平衡確率現象の総合的研究

（課題番号 10304006）

平成１０年度～平成１２年度

科学研究費補助金［基盤研究(A)(1)］

研究成果報告書

平成１３年３月

研究代表者　久 保　泉

（広島大学大学院理学研究科教授）

はしがき

本研究は、下記に示す分担者を中心に日本数学会統計数学分科会確率論部門のメンバー及び関連分野の研究者の全面的な協力を得て平衡確率現象の総合的研究を遂行したものであり、本冊子はその研究内容に関わる報告である。

研究計画の検討、研究成果の発表と討論、研究情報の収集と新たな研究課題の構築を図るために、各年度に分担者会議、平成１０年度に８回、平成１１年度に７回、平成１２年度に９回の研究集会を行った。以下に収録したそれぞれの報告の示す通り、いずれも充実した会合であり、充分な成果をあげるとともに次の段階の研究への足掛かりとなったものと確信している。なお、これの諸会合の一部は他の科学研究費代表者による研究と協力しての企画であった。いちいち指摘はしないが、このような共同研究は分野を超えた研究が期待でき大きな成果が得られた。

また、科学研究費補助金に外国旅費や海外招聘旅費が認められた結果として、分担者が海外での情報収集、共同研究や成果発表が可能になり、また多くの関連研究者が海外の研究者と直接討論する機会が増え、本研究をより充実させることができた。

本研究の遂行にご協力を頂いた分担者をはじめとする国内外の多くの研究者及び関連大学部局の事務職員の方々に心より感謝します。

平成１３年３月

久保　泉

課題番号 10304006

研究課題 平衡確率現象の総合的研究

研究組織

研究代表者	久保　泉	（広島大学・大学院理学研究科・教授）
研究分担者	平良和昭	（筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授）
	前島　信	（慶應大学・理工学部・教授）
	舟木　直久	（東京大学・大学院数理科学研究科・教授）
	岡部　靖憲	（東京大学・大学院工学系研究科・教授）
	井原　俊輔	（名古屋大学・情報文化学部・教授）
	高橋　陽一郎	（京都大学・数理解析研究所・教授）
	竹中　茂夫	（岡山理科大学・理学部・教授）
	高嶋　恵三	（岡山理科大学・理学部・教授）
	佐藤　坦	（九州大学・大学院数理学研究科・教授）
	濱地　敏	（九州大学・大学院数理学研究科・教授）
	会田　茂樹	（大阪大学・大学院基礎工学研究科・助教授）
	盛田　健彦	（東京工業大学・大学院理工学研究科・助教授）
	尾畑　伸明	（名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・助教授）
	岩田　耕一郎	（広島大学・大学院理学研究科・助教授）
	中村　宗敬	（山梨大学・教育人間科学部・助教授）

以上述べ１６人。所属は平成１２年度。

研究経費

平成１０年度	７，５００千円
平成１１年度	７，０００千円
平成１２年度	７，４００千円
計	２１，９００千円

目　次

1.

生物現象と非線形微分方程式

分担者：平良 和昭 (筑波大)，岩田 耕一郎（広島大）

標題の研究集会は1998年、1999年、2000年にわたり年一回ずつ広島大学理学部で開催され、各々３０名あまりの参加者により講演ならびに討論が行われた。微分方程式からのアプローチにウェートをおいて生物現象に関連した話題について研究発表及び情報交換を行うとしたが、関連については緩やかな解釈を予期し、ｂｉｏｍａｔｈを含む各種メーリングリストを通じて参加を呼びかけた。その結果、講演者の分野からみても分かるように幅広い交流がはかることができた。他方、数学プロパーではなく数理生物の立場での講演を毎回いくつか依頼した。講演者の推薦、紹介にかんしては数理生物学懇談会事務局長である難波利幸氏（９８年度)、竹内康博氏（９９年度～）には一方ならぬご協力を仰いでおりこの場を借りて感謝させて頂く。

各回の講演は次の通りで、簡単なまとめの後に講演者によるアブストラクトを添付する。

（文責　岩田）

1998年

1. 伊藤 栄明（統計数理研究所)：種分化の確率モデルと確率微分方程式
2. 川崎 廣吉（同志社大学 工)：生物の侵入と分布域拡大の速度
3. 志賀 德造（東京工業大学 理)：相互作用のある拡散系と生物モデル
4. 三村 昌泰（広島大学 理)：生物が造る空間パターンへの数学からの接近:モデリングとその解析
5. 難波 利幸（大阪女子大学 学芸)：間接相互作用と不均一環境における個体群の存続可能性
6. 今野 紀雄（横浜国立大学 工)：N 種サイクリック系の安定性と偶奇性
7. 平良 和昭 (筑波大学 数学系)：拡散現象と人口動態
8. 梅津 健一郎（前橋工科大学 工)：発酵作用に現われる非線型楕円型境界値問題

伊藤氏は十分多くの不変量が具体的に記述できる相互作用を持つグラフ上の多粒子系をとりあげ無限粒子極限における極限分布について報告した。川崎氏には生物の分布域拡大についてその速度がある時点から早くなるように切り替わるタイプや加速度的に拡大するタイプを再現する階層的な分散を取り入れた数理モデルを報告していただいた。志賀氏は種々の生物モデル、物理モデルを含む無限次元発展方程式をとりあげその定常分布を特徴付けること、有限系のサイズと時間の適当なスケーリングをとり無限系の長時間挙動を観測すること、定常分布が存在しないときの長時間挙動を求めることについて報告した。難波氏には３種以上の集団の相互作用があるときに現れる間接相互作用の概念とそれがダイナミクスに及ぼす効果について解説の後、パッチ状環境において生物が移動するとき空間の不均一性と間接相互作用がからむことにより生物の存続可能性がどのように変わるかについてコンパートメント間の離散型の拡散項を導入した常微分方程式モデルで論じていただいた。今野氏は N 種サイクリック系の連続時間マルコフ過程モデルに関し系の安定性、種数 N に対する偶奇性ならびに固定 (fixation) の問題、また平均場近似モデルにおける種数 N と最近接点数 n との相図および種数３の場合の最近傍数 n を変化させたときの安定性について報告した。平良氏は反応拡散方程式の正値定常解の分岐と安定性の議論に符号付き重み関数に関する線形楕円型方程式の固有値問題がどう応用されるかを報告した。梅津氏はミカエリス・メンテン機構による酵素反応を記述する非線形型境界値問題をとりあげ正値解の酵素濃度パラメータに関する漸近挙動について報告した。

プ ロ グ ラ ム

9月24日（木）

14:00–15:00　伊藤 栄明（統計数理研究所）
種分化の確率モデルと確率微分方程式
15:00–15:15　Discussions

15:30–16:30　川崎 廣吉（同志社大学 工）
生物の侵入と分布域拡大の速度
16:30–16:45　Discussions

9月25日（金）

9:30–10:30　志賀 徳造（東京工業大学 理）
相互作用のある拡散系と生物モデル
10:30–10:45　Discussions

11:00–12:00　三村昌泰（広島大学 理）
生物が造る空間パターンへの数学からの接近:モデリングとその解析
12:00–12:15　Discussions

14:00–15:00　難波利幸（大阪女子大学 学芸）
間接相互作用と不均一環境における個体群の存続可能性
15:00–15:15　Discussions

15:30–16:30　今野 紀雄（横浜国立大学 工）
N 種サイクリック系の安定性と偶奇性
16:30–16:45　Discussions

9月26日(土)

9:30–10:30　平良 和昭 (筑波大学 数学系)
拡散現象と人口動態
10:30–10:45　Discussions

11:00–12:00　梅津 健一郎（前橋工科大学 工）
発酵作用に現われる非線型楕円型境界値問題
12:00–12:15　Discussions

種分化の確率モデルと確率微分方程式
Explicit sufficient invariants for an interacting particle system

Yoshiaki Itoh, Colin Mallows, Larry Shepp,

We introduce a new class of interacting particle systems on a graph G. Suppose initially there are $N_i(0)$ particles at each vertex i of G, and that the particles interact to form a Markov chain: at each instant two particles are chosen at random, and if these are at *adjacent* vertices of G, one particle jumps to the other particle's vertex, each with probability $1/2$. The process $\mathbf{N}$ enters a death state after a finite time when all the particles are in some *independent* subset of the vertices of G, i.e., a set of vertices with no edges between any two of them. The problem is to find the distribution of the death state, $\eta_i = N_i(\infty)$, as a function of $N_i(0)$.

We are able to obtain, for some special graphs, the *limiting* distribution of N_i if the total number of particles $N \to \infty$ in such a way that the fraction, $N_i(0)/S = \xi_i$, at each vertex is held fixed as $N \to \infty$. In particular we can obtain the limit law for the graph, S_2 : ·—·—·, having 3 vertices and 2 edges.

This process might be called the "political positions process" where the vertices of G represent various political positions and an advocate for one position may attract people with neighboring views.

For the complete graph, the model is that of Moran (1958) for the Fisher-Wright random sampling effect in population genetics. In the more general case the model might be applied to study speciation in biology as well as political positionings. For example consider a genetic system for m alleles $A_i, i = 1, 2, \cdots, m$, in which zygotes A_iA_j are fertile for $j = i-1, i, i+1$ and infertile for the other j. This problem was studied numerically by Nei, Maruyama and Wu (1982), considering the Fisher-Wright random sampling effect with some selection structure. Our present model has a random sampling effect depending on the structure of a graph, which could be a natural simplified model of the genetic problem. The graph R_{2k}, which is a regular polygon with $2k$ vertices and all edges present except those joining opposite vertices, is a special case of our genetic model.

Reference

Itoh, Y., Mallows, C., and Shepp L. (1998) Explicit sufficiently invariants for an interacting particle system, Journal of Applied Probability, Vol 35 (in printing).

生物の侵入と分布域拡大

川崎　廣吉　(同志社大学工学部)

生物がある地域に侵入して個体数を増加させ，その分布域を拡大していく様子は「生物侵入 (biological invasion) の問題」として知られている．本講演では Shigesada & Kawasaki (1997) に基づて，いくつかの実際の報告例とそれらを説明する数理モデルについて述べる．

1．生物の侵入の実例と分布域拡大の分類

生物の侵入と分布域拡大の実例として，哺乳動物では，プラハ郊外から逃げ出したマスクラット (Skellam, 1951)，ニュージーランドでのヒマラヤヤギ (Caughley, 1970)，米国カリフォルニアの太平洋沿岸でのラッコ (Lubina & Levin, 1988) の例が報告されている．鳥類では北米に導入されたイエスズメ (Mundinger & Hop, 1982) やヨーロッパ産ホシムクドリ (Okubo, 1988) の例が，昆虫では名古屋近郊から広まった稲の害虫イネミズゾウムシ (Andow *et al.*, 1993) の例が報告されている．他にも多くの例が Shigesada & Kawasaki (1997) にある．

これらの報告例から，分布域拡大の様子は次のようにまとめることができる．生物は侵入した時点から直ちにその分布域を拡大していくのではなく，多くの場合分布域が拡大するまでにある一定の期間の定着期があり，その後分布域を拡大していく．そして，島であれ，大陸であれ，生物の生息できる領域には限りがあるから，分布域は一定の値に飽和する．すなわち，分布域拡大は，定着期，拡大期，飽和期に分けることができる．さらに，拡大期は，(1) 分布域が時間に対して直線的に拡大していく，(2) 直線的に拡大するがある時点から拡大速度が大きくなり，分布域拡大の様子は２本の直線で表される，(3) 加速度的に拡大していく，の３つのタイプに分類することができる．これらをそれぞれ Type 1, Type 2, Type 3 とする．

2．反応拡散方程式による定式化

生物がランダムに運動しながら増殖するとすれば，次の反応拡散方程式で記述することができる．

$$u_t(x,t) = D(x) \triangle u(x,t) + (\varepsilon(x) - \mu\, u(x,t))u(x,t) \tag{1}$$

ここで，$u(x,t)$ は場所 x，時間 t での生物の個体数密度，$D(x)$ は拡散係数，$\varepsilon(x)$ は内的自然増殖率，μ は種内競争係数であり，右辺第２項の増殖は logistic 方程式になっている．生物の侵入を考えているので初期条件を次のようにする．

$$u_t(x,0) = n_0\delta(x)$$

ここで，n_0 は初期の侵入個体数であり，$\delta(x)$ はディラックの δ-関数である．

2.1 環境が一様な場合

$D(x) = D$ (定数)，$\varepsilon(x) = \varepsilon$ (定数) の場合，方程式 (1) は **Fisher 方程式** といわれており，分布域の先端は時間が経てば $2\sqrt{\varepsilon D}$ の一定速度で広がることが知られている (Fisher 1937, Kolmogorov *et al.* 1937, Bramson 1973, Kametaka 1976, Fife 1979).

2.2 環境が非一様な場合

空間 x は 1 次元とし，$D(x)$, $\varepsilon(x)$ を次のような周期 $L(=l_1+l_2)$ の周期関数とする．

$$D(x)=\begin{cases} 1 & x\in(nL, l_1+nL) \\ d & x\in(l_1+nL,(n+1)L) \end{cases} \qquad (n\text{ は整数}) \tag{2}$$

$$\varepsilon(x)=\begin{cases} 1 & x\in(nL, l_1+nL) \\ e & x\in(l_1+nL,(n+1)L) \end{cases} \qquad (n\text{ は整数}) \tag{3}$$

$f(z)\geq 0$ は周期 L の周期関数，$g(z)>0$ は $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ を満たす関数とする．分布拡大速度を c として，分布域の先端での解の形を

$$u(x,t)=f(x-ct)g(x)$$

と仮定すると，$g(x)=Ce^{sx}$（C, s は正の任意定数）が求まり，分布拡大速度 c は次の陰関数で与えられる．

$$\cosh s(l_1+l_2)=\cosh q_1l_1\cosh q_2l_2+\frac{q_1^2+(dq_2)^2}{2dq_1q_2}\sinh q_1l_1\sinh q_2l_2 \tag{4}$$

ここで，$q_1=\sqrt{cs-1}$,　$q_2=\sqrt{(cs-e)/d}$ である．

上の式より，速度 c は最小値 c_{min} を持つが，方程式 (1) の数値計算で速度を求めるとこの最小速度によく一致する．

空間 2 次元の場合に $D(x,y)$, $\varepsilon(x,y)$ を，x 方向には式 (2), (3) で与え，y 方向には一様であるとする．このとき x 方向の伝播速度は 1 次元と同じ式 (4) となる．また y 方向の速度は次式で与えられる．

$$q_1\tanh\frac{q_1l_1}{2}+dq_2\tanh\frac{q_2l_2}{2}=0 \tag{5}$$

ここで，$q_1=\sqrt{-s^2+cs-1}$,　$q_2=\sqrt{-s^2+(cs-e)/d}$ である．これらの速度の最小値も数値計算で求められた速度とよく一致する．

反応拡散方程式による分布域拡大の数理モデルは分布域が時間に対して直線的に拡大していく Type 1 の様子をよく再現している．しかしながら，Type 2 や Type 3 の場合を再現することはできない．そこで，次に速度が速くなるように切り替わる場合や加速度的な速度増加の場合を説明するモデルを紹介する．

3．階層的分散による分布域拡大

鳥類の分散を詳しく観察するとその分布域が徐々に拡大していくだけでなく，連続的に分布している領域の先端よりずっと遠くにつがいのペアが移動し，繁殖することがある．また，植物ではその種が親個体から車や鉄道によって遠くへ運ばれていくことがある．このように非常に希ではあるが，本来の分布域から飛び火的に遠くの地域へ分散して繁殖し，そこで新たな分布域を確立する可能性があろう．ランダム移動による近距離への分散（近距離分散）と飛び火的な分散（遠距離分散）を合わせた階層的な分散 (stratified diffusion) を取り入れた数理モデルは以下のようになる．

ある地点に侵入してきた生物が増殖と近距離分散を繰り返しながらその分布域すなわちコロニーを拡大していくとする．拡大速度は反応拡散方程式からみられるように一定であるとする．そして，そのコロニーからある確率 $\lambda(r)$ でいくらかの個体が遠距離分散し，分散先で一定速度で拡大するコロニーを新たに作るとする．ここで，r はコロニーの半径である．元の親コロニーは無論のことそこから分散して新たに作られた子コロニーからもさらに孫コロニーが，さらに，孫コロニーからもコロニーがというように遠距離分散によってコロニーが増えていくとする．以下ではコロニーの拡大速度はどれも同じ一定速度 c とする．

遠距離分散が十分遠くであるなら，コロニーが大きくなっても互いに重ならないであろう．このような場合のモデルをコロニー散布モデル (Scatterd colony model) としよう．また，遠距離分散があまり遠くでないなら，コロニーは重なり合って融合する．このような場合のモデルをコロニー融合モデル (Coalescing colony model) としよう．

3.1 コロニー散布モデル

時刻 t における半径 r のコロニー分布関数を $\rho(r,t)$ とすると，コロニー半径が速度 c で拡大していくので

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial c\rho}{\partial r} = 0, \tag{6}$$

さらに，遠距離分散によってサイズ 0 のコロニーが生まれるので

$$c\rho(0,t) = \int_0^\infty \lambda(r)\rho(r,t)dr, \tag{7}$$

最初は 1 つのコロニー（サイズは 0）から出発するとして，

$$\rho(r,0) = \delta(r). \tag{8}$$

遠距離分散の確率が (a) 一定の場合，(b) 半径に比例する場合，(c) 面積に比例する場合については方程式 (6), (7), (8) が解けて，分布域の総面積の平方根が指数関数的に増加することが分かる．すなわち，Type 3 の加速度的な分布域拡大のパターンを示す．

3.2 コロニー融合モデル

元の親コロニーの半径を $r(t)$ とし，遠距離分散した子コロニーの時刻 t における半径 x のコロニー分布関数を $\rho(x,t)$ とする．遠距離分散した子コロニーが元の親コロニーに融合した時点で融合コロニーを同じ面積を持つ円の親コロニーになるとしてモデル化する．

モデルは複雑になるので結果のみを記すと，遠距離分散の確率が (a) 一定の場合は直線的に分布域が拡大しているが，(b) 半径に比例する場合と (c) 面積に比例する場合は初めての融合が起こるまでは一定速度 c で分布域が拡大し，融合が始まると (b) では c より大きい一定速度で拡大し，(c) では加速度的に拡大していく．すなわち，(b) の場合，Type 2 の分布域拡大パターンを示すことが分かった．

なお，上記の研究結果は，奈良女子大学の重定南奈子，北山真智子，高須夫悟との共同研究によるものである．

引用文献

Andow, D., Kareiva, P., Levin, S. and Okubo, A. (1993). Spread of invading organisms: Patterns of spread. In *Evolution of insect pests: The pattern of variations* (ed. K.C. Kim), pp. 219-242. John Wiley and Sons, New York.

Bramson, M. (1973). *Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves.* AMS Memoirs, No. 285, Vol. 44, American Mathematical society, Providence, R.I.

Caughley, G. (1970). Liberation, dispersal and distribution of himalayan thar (Hemitragus jemlahicus) in New Zealand. *New Zealand J. Sci.* **13**, 200-239.

Fife, P.C. (1979). *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems.* Lecture Notes in Biomathematics 28. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

Fisher, R.A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugen.* (Lond.) **7**, 255-369.

Kametaka, Y. (1976). On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piscunov type. *Osaka J. Math.* **13**, 11-66.

Kolmogorov, A., Petrovsky, N. and Picoounov, N.S. (1937). A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem. *Moscow Univ. Bull. Math.* **1**, 1-25.

Lubina, J.A. and Levin, S.A. (1988). The spread of a reinvading species: range expansion in the California sea otter. *The American Naturalist* **131**, 526-543

Mundinger, P.C. and Hope, S. (1982). Expansion of the winter range of the House Finch: 1947-79. *American Birds.* **36**, 347-353.

