuda, *Czech. J. Phys.* **46**, Supp. S1 63
- [46] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, New York, 1959)
- [47] P.R. Roach and J.B. Ketterson, *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 736

- [48] E.G. Flowers, R.W. Richardson, *Phys. Rev. B*, **17** (1978) 1238
- [49] E.G. Flowers, R.W. Richardson and S.J. Williamson, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 309
- [50] K. Maki, *J. Low Temp. Phys.*, **16** (1974) 465
- [51] K. Nagai, *Prog. Theor. Phys.* **54** (1975) 1
- [52] V.E. Koch and P. Wölfle, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 486
- [53] D. Vollhardt and P. Wölfle *The Superfluid Phases of Helium 3* (Taylor and Francis, London, 1990)
- [54] D.N. Paulson, R.T. Johnson and J.C. Wheatley, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 829
- [55] P.R. Roach, B.M. Abraham and M. Kuchnir, *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975) 711
- [56] R.W. Giannetta, A. Ahonen, E. Polturak, J. Saunders, E.K. Zeise, R.C. Richardson and D.M. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 262
- [57] D.B. Mast, Bimal K. Sarma, J.R. Owers-Bradley, I. D. Calder, J. B. Ketterson and W. P. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 266
- [58] M.E. Daniels, E.R. Dobbs, J. Saunders and P.L. Ward, *Phys. Rev. B*, **27** (1983) 6988
- [59] O. Avenel, E. Varoquax and H. Ebisawa, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 1952
- [60] L. Tewordt and N. Schopohl, *J. Low Temp. Phys.* **37** (1979) 421
- [61] R. Movshovich, E. Varoquaux, N. Kim and D.M. Lee, *Phys. Rev. B*, **44** (1991) 332
- [62] R. Ling, J. Saunders and E.R. Dobbs, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 461
- [63] M. Ashida, J. Hara and K. Nagai, *J. Low Temp. Phys.* **105** (1996) 221
- [64] P. Wölfle and V.E. Koch, *J. Low Temp. Phys.* **30** (1978) 61

- [65] D.N. Paulson, R.L. Kleinberg and J.C. Wheatley, *J. Low Temp. Phys.*, **23** (1976) 725
- [66] D.N. Paulson, M. Krusius and J.C. Wheatley, *J. Low Temp. Phys.*, **26** (1977) 73
- [67] M. Ashida and K. Nagai, *Prog. Theor. Phys.* **70** (1983) 1672
- [68] G.F. Moores and J.A. Sauls, *J. Low Temp. Phys.* **91** (1993) 13
- [69] Y. Lee, T.M. Haard, W.P. Halperin and J.A. Sauls, *Nature* **400** (1999) 431
- [70] K. Maki, *Prog. Theor. Phys.* **52** (1974) 745
- [71] A.B. Pippard, *Phil. Mag.* **41** (1955) 1104
- [72] T. Holstein, *Phys. Rev.* **113** (1959) 479
- [73] J.W. Serene and D. Rainer, *Phys. Rep.* **4** (1983) 221
- [74] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov and I.E. Dzyaloshinski *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover Publications, New York, 1963)