Okubo, A. (1988). Diffusion-type models for avian range expansion. In Acta XIX Congress Internationalis Ornithologici 1 (ed. H. Quellet). *National Museum of Natural Sciences* pp.1038-1049. Univ. Ottawa Press.

Skellam, J.G. (1951). Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika* **38**. 196-218.

Shigesada, N. and Kawasaki, K. (1997). *Biological Invasions: theory and practice.* Oxford Series in Ecology and Evolution. Oxford Unversity Press, Oxford/New York/Tokyo.

相互作用のある拡散系と生物モデル

志賀　徳造　（東京工業大学理工学研究科）

S：可算集合、

I：1次元閉区間　i.e. $I=[0,1]$, $[(0,\infty)$, or $(-\infty,\infty)$

(A.1)　$A=\{A_{ij}\}$：$S\times S$ 実行列、

$$\begin{aligned} A_{ij} &\geq 0 \quad \text{for} \quad i\neq j, \\ \sum_{j\in S} A_{ij} &= 0 \quad i\in S, \\ \sup_{i\in S}|A_{ii}| &< \infty. \end{aligned}$$

(A.2)　$g(u)$ は I 上の 1/2-Hölder 連続関数で

$$\begin{aligned} g(u) &> 0 \quad (u \text{ は } I \text{ の内点のとき}) \\ g(u) &= 0 \quad (u \text{ は } I \text{ の端点のとき}) \\ g(u) &\leq C(1+u^2) \quad (u\in I) \quad (I \text{ が有界でなければ}) \end{aligned}$$

$X=I^S$ 上の微分作用素 L を

$$L=\sum_{i\in S} g(x_i)D_{ii}+\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} A_{ij}x_jD_i$$

として定め、次の発展方程式を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial t} &= Lu(t,\mathbf{x}) \\ u(0,\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{1}$$

この発展方程式 (1) を**相互作用のある拡散系** (interacting diffus ion system) といい、この枠組みの中に種々の生物モデル、物理モデルをふくむ。

Example1. (Stepping stone diffusion model with random drift)

$$I=[0,1], \quad a(u)=\sqrt{u(1-u)}.$$

Example 2. (Stepping stone diffusion model with random selection)

$$I=[0,1], \quad a(u)=u(1-u).$$

Example 3. (Branching diffusion model)

$$I=[0,\infty), \quad a(u)=\sqrt{u}.$$

Example 4. (Parabolic Anderson model)

$$S = \mathbf{Z}^d, \quad I = [0, \infty), \quad a(u) = u,$$

and for $\kappa > 0$,

$$A_{ij} = \begin{cases} \kappa & (\text{if } |i-j| = 1) \\ -2d\kappa & (\text{if } i = j) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Example 5 (Critical Ornstein-Uhlenbeck process)

$$I = (-\infty, \infty), \quad a(u) = \text{constant}.$$

$C_{f,b}(X)$: X 上で定義された有界連続かつ有限個も成分に依存する関数全体。

$\mathcal{P}(X)$: X 上の確率測度全体。

発展方程式 (1) は $C_{f,b}(X)$ および $\mathcal{P}(X)$ 上に半群 $T(t), T^*(t)$ を導く。

$$T(t)f(\mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x})$$

$$\langle T^*(t)\mu, f\rangle = \langle \mu, T(t)f\rangle$$

$\mathcal{S}$: $T^*(t)$ の固定点の全体（定常分布）、これは凸集合である。

$\mathcal{S}_{ext}$: $\mathcal{S}$ の端点集合。

問題は $f \in C_{f,b}(X)$, $\mu \in \mathcal{P}(X)$ に対して

$$\langle T^*(t)\mu, f\rangle = \langle \mu, T(t)f\rangle$$

の $t \to \infty$ の挙動を調べることである。

本講演では次の問題について、現在までに得られている結果と未解決問題を論じたい。

$1°$ すべての定常分布を特徴づける問題

$2°$ 無限系（S が無限集合）と有限系（S が無限集合）の $t \to \infty$ の挙動は全く異なるが、有限系のサイズと時間の適当なスケーリングをとることにより、有限系の挙動から無限系の $t \to \infty$ の挙動を観測する問題。

$3°$ 定常分布が存在しない場合の $t \to \infty$ の挙動。

発展方程式 (1) には次の確率微分方程式で記述される確率過程が対応し、主として確率解析により結果が得られるが、本講演ではそれらの結果を出来るだけ解析の言葉を用いて説明したい。

$$dx_i(t) = \sum_{j \in S} A_{ij} x_j(t) dt + \sqrt{2g(x_i(t))} dB_i(t), \quad i \in S \tag{2}$$

ここで $\{B_i(t)\}_{i \in S}$ は 1 次元ブラウン運動の独立な系である。

参考文献

[BCG1] M. Bramson, J.T. Cox and A. Greven: *Ergodicity of critical spatial branching processes in low dimension*, Ann. Probab. **21**, 1946-1957 (1993).

[BCG2] M. Bramson, J.T. Cox and A. Greven: *Invariant measures of critical spatial branching processes in high dimensions*, to appear in Ann. Probab. (1996).

[C] J.T. Cox: *Coalescing random walks and voter model consensus times on the torus in* $\mathbf{Z}^d$. Ann. Probab. **17**, 1333-1366 (1989)

[CFG] J.T. Cox, K. Fleischmann and A. Greven: *Comparison of interacting diffusions and an application to their ergodic theory*, (preprint).

[CGri] J.T. Cox and D. Griffeath: *Diffusive clustering in the two dimensional voter model*, Ann. Probab. **14**, 347-370 (1986).

[CGS1] J.T. Cox, A. Greven and T. Shiga: *Finite and infinite systems of interacting diffusions*, Probab. Th. Rel. Fields **103**, 165 - 197 (1995).

[CGS2] J.T. Cox, A. Greven and T. Shiga: *Finite and infinite systems of interacting diffusions, Part II*, (preprint).

[CM] R.A. Carmona and S.A. Molchanov: *Prabolic Anderson problem and intermittency*, AMS Memoir **108**, No.518 (1994).

[D] D.A. Dawson: *The critical measure diffusion process*, Z. Wahr. verw. Geb. **40**, 125-145 (1977).

[DG] D.A. Dawson and A. Greven: *Multiple time scale analysis of interacting diffusions*, Prob. Th. Rel. Fields **95**, 467-508 (1993).

[K] M. Kimura: *"Stepping stone"model of population*, Ann. Rep. Nat. Inst. Gen. **3**, 62-63 (1953).

[KO] M. Kimura and T. Ohta: *Theoretical Aspects of Population Genetics*, Princeton University Press (1971).

[NS] M. Notohara and T. Shiga: *Convergence to genetically uniform state in stepping stone models of population genetics*, J. Math. Biol. **10**, 281-294 (1980).

[Sa] K. Sato: *Limit diffusions of some stepping stone models*, J. Appl. Prob. **20**, 460-471 (1983).

[S1] T. Shiga: *An interacting system in population genetics*, J. Math. Kyoto Univ. **20**, 213-243 (1990).

[S2] T. Shiga: *An interacting system in population genetics II*, J. Math. Kyoto Univ. **20**, 723-733 (1990).

[S3] T. Shiga: *Ergodic theorems and exponential decay of sample paths for certain interacting diffusion systems*, Osaka J. Math. **29**, 789-807 (1992).

[S4] T. Shiga: *Stationary distribution problem for interacting diffusion systems*, CRM Proceeding and Lecture Notes **5**, 199-211 (1994).

[S5] T. Shiga: *A note on sample Lyapunov exponents of a class of SPDE*, (preprint).

[SS] T. Shiga and A. Shimizu: *Infinite-dimensional stochastic differential equations and their applications*, J. Math. Kyoto Univ. **20**, 395-416 (1980).

[SU] T. Shiga and K. Uchiyama: *Stationary states and their stability of the stepping stone model involving mutation and selection*, Prob. Th. Rel. Fields **73**, 87-117 (1986).

[W] S. Watanabe: *A limit theorem of branching processes and continuous branching processes*, J. Math. Kyoto Univ. **8**, 141-167 (1968).

[ZMRS] Ya.B. Zeldovich, S.A. Molchanov, A.A. Ruzmaikin and D.D. Sokoloff: *Intermittency, diffusion and generation in nonstationary random medium*, Soviet Sci. Rev. Math. Phys. **7**, 1-110 (1988).

間接相互作用と不均一環境における個体群の存続可能性

Indirect interactions
and
persistence of populations in a heterogeneous environment

難波　利幸 (大阪女子大学・学芸学部・基礎理学科)

生態学とは，生物の分布と個体数を決定する相互作用についての科学的研究である (Krebs, 1972)。生物の分布や個体数は，環境との相互作用や，生物群集を構成する多くの種との相互作用に依存して決まる。複雑な生物群集を要素に分けて解析する手段として，単一種の個体群動態の調査や，２種の生物を対として調べる研究が数多く行われてきた。しかし，最近になって，第３の種が介在することによって２種の相互作用の性質が変わる現象や，相互作用の連鎖によって２種間の相互作用とは異なる性質が現れる現象が注目されるようになってきた。

ここでは,「間接相互作用」として，第３の種が介在することによる種間の相互作用の連鎖だけを考える。何種類の間接相互作用を認めるかは研究者によって異なるが，(1) ２種の捕食者（消費者）が１種のえさ（資源）を奪い合う「資源利用競争 (Exploitative competition)」，(2) ２種の被食者が捕食者を共有することによって起こる「見かけの競争 (Apparent competition)」，(3) 同一栄養段階にいて互いに競争関係にある種の一方を捕食者が選択的に捕食することによって他方の存続が可能になる「要の捕食 (keystone predation)」，(4) ３栄養段階の食物連鎖で上位の捕食者が中位の種の個体数を減らすことによって下位の種の個体数が増える「食物連鎖のカスケード (trophic cascade)」，(5) ２種の捕食者と２種の被食者からなる系で，一方の捕食者が被食者を減らすことで他方の被食者が増え，これを食う捕食者に利益をもたらす「間接相利共生 (Indirect mutualism)」がよく知られている。

また，生物の個体数と分布は，局所的な相互作用だけではなく，生息環境の空間的な不均一性や生物個体の移動の仕方にも依存する。生物の空間分布パターンを記述するモデルの一つとして，生物の相互作用を化学反応になぞらえ，生物の移動はランダムであると仮定して拡散項で表わす「拡散反応方程式」が盛んに研究されてきた。そして，均質な環境でも拡散によって不均一なパターンが形成される場合があることや，移動が活発で空間的な均質性が保たれるときには共存できない（直接的な）競合関係にある２種の生物が，適度な拡散のもとでは共存できる場合があることなどが明らかになっている。後者の共存要因の主要なものは次の二つである。一つは，２種のうちのどちらか一方が絶滅する二つの平衡状態がともに安定である双安定性 (bistability) を利用するもの（空間が離散的な場合は Levin (1974)，空間連続モデルは Matano and Mimura (1983)）であり，もう一つは，好適な環境からより不適な環境への移出によって優位な競争者の個体数が減り，劣位の競争者に対する競争圧が減る効果を利用するもの（連続モデルは Pacala and Roughgarden (1982)，離散モデルは Takeuchi (1987)）である。

３種以上の生物の相互作用と拡散を考えると，２種の場合と同様の現象だけではなく，環境の不均一性と間接相互作用が関わることによる特有の現象が現れることがある。Mimura and Kan-on (1986) は，要の捕食の効果が充分ではなく，局所的には「捕食者の介在による共存 (predator-mediated coexistence)」が不可能な系でも，拡散が加わることによって３種共存が可能になる場合があることを示している。ここでは，パッチ状の環境を想定し，空間について離散的な拡散反応モデルを，見かけの競争と資源利用競争の場合について調べ，３種の共存可能性を探る。

(1) パッチ状環境に生息する２種の被食者（密度u_i, v_i）と１種の捕食者（密度w_i）を考える。パッチに違いがある場合，パッチの大きさあるいは質によって，そのパッチにおける被食者の環境収容力や個体数が変わる。それが十分大きければ，そのパッチが孤立していても捕食者が存続しうるので，捕食者にとってsourceとなるが，被食者の環境収容力が小さければ，他のパッチからの移入なしには捕食者は存続できず，そのパッチはsinkとなる。また，一方の被食者の環境収容力が大きければ，捕食者の個体数が増加し，他方の被食者に対する悪影響が増すため，見かけの競争の影響が強く現れる。ここでは，一つのsourceといくつかのsinkがあり，捕食者のみがパッチ間を移動するとし，捕食者を介在する間接作用と環境の不均一性の相互作用が，系の存続に及ぼす影響を調べる。モデルとして，空間が離散的な反応拡散方程式を考え，捕食者－被食者の相互作用はロトカーボルテラ型を仮定する。特に，被食者の環境収容力やパッチ間移動の影響が捕食者と被食者とでは逆になることや，パッチの空間配置の違いによって３種系の存続可能性が異なることを示す。

$$\begin{aligned}
\frac{du_i}{dt} &= \left\{r_{ui}\left(1-\frac{u_i}{K_{ui}}\right)-a_{ui}w_i\right\}u_i,\\
\frac{dv_i}{dt} &= \left\{r_{vi}\left(1-\frac{v_i}{K_{vi}}\right)-a_{vi}w_i\right\}v_i,\\
\frac{dw_i}{dt} &= \left(-d_{wi}+b_{ui}u_i+b_{vi}v_i\right)w_i-\sum_{j=0}^{n}D_{ij}(w_i-w_j).
\end{aligned}$$

(2) 二つのパッチにおいて，餌をめぐって競争する２種の捕食者の存続可能性を調べる。i番目のパッチにおける被食者密度をN_i，捕食者の密度をそれぞれ，P_i，Q_i $(i=1,2)$とする。被食者はロジスティック成長をし，被食者–捕食者間の相互作用はHollingのII型 (飽和型) であると仮定する。簡単のために，被食者はパッチ間を移動せず，捕食者だけが移動すると考え，捕食者の移動は二つのパッチでの密度差に比例する拡散型であると仮定する。

$$\begin{aligned}
\frac{dN_i}{dt} &= \left\{r\left(1-\frac{N_i}{K_i}\right)-\frac{C_pP_i}{1+C_ph_pN_i}-\frac{C_qQ_i}{1+C_qh_qN_i}\right\}N_i\\
\frac{dP_i}{dt} &= \left(\frac{B_pC_pN_i}{1+C_ph_pN_i}-m_p\right)P_i-d_p(P_i-P_j)\\
\frac{dQ_i}{dt} &= \left(\frac{B_qC_qN_i}{1+C_qh_qN_i}-m_q\right)Q_i-d_q(Q_i-Q_j)\\
&(i=1,2,\quad j\neq i)
\end{aligned}$$

この系では，パッチ間移動がない場合は，平衡状態では２種は共存できないが，餌密度の高低によって２種の捕食者の成長率が逆転するならば，振動状態で共存できることが分かっている（Hsu, Hubbell, and Waltman, 1978）。餌密度が低いときはＰの方が有利で，餌密度が高いときはＱの方が有利であるようにパラメータの値を選ぶと，被食者の環境収容力Kが小さいパッチは，孤立しているとＱが存続できないのでＱにとってsinkとなり，Kが大きなパッチは，ＱにとってはsourceであるがＰにとってsinkとなる。

平衡状態と周期解を数値的に探すことにより，拡散係数d_pとd_qをうまく選べば，(A) パッチ１はＰにとってsource，Ｑにとってsinkで，パッチ２はその逆のとき，それぞれの種にとって有利なパッチからのrescue effectによって共存が可能であるだけではなく，(B) どちらのパッチもＰにとってsource，Ｑにとってsinkであっても２種の共存が可能な場合がある，ことを示す。

N 種サイクリック系の安定性と偶奇性

今野紀雄（横浜国立大学 工学部）

本講演では、大別して以下で与えられる、２つの N 種（状態）サイクリック系に関する諸結果について報告する。

１．最初に考察するのは、$\mathbf{Z}^2$ 上の連続時間マルコフ過程で、格子点が i 種で占有されるとき、$i+1$ 種への遷移率が以下で与えられるモデルである：

$$\alpha_{i,i+1} \times (\text{最近接格子点に } i+1 \text{ 種が占める数})$$

但し、$i \in \{0, 1, \ldots, N\}$、また $\mathrm{mod}N$ で考える。このとき次の問題を検討する（Sato, Yoshida and Konno [1]）。
(1) 系の安定性：具体的には、シミュレーション、平均場近似、ペア近似の結果の比較
(2) $\alpha_{0,1} = \alpha$、それ以外は $\alpha_{i,i+1} = 1$ とし、α を変化させたときの種数 N に対する偶奇性
(3) 固定（fixation）の問題
一部に関しては、ツリー上の結果との比較も行う（Sato, Konno and Yamaguchi [2]）。また、これらの諸問題に関連する研究のレヴューは、例えば、Konno[3] の第８章を参照。

２．さらに、上記連続時間のモデルの平均場近似に対する離散時間版モデル（但し、空間次元は一般化する）に関して、以下の検討も行った。
(1) 種数 N と最近傍数 n との相図に関する結果及び予想
(2) 特に、種数を $N=3$ とし、最近傍数 n を変化させたときの安定性

参考文献

1. K.Sato, N.Yoshida and N.Konno, Parity law for population dynamics of N-species with cyclic advantage competitions. Preprint.
2. K.Sato, N.Konno and T.Yamaguchi, Paper-scissors-stone game on trees. *Memoirs of the Muroran Institute of Technology* **47** (1997) 109-114.
3. N.Konno, *Lecture Notes on Interacting Particle Systems* (Rokko Lectures in Mathematics, No.3, Kobe University, March 1997)。これに関しては、次のホームページで入手可能：http://www.math.s.kobe-u.ac.jp/publications。

POSITIVE SOLUTIONS OF DIFFUSIVE LOGISTIC EQUATIONS

KAZUAKI TAIRA

Institute of Mathematics, University of Tsukuba, Tsukuba 305-8571, Japan

The purpose of this talk is to illustrate how the theory of linear elliptic eigenvalue problems with indefinite weight functions can be used to analyze reaction-diffusion models in mathematical ecology and population genetics. The two main components of the models we consider are the "reaction" or growth terms and the "diffusion" or dispersal terms. More precisely, reaction-diffusion equations arise in ecological modelling when nonlinear dynamics describing the growth or decline of a population are combined with a diffusion process describing the spatial dispersal of that population. Solutions to the reaction-diffusion models typically represent population densities, or in related problems of population genetics, the distribution of certain alleles within a population. If the population being modelled can disperse through its environment, then the population density need not be uniform. Assuming that dispersal takes place via random walks or Brownian motion leads to a diffusion equation for the population density. In many cases, the behavior of solutions of such reaction-diffusion equations is determined by the nature of the equilibrium states. Those in turn can often be described via such methods as bifurcation theory and linealized stability analysis, which immediately lead to problems in linear specral theory. Both the modelling and the analysis can introduce considerations which require the study of elliptic eigenvalue problems with indefinite weight functions, and such problems will be the main subject of discussion.

Now let Ω be a bounded domain of Euclidean space $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, with boundary $\partial\Omega$ of class $C^{2+\theta}$ with exponent $0 < \theta < 1$; its closure $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ is an n-dimensional, compact manifold with boundary. The dynamics of a population inhabiting a strongly heterogeneous environment are modelled by diffusive logistic equations of the form

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = d\,\Delta u + m(x)\,u - h(x)\,u^2 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\
u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\
u = u_0 & \text{in } \Omega.
\end{cases} \tag{1}
$$

Here:

(i) $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_N^2$ is the usual Laplacian.
(ii) d is a positive parameter.
(iii) $m(x)$ is a real-valued function on $\overline{\Omega}$.

Key words and phrases. Diffusive logistic equations, indefinite weight, positive solution.

(iv) $h(x)$ is a nonnegative function on $\overline{\Omega}$.

We discuss our motivation and some of the modelling process leading to problem (1). The basic interpretation of the various terms in problem (1) is that $u(x)$ represents the population density of a species inhabiting a region Ω. The members of the population are assumed to move about Ω via the type of random walks occurring in Brownian motion which is modelled by the diffusive term $d\Delta$; hence d represents the rate of diffusive dispersal, so large values of d the population spreads more rapidly than for small values of d. The local rate of change in the population density is described by the density dependent term $m(x)-h(x)u$. In this term, $m(x)$ describes the rate at which the population would grow or decline at the location x in the absence of crowding or limitations on the availability of resources. The sign of $m(x)$ will be positive on favorable habitats for population growth and negative on unfavorable ones. Specifically $m(x)$ may be considered as a food source or any resource which will be good in some areas and bad in others. The term $-h(x)u$ describes the effects of crowding on the growth rate of the population at the location x; these effects are assumed to be independent of those determining the growth rate at low densities. The size of $h(x)$ describes the strength of the effects of crowding within the population.

On the other hand, in terms of biology, the homogeneous Dirichlet condition represents that Ω is surrounded by a completely hostile exterior such that any member of the population which reaches the boundary dies immediately; in other words, the exterior of the domain is deadly to the population. If the exterior is hostile but not completely deadly, a mixed or Robin boundary condition results, and the analysis is similar. If the boundary acts as a barrier, so that individuals reaching the boundary simply return to the interior, a Neumann boundary condition results. The analysis may be somewhat different, since $-\Delta$ will have zero as an eigenvalue, but the same general approach can sometimes still be used.

To study problem (1), we may view it as generating a dynamical system on the Sobolev space $W^{1,2}(\Omega)$. Then problem (1) admits a unique classical solution for sufficiently small times. However, comparison theorems based on the maximum principle guarantee that nonnegative initial data remain nonnegative, and so the existence of global solutions in time, since the nonlinearlity we are dealing with is *sublinear*. We show that problem (1) admits a unique positive steady state which is a global attractor for nonnegative nontrivial solutions provided that d is sufficiently small, so that the population persists, and further that the zero solution is a global attractor for nonnegative solutions if d is sufficiently large, so that the population tends to extinction.

The models are shown to posess a unique positive steady state, that is, a unique positive solution of the problem

$$(2) \qquad \begin{cases} -d\,\Delta u = m(x)\,u - h(x)\,u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

The object of the analysis is to determine how the spatial arrangement of favorable and unfavorable habitats affects the population being modelled. As is frequently the case, we find that many of the qualitative aspects of the analysis depend crucially on the size of the first positive eigenvalue for a linearized elliptic problem with a sign indefinite weight. In fact, if $\lambda_1(m)$ is the first eigenvalue of the Dirichlet problem with an indefinite weight function

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\, m(x)\, \phi & \text{in } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

then we show that problem (2) has a unique positive solution which is an attractor for nonnegative nontrivial solutions of problem (1) provided that $\lambda > \lambda_1(m)$, and no positive solutions if $\lambda \leq \lambda_1(m)$, where $\lambda = 1/d$.

The basic ecological content of our results is that, for a species with a given rate of diffusion, the worst environments are those where favorable and unfavorable regions are closely intermingled, producing "cancellation" effects, and the best are those where the favorable regions are relatively large and few in numbers. This conclusion has significant implications for the design of wildlife refuges. It suggests that a small number of large preserves will provide better protection for a species modelled by problem (1) than many small ones, and if the preserves are too small and too closely intermingled with regions where the environment has been damaged, they may not effectively protect the species from extinction.

References

[BL] K. J. Brown and S. S. Lin, *On the existence of positive eigenfunctions for an eigenvalue problem with indefinite weight function*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 112–120.

[CC] R. S. Cantrell and C. Cosner, *Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **112A** (1989), 293–318.

[Co] C. Cosner, *Eigenvalue problems with indefinite weights and reaction-diffusion models in population dynamics*, Reaction-diffusion equations, (K. J. Brown and A. A. Lacey, eds.), Clarendon Press, Oxford, 1990, pp. 117–137.

[CR] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Functional Analysis **8** (1971), 321–340.

[FKLM] J. M. Fraile, P. Koch Medina, J. López-Gómez and S. Merino, *Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation*, J. Differential Equations **127** (1996), 295–319.

[MM] A. Manes and A. M. Micheletti, *Un'estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellitici del secondo ordine*, Boll. Un. Mat. Ital. **7** (1973), 285–301.

[Ra] P. H. Rabinowitz, *Some aspects of nonlinear eigenvalue problems*, Rockey Mountain J. Math. **3** (1973), 161–202.

[Sk] J. G. Skellam, *Random dispersal in theoretical populations*, Biometrika **38** (1951), 196–218.

[Sm] J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hon Kong Barcelona Budapest, 1994.

発酵作用に現われる非線型楕円型境界値問題

梅津健一郎 (前橋工科大学)

本講演では化学の酵素反応に現われる非線型楕円型境界値問題を考察する。反応機構はミカエリス・メンテン機構 (Michaelis-Menten mechanism) と呼ばれ、非線型境界条件として記述される。

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N (N \geq 2)$ の有界領域を D として、領域 D は滑らかな境界 ∂D をもつとする。このとき次の非線型楕円型境界値問題を考える。

$$\begin{cases} (-\Delta + c(x))\, u(x) = f(x), & x \in D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x') = \dfrac{\sigma u(x')}{K + u(x')}, & x' \in \partial D. \end{cases} \qquad (*)_\sigma$$

ただし、(1) $c \in C^\infty(\overline{D})$, $c(x) \geq 0$ and $c(x) \not\equiv 0$ in D, (2) $f \in C^\theta(\overline{D})\,(0 < \theta < 1)$, $f(x) \geq 0$ in $\overline{D}$, (3) $\mathbf{n}$ は ∂D の外向き単位法線ベクトル場、(4) σ は正のパラメータ、(5) K は正の定数。

問題 $(*)_\sigma$ は次の非線型放物型初期値境界値問題の定常状態を記述する方程式である。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = (\Delta - c(x))u(x,t) + f(x), & (x,t) \in D \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x',t) = \dfrac{\sigma u(x',t)}{K + u(x',t)}, & (x',t) \in \partial D \times (0,T). \end{cases}$$

非線型境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{\sigma u}{K + u}$$

はミカエリス・メンテン機構による酵素反応の様子を生成物の濃度で記述している。パラメータ σ は酵素 (enzyme) の濃度を表し、定数 K はミカエリス定数 (Michaelis constant) と呼ばれる (cf.[3], [2])。領域 D においては Δu は生成物の拡散現象を表し、さらに $f - cu$ は化学反応などにより生成物の濃度に比例して (一次反応)、自己崩壊が起こっていることを意味する。

問題 $(*)_\sigma$ の**正値解**とは領域 D で正値をとる $C^2(\overline{D})$-解を意味する。問題 $(*)_\sigma$ の正値解の存在 (cf.[1]) と一意性 (cf.[2]) についてはすでに研究されている。本講演の目的は正値解の σ に関する漸近挙動を調べることである。

関数 v_0 を次の問題の唯一つの正値解とする：

$$\begin{cases} (-\Delta + c)u = f & \text{in } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

関数 v_∞ を次の問題の唯一つの正値解とする：

$$\begin{cases} (-\Delta + c)u = 0 & \text{in } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 1 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

定数 σ_1 を固有値問題

$$\begin{cases} (-\Delta + c)\varphi = 0 & \text{in } D, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma\varphi & \text{on } \partial D, \end{cases}$$

の、D で正値をとる固有関数をもつ一意的に決まる固有値 (principal eigenvalue) とする。

このとき、super- and sub-solutions による方法を用いて次の結果を得る。

定理 1 (i) 関数 f は D において $f \not\equiv 0$ を満たすとする。このとき問題 $(*)_\sigma$ は任意の $\sigma > 0$ に対して唯一つ正値解 u_σ をもち、定数 $1 < p < \infty$ について正値解 u_σ は次の漸近挙動を示す。

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} \max_{x \in \overline{D}} |v_0(x) - u_\sigma(x)| = 0,$$

$$\lim_{\sigma \to \infty} \left\| v_\infty - \frac{u_\sigma}{\sigma} \right\|_{W^{1,p}(D)} = 0.$$

(ii) 関数 f は D において $f \equiv 0$ を満たすとする。このとき問題 $(*)_\sigma$ は任意の $\sigma > \sigma_1$ に対して唯一つ正値解 u_σ をもち、どんな $0 < \sigma \leq \sigma_1$ に対しても正値解をもたない。さらに定数 $1 < p < \infty$ に対して正値解 u_σ は次の漸近挙動を示す。

$$\lim_{\sigma \downarrow \sigma_1} \max_{x \in \overline{D}} u_\sigma(x) = 0,$$

$$\lim_{\sigma \to \infty} \left\| v_\infty - \frac{u_\sigma}{\sigma} \right\|_{W^{1,p}(D)} = 0.$$

ただし $\|\cdot\|_{W^{1,p}(D)}$ は *Sobolev* 空間 $W^{1,p}(D)$ のノルムを表す。

定理 1 から問題 $(*)_\sigma$ の正値解 u_σ は $\sigma \to \infty$ のとき、f によらず同じ関数 σv_∞ に近づくことがわかる。

参考文献

[1] Amann, H., Nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions, In : New Developments in differential equations (Eckhaus, W. ed.), Math. Studies, Vol. 21, North–Holland, Amsterdam, 1976.

[2] Pao, C. V., Nonlinear parabolic and elliptic equations, Plenum, New York London, 1992.

[3] Ross, L. W., Perturbation analysis of diffusion-coupled biochemical reaction kinetics, SIAM J. Appl. Math., **19** (1970), 323–329.

2.

Fractal Geometry and Dynamical Systems

分担者　中村 宗敬（山梨大・教育人間）
日　時　１９９８年９月２１日（月），２２日（火）
場　所　広島大学理学部

本研究集会はフラクタル、力学系の諸分野の最新の成果の交流を企図して開催され，11名の参加者を得た。特に大学院生等の若手の研究者が多かったことを記しておきたい．

中国から Wu Jun (Wuhan Univ.), Feng Dejun (Quinghua Univ.) 両氏を迎えたが，Wu Jun 氏の講演はフラクタルによる 1 次元周期タイリングに関するもので，非有界なタイリングを扱っている点に興味が持たれた．また，Feng Dejun 氏の講演は様々な必ずしも閉でないフラクタルの次元を記号力学系と関連させて述べたもので，古典的な Eggleston の結果を大きく拡張したものであった。両氏とも現在精力的に研究している若い研究者とのことで，その活気が伝わってくる講演であった．

他の発表者，参加者間でも議論が活発に行われ，小規模かつ短時間の研究集会ではあったが，フラクタルについて様々な角度からアプローチが試みられ，参加者各自の刺激が喚起された機会になったと信ずる．

以下に本研究集会のプログラムと主な講演のアブストラクトを掲載する．

プ ロ グ ラ ム

９月２１日（月）

１３：３０−１４：３０　角 大輝（京大）
Skew products related to finitely generated rational semigroups

１４：４５−１５：４５　伊藤 俊次（津田塾大）
Problems on Atomic-surfaces

１６：００−１７：００　Wu Jun（Wuhan Univ.）
Tile R with unbounded tiles

９月２２日（火）

１０：００−１１：００　河邑 紀子（奈良女子大）
Hausdorff dimension and Computational Complexity,　Four classes of functions with fractal properties

１１：１５−１２：１５　那須 正和（広島大）
Textile Systems

１３：３０−１４：３０　Feng Dejun　(Qinghua Univ.)
On the distribution of the long-term average on the symbolic space

１４：４５−１５：４５　中村 宗敬（山梨大）
A construction of singular potentials on sofic subshifts

１６：００−１７：００　池田 諭（東京農工大）
On packing measures of a certain class of self-similar sets

Textile systems

Masakazu Nasu
Faculty of Engineering, Hiroshima University

Let $G = (G, V_G, i_G, t_G)$ be a *graph*, where A_G and V_G denote the arc set and vertex set of G respectively and $i_G : A_G \to V_G$ and $t_G : A_G \to V_G$ which map every arc to the initial vertex and the terminal vertex respectively. Hence a graph G is represented by $G : V_G \xleftarrow{i_V} A_G \xrightarrow{t_V} V_G$.

Let $X_G = \{(a_j)_{j \in \mathbf{Z}}\ \forall j \in \mathbf{Z}, a_j \in A_G, t_G(a_j) = i_G(a_{j+1})\}$. Then we have a subshift (X_G, σ_G), which is called the *topological Markov shift* whose *defining graph* is G

For graphs Γ and G, a *graph-homomorphism* from Γ to G, is a pair (p_A, p_V) of mappings $p_A : A_\Gamma \to A_G$ (*arc map*)and $p_V : V_\Gamma \to V_G$ (*vertex map*) such that the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd}
V_\Gamma \arrow[d, "p_V"'] & A_\Gamma \arrow[l, "i_\Gamma"'] \arrow[r, "t_G"] \arrow[d, "p_A"'] & V_\Gamma \arrow[d, "p_V"] \\
V_G & A_G \arrow[l, "i_G"'] \arrow[r, "i_G"] & V_G
\end{tikzcd}$$

For $u \in V_\Gamma$, we can define $\vec{p}_{A,u} : i_\Gamma^{-1}(u) \to i_G^{-1} p_V(u)$ as the restriction of p_A on $i_\Gamma^{-1}(u)$. Similarly we can define $\vec{p}_{A,u} : t_\Gamma^{-1}(u) \to t_G^{-1} p_V(u)$. We say p *right resolving* if $\vec{p}_{A,u}$ is 1-1 for all $u \in V_\Gamma$. We say p *right complete* if $\vec{p}_{A,u}$ is onto for all $u \in V_\Gamma$. The graph homomorphism p is said to be *right covering* if p is right resolving and right complete. The left versions these notations are similarly defined by using $\vec{p}_{A,u}$. A graph homomorphism $p : \Gamma \to G$ defines a *1-block map* $\phi_p : X_\Gamma \to X_G$ by $\phi_p((\alpha_j)_{j \in \mathbf{Z}}) = (p(\alpha_j)_{j \in \mathbf{Z}}), (\alpha_j)_{j \in \mathbf{Z}} \in X_\Gamma, \alpha_j \in A_\Gamma$.

We define a *textile system* T over a graph G to be an ordered pair of graph-homomorphismsp : $\Gamma \to G$ and $q : \Gamma \to G$ such that for $\alpha \in A_\Gamma$, the quadruple $(i_\Gamma(\alpha), t_\Gamma(\alpha), p_A(\alpha), q_A(\alpha))$ uniquely determines α. We write $T = (p, q : \Gamma \to G)$. We have the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
V_G & A_G \arrow[l, "i_G"'] \arrow[r, "i_G"] & V_G \\
V_\Gamma \arrow[u, "p_V"] \arrow[d, "q_V"'] & A_\Gamma \arrow[l, "i_\Gamma"'] \arrow[r, "t_G"] \arrow[u, "p_A"] \arrow[d, "q_A"'] & V_\Gamma \arrow[u, "p_V"'] \arrow[d, "q_V"] \\
V_G & A_G \arrow[l, "i_G"'] \arrow[r, "i_G"] & V_G
\end{tikzcd}$$

We have two graphs

$$G_T : V_G \xleftarrow{p_V} V_\Gamma \xrightarrow{q_V} V_G \quad \text{and} \quad \Gamma_T : A_G \xleftarrow{p_A} A_\Gamma \xrightarrow{q_A} A_G$$

and define a textile system $T^* = (p^T, q^T : \Gamma^T \to G^T)$ over G^T with the graph-automorphisms $p^T = (i_\Gamma, i_G)$ and $q^T = (t_\Gamma, t_G)$, which is called *Dual* of T. Let $U_T = \{(\alpha_{ij})_{i,j \in \mathbf{Z}} | \alpha_{ij} \in A_\Gamma, t_\Gamma(\alpha_{ij}) = i_\Gamma(\alpha_{i,j+1}), q_A(\alpha_{ij}) = p_A(\alpha_{i+1,j})$, for all $i, j \in \mathbf{Z}\}$. Each point of U_T is called a textile woven by T. Let $Z_T = \{(\alpha_{0j})_{j \in \mathbf{Z}} | \alpha_{ij} \in U_T\}$ and $X_T = \{(p_A(\alpha_{0j}))_{j \in \mathbf{Z}} | \alpha_{ij} \in U_T\}$. We have subshifts $(Z_{T}, _T)$ and (X_T, σ_T). We call (X_T, σ_T) the *woof shift* (i.e., sushifts of the horizontal threads) of T. The map p_A and $q_A$anturally define an onto endomorphism map $\xi_T : Z_T \to X_T$

and $\eta_T : Z_T \to X_T$ respectively. If ξ_T is 1-1, then we define an onto endomorphism φ_T of (X_T, σ_T) by $\varphi_T = \eta_T \xi_T^{-1}$. If both ξ_T and η_T are 1-1, φ_T is an automoropihsm of (X_T, σ_T). We say that T is *nondegenerate* if $(X_T, \sigma_T) = (X_G, \sigma_G)$. For the dual $T*$, we have $(Z_{T^*}, _{T^*})$, (X_{T^*}, σ_{T^*}) $\xi_{T^*} : Z_{T^*} \to X_{T^*}$ and $\eta_{T^*} : Z_{T^*} \to X_{T^*}$. We call (X_{T^*}, σ_{T^*}) the *warp shift* (i.e., sushifts of the vertical threads) of T.

Fact. For every endomorphism φ of a toplogical Markov shift (X_G, σ_G), tehre is a textile system T such that $X_T = \cap_{n=0}^{\infty} \varphi^n(X_G)$, $\sigma_T = \sigma_G | X_T$, and $\varphi_T = \varphi | X_T$.

Theorem 1. *Let T be a textile system. If ξ is 1-1, then $\varphi_T = \eta_T \xi_T^{-1}$ is expansive if and only if both ξ_{T^*} and η_{T^*} are 1-1; if all ξ_T, η_T, ξ_{T^*} are 1-1, then (X_T, φ_T) is (toplogically) conjugate to (X_{T^*}, σ_{T^*}).*

Theorem 2. *Let (X, σ) be a toplogical Markov shift and φ_T an automorphi of (X, σ) with (X, φ) conjugate to a topological Markov shift. Then we can construct nondegenerate textile system T with ξ_T and η_T 1-1 such that there is a conjugacy $\psi : (X, \sigma)$ with (X_T, σ_T) with $\varphi_T = \psi \varphi \psi^{-1}$ and $T^* = (p^T, q^T : \Gamma^T \to G^T)$ is nondegenerate with xi_{T^*} and η_{T^*} 1-1, so that (X, φ) is conjugate to the topological Markov shift (X_{G^T}, σ_{G^T}).*

We have a procedure, given any automorophism φ of any topological Markov shift (X, σ) such that (X, φ) is conjugate to a topological Markov shift, to obtain the defining graph of a topological Markov shift to which (X, φ) is conjugate.

A textile system $(p.q : \Gamma \to G)$ is said to be LR if p is right covering and q is left covering.

If ξ is 1-1, then $\varphi_T = \eta_T \xi_T^{-1}$ is expansive if and only if both ξ_{T^*} and η_{T^*} are 1-1; if all ξ_T, η_T, ξ_{T^*} are 1-1, then (X_T, φ_T) is (toplogically) conjugate to (X_{T^*}, σ_{T^*}).

An LR or RL automorphism of a topological Markov shift has pseudo-orbit tracing property and its topological entropy is explicitly given. In particular, the dynamical system defined by an expansive LR or RL automorphism is conjugate to a topological Markov shift, the defining graph of which is explicitly given. Therefore we are interesteed in non-ELR and non-ERL automorophism φ of any topological Markov shifts. As stated above, there is a procedure, given any automorphism φ of any topological Markov shift (X, σ) such that (X, φ) is conjugate topological Markov shift, to obtain the defining graph of topological Markov shift to which (X, φ) is conjugate. An example of expansive non-ELR and non-ERL automorphism φ of a topological Markov shift (X, σ) such that (X, φ) is conjugate to a topological Markov shift, was found by using that procedure ([2], section 10).

Problem. If φ is an expansive automorphism of topologically transitive topological Markov shift (X, σ), then is (X, φ) conjugate to a topological Markov shift?

Then there is an example which shows that for the above question with (X, σ) not topologically transitive, the answer is negative [1].

Problems. Find an example of expansive non-ELR and non-ERL automorphism of a full shift, if any. Is the dynamical system defined by an expansive automorphism of a full shift always conjugate to a full shift?

References

[1] D. Fiebig, private communication, 1996.

[2] M. Nasu, Textile systems for endomorphisms and automorphisms of the shift, Mem. Amer. Math. Soc. 546 (1995).

Four classes of functions with self-similarity

Kiko Kawamura
Graduate School of Human Culture, Nara Women's University

Mandelbrot introduced a notion "self-similar set" which is a set constructed from some miatures of the whole. Hutchinson gave a more precise definition and Hata generalizes the definition: For any finitely many contractions $\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_{m-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, the set equation $X = \psi_0(X) \cup \psi_1(X) \cup \cdots \cup \psi_{m-1}(X)$ has an unique nonempty compact solution. They defined the self-similar set as the solution of such set equation.

Our aim in this paper is to show the close relation among functions with self-similarity studied in the past from the viewpoint of functional equations. First, we define "self-similar sets of type A as the solution of the set equation $X = \psi_0(X) \cup \psi_1(X)$ where ψ_i's are contractions and similar maps. For example, Lévy curve, Dragon and Koch curve are such sets. Next we introduce the following four functional equations.

$$G^1_{\alpha,\gamma}(x) = \begin{cases} \alpha G^1_{\alpha,\gamma}(2x) & 0 \le x < 1/2, \\ \gamma G^1_{\alpha,\gamma}(2x-1) + (1-\gamma) & 1/2 \le x \le 1, \end{cases} \tag{1}$$

$$G^2_{\alpha,\gamma}(x) = \begin{cases} \alpha \overline{G^2_{\alpha,\gamma}(2x)} & 0 \le x < 1/2, \\ \gamma \overline{G^2_{\alpha,\gamma}(2x-1)} + (1-\gamma) & 1/2 \le x \le 1, \end{cases} \tag{2}$$

$$G^3_{\alpha,\gamma}(x) = \begin{cases} \alpha G^3_{\alpha,\gamma}(2x) & 0 \le x < 1/2, \\ \gamma \overline{G^1_{\alpha,\gamma}(2x-1)} + (1-\gamma) & 1/2 \le x \le 1, \end{cases} \tag{3}$$

$$G^1_{\alpha,\gamma}(x) = \begin{cases} \alpha \overline{G^1_{\alpha,\gamma}(2x)} & 0 \le x < 1/2, \\ \gamma G^1_{\alpha,\gamma}(2x-1) + (1-\gamma) & 1/2 \le x \le 1, \end{cases} \tag{4}$$

where two complex parameters $\alpha, \gamma \in \mathbf{C}$ satisfy $|\alpha| < 1, |\gamma| < 1$.

Because each equation is represented by a pair of similar contractions on the complex plane, the image of the unique solution is nothing but a self-similar type A. Since an arbitrary self-similar set of type A is constructed from any pair of contractions by these equations. This is a main theme in this paper.

We have found an explicit formula to the solution of each functional equations by using numebr theoretical expressions. This is a main theorem.

Main Theorem 1. There exists a unique solution $G^1_{\alpha,\gamma}(x)$ of funcitonal equation (1) and it has following expression.

$$G^1_{\alpha,\gamma}(x) = (1-\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \alpha^{p(x,n-1)} \gamma^{q(x,n-1)}, \quad 0 \le x \le 1,$$

where binary expansion of x is denoted by $x = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n 2^{-n}$ with $\omega_n \in \{0,1\}$, $p(0,x) = q(x,0) = 0$, $q(x,n) = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$ and $p(x,n) = n - q(x,n)$. If $x = 1/2^i$, then it is determined that $\omega_i = 1$.

For other funcitonal equations, we can find similar exparessions as well as in (1). From these results, we can prove their differentiability in complex parameters α, γ.

On the other hand , Hata-Ymamaguti have discovered the following relations between Takagi funciton $T^1(x)$ and Lebesgue's singular funcitons $M^1_n(x)$.

$$\left.\frac{\partial M^1_n(x)}{\partial a}\right|_{a=1/2} = 2T^1(x).$$

By using a complex-valued function $G^1_{\alpha,1-\alpha}(x)$, Hata-Yamaguti equation's equation can be rewritten as follows. Let $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I \ \ (\alpha_R, \alpha_I \in \mathbf{R}\ )$.

$$\left.\frac{\partial G^1_{\alpha,1-\alpha}(x)}{\partial \alpha_I}\right|_{a=1/2} = 2T^1(x).$$

The above two equations show that the close relation among the functions whose images are self-similar sets of type A, a nowhere differentiable continuous function $T^1(x)$ and a singular function $M^1_a(x)$. Then a question arises: How about $G^2_{\alpha,1-\alpha}(x), G^3_{\alpha,1-\alpha}(x), G^4_{\alpha,1-\alpha}(x)$? Then we define functions $T^i(x)$ and $M^i_{\alpha,0}$ as follows.

$$\left.\frac{\partial G^i_{\alpha,1-\alpha}(x)}{\partial \alpha_I}\right|_{a=1/2} = \left.\frac{\partial M^i_n(x)}{\partial a}\right|_{a=1/2} = 2T^1(x) \quad (i = 2, 3, 4).$$

We have obtained exact representations of $T^i(x)$ and $M^i_{a,0}(x)(i = 1, 2, 3, 4)$. By comparing them, essential differences of four classes with the functions $G^i_{\alpha,\gamma}(i = 1, 2, 3, 4)$ are clarified. Furthermore we show that close relation between Cantor's function and self-similar sets of type A. This is an application of our previous results.

References

[1] K. Kawamura, A few remarks of real functions with fractal property, J. Sugaku, 49, in Japanese (1997).

[2] K. Kawamura, Real functions with fractal property, proceedings of the 35 th I.S.F.E., Aequationes Math. 55, 309-311(1998).

[3] M. Mizutani and S. Ito, Dynamical systems on dragon domain, Takagi function and its generalization, Japan J. Appl. Math. 4, 23-46(1984).

[4] T. Okada, T. Sekiguchi and Y. Shiota, An explicit formula of the exponential sums of digital sums, Japan J. Indust. Math. 12, 425-438 (1995).

[5] M. Yamaguti and M. Hata, Takagi function and its generalization, Japan J. Appl. Math. 1, 183-199(1984).

A contstruction of singular potentials on sofic subshifts

Munetaka Nakamura
Faculty of Education and Human Science, Yamanashi University

Let $S(n)$ be the set $\{0, 1, 2, \cdots n-1\}$ for $n \in \mathbf{N}$ and fix an integer N with $N \geq 2$. For a function φ on $I = [0, 1]$, we use the following notations.

$$\overline{\mathrm{Var}}_n(\varphi) = \max_{k \in S(N^n)} \sup \{|\varphi(x) - \varphi(y)| : x, y \in [kN^{-n}, (k+1)N^{-n}]\},$$

$$\underline{\mathrm{Var}}_n(\varphi) = \min_{k \in S(N^n)} \sup \{|\varphi(x) - \varphi(y)| : x, y \in [kN^{-n}, (k+1)N^{-n}]\}.$$

Let $\{a_n\}_{n \geq 0}$ be a sequence which satisfies the following conditions.

$$a_0 = 1, \quad a_n \searrow 0 \quad \text{as } n \nearrow \infty,$$
$$\inf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0,$$

Then we can (concretely) construct a function $\varphi : I \to I$ such that for some $C > 0$

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi(1) = 1, \quad C^{-1} a_n \leq \underline{\mathrm{Var}}_n(\varphi) \leq \overline{\mathrm{Var}}_n(\varphi) \leq C a_n.$$

In fact the construction is carried out by appropriately chosing piecewise linear patterns according to $\{a_n\}$ and substituting them succesively. It is easy to carry these singular functions over to abstract sympolic spaces.

Theorem. *Let (X, σ) be a sofic subshift on some alphabet and $\{a_n\}$ be a sequence which satisfies the condition stated above. Then we can concretely construct a function $\varphi \in C(X)$ such that, for some $C > 0$,*

$$c^{-1} a_n \leq \underline{\mathrm{var}}_n(\varphi) \leq \overline{\mathrm{var}}_n(\varphi) \leq c a_n,$$

where $\underline{\mathrm{var}}_n = \min_{c \in C_n} \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| : x, y \in c\}$, $\overline{\mathrm{var}}_n = \max_{c \in C_n} \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| : x, y \in_n\}$ *and C_n is the set of cylinders in X of length n. Furthemore the cardinality of obtained functions is uncountable.*

In particluar we can give concrete example of non-Hölder continuous potentials (functions) with the totally boounded property, which admit Gibbs measures with respect to these singular potentials.

References

[1] M. Nakamura, On the spectra of quasi-transfer operators defined by singular potentials, preprint.

On packing measures of a certain class of self-similar sets

Satoshi Ikeda
Tokyo University of Agriculture and Technology

Let ϕ be a positive non-decreasing continuous function defined on $\mathbf{R}^+ \equiv \{x \in \mathbf{R}; x \geq 0\}$ such that

$$\lim_{x \downarrow 0} \phi(x) = 0$$

and there exists a positive constant c with

$$\phi(2x) \leq c\phi(x) \quad \text{for any} \quad x \geq 0.$$

For a given subset $E \subset \mathbf{R}^N$, put

$$\mathcal{H}^\phi(E) \equiv \lim_{\rho \downarrow 0} \mathcal{H}^\phi_\rho(E), \quad \mathcal{P}^\phi(E) \equiv \inf\{\sum_i \overline{\mathcal{P}}^\phi(E_i); E \subseteq \bigcup_i E_i\}.$$

Here

$$\mathcal{H}^\phi_\rho(E) \equiv \inf\{\sum_i \phi(|V_i|); E \subseteq \bigcup_i V_i, \ |V_i| \leq \rho\},$$

$$\overline{\mathcal{P}}^\phi(E_i) \equiv \lim_{\rho \downarrow 0} \sup\{\sum_j \phi(|E_{i,j}|); |E_{i,j}| \leq \rho, \ \{E_{i,j}\} \text{ is a family of disjoint balls centered in } E_i\}$$

and $|F| = sup_{x,y \in F}|x-y|$ for a bounded $F \subset \mathbf{R}^N$. It is easily seen that $\mathcal{H}^\phi$ and $\mathcal{P}^\phi$ are the metric outer measures. From these two metric outer measures $\mathcal{H}^\phi$ and $\mathcal{P}^\phi$, we can define the modified Hausdorff measure and the modified packing measure by restricting them on their measurable sets respectively. Since they are the metric outer measures, we see that their measurable sets always contain the Borel subsets of $\mathbf{R}^N$. Putting $\phi(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \leq N$, then we substitute $\mathcal{H}^\alpha$ and $\mathcal{P}^\alpha$ for $\mathcal{H}^{x^\alpha}$ and $\mathcal{P}^{x^\alpha}$ respectively. We may define the Hausdorff dimension dim and the packing dimension Dim in the usual way,

$$\dim(E) \equiv \sup\{\beta \in \mathbf{R}^+; \mathcal{H}^\beta(E) = \infty\} \left(= \inf\{\beta \in \mathbf{R}^+; \mathcal{H}^\beta(E) = 0\}\right).$$

$$\mathrm{Dim}(E) \equiv \sup\{\beta \in \mathbf{R}^+; \mathcal{P}^\beta(E) = \infty\} \left(= \inf\{\beta \in \mathbf{R}^+; \mathcal{P}^\beta(E) = 0\}\right).$$

Suppose that $\{f_i\}_{i=0,1}$ are contruction mappings on $[0,1]$ such that

$$f_0 : x \to \frac{1}{2}x, \quad f_1 : x \to \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

For $(i_1 i_2 \cdots i_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$, put

$$[i_1, i_2, \cdots, i_n] = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_n}([0,1]).$$

Since $\bigcap_{n=1}^\infty [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n]$ consists of a single point for any $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$, we denote by $\bigcap_{n=1}^\infty [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n]$ the point. Then we can define a surjection map φ from $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ to $[0,1]$ by

$$\varphi \quad : \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to \varphi(\omega) = \bigcap_{n=1}^\infty [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n].$$

Through the whole paper, we assume that the base of logarithm equals to 2 and that $\{P_i\}_{i=0,1}$ satisfies the conditions

$$\sum_{i=0}^{1} P_i = 1, \quad 0 < P_0 = P \leq \frac{1}{2},$$

and set

$$K(P) = \left\{ \varphi(\omega) \ ; \begin{array}{l} \liminf_{n\to\infty} (\Pi_{j=1}^{n} P_{\omega_j} 2^{\beta(P)})^{(2n\log\log n)^{-1/2}} = 2^{-\sigma(P)}, \\ \limsup_{n\to\infty} (\Pi_{j=1}^{n} P_{\omega_j} 2^{\beta(P)})^{(2n\log\log n)^{-1/2}} = 2^{\sigma(P)} \quad \text{and} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} \omega_j}{n} = 1 - P \quad \text{for } \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}. \end{array} \right\}$$

where

$$\beta(P) = -P\log P - (1-P)\log(1-P), \sigma(P) = \left\{ P(2^{\beta(P)}\log P)^2 + (1-P)(2^{\beta(P)}\log(1-P))^2 \right\}^{1/2}.$$

$K(P)$ is a Borel set but not a compact set and hence it is not a Cantor set. Let ν_P be the Borel probability measure on $\mathbf{R}$ such that $\nu_P([\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n]) = \Pi_{j=1}^{n} P_{\omega_j}$ for any $n, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$. We call ν_P the $(P, 1-P)$ Bernoulli measure.

Then we have the followings.

THEOREM A

$$\dim(K(P)) = \mathrm{Dim}(K(P)) = \beta(P)$$

THEOREM B

(1) For a given $0 < P < 1/2$, we have that

$$\mathcal{H}^{\beta(P)}(K(P)) = 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{P}^{\beta(P)}(K(P)) = \infty.$$

(2) $0 < \mathcal{H}^{\beta(1/2)}(K(1/2)) \leq \mathcal{P}^{\beta(1/2)}(K(1/2)) < \infty$.

THEOREM C

(1)

$$\nu_P \perp H^{\beta(P)}|_{K(P)} \quad for \quad 0 < P < 1/2.$$

Here $\mu|_E$ denotes the restriction of μ to E.

(2) For any Borel set M such that $\nu_P(M) > 0$, we have

$$\mathcal{P}^{\beta(P)}(K(P)) = \infty \quad \text{for any } P.$$

References

[1] S.J. TAYLOR AND J.G. WENDEL, The exact Hausdorff measure of the zero set of a stable process, Z. Wahrsch. Verw. Gebeite 6 (1966) 170-180.

[2] S.J. TAYLOR AND C. TRICOT, Packing measure and its evaluation for a Brownian path. trans. Amer. Math. Soc. 288 (1985) 679-699.

3.

「複雑系現象と実証分析」
平成 10 年 9 月 25 日 (金)~9 月 27 日 (日)
(東京大学工学部 6 号館 3 階 セミナー室 A)
世話人 (岡部 靖憲 (東京大学), 久保 泉 (広島大学))

このシンポジウムは、複雑系現象に関して、データに触れた実証的な研究を目的として行われ、約３０名の出席者の下で、カオス現象・経済現象・気象現象等の複雑系現象と非線形時系列解析の理論の９つの講演が行われた。特に、乱流や波浪中の船体運動に現れるカオス現象とカオス系における確率共振現象、KM_2O-ランジュヴァン方程式論とそれに基づく非線形時系列解析、経済時系列間の因果解析、火山噴火と異常気象の因果解析係、大気環境データの因果解析の成果の発表があった。物理学・工学・経済学・数学の境界領域の研究の重要性を確認しさらに発展させる必要を感じさせるシンポジウムであった。なお、米田・有田・五百旗頭氏の講演は取り止めになった。プログラムおよび内容は次頁以降の通り。

プログラム

9月25日（金）

9:30—11:00　森 肇（九大・名誉教授)
カオス・乱流による輸送現象とエントロピー生成

11:15—12:15　堀田 武彦 (東大・工)
カオス系における確率共振的現象

14:00—15:15　村重 淳（東大・ 工）
波浪中の船体運動にみられる非線形現象の時系列解析と分岐解析

15:30—17:00　岡部 靖憲（東大・ 工）
非線形時系列解析と実験数学

9月26日（土）

9:30—10:30　松浦 真也（東大・工）
KM_2O-ランジュヴァン方程式論に基づく非定常時系列解析

11:00—12:00　中野 裕治（滋賀大・ 経済）
経済時系列の局所因果解析：特定の変量の影響を除いた場合

14:00—15:00　守田 治（九大・ 理）
火山噴火と異常気象

15:30—16:30　山根 敏志 (東大・ 工)
気象現象の決定性について

9月27日（日）

9:30—10:30　関本 勝也（九工大・情報工）
緒方 純俊（九工大・情報工）
生体信号の決定論解析と大気環境データの因果解析

11:00—12:00　米田 正也 (川崎医科大)、有田 清三郎 (関西医科大)
五百旗頭 正 (明電舎システム技術部)
糖尿病における血糖値経時データの因果解析

(1) 森 肇 (九大・名誉教授):カオス・乱流による輸送現象とエントロピー生成

(1) カオスの幾何学的構造とエネルギー散逸の関係
(2) カオス･乱流による輸送係数 (渦粘性, 乱流拡散などの) に対する揺動散逸公式
(3) カオス・乱流によるエントロピー生成
などを議論したい。

(2) 堀田 武彦 (東大・工):カオス系における確率共振的現象

確率共振は、双安定系や興奮性をもつ系に微弱な周期的外力とランダムな力が加わった場合にみられる現象である。周期外力とランダムな力がない場合には、系は静止状態が安定である状況を考える。この系に周期外力のみが加わった場合、その力が微弱であればほぼ静止状態を保つ。また、この系にランダムな力のみが加わった場合、力がランダムであるため力の大きさに応じた十分長い時間観測すると、双安定系の場合には、1つの安定状態から別の安定状態への遷移、興奮性をもつ系の場合には、興奮状態への遷移 (興奮状態から静止状態へは自然な遷移が起こる。) がみられる。このような系に周期的外力とランダムな力の大きさがほどよい場合には、周期外力と高い相関な遷移が観測される。この周期外力と遷移の相関を信号-雑音比 (SNR) によってあらわすと、ランダムな力の大きさに対してSNRは、ある値でピークをもつ一山型となる。ほどよい大きさのノイズ (ランダムな力) が、周期外力との相関を最も高めるという点で、確率共振は興味を集めている。

ここでは、ランダムな力のない決定論的力学系において、確率共振的な現象がみられるかという問題について議論する。双安定性に対応し、2

つのアトラクターを同時に持ち得る決定論的力学系として、サイン・サークルマップを用いた数値実験の結果を元に、この問題を考える。

(3) 村重 淳 (東大・工):波浪中の船体運動にみられる非線形現象の時系列解析と分岐解析

北欧で発生したカーフェリーの事故 (Herald of Free Enterprise 号 (1987年)、Estonia 号 (1994 年) 以降、同種の船の安全性が見直されている。事故の最大の原因は車両甲板 (車を収納する場所) 上への浸水であると考えられている。著者らは、この問題では船体と船内の水の連成運動が重要である考え、箱船の模型を用いて現象を簡略化した実験を行った。その結果、規則的で比較的穏やかな波の中でも箱船模型の運動には複雑な横揺れが観察された。非線形時系列解析により、その複雑な運動はカオスであることがわかった。また、浸水した船の波浪中の運動をモデル化した方程式を考えて、実験で観察された複雑な非線形運動が発生するメカニズムを分岐理論の観点から調べている。

(4) 岡部　靖憲（東大・工）:非線形時系列解析と実験数学

多次元の局所的な確率過程に対する非線形情報解析の部分を紹介し, その応用として従来調べてきた因果性の概念より弱い意味の因果性の概念を導入する. 具体的には, 二つの局所的な確率過程 $\mathbf{X} = (X(n); 0 \le n \le N)$ と $\mathbf{Y} = (Y(n); 0 \le n \le N)$ が与えられたとき, ある M_0 $(0 \le M_0 \le N)$ とあるボレル可測関数 f_n が存在して, $Y(n) = f_n(X(n), X(n-1), \cdots, X(0), Y(n-1), Y(n-2), \cdots, Y(0))$ $(M_0 \le n \le N)$ が成り立つとき, $\mathbf{X}$ から $\mathbf{Y}$ への弱い因果関係が成り立つと言う.　さらに, 二つの時系列 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ が与えられたとき, $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への弱因果性の有無を判定する Test(CS) の基準を設け, 地球大気気温の増加と関係があるとされるエルニーニョ現象に関わる様々な時系列の間の因果関係 (強因果性と弱因果性) を調べた結果を報告する. 上記の非線形情報解析は連続関数の多項式近似を用いて非線形情報空間の生成系を構成するものだが, カオス的時系列解析で用いられている動径基底関数系による近似定理を KM_2O-ランジュヴァン方程式論の枠組みで議論できることを報告する. これによって, KM_2O-ランジュヴァン方程式論による因果解析・決定解析・モデリング解析・予測解析の複雑系時系列データへの適用範囲が広がってきた.

(5) 松浦　真也 (東大・工)：KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論に基づく非定常時系列解析

本講演では複雑系時系列を確率過程論の立場から解析することについて述べる. 解析の道具としては, KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論を用いる. KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論はこれまで主に, 定常な確率過程（もっと一般には計量ベクトル空間内の流れ）について解析が進められてきた. しかし, もともとの理論の枠組みは, 定常な確率過程だけでなく非定常な確率過程も含むものとなっている. 加えて, 世の中に存在する重要な時系列データの中には, 非定常なものも少なくない. そこで, 非定常な確率過程に対する KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論について詳しい研究を行い, それを実際の時系列解析に役立てていくことは, 非常に意義深いものと思われる.

定常な確率過程（流れ）に対しては, 揺動散逸定理と呼ばれる基本的かつ重要な定理が成り立つ. これは, 時間の経過とともに複雑な振る舞いをする現象に関して, それを規則的な部分（散逸項）と不規則な部分（揺動項）とに分解した場合, 両者の間に一定の関係式が成立するというものである. この定理により確率過程の時間発展を記述する KM$_2$O-ランジュヴァン方程式を具体的に計算することが可能となる. これを非定常な場合にも一般化するのが本研究の目的である.

$X = (X(n); 0 \le n \le N)$ を定常とは限らない d 次元の流れとする. 非定常な流れに対しては, 揺動散逸定理は定常な場合と全く同じ形では成立しない. しかし, もとの流れ X に対して, 時間シフトした流れ $\widetilde{X_+^{(s)}} = (\widetilde{X_+^{(s)}}(n); 0 \le n \le N-s)$ および $\widetilde{X_-^{(s)}} = (\widetilde{X_-^{(s)}}(n); -s \le n \le 0)$ を

$$\widetilde{X_+^{(s)}}(n) \equiv X(n+s), \qquad \widetilde{X_-^{(s)}}(n) \equiv X(n+s)$$

によって定義することにより, 非定常な場合にも成り立つ揺動散逸定理が得られる. そして, この一般化された揺動散逸定理を用いることにより, 非定常な確率過程の時間発展を記述する KM$_2$O-ランジュヴァン方程式を, 二点共分散行列関数から具体的に求めることができる.

以上の議論を実際に複雑系現象の実証分析に応用する際に最大の問題となるのが,　与えられた時系列からいかにして二点共分散行列関数を推定するかという点である. この点に関し本講演では, 力学系に付随する時系列に対して有効に活用できる可能性のある方法について述べる.

(6) 中野 裕治 (滋賀大・経済) : 経済時系列の局所因果解析 : 特定の変量の影響を覗いた場合

1 因果の定義

時系列の因果性の定義は、まずGranger[1]によって定義された。Okabe-Inoue[3]は、やはり予測の観点から、Okabe-Inoueの因果性の定義を与え、具体的な解析方法を提案している。Okabe-Ootuka[4]は、Wiener以来の、非線形予測問題を解決し、合わせて非線形因果解析を可能にした。Nakano[2]は、Grangerによる因果性の定義を、KM_2O-ランジュヴァン方程式に適用して局所因果性を導入し、具体的な解析手順を提案している。

2 特定の変量の影響を除く

Grangerによる因果性の問題点として、見かけ上の因果性が、これまでに指摘されてきている。局所因果性についても、同じ問題を抱えているといってもよい。時系列ではない、統計データについても同様な問題があり、これを解決する量として、偏相関係数が導入された。そこで、偏相関係数に対応する量を、時系列においても構成し、データ解析に役立てようというのが、ここでの目的である。

(7) 守田 治 (九大・理):火山噴火と異常気象

1991年6月15日、フィリピンのピナツボ火山は今世紀最大の噴火を起こし、成層圏中層から下層にかけて多量のエアロソルを注入した。ピナツボの噴火規模はVEI(火山爆発指数、Newhall and Self,1982)が6、DVI(火山噴火指数、Lamb,1970,1972)が1000という大規模なもので、1883年のクラカタウの大噴火に匹敵する。火山性エアロソルの量は噴火直後から急激に増加し、1992年夏にピークに達し、その後は指数関数的に減少していったが、その影響は1994年まで残った(エアロソルの量が1/eになるのには、ほぼ1年かかると見積もられる)。

成層圏に注入された多量のエアロソルが、太陽入射エネルギーを反射・吸収することによって、1993年の全球的な異常気象が引き起こされたと思われる。

この事実を、新しい時系列データ解析の手法によって解明することが本研究の目的である。

(8) 山根 敏志 (東大・工):気象現象の決定性について

決定性の判定手法を東京の気温のデータ(94年1月から95年12月)に適用する。まず,非線形変換の次元を3次に固定して、調べる時系列の長さ

を変えて、最大の見本因果値を計算してみる。最大の見本因果値は、時系列の長さを大きくしていくにしたがって、落ち込んでいく (図 1)。さらに、時系列の長さがある程度以上になると、決定性の判定条件を満足しなくなってしまう。このことは気温のデータにおいて長期間に渡って一貫してデータの挙動を満足に説明できるようなモデルは (実験で扱った非線形変換の範囲では) 存在しないということを示唆している。つまり、気温データの背後にある構造が時間とともに変化しているのではないかと考えられる。この構造の変化を非線形変換によって追跡したものが図 2 である。さらに、構造の変化を予測の観点から調べることも試みた (図 3).図 3 のような予測誤差の変動と非線形変換による構造変化の追跡結果とを結び付けることは今後の課題である。

(9) 関本　勝也 (九工大・情報工)、緒方　純俊 (九工大・情報工)：生体信号の決定論解析と大気環境データの因果解析

大気汚染は日本の高度成長に伴って発生した問題のひとつである。その被害は他の環境汚染と同様広く知られ、国を挙げて排出規制を行うに至った、その結果、昭和 40 年代から大気中の汚染物質濃度は減少し、今ではその多くが環境基準を下回わっている。しかし、自動車の排気ガスにみられるように、汚染源そのものが増加したものもあり、局所的には未だ安全とは言い難く、汚染物質の地域拡散や汚染物質濃度とその地域住民の健康被害との関連性が指摘される場面も少なくない。汚染物質の拡散に関して、そこで問われる因果律は、その関係が線形であれば容易に因果を見いだすことができる。しかし、非線形の場合にはそれを推測するのが困難である。

近年、物理、数学分野で注目されているカオス現象は、それが内包する非線形がその現象を支配する大きな要因である。また、このような現象が自然界に多く存在することが知られており、我々には線形だけではなく、非線形を含めた視点が要求されている。このような要求に基づき、実データを扱うツールとしての非線形解析法が多く提案されてきた。一般に非線形解析は線形の場合に比べ困難であり、予測に基づくものや非線形性の断面を捕らえるにすぎないものも多い。

本研究ではそのツールとして、詳細な非線形解析を行うことができる KM_2O-Langevin 方程式論を用いる。これは、岡部らによって提唱された最新の実験数学理論であり、時系列信号を対象とする非線形解析において非常に有効なツールである。この理論の特徴は、異なる 2 つの時系列

信号にある因果律を、非線形構造をも含めた形で数式として求めることができることにある。

そこで、この理論を用いて北九州市の大気環境データを解析する。北九州市は古くから工業都市として栄え、それに伴い大気や水域の汚染が深刻な事態を引き起こした地域でもある。その危機を打開するために多くの努力がなされ、環境浄化に成功したことで国際的にも評価が高い。その一環として、市内に作られたいくつかの大気汚染観測所が大気環境を常に監視している。我々はそこで得られたデータを用いて異なる地域間の大気汚染物質濃度の関連性を調べた。その結果、風向き等の要因で汚染物質が市内の広い範囲に伝搬する場合があることを確かめた。

4.

ガウス過程と量子解析

平成10年10月29日（木）～ 31日（土）

（名古屋大学・ベンチャービジネス・ラボラトリー）

世話人：尾畑 伸明

無限次元解析と量子確率論の融合的かつ学際的な研究を促進するために，古典的確率論における伝統的テーマであるガウス解析と最近進展の著しい量子（非可換）解析を軸として研究テーマの広がりを重視した研究集会として企画した。

工学系・物理系・情報系などを含む多様な研究分野から約４０名の参加者を得た。したがって，議論されたテーマは多岐にわたるが，主なものをあげれば，ホワイトノイズ解析・自由確率論・量子確率論・量子情報論・非平衡系の統計力学・非可逆性の起源などであり，一層の研究交流の必要性が認識された。個別の研究交流や共同研究が促進されたことに加えて，特に，確率論の立場からは，stochastics as a natural science の精神に立ち帰り，情報学・物理学の境界領域に，理論と実証を両輪とする新しい統計科学を模索する動機付けが得られた。

ガウス過程と量子解析

Gaussian Processes and Quantum Analysis

平成10年度科研費基盤(A)課題「平衡確率現象の総合的研究」(研究代表者：久保 泉) 同基盤(B)課題「量子ホワイトノイズと無限次元調和解析」(研究代表者：尾畑伸明) 及び在東京イタリア大使館科学担当部 (Office of the Scientific Attaché of Italian Embassy in Tokyo) との共同で, 上記の研究会を開催いたします。関心のある方はどなたでもご参加ください。

期間 1998年10月29日 (木)-10月31日 (土)

場所 名古屋市千種区不老町 (地下鉄東山線本山駅下車徒歩15分)
名古屋大学・ベンチャービジネス・ラボラトリー (工学部新1号館横) 3F ベンチャーホール
(Nagoya University Venture Business Laboratory 3F)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
尾　畑　伸　明
Nobuaki OBATA
Tel & Fax 052-789-2820
obata@math.nagoya-u.ac.jp

プログラム

10月29日 (木)　October 29 (Thu)

10:00–10:10 開会挨拶
10:10–11:00 有光敏彦 Toshihico Arimitsu (筑波大学・物理学系 Tsukuba University)
Applications of the system of quantum stochastic differential equations within non-equilibrium thermo field dynamics
11:00–11:30 山ノ井基臣 Motoomi Yamanoi (名城大学・理工学部 Meijo University)
On control of the quantum phase in a two-level system
11:30–12:00 Si Si (愛知県立大学・情報学部 Aich Prefectural University)
Random fields of homogeneous chaos
12:00–13:30 昼休み
13:30–14:20 飛田武幸 Takeyuki Hida (名城大学・理工学部 Meijo University)
ガウス過程の表現, 再考と発展
14:20–14:50 道工 勇 Isamu Doku (埼玉大学・教育学部 Saitama University)
On applications of historical stochastic calculus
14:50–15:20 橋本行洋 Yukihiro Hashimoto (名古屋大学・多元数理科学研究科 Nagoya University)
Algebraic central limit theorems and singletons

15:20–15:40 休憩
15:40–16:10 洞 彰人 Akihito Hora (岡山大学・環境理工学部 Okayama University)
On scaling limits for discrete Laplacians related to the symmetric groups
16:10–16:40 村木尚文 Naofumi Muraki (岩手県立大学・総合政策学部 Iwate Prefectural University)
On a semicircular process in monotone Fock space

10月30日(金)　October 30 (Fri)

09:30–10:20 田崎秀一 Shuichi Tasaki (奈良女子大学・理学部 Nara Womens University)
Irreversibility in reversible multi-Baker type maps
— Transport and fractal distributions
10:20–10:50 粟屋かよ子 Kayoko Awaya (四日市大学・環境情報学部 Yokkaichi University)
A direct manifestation of the incompleteness of the quantum mechanical description
11:00–11:50 松井 卓 Taku Matsui (九州大学・数理学研究科 Kyushu University)
A characterization of finitely pure correlated states
11:50–13:30 昼休み
13:30–14:20 長岡浩司 Hiroshi Nagaoka
(電通大・情報システム学研究科 University of Electro-Communications)
Information spectrum approach to the asymptotics of quantum hypothesis testing
14:20–14:50 小川朋宏 Tomohiro Ogawa
(電通大・情報システム学研究科 University of Electro-Communications)
Strong converse to the quantum channel coding theorem
14:50–15:20 坂口文則 Fuminori Sakaguchi (福井大学・工学部 Fukui University)
コーシー・ウェーブレットに関連した個数状態と昇降演算子の非可換確率過程への応用
15:20–15:40 休憩
15:40–16:30 新井朝雄 Asao Arai (北海道大学・理学研究科 Hokkaido University)
A Dirac particle interacting with the quantized radiation field
16:30–17:20 日合文雄 Fumio Hiai (東北大学・情報学研究科 Tohoku University)
Free random variables and free entropy
17:30–19:00 懇親会

10月31日(土)　October 31 (Sat)

09:30–10:20 鈴木増雄 Masuo Suzuki (東京理科大学・理学部 Tokyo Science University)
量子解析と物理への応用
10:20–10:50 齊藤公明 Kimiaki Saito (名城大学・理工学部 Meijo University)

The Levy Laplacian acting on Poisson noise functionals

11:00–11:30 浅井暢宏 Nobuhiro Asai (名古屋大学・多元数理科学研究科 Nagoya University)
The role of growth order of entire functions in white noise calculus

11:30–12:20 Luigi Accardi (名古屋大学・多元数理科学研究科 Nagoya University)
The physical origins of the multiplicity of white noises

12:20–12:30 閉会挨拶

講演概要

(尾畑伸明 記)

1. **Applications of the system of quantum stochastic differential equations within non-equilibrium thermo field dynamics (有光敏彦・筑波大学・物理学系)**

   10 年以上にわたり NETFD (Nonequilibrium Thermo Field Dynamics) という理論の枠組みを提唱してきたが, これは, 量子ノイズを含む場の演算子を取り扱うことのできる正準理論の構築を最終目標としている。そのためには, 様々なタイプの量子確率微分方程式を統一的な視点から議論する必要がある。これまで, ハドソン, パーササラシィ, リンゼイら数学者によって量子確率微分方程式論が厳密に展開されているが, 非平衡物理の立場から見ると特殊なものすぎる。有限温度における量子ノイズを自然に取り込むことができる NETFD を方法論として, 散逸を含む量子系が見通しよく議論される。[T. Arimitsu and T. Saito: A system of quantum stochastic differential equations in terms of non-equilibrium thermo field dynamics, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), 7573–7595. T. Arimitsu and T. Saito: A microscopic derivation of quantum stochastic differential equations corresponding to the quantum Kramers equation, in “Stochastic Processes And Their Applications (A. Vijayakumar and M. Sreenivasan, Eds.),” pp. 323–333, Narosa Publishing House, Madras, 1999.]

2. **On control of the quantum phase in a two-level system (山ノ井基臣・名城大学・理工学部)**

   量子コンピュータの実現のためには, 量子系における散逸をコントロールする必要がある。NMR による量子コンピュータへの応用を念頭に, 2 レベルの量子系を例として, フェーズ・フィードバックによってフェーズの散逸が防がれることを示した。

3. **Random fields of homogeneous chaos (Si Si・愛知県立大学・情報学部)**

   確率過程は時間パラメータをもつ確率変数の族であり, 確率微分方程式で特徴付けられる。この状況の一般化として, 時間パラメータを高次元化することを考え, P. Lévy の

確率変分のアイデアを具体化したい。そのために, $\mathbf{R}^2$ 上のガウス型ホワイトノイズを適当な性質をもつ単一閉曲線 C によって囲まれた領域 (C) 上で積分することで得られる確率変数の族 $\{X(C)\}$ から考察するのが順当である。そのマルコフ性, マルチンゲール性などを定義し, 標準表現の例を与えることができる。

4. **ガウス過程の表現, 再考と発展 (飛田武幸・名城大学・理工学部)**

ホワイトノイズ解析を情報理論へむけて展開する上で, complexity, multiplicity, innovation がキーワードとなる。ガウス過程の標準表現における multiplicity は確率過程の複雑さを記述する指標になる。これを非可換系に拡張する仕事が端緒についてきた [L. Accardi, T. Hida and Win Win Htay: Boson Fock representations of stationary processes, Mathematicheskie Zametki, Nauka, Moskow, 1999]

5. **On applications of historical stochastic calculus (道工 勇・埼玉大学・教育学部)**

Dawson–Perkins の意味でのヒストリカルな superprocess に対して確率積分を考える。標準設定の確率解析における部分確率積分のアナロジーとして, ヒストリカルな確率解析の手法により, 上記のヒストリカルな確率積分に対してある種の一般化された部分積分公式を導くことができる。その公式の簡単な応用として, 情報理論で有名な Clark–Itô–Ocone 公式のヒストリカル過程版を示すことができる。良く知られた結果とは違って, マリアヴァン解析の微分とは異なる表現が見出される点が興味深い。[I. Dôku: An overview of the studies on catalytic stochastic processes, 京都大学数理解析研究所講究録 **1089** (1999), 1–14.]

6. **Algebraic central limit theorems and singletons (橋本行洋・名古屋大学・多元数理科学研究科)**

自由群に付随するケーリー樹木上の隣接作用素の漸近的スペクトルに興味がある。真空状態における漸近挙動は, よく知られているように自由確率論における中心極限定理の原型を与える。真空状態以外の興味ある状態として, ハーゲラップ状態と主系列表現に対応する状態の下でのスペクトルの漸近分布を計算する事が出来る。モーメント母関数がベッセル関数で表示され, 極限分布にはウールマン分布とでも呼ぶべき, ウィグナー半円則の1径数変形が現れる。これらは, 一般には非対称分布であり, 非対称性の根源をシングルトン独立性という新しい概念で説明することができる。[Y. Hashimoto: Deformation of the semicircle law derived from random walks on free groups, Prob. Math. Stat. bf 18 (1998), 399–410. L. Accardi, Y. Hashimoto and N. Obata: Notions of independence related to the free group, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **1** (1998), 201–220. L. Accardi, Y. Hashimoto and N. Obata: Singleton independence, Banach Center Publications **43** (1998), 9–24.]

7. **On scaling limits for discrete Laplacians related to the symmetric groups (洞 彰人・岡山大学・環境理工学部)**

離散群のケーレーグラフに付随する量子確率解析は, 量子確率論・グラフのスペクトル解析の双方に興味深い実例を与える。離散群の系列が与えられたとき, その帰納極限における隣接作用素のスペクトルの漸近挙動は, 量子確率論では中心極限定理とその収束の様子で記述される。[A. Hora: Central limit theorems and asymptotic spectral analysis of large graphs, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **1** (1998), 221–246.]

8. **On a semicircular process in monotone Fock space (村木尚文・岩手県立大学・総合政策学部)**

量子確率論においては, 非可換性を反映した多様な独立性の概念が導入され, 現状ではコンセンサスが得られた統一概念には至っていない。組み合わせ論に示唆されて, ボゾン・フェルミ・自由のいずれとも異なる「単調フォック空間」とその上の生成・消滅演算子 $\{a^\dagger, a\}$ が定義され, まず, $a^\dagger + a$ の真空における分布が問題となる。たとえば, ボゾンならガウス分布, 自由ならウィグナー半円則となり, それぞれ典型的な独立確率変数列に対する中心極限定理に現れる。単調フォック空間の場合, $a^\dagger + a$ の真空における分布は, 逆正弦分布となることが示される。その証明は, 分布のモーメントを組み合わせ論的に計算することに帰着される。

9. **Irreversibility in reversible multi-Baker type maps — Transport and fractal distributions (田崎秀一・奈良女子大学・理学部)**

微視的レベルでは可逆な力学を基礎として巨視的不可逆現象を理解する事が大きな目標である。そのために, (i) どのような条件下で状態を統計的に扱うことができるか? (ii) 統計的状態はどのように平衡分布に近づくか?を議論しなければならない。強いカオス性示す双曲型力学系, 特に多重パイこねを手始めに, 各時点の物理状態を統計集団とみなすプリゴジンの考えに則って不可逆現象生成のシナリオを見ることができる。不可逆性は, $t \to \pm\infty$ における定常状態の違いとして理解できる。また, 得られる分布がルベーグ測度に関して特異性を持つという興味深い結果も得られている。

10. **A direct manifestation of the incompleteness of the quantum mechanical description (栗屋かよ子・四日市大学・環境情報学部)**

通常, 量子力学は次の法則によって定式化される:

(i) 量子力学系の observable が観測されるとき, ただ1個の観測値が得られ, 2個以上の値が同時に得られることはない。

(ii) 同じ観測を繰り返すとき, 得られる観測値は良く知られた統計公式に従う。
(iii) 観測されないとき, 系の状態関数 Ψ は良く知られたシュレーディンガー方程式に従う。

この定式化は, 「観測」に対する物理的な正確な定義を与えない限り不完全である。一方, 多くの観測理論が提案されているが, 未だ最終的な解答に至っているとは言えない。そこで, 定式化において「観測」という語句を取り除くことを試みる。[K. Awaya: The measurement problem and the structure of quantum mechanics, Physics Essays **5** (1992), 142. K. Awaya: The direct manifestation of the incompleteness of the quantum mechanical description and the wave function, Physics Essays **12** (1999).]

11. **A characterization of finitely pure correlated states (松井 卓・九州大学・数理学研究科)**

$\otimes_{\mathbf{Z}} M(d,\mathbf{C})$ の生成する C*-代数を $\mathcal{A}$ として (形式的) ハミルトニアン

$$H = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \tau_j(h), \qquad h = h^* \in \mathcal{A},$$

を考える。ただし τ_j は $j \in \mathbf{Z}$ による平行移動作用素である。$H_{[n,m]}$ を H の $[n,m]$ への制限, $E_{[n,m]}$ はその基底状態エネルギーとするとき, $E_{[n,m]} = |m-n|e_\infty$ となるようなものに興味がある。例えば, Afflek–Kennedy–Lieb–Tasaki モデル ($d=3$, $so(3)$ に付随する形の最近隣相互作用) が一つの雛形である。その模型については, $\mathcal{A}$ 上の状態 φ_∞ で $\varphi_\infty(H_{[n,m]}) = E_{[n,m]}$ をみたすものの一意存在と 2 点関数の指数関数的減衰が知られている。さらに, Fannes, Nachtergael–Werner によって φ_∞ が量子マルコフ状態であることが示された。これらの議論は, 量子マルコフ性を基軸として一般化され見通しも良くなる。まず, 平行移動不変で $\varphi(H_{[0,n]}) = ne_\infty$ をみたす状態が量子マルコフ状態であることが示される。さらに, 零エネルギー条件 $e_\infty = 0$ と混合条件

$$\lim_{|j|\to\infty} \varphi(Q\tau_j(Q')) = \varphi(Q)\varphi(Q'), \qquad Q, Q' \in \mathcal{A},$$

から, 2 点関数の指数関数的減衰が導かれる。多項式的な減衰や平行移動不変でない場合にも興味があり, 量子マルコフ統計の観点からの研究に期待がもてる。

12. **Information spectrum approach to the asymptotics of quantum hypothesis testing (長岡浩司・電通大・情報システム学研究科)**

Han (韓) and Verdu に創まる情報スペクトル的方法は, 情報理論の諸定理を最も一般的な形で定式化・証明するための統一的枠組みとして, 近年注目を集めている。本発表では, 同様なアプローチを量子状態に関する仮説検定の漸近論に対して適用する試みを紹介する。具体的には, 仮説検定論の基本定理であるネイマン・ピアソンの補題の量子

版に基づいた新しい漸近論的概念を導入し，それが古典情報理論における情報スペクトルの代替物として機能することを示す。

13. **Strong converse to the quantum channel coding theorem (小川朋宏・電通大・情報システム学研究科)**

与えられた量子通信路の容量 (capacity) とは，漸近的に誤り確率がいくらでも小さくできるような符号化システムに関する情報伝送速度の最大値として定義される。特に量子無記憶通信路の容量は，Holevo らによる量子通信路符号化定理によって求めることができる。本発表では，量子無記憶通信路において，容量より大きな伝送速度を持つ符号化システムにおいては，必ず伝送誤り確率が 1 に近づく，といういわゆる「強逆性」が成り立つことを示す。

14. **コーシー・ウェーブレットに関連した個数状態と昇降演算子の非可換確率過程への応用 (坂口文則・福井大学・工学部)**

コーシー・ウェーブレットを量子調和振動子 (CCR のフォック表現) におけるコヒーレント状態の類似とみなす事で，量子調和振動子に付随する多くの概念をコーシー・ウェーブレット解析に導入できる。形式的な議論も多いが，適当なリー代数の表現論を用いて厳密化できると予想している。さらに，信号処理への応用も念頭にある。

15. **Dirac particle interacting with the quantized radiation field (新井朝雄・北海道大学・理学研究科)**

1 個の Dirac 粒子ー電荷をもち，スピン 1/2 の相対論的粒子ーが量子輻射場と相互作用をする系のハミルトニアン H の数学的解析がなされる．Dirac 粒子に働くポテンシャル V が荷電共役およびパリテイ不変性をもつならば，H は自然な自己共役拡大をもつことが証明される．さらに，V のある適切なクラスに対して，H の本質的自己共役性が示される．$V=0$ の場合は，スピンをもつ相対論的なポラロンの問題として特に興味がある．この場合には，H は $H=\int_{\mathbf{R}^3}^{\oplus} H(p)dp$ という形に分解される．ファイバーハミルトニアン $H(p)$ のスペクトル解析について基本的な結果が導出される．この講演の内容は，[A. Arai, A particle-field Hamiltonian in relativistic quantum electrodynamics, J. Math. Phys. 41 (2000), 4271-4283] に発表された．

16. **Free random variables and free entropy (日合文雄・東北大学・情報学研究科)**

自由確率論は Voiculescu が 1983 年頃から提唱しているもので，独立性の概念が C*-代数の自由積に基づいて導入されている。通常のテンソル積に付随している古典的独立性に対比されながら，近年著しく発展してきた。非可換確率空間 $(\mathcal{M},\tau)$ の自己共役元

$a = a^*$ の分布を μ とするとき,

$$\Sigma(\mu) = -E(\mu) = \iint \log|x-y|\mu(dx)\mu(dy)$$

が Voiculescu の 1 変数自由エントロピー (ポテンシャル論では対数ポテンシャル) であり, 行列近似によって定義されるミクロ状態自由エントロピー $\chi(a)$ とは

$$\chi(a) = \Sigma(\mu) + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{3}{4}$$

の関係があることが知られている。この関係式と, 古典的な相対エントロピーがミクロ状態によって表現されることを手がかりにして, 相対自由エントロピーを定義する事ができる。それは古典的な相対エントロピーと同様な性質をもち, 適当な条件のもとで積分表現

$$\Sigma(\mu|\nu) = E(\mu - \nu)$$

をもつ。さらに, ランダム行列とも密接に関連する。[F. Hiai and D. Petz: "The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy," Math. Surveys Monographs Vol. 77, AMS, 2000]

17. 量子解析と物理への応用 (鈴木増雄・東京理科大学・理学部)

変数が非可換であるような関数に対しては非可換微分を考える必要がある:

$$df(A) = \lim_{h\to 0}\frac{f(A+hdA)-f(A)}{h},$$

ここで一般には, $[dA, A] \neq 0$. このとき, $df(A)/dA$ を $dA \mapsto df(A)$ なる超作用素と考えることによって, 量子解析を見通しよく展開することができる。δ_A を内部微分として, $\Delta(A) = (e^{\delta_A}-1)/\delta_A$ とおくことで, $(d/dA)e^A = e^A\Delta(-A)$ が得られ量子効果をあからさまに表すことができる。このアイデアは, フォンノイマン方程式・久保公式・ファインマンの展開公式などに著しい応用がある。さらに, 多変数への一般化や確率微分への応用が可能である。

18. The Levy Laplacian acting on Poisson noise functionals (齊藤公明・名城大学・理工学部)

ポワソンノイズ汎関数

$$\int_{T^n} f(t_1,\cdots,t_n)\,dN_{t_1}\cdots dN_{t_n}, \qquad \{N_t\} : \text{ポワソン過程}$$

はレヴィラプラシアン Δ_L の固有関数となる。この汎関数を基にして Δ_L の定義域としてある種の核型空間を構成し, その上に Δ_L の自己共役拡張を得る。さらに, この考えはガウス型ホワイトノイズ超汎関数に対しても適用可能である。[K. Saitô: A (C_0)-group generated by the Lévy Laplacian II, Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **1** (1998), 425–437.]

19. **The role of growth order of entire functions in white noise calculus (浅井暢宏・名古屋大学・多元数理科学研究科)**

ホワイトノイズ超関数論は, ゲルファント三組み $\mathcal{W} \subset \Gamma(L^2(\mathbf{R})) \subset \mathcal{W}^*$ を基礎としている。ϕ_ξ を指数ベクトルとするとき, $\Phi \in \mathcal{W}^*$ の S-変換は

$$S\Phi(\xi) = \langle\langle \Phi, \phi_\xi \rangle\rangle, \qquad \xi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}),$$

で定義され, 有限次元フーリエ変換の類似と考えられる。$S\Phi$ は無限次元複素ベクトル空間 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ 上の正則関数となるので, その増大度によって, クラス分けをすることができる。逆に, 増大度を制御する関数 u を導入する毎にホワイトノイズ三組みを構成する方法について論ずる。[N. Asai, I. Kubo and H.-H. Kuo: Bell numbers, log-concavity, and log-convexity, Acta Appl. Math. in press]

20. **The physical origins of the multiplicity of white noises (Luigi Accardi・名古屋大学・多元数理科学研究科)**

量子確率論においては, 独立性には多様な定義がある。それに応じてガウス性 (n-点関数が 2-点関数で表されること) の現れ方にも様々あり, 対応するホワイトノイズの多様性が示唆される。これまで, ボゾン, フェルミ, 自由, それらの q-変形など, 組合せ論の立場から多くの例が知られているが, すべてを構成し分類するには至っていない。より高い立場からこの問題の解決を図るために, これまでは, 物理的には自由場の理論であるということに着目し, 相互作用も含めて理論を構成するのが一つの道として提案する。これまで, 多くの標準的なハミルトン模型に対して, 確率極限を詳細に解析してきたが, そこから示唆されることは, 従来のフォック空間に代わり相互作用フォック空間が重要な役割を演じていることである。村木の単調フォック空間は相互作用フォック空間の一例である。

5.

Fractal and Analysis

分担者　：　伊藤雄二（慶応大・理工）
　　　　　　佐藤　坦（九大・数理）
　　　　　　中村宗敬（山梨大・教育人間）
日　時　：　１９９８年１１月１７日（火）－１１月２０日（金）
場　所　：　九州大学数理学研究科

本研究集会は解析学において現れるフラクタルを全般的に扱い，参加者間の研究交流を促進することを企図して，国外から K. Kahane, M.Denker, D. Mauldin, M. Zähle の 4 名の研究者を招いて開催されたものである．参加者は約 60 名であった．

解析学全般を対象とするということで，特定の分野に講演の対象を絞るということは意図してはいなかったが，Denker 氏の一連の講演および Mauldin 氏の講演も含めて，熱力学形式を用いてフラクタルを解析するエルゴード理論的な話題、中でも複素力学系に関連したものが多かった．(Nakaishi, Yuri, Ushiki, Ishii, Sumi の各氏講演．後者 3 氏は複素力学系を扱っていた.)

一方 Zähle 氏の講演では，測度の密度に関わる基礎的な話題が提供され，Kamo, Kawamura, Takeuti の共同講演ではフラクタルの複雑性について，計算可能性と次元からのアプローチの比較が試みられ，続いて行われた Kawamura 氏の講演では自己相似性を持つ関数の表現定理が話された．また数論に関連して，Kahane 氏が Zeta 関数を使った素数定理の各種一般化について講演し，Ito 氏の講演では substitution から生じる atomic surface についての言及があった．

以上フラクタルという話題に関連して，多彩な角度からの講演が行われ，参加者間の議論も活発に行われた．

本研究集会のプログラムは以下のとおりである．

プ　ロ　グ　ラ　ム

１１月１７日（火）

１３：３０－１５：００　M. Zähle (Jena)
Local dimension of measures
１５：１５－１５：４５　K. Nakaishi (Tokyo Univ.)
Multifractal analysis for one-dimenisonal maps with a neutral fixed point
１６：００－１７：００　D. Mauldin (North Texas)
Multifractal analysis on limit sets defined by infinitely many conformal maps

１１月１８日（水）

１０：００－１１：００　M. Denker (Göttingen)
Hausdorff measure and dynamics (I)
１１：１５－１２：１５　S. Ushiki (Kyoto Univ.)
Complex Ruelle opearator for complex dynamical system and invariant hyperfunctions as invariant measures

１３：３０－１４：１０　Y. Ishii (Kyushu Univ.)
Quantum tunneling phenomena and complex dynamics
１４：２５－１５：２５　H. Sumi (Kyoto Univ.)
Dynamics of rational semigroup and the skew products
１５：４０－１６：４０　J. -P. Kahane (Paris-Sud)
Zeta function and generalized primes

１１月１９日（木）

１０：００－１１：００　M. Denker (Göttingen)
Hausdorff measure and dynamics (II)
１１：１５－１２：１５　M. Yuri (Sapporo Univ.)
Thermodynamic formalism for certain nonhyperbolic maps
１３：３０－１４：３０　K. Kamo, K. Kawamura (Nara Women's Univ.), I. Takeuti (Kyoto Univ.)
Hausdorff dimension and computational complexity
１４：４５－１５：１５　K. Kawamura (Nara Women's Univ.)
Four classes of functions with self-similar properties
１５：３０－１６：３０　M. Zähle (Jena) (Paris-Sud)
Fractional stochasic calculus

１１月２０日（金）

１０：００－１１：００　M. Denker (Göttingen)
Hausdorff measure and dynamics (III)
１１：１５－１２：１５　S. Ito (Tsuda College)
Pisot sbstitutions and Hausdorff dimension of the boundaries of atomic surface

次頁以降に各氏の講演の概要を掲載する．これらは研究集会の際に提出されたアブストラクトを中村が適宜編集したものである．

Multifractal analysis on limits sets defined by iteration of infinitely many conformal maps

Dan Mauldin
North Texas

We extend the results of multifractal theory obtained for systems of similarities to systems generated by conformal iterated function systems. We indicate some of the technique which are used to obtain this extension. If time permits some applications to sets of continued fractions will be inidicated.

Complex Ruelle opeartor for complex dnamical systems and invariant hyperfunctions as invariant measures

Shigehiro Ushiki
Kyoto University

Let R be a rational map of the Riemann sphere to itself, and let J and F denote the Julia set and the Fatou set respectively. Let C denote the set of critical points of R, and let P denote the postcritical set. We assume the followings:

$P \cap F$ is compact.

F is connected and contains the infinity.

All critical points of R are simple.

A holomorphic function $\varphi : U \to \mathbf{C}$, for some compact neighborhood U of J, is called a hyperfunction supported on J. We denote by $H(J)$ the space of hyperfunctions supportted on J. Complex Ruelle operator $L : H(J) \to H(J)$ is defined by

$$(L\varphi)(x) = \sum_{y \in R^{-1}(x)} \frac{\varphi(y)}{(R'(y))^2} \, .$$

The dual space of space of $H(J)$ is isomorphic to itself and the adjoint operator $L^* : H(J) \to H(J)$ is given by

$$(L^*\psi)(x) = \frac{\psi \circ R(x)}{R'(x)} \, .$$

We shall study the eigenfunctions for these operators and find the invariant measure defined by the eigenfunctions. The radius of convergence of the Fredholm determinant is closely related to the exponents in Collet-Eckmann conditions(CE and CE2).

Quantum tunneling phenomena and complex dynamics

Yutaka Ishii
Kyushu University

The transition of a particle to classical mechanichally forbidden region is often called the *tunneling phenomena* which is a purely quantum theoretical feature. The complex semi-classical theory of quantum mechnics asserts that the transition probability of such particle is given by integrating(or summing up) the action functional over classical trajectories in the phase space with complex variables, and that the trajectories which contribute to the integral but not contained in the real subspace play a dominant role for such non-classical feature.

In this talk we will discuss the tunneling phenomena for one-dimensional kicked rotor described by the classical Hamiltonian :

$$H(p,\theta) \equiv H_0(p) + V(\theta)\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta(t-n)$$

where the kinetic term $H_0(p)$ and the kicking term $V(\theta)$ are given by $H_0(p) \equiv \frac{p^2}{2}$ and $V(\theta) \equiv -\frac{\theta^3}{3} + a\theta$ with a parameter $a \in \mathbf{R}$. The Hamilton's canonical equations of this system give a flow on the (p,θ)-plane, and it is known that the corresponding time one map of this flow becomes an area-preserving Hénon map:

$$(x,y) \mapsto (y, y^2 + ((1-a) - x)$$

by the change of coordinate $(p,\theta) = (y-x, y-1)$. The Hénon family is known to be the simplest nonlinear system in the two-dimensional space, and its dynamics is extensively studied by several authors. Among them, the investigation from the complex dynamical point of view has been developed in the last decade using pluripotential theory, the theory of currents, etc.

The purpose of my talk is to give partial mathematical verification to what are numerically observed by A.Shudo nad K. Ikeda [1], [2] on a relationship between the quatunm tunneling phenomena of kicked rotor model above and the dynamics of the corresponding complex Hénon mapping in $\mathbf{C}^2$. More precisely, we relate the essential part of the set of all trajectories which contribute to the summation of the action functional (we will call this essential part the *Laputa chain*) to the forward Julia set J^+ of complex Hénon map.

References

[1] Shudo A., Ikeda K. Complex classical trajectories and chaotic tunneling, Phys. Rev. Lett. 74,682-685(1995).

[2] Shudo A., Ikeda K. and Chaotic tunneling I: A remarkable manifestatation of complex classical dynamics in non-integrable quantum phenomena, Physica D, 115. 234-292(1998).

Dynamics of rational semigroups and the skew products

Hiroki Sumi

Graduate School of Human and Envirmental Studies, Kyoto University

Let G be a *rational semigroup*, which means that G is a subsemigroup of End$(\bar{\mathbf{C}})$ which does not contain any constant elements. We set

$$F(G) = \{z \in \bar{\mathbf{C}} \mid G \text{ is normal in a neighborhood of } z\}, \quad J(G) = \bar{\mathbf{C}} \setminus F(G)$$

which are called the *Fatou set* and the Julia set of G respectively. $J(G)$ is backward invariant, while not forward invariant in general. If $G =< f_1, f_2, \cdots, f_m >$,then $J(G) = \cup_{i=1}^{m} f_i^{-1}(J(G))$ (*backward self-similarity*).

We next set $E(G) = \{z \in \bar{\mathbf{C}} \mid \sharp G^{-1}(z) < 2\}$, where $G^{-1}(z) = \cup_{g \in G} g^{-1}(z)$. We have that where exists and element of G of degeree at least two or if there exists an element of G of degree one and the order is infinite, then $E(G) = \{z \in \bar{\mathbf{C}} : \sharp G^{-1}(z) < \infty\}$ and $\sharp E(G) \leq 2$. For any $z \in \bar{\mathbf{C}} \setminus E(G)$, we have $J(G) \subset \overline{G^{-1}(z)}$. If $\sharp J(G) \geq 3$, then $J(G)$ is perfect and is equal to the closure of the points $z \in \bar{\mathbf{C}}$ such that there exists $g \in G$ with $g(z) = z$, $|g'(z)| > 1$. In general, the Julia set may have non-empty interior points.

Set

$$P(G) = \overline{\cup_{g \in G}\{ \text{ critical values of } g\}},$$

which is called *critical set* of G. One also says that G is *hyperbolic* if $P(G) \subset F(G)$, and *sub-hyperbolic* if $P(G) \cap F(G)$ is compact and $\sharp\{P(G) \cap J(G)\} < \infty$. For an open $U \subset \bar{C}$, we denote by $c(U, g)$ the set of all conneceted components of $g^{-1}(U)$. G is said to be *semi-hyperbolic* if there exists a positive number N and a positive number δ such that $\deg(g : V \to B(x, \delta)) \leq N$ for each $V \in c(B(x, \delta), g)$.

Theorem 1. *Let G be finitely generated and contains an element of degree at least two. Assume further that G is sub- or seim-hyperbolic and $Aut(\bar{\mathbf{C}}) \cap G$ is empty or consists of loxodromic element. Then there exists an attractor in $F(G)$ for G.*

Theorem 2. *A sufficient condition to be semi-hyperbolic is given.*

Set $\Sigma_m = \{1, 2 \ldots, m\}^{\mathbf{N}}$ and let σ be the shift map on Σ_m. Suppose that $G =< f_1, f_2, \cdots, f_n >$, $\deg(f_i) = d_i, i = 1, 2, \cdots, m$ and we define

$$\tilde{f} : \Sigma_m \times \bar{\mathbf{C}} \to \Sigma_m \times \bar{\mathbf{C}}$$

by $\tilde{f}(w, x) = (\sigma w, f_{w_1} x)$ for $w = (w_1, w_2, \cdots) \in \Sigma_m$ and $x \in \bar{\mathbf{C}}$. The map $\tilde{f}$ is finite to one and open, but have infinitely many critical points in general.

With respect to the map $\tilde{f}$, the Fatou set $F(\tilde{f})$ and the Julia set $J(\tilde{f})$ is defined similarly as before. We also define the sets F_w and J_w according to the normality of the family $\{f_{w_n} \circ \cdots \circ f_{w_1}\}$. See [4] for various results on these Fatou and Julia sets.

Let $K \subset \Sigma_m \times \bar{\mathbf{C}}$ be compact and backward invariant with respect to $\tilde{f}$. We define an operator $\tilde{B}_a$ on $C(\tilde{K})$ for each (probability) weight $a = (a_1, \ldots, a_m)$ by

$$\tilde{B}_a \tilde{\varphi}(z) = \sum_{\zeta \in \tilde{f}^{-1}(z)} \tilde{\varphi}(\zeta) \tilde{\psi}_a(\zeta)$$

where $\tilde{\psi}_a(\zeta) = \frac{a_{w_1}}{d_{w_1}}$ if $\pi_1(\zeta) = (w_1, w_2, \ldots)$ ($\pi_1 : \Sigma_m \times \bar{\mathbf{C}} \to \Sigma_m$ is the natural projection w.r.t. the first coordinate).

Theorem 3. *Let $\pi_2 : \Sigma_m \times \bar{\mathbf{C}} \to \bar{\mathbf{C}}$ be the natural projection w.r.t the second coordinate. Assume that there exists an element $g_0 \in G$ of degree at least two, the exceptional set $E(G)$ for G is included in $F(G)$ and $F(H) \supset J(G)$ where H is a rational semigroup defined by $H = \{h^{-1} \mid h \in Aut(\bar{\mathbf{C}}) \cap G\}$. (If H is empty, put $F(H) = \bar{\mathbf{C}}$.) Then for each positive weight a, there exists a unique probability measure $\tilde{\mu}_a$ on $\Sigma \times \bar{\mathbf{C}}$ with the following properties.*

For each $\tilde{f}$- backward invariant compact $\tilde{K} \subset \pi_2^{-1}(\bar{\mathbf{C}} \setminus E(G))$ and each $\tilde{\varphi} \in C(\tilde{K})$,

$$\lim_{n\to\infty} ||\tilde{B}_a^n \tilde{\varphi} - \tilde{\mu}_a(\tilde{\varphi})||_{\tilde{K}} = 0.$$

In this case $(\tilde{f}, \tilde{\mu}_a)$ is exact. Furthermore the following entropy formula holds.

$$h_{\tilde{\mu}_a}(\tilde{f}) = -\sum_{j=1}^{m} a_j \log a_j + \sum_{j=1}^{m} a_j \log d_j.$$

Furthermore the Hausdorff diemnsion of $\dim_{\mathrm{H}}(J(G)$ is also estimated ([2]).

References

[1] H. Sumi, On dynamics of hyperbolic semigroups, J. Math. Kyoto Univ. 37(1997), 717-733.

[2] H. Sumi, On Hausdorff dimension of Julia sets of hyperbolic rational semigroups, Kodai Math. J. 21(1998), 10-28.

[3] H. Sumi, Dynamics of sub-hyprbolic and semi-hyperbolic rational semigroups, Mathematica Goettingensis

[4] H. Sumi, Skew product maps related to finitely generated rational semigroups, preprint.

Thermodynamic formalism for certain nonhyperbolic maps

Michiko Yuri
Department of Business Administration, Sapporo University

Let $(X, \mathcal{F}, \nu)$ be a nonatomic probability space and $T : X \to X$ be a non-singular transformation ($\nu \sim \nu T^{-1}$) such that there exists a countable measurable partition $Q = \{X_a\}_{a \in I}$ of X generating $\mathcal{F}$ with the local invertibility, i.e., for every $X_a \in Q, \nu(X_a) > 0$ and $T|_{X_a} : X_a \to TX_a$ is an invertible map satisfying $\frac{d(\nu T)|_{X_a}}{d\nu|_{X_a}} > 0$ (ν-a.e.). Such a system (T, X, Q) is called a *piecewise invertible map*. Typically, such nonsingular measures exist for maps defined on a bounded metric space with the local invertibility in the following setting. Let (X, d) be a bounded metric space, $\mathcal{F}$ be the σ-algebara of Borel subsets of X and $Q = \{X_a\}_{a \in I}$ be a disjoint partition of X with $X_a \in \mathcal{F}$ ($\forall a \in I$). We assume that there exists a compact metric space $\bar{X} \supset X$ such that $X_o = \bigcup_{a \in I} \mathrm{int} X_a$ is an open dense subset of $\bar{X}$. Let $T : X \to \bar{X}$ be a non-invertible map such that $T|_{X_a} : X_a \to TX_a$ is a homeomorphism ($\forall a \in I$). If $\mathcal{U} = \{T^n \mathrm{int}(X_{a_1 \ldots a_n}) \ : \ \forall X_{a_1 \ldots a_n}, \forall n > 0\}$ consists of finitely many open subsets of $\bar{X}$, we say $(T, X, Q, \mathcal{U})$ satisfies the *finite range structure*(FRS) condition. We denote $X_{a_1} \cap T^{-1} X_{a_2} \ldots \cap T^{-(n-1)} X_{a_n}$ with nonempty interior by $X_{a_1 \ldots a_n}$ and denote the local inverse $(T|_{X_a})^{-1}$ by ψ_a and $(T^n|_{X_{a_1 \ldots a_n}})^{-1}$ by $\psi_{a_1 \ldots a_n}$.

Definition 1. A probability measure ν is called a *weak Gibbs measure* for f with a constant P if there exists $\{K_n\}_{n>0}$, ($K_n > 0$, $\forall n$), $\lim_{n \to \infty} (1/n) \log K_n = 0$ such that ν-a.e. x,

$$K_n^{-1} \leq \frac{\nu(X_{a_1 \ldots a_n})}{\exp(\sum_{i=0}^{n-1} f T^i(x) + nP)} \leq K_n \ .$$

Definition 2. We say that a function ψ is of *weak bounded variation*(WBV) if there exists a sequence $\{C_n\}$ ($C_n > 0$, $\forall n$), satisfying $\lim_{n \to \infty} (1/n) \log C_n = 0$ such that ν-a.e. x,

$$\frac{\sup_{x \in X_{a_1 \ldots a_n}} \exp(\sum_{i=0}^{n-1} \phi(T^i x))}{\inf_{x \in X_{a_1 \ldots a_n}} \exp(\sum_{i=0}^{n-1} \phi(T^i x))} \leq C_n \ .$$

If ϕ is piecewise Hölder potential of WBV and ψ_a is Hölder continuous with exponent θ and Hölder constant L_a with $\sum_{a \in I} L_a^\theta < \infty$, then under the condition that $\mathcal{L}_\phi 1(x) = \sum_{a \in I} \phi(\psi_a(x)) < \infty$ ($\exists x \in X$) and $\mathcal{U} = \{X\}$, there exist $p > 0$ and a Borel probability measure ν such that ν is a weak Gibbs measure for ϕ with $-\log p$ satisfying $\mathcal{L}_\phi{}^* \nu = p\nu$, where $\mathcal{L}_\phi{}^*$ is the dual of $\mathcal{L}_\phi$ ([2]). Then $\frac{d(\nu T)|_{X_a}}{d\nu|_{X_a}} = \exp(\log p - \phi) > 0$ holds ν-a.e. for each $a \in I$ and so (T, X, Q) is a piecewise invertible system with FRS. Even if the hyperbolicity (e.g., piecewise expanding property) fails, the potential ϕ of WBV still admits an equilibrium state μ equivalent to ν and $\log p$ coincides with the maeasure theoretical pressure $P(\phi)$([2]). In this talk, we shall discuss these probelms and the weak Gibbs proprty of the equilibrium state μ ([1]).

References

[1] M. Yuri, Weak Gibbs measures for certain nonhyperbolic systems, Preprint.

[2] M. Yuri, Thermodynamic formalism for certain nonhyperbolic maps, to appear in *Ergodic theory and Dynamical Systems.*

[3] M. Yuri, On the convergence to equillibrium states for certain nonhyperbolic systems, *Ergodic theory and Dynamical Systems* 17 (1997), 977-1000.

[4] M. Yuri, Zeta funcitons for certain nonhyperbolic systems and topological Markov approximations, *Ergodic theory and Dynamical Systems* 18 (1998), 1589-1612.

Hausdorff dimension and computational complexity

Hiroyasu Kamo, Kiko Kawamura, Izumi Takeuti
Faculty of Science, Nara Women's University,
Graduate School of Human Culture, Nara Women's University,
Graduate School of Informatics, Kyoto University

Since Rice has discoverd the real field of all computable real numbers, many important studies have been made on computability and computational complexity in analysis. Investigation and classification of open, closed and compact subsets in Euclidean spaces by means of computational complexity are included in this research field. Weihrauch has introduced several representations of open, closed and compact subsets in Euclidean spaces, which are based on a computable countable open base of an Euclidean space.

Kamo and Kawamura have shown that a self-similar set generated by a tuple of computable contractions is a computable compact set. It is an application of computational analysis to fractal geometry. It is also an effectivation of Hutchinson and Hata's results. The next to study is computabl complexity in fractal geometry.

On the other hand, many traditional studies on fractal geometry have been made by means of the Hausdorff dimensions or other fractal dimensions. An important question is whether classification by means of computable complexity is independent to classification by means of fractal dimension or not. If it is independent, we may obtain another approach to investigate self-similar sets, fractal sets, etc by computing computable complexity.

It is trivial that there exists a set with P as its computable complexity and with an integer as its Hausdorff dimension. In this paper, as an evidence of "independency" of computational complexity and Hausdorff dimension, we will construct two sets. One of them is with P as its computational complexity and a non-integer as its Hausdorff dimension, and the other is a set with NP-complete as its computational complexity and an integer as its Hausdorff dimension.

First, we define computational complexity for analytical objcts, that is, real numbers, functions and figures.

Next, we investigate computability and computational complexity of self-similar sets further and prove the theorem that each self-similar set defined by polynomial time computable fucnctions is in computational complexity P, if the self-similar set satisfies polynomial open set condition. This fact tells us the computational complexity of most famous self-similar sets such as Koch curve. indeed, Koch curve is typical example of sets with P as its computational complexity and non-integer as its Hausdorff dimension.

Finally, we give an example of NP-complete subsets of Euclidean plane as the orbit of a function with Hölder condition. Thus we conclude the classification by means of computational complexity does not coincide the one by means of the Hausdorff dimension.

References

[1] K. Kawamura, H. Kamo, Computability of self-affine sets, Annual Reports of Graduate School of Human Culture, Nara Women's Univ.

[2] H. Kamo, K. Kawamura, Computability of self-similar sets, to appear in Math. Logic Quart.

Pisot substitutions and the Hausdorff dimension of boundaries of Atomic surface

Shunji Ito
Tsuda College

Let σ be a unimodular Pisot substituition on $A^* = \cup_{n=0}^{\infty}\{1,2,\cdots,d\}$, that is, the matrix L_σ satisfies

(1) $\det L_\sigma = \pm 1$

(2) the characteristic polynoimal of L_σ is irreducible over $\mathbf{Q}$ and eigenvalues λ_i $i = 1,2,\cdots d$ satisfy $\lambda_1 > 1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_d|$.

Let $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots)$ be the fixed point of a substitution σ and $\pi : \mathbf{R}^d \to \mathcal{P}$ is the projection along the eigenvector with respect to the maximum eigenvalue λ of L_σ to the contractive invariant plane $\mathcal{P}$. Let us define

$$X_\sigma := \text{ the closure of } \left\{\pi \sum_{k=1}^{n} e_{\omega_k} \mid n = 1,2,\cdots\right\}$$

where e_i, $i = 1,2,\cdots d$ is the canonical basis of $\mathbf{R}^d$. The domain X_σ called *the atomic surface* usually has a fractal boundary.

Theorem 1 *Let σ be a unimodular Pisot substituition wigh d letters and let X_σ the atomic surface with respect to σ. Then*

$$\dim_H \partial X_\sigma \leq \frac{\log \gamma_1 - \log \lambda_1 - (d-1)\log|\lambda_d|}{-\log|\lambda_d|},$$

where γ_1 is the maximum eigenvalue of the graph matrix M_σ.

Theorem 2 *Let σ be a unimodular Pisot substituition of $d = 2,3$ and let us assume that linear map $L_{\sigma|p}$ restricted to the contractive invariant surface $\mathcal{P}$ is a similitude. Then*

$$\dim_H \partial X_\sigma = \frac{(d-1)\log \gamma_1}{\log|\lambda_1|},$$

The following theorem is used as one of main tools.

Theorem (Arnoux-Ito) *Let σ be a unimodular Pisot substituition and put*

$$X_i := \textit{ the closure of } \left\{\pi \sum_{k=1}^{n} e_{\omega_k} \mid \omega_n = i,\ n = 1,2,\cdots\right\}.$$

Then X_i's satisfy the following relations for $i = 1,2,\cdots,d$,

$$X_i = \sum_{j=1}^{d} \sum_{S_k^{(j)} \,:\, W_k^{(j)} = i,\ \sigma(j) = P_k^{(j)} W_k^{(j)} S_k^{(j)}} \left(L_\sigma X_j - \pi f\left(S_k^{(j)}\right)\right) \quad \textit{(non-overlap)},$$

where $\sigma(j) = W_1^{(j)} \cdots W_{l_j}^{(j)}$ and $P_k^{(j)}$ $(S_k^{(j)})$ called the prefix (suffix) of $W_k^{(j)}$ is given by $P_k^{(j)} = W_1^{(j)} \cdots W_{k-1}^{(j)}$, $S_k^{(j)} = W_{k+1}^{(j)} \cdots W_{k_{1_j}}^{(j)}$.

Using this formula, we construct a William-Mordin graph which charactrizes the boundary of the atomic surface.

Example For the Rauzy substitution

$$\sigma : \begin{array}{lcl} 1 & \to & 12 \\ 2 & \to & 13 \\ 3 & \to & 1 \end{array}$$

the graph $G_B = (V_1, E, i, t)$ of the atomic surface boundary i s given by

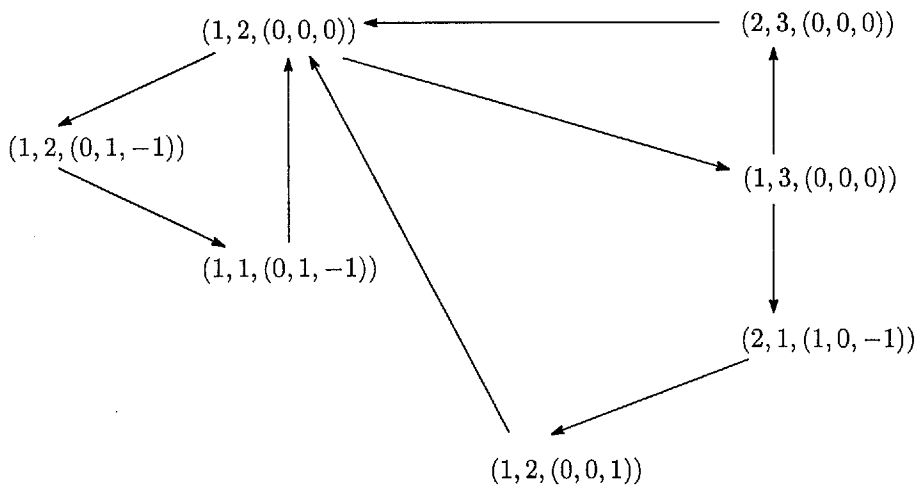


Figure : the graph of Rauzy substituion

and the the Hausdorff dimension of ∂X is given by

$$\dim_{\mathrm{H}} \partial X = \frac{2 \log \gamma_1}{\log \lambda_1} = 1.09337\ldots$$

where γ_1 is the maximum eigenvalue of the following graph matrix M_G:

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

whose characteristic polynomial is given by

$$x^3(x^4 - 2x - 1).$$

Local dimensions of measures – A survey

M. Zähle (University of Jena, Germany)

Methods of geometric measure theory are presented which connect local and global dimension properties of fractal sets and measures in arbitrary metric spaces. The following topics are treated:

1. Hausdorff, packing and capacity dimensions
(Vitali-type covering theorems, existence of compact subsets of finite positive measure, density theorems and Frostman Lemma for Hausdorff and packing measures; coincidence of Hausdorff and capacity dimensions)

2. Local and global dimensions of measures
(local upper, lower and average dimensions, global dimensions as essential extrema and their set theoretic characterization, variational principle for set dimensions via measures)

3. Average densities for self–conformal measures in $\mathbb{R}^n$ - A potential theoretic representation

Fractional and stochastic calculus

M. Zähle (University of Jena, Germany)

An analytic approach to integration theory of fractal functions is presented which has its origin in classical fractional calculus. We introduce an extension of the Lebesgue–Stieltjes integral which has been applied to pathwise stochastic integration in the adapted as well as the anticipative case. (Similar methods open the way to a new approach to harmonic analysis an fractals.)
In this talk we treat the following topics:

1. An extensions of Stieltjes integrals
2. Further extension to stochastic integrals
3. Processes with generalized quadratic variations and Itô formula
4. Applications to stochastic differential equations

MULTIFRACTAL ANALYSIS FOR ONE-DIMENSIONAL MAPS WITH A NEUTRAL FIXED POINT

KENTARO NAKAISHI
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES,
UNIVERSITY OF TOKYO

Recent developments of computers have made us possible to see fractal sets casually. If you have any experience of drawing fractal pictures by computer, you must have noticed that some points are easy to draw while others are not. This means that an invariant set does not necessarily have uniform structure from the dynamical point of view. One of motivations for the multifractal analysis is to uncover this hidden fine structure. Given a measure μ on a set X, a typical multifractal object is the Hausdorff dimension of points with the same scaling α;

$$f_\mu(\alpha) := \mathrm{HD}\Big\{x \in X| \lim_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} = \alpha\Big\}.$$

For a class of hyperbolic dynamical systems and Gibbs measures, the dimension spectrum $\alpha \mapsto f_\mu(\alpha)$ is real analytic. On the other hand, based on the analogy of statistical mechanics, it is expected that spectra of non-hyperbolic systems fail to be real analytic and that the points of phase transition have some characteristics. In this talk, we present a result along this line.

Let $f : [0,1] \to [0,1]$ be a unimodal map with the following properties;

(U1) f is continuous with $f(0) = f(1) = 0$,
(U2) $0 < \exists c < 1$ s.t. f is strictly increasing on $[0, c]$ and strictly decreasing on $[c, 1]$ with $f(c) = 1$,
(U3) $f|_{(c,1)}$ extends to C^2-function f_2 on $[c, 1]$.
(U4) $f|_{(0,c)}$ extends to C^1-function f_1 on $[0, c]$. Moreover f_1 is C^2 except for $z = 0$.
(U5) $Df(0) = 1$ and $Df(z) > 1$ for $\forall z \in (0, c]$,
(U6) $Df(z) < -1$ on $f_2^{-1}([c, 1])$ and $Df(z) \leq -1$ for $\forall z \in [c, 1]$.
(U7) $\exists b > 0, \tau > 0$ s.t.$D^2f(z) = bz^{\tau-1} + o(z^{\tau-1})$.

Example 0.1 (Farey map). $c = 1/2$,

$$f_1(z) = z/(1-z), f_2(z) = (1-z)/z$$

Let u be the measure of maximal entropy for f.

Definition 0.1. For $\alpha \in \mathbb{R}^+$ define

$$f_u(\alpha) = \mathrm{HD}\Big\{z \in [0,1]; \lim_{r\to 0} \frac{\log u(B(z,r))}{\log r} = \alpha\Big\},$$

$$l(\alpha) = \mathrm{HD}\Big\{z \in [0,1]; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|Df^n(z)| = \alpha\Big\}$$

where HD stands for Hausdorff dimension. $f_u(\alpha)$ is called *the dimension spectrum of* u and $l_u(\alpha)$ *the Lyapnov spectrum* for f.

Date: November 17, 1998.

Zeta Function and Generalized Primes

Jean-Pierre KAHANE

How li$x$, the integral logarithm of x, mimics $\pi(x)$, the nunber of prime numbers between 1 and x, has been a crucial problem for two centuries. The main discoveries were the Tchebycheff inequalities $a \leq \pi(x)/\mathrm{li}x \leq b$, the prime number theorem (Hadamard, de la Valée-Poussin, 1896) $\pi(x) \sim \mathrm{li}x$, and the Littlewood theorem(1914) which expressed, against the numerical evidence, that $\underline{\lim}(\pi(x) - \mathrm{li}x) = -\infty$. These three results, Ti, PNT, and LT, can be considered in the context of the generalized prime numbers of Beurling. Instead of $\pi(x)$ we consider any increasing function $P(x) = O(x) \quad (x \to \infty)$. The corresponding zeta function is

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \exp \int \log(1 - x^{-s})^{-x} dP(x) \\ &= \int x^{-s} dN(x) , \end{aligned}$$

where $N(x)$ plays the role of the distribution function of the integers. The Beurling theory consists in giving conditions on $N(x)$ that imply TNP. Beurling proved that$N(x) = Dx + x\epsilon(x)$ with $\epsilon(x) = O((\log x)^{\frac{3}{2}-\alpha}) \quad (x \to \infty)$ imply TNP when $\alpha > 0$, and does not imply TNP when $\alpha = 0$. Actually $\int (\epsilon(x)\log x)^2 dx/x < \infty$ suffices (conjecture of Bateman and Diamond 1969, proved by JPK, 1997). It was natural to conjecture that $\int |\epsilon(x)|\, dx/x < \infty$ implies TI (Diamond 1970) but that is false (K 1998); in that direction Zhang gives the best result (1987):$|\epsilon(x)| \leq \epsilon^*(x) \downarrow$ and $\int \epsilon^*(x)dx/x < \infty$ implies TI. All these results imply the fast that $\zeta(1+it)$ belongs or not to a certain algebra of functions. LT can be considered along the same lines,in a much easier way (K 1999).

6.

エルゴード理論、情報論とその周辺

分担者　：　濱地敏弘（九大）、井原俊輔（名大）、
　　　　　　盛田健彦（東工大）、中村宗敬（山梨大）
日　時　：　１９９８年１２月１１日（金）－１２月１４日（月）
場　所　：　日本大学山中湖セミナーハウス

本研究会は，1997 年 8 月名古屋大学において平成９～１１年度科学研究費補助金「基盤研究(A)(1)」確率論の総合的研究（研究代表者：高橋陽一郎）によって開催された研究会「データ圧縮とエントロピー，大偏差原理」に続いて，情報理論とエルゴード理論の研究者の交流を図る目的で開催されたものである．大学院生多数を含めた両分野の研究者約 50 名が参加して，上記セミナーハウスで合宿形式で行った．

情報理論関係の講演については井原が企画した．緩やかな制限しか持たない一般情報源の解析，特に（前回に続いて）エントロピー，大偏差原理についていくつかの講演を行ってもらった．これらの概念はエルゴード理論においても基本的であり，広く参加者の関心を呼び起こす講演の連続であった．特に韓太舜氏の長時間の講演は，刺激に富むものであったことを記しておきたい．

エルゴード理論関係については，特にテーマを絞らずに講演を募った結果，講演のテーマは以下のプログラムに示す通り多彩になった．国外から Denker, Silva, Park の 3 氏の参加を仰いだことも記しておく．

なお，本研究会は合宿形式で行われたため，分野，時間にとらわれず情報交換を行い，参加者間の議論を深めるという当初の目的が十分に達成できた．

以下にプログラいくつかの講演の要旨を添える．なお講演要旨は中村が適宜編集した．

プ　ロ　グ　ラ　ム

１２月１２日（土）

　９：００－　９：５０　川端　勉（電通大）
　二段階漸近的量子化への新しいアプローチ
１０：００－１０：５０　村松　純（ＮＴＴコミュニケーション科学研究所）
　Shields "The Ergodic Theory of Discrete Sample Paths" の紹介
１１：００－１１：５０　村松　純（ＮＴＴコミュニケーション科学研究所）
　一般情報源に対する概符号化定理

１３：２０－１４：１０　鈴木　譲（阪大）
　定常エルゴード性を仮定したのでは、ZL 符号のエッセンスは語れない。
１４：２０－１５：１０　杁山 公徳（名大）
　一般情報源における固定長符号化の誤り確率
１５：３０－１６：２０　韓　太舜（電通大）
　情報理論と大偏差問題における情報スペクトル的方法（１）
１６：３０－１７：２０　韓　太舜（電通大）
　情報理論と大偏差問題における情報スペクトル的方法（２）

１２月１３日（日）

９：００－　９：５０　辻井 正人（北大）
多次元区分拡大写像の力学系
１０：００－１０：５０　由利 美智子（札幌大）
Weak Gibbs measures for maps with indifferent periodic points
１１：００－１１：５０　M. Denker (Göttingen)
Gibbs-Markov maps

１３：２０－１４：１０　角　大輝（京大）
Skew pruducts related to finitely generated rational semigroups
１４：２０－１５：１０　宇敷 重広（京大）
Complex Ruelle operator and invariant hyperfunctions
１５：３０－１６：２０　C. Silva (Williams College)
Examples of rank one mixing Z^d actions and related problems
１６：３０－１７：００　濱地 敏弘（九大）
Nonsingular Chacon transformations
１７：１０－１７：４０　K. K. Park (Ajou University)
On directional entropy functions
１７：４０－
ショート・コミュニケーション

１２月１４日（月）

９：００－　９：５０　只木 孝太郎（北大）
Kolmogorov complexity とフラクタル集合
１０：００－１０：５０　高橋 勇人
（科学技術振興事業団「脳を創る」領域、東京電機大）
合原一幸
（東大、科学技術振興事業団「脳を創る」領域）
回転写像の Kolmogorov complexity
１１：００－１１：５０　阿部 隆次
Abelianization of Fricke groups and some remarks

2 段階漸近的量子化への新しいアプローチ

川端　勉
電気通信大学

1　はじめに

所与の自然数 N に対して，平面上の N 点 $y_1,\cdots,y_N$ からなる集合を N 点量子化器と呼ぶ．各々の点は量子化点，あるいは母点と呼ばれる．さて，s を正の実数としよう．

平面上の任意の N 点を N 点量子化器によって量子化するときに生じる量子誤差を，s 乗ユークリッド距離によって測ることにする．データが平面上滑らかな確率密度 $p(x)$ にしたがって発生するならば，期待量子化歪みは

$$\int_{\mathbf{R}^2} \min_{1\le i\le N} ||x-x_i||^s p(x)dx$$

となる．量子化器の最適設計とはこの期待量子化歪みを，あらゆる可能な N 点量子化器について最適化することである．漸近的量子化の問題とは，N が十分大きいときに，この最適値の漸近的性質ならびに，N 点量子化器の幾何を研究することである．まず基本的な結果として，この最適値は

$$\min_{\{y_1,\cdots,y_N\}} \int_{\mathbf{R}^2} \min_{1\le i\le N} ||x-x_i||^s p(x)dx \sim N^{-\beta} R_{2,s}||p||_\rho$$

のように漸近的に振舞うことが知られている [2]．ただし $\beta=s/k$, $\rho=2/(s+2)$ 並びに $||p||$ は p の ρ 乗ノルムを表す．また $R_{2,s}$ は p とは無関係な幾何学的な定数である [2,3]．ある緩やかな正則条件を満足する確率密度 p に関して，最適な N 点量子化器はまず第一に，ほとんど正六角形に相似なボロノイ領域（最近接領域）を持ち ([1]), 第二に量子点の密度は大域的に $p^\rho(x)$ に比例することが知られている．さらに，Bucklew [4] は一般の p についてはは漸近的に最適な N 点量子化器を一様な正三角格子構造からの等角写像として与える量子化逆写像 (compander) は存在しないことを指摘している．川端 [6] は漸近的な N 点量子化器をアフィン接続幾何を使って調べることを提案した．また任意の領域において計測されるべき五角形ボロノイ領域を七角形のそれとの個体差に対する理論予測式を p の関数として導出し，計算機実験によりそれを検証した．さらに [5] は最適量子化器は正三角格子構造が局所的に保存されるような領域の集まりによって構成されることを観測し，これを調和クラスタと呼んだ．

本論文では最後に述べた調和クラスタモデルについてさらに詳しく研究をする．前述のように，調和クラスタ内では量子化写像として複素正則関数を用いることができる．二段階量子化の考え方は，まずデータが与えられた時に，最初のデータが属する調和クラスタを決定する．次にそのクラスタに付随する複素正則関数を用いてデータを量子化空間に写像し，そこで一様量子化を行う．これらの結果，複素正則関数の番号（クラスタを示す番号）とクラスタにおける量子点の番号が符号となる．複合化はこの両者から直接的に行える．この方法によれば，量子化および設計のために必要とする記憶量や設計時間はかなり節約が可能なはずである．この方法は常識としては既知であった．本研究の特徴を述べれば，最適な局所圧延器を用いる点である．新規性は以下の 3 点に要約できる．まず第一に，二段階量子化器の最適誤差の 0 次近似値に対する相対誤差（不一致度と呼ぶ）を漸近的最適密度の関数として表現する．次に第二段階の圧延器をパラメトライズするための新しいモデル，即ち調和写像を提案する．これは今後の非漸近的二段階量子化器設計のための基礎を与えるはずである．第三に第一段量子化器に対する漸近解析法を提案する．

2 歪みの不一致度

密度 $\tilde{g}(x) := p^{\rho}/\int p^{\rho}dx$ を定義すると，$N\tilde{g}$ は最適な量子化器の数密度を与える．次に別な数密度 $Ng(x)$ をとる．最適な歪みは $D_{\infty} := N^{-\beta}R_{2,s}\int \tilde{g}(x)^{-\beta}p(x)dx$ のように与えられる．$Ng(x)$ を実際の量子点の数密度であるとし，それによる歪みを D_g と書く．Csiszár のダイバージェンスを $\mathcal{D}_f(g_1\|g_2) = E_{g_1}f(g_1/g_2)$ と書く．すると次の式が成り立つ．

Fact 1

$$\frac{D_g - D_{\infty}}{D_{\infty}} = \beta\mathcal{D}_{\beta^{-1}(x^{-\beta}-1)}(\tilde{g}\|g)$$

二次元実平面 $\mathcal{R}^2$ をガウス平面 $\mathcal{C}$ と同一視する．$\mathcal{C}$ を領域 ξ, $l(z) := \ln\tilde{g}(z)$ によって区別される領域の和 $\mathcal{C} = \bigcup_{\xi}\mathcal{U}_{\xi}$ に分割する．各 ξ に対し関数

$$L(z,\xi) := l(\xi) + (z-\xi)\partial l(\xi) + \frac{1}{4}(z-\xi)^2\partial^2 l(\xi)$$

を定義する．そうすると次のような有用な公式

$$l(z) = \Re(L(z;\xi)) + \frac{1}{4}\Delta l(\xi)\ z - \xi|^2 + \varepsilon(z;\xi)$$

が成り立つ．ただし

$$\varepsilon(z;\xi) := O(|z-\xi|^3)$$

であり，$\Re$ は実部をとることを意味する．この関数を用いて次のような密度

$$g(z) := c_{\xi}|e^{L(z;\xi)}| \quad \text{for } z \in U_{\xi}$$

を定義する．ここで正規化定数 c_{ξ} は $g(U_{\xi}) = \tilde{g}(U_{\xi})$ を満たすように定める．

3 局所圧延器の構成

圧縮器 $\varphi(w,\xi)$ とは座標 w をもつ量子化空間から z をもつ分布空間 U_{ξ} への写像とし，$\varphi(\xi,\xi) = 0$ を満足するものと定義する．また延長器とはその逆写像 $\varphi^{-1}(z,\xi)$ と定義する．さて ξ において位相 $\theta(\xi) \in [0,2\pi]$ が与えられたものとする．このとき微係数

$$\frac{dw}{dz} := \sqrt{c}\exp\{\frac{1}{2}L(z;\xi) - \theta(\xi)i\}$$

を定義すると，圧延器はその積分

$$\varphi^{-1}z;\xi) = \int_{\xi}^{z}(\frac{dw}{dz})dz$$

となる．これは量子化空間において格子ベクトル λ 並びに $\lambda e^{\frac{2}{3}\pi i}$ で張られる格子定数 $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}\sqrt{N}}$ の一様正三角格子（数密度はちょうど N ）を等角に分布空間の領域 U_{ξ} に写像するものであり，かつ対数をとると二次関数になっている．等角性は共形成とも呼ばれる．圧縮器の共形性は，ボロノイ多角形が正六角形であることを保存する．ξ において格子の像が数密度 $Ng(\xi)$ を持つことは，関係

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial R(w)}{\partial R(z)} & \frac{\partial R(w)}{\partial I(z)} \\ \frac{\partial I(w)}{\partial R(z)} & \frac{\partial I(w)}{\partial I(z)} \end{vmatrix} = g(z)$$

からもわかる．また量子化空間の基底ベクトル λ を分布空間においてみると，ξ において位相 $\theta(\xi)$ を持つベクトルに変換されることもわかる．分布空間における領域の位相の場に関する仮説が理論

並びに実験的に与えられている [6].

4 第一段階量子化の漸近解析

D_g が実際の配置に対する歪みを表すものと仮定する．いくつかの要因が相対ミスマッチに寄与する．一つは領域効果と呼ぶべきものであり，数密度のみが歪みに寄与する．もう一つは境界効果と呼ぶべきもので，ボロノイ多角形の形状を正六角形で近似できないことによる効果である．仮定として，以下の漸近解析が意味を持つほどに，十分多くの調和クラスタがあり，かつ各クラスタの大きさが十分大きいとすると，境界効果は領域効果に比べて無視できるようになる．実際 $\int k(z)dz = 1$ なる密度を用いてクラスタ中心が数密度 $N_q k(z)$ と書けるものとする．条件を十分に見積もっても，$1 << N_q << N^{1/5}$ であれば，この仮定が成立する．($1 << N_q << N^{1/3}$ でも十分であるとも推測している.) さてこの条件下で，クラスタ中心がどのようにぶんぷするか考えてみよう．計算のための仮説として，クラスタ中心を新たな母点とするボロノイ図がもう一度ほとんど正六角形になることを仮定しよう．このとき，領域効果は漸近的に次のように定式化できる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi} \tilde{g}(U_\xi)\beta \mathcal{D}_{\beta^{-1}(x^{-\beta}-1)}(\tilde{g}(\cdot|U_\xi)||g(\cdot|U_\xi)) \\
\sim\ & \frac{\beta(\beta+1)}{2}\sum_{\xi}\tilde{g}\{\text{A variance of } \tfrac{1}{4}||x-\xi||^2|\triangle\, \tilde{g(x)} \text{ with } \ \tilde{g}(\cdot|U_\xi) \text{ in } U_\xi\ \} \\
\sim\ & \frac{\beta(\beta+1)}{2}\frac{N_q^{-2}}{16}(R_{2,4}-R_{2,2}^2)\int \tilde{g}(x)(\triangle \ln \tilde{g}(x))^2)k^{-2}(x)dx\,.
\end{aligned}$$

最後の式は $k(\cdot)$ についてさらに最適化すると，$k(x) = \text{const.}p(x)^{\rho/3}(\Delta \ln p(x))^{2/3}$ のとき

$$\frac{\beta(\beta+1)}{32N_q^2}(R_{2,4}-R_{2,2}^2)\frac{\rho^2}{\int p^\rho}\left\{\int p(x)^{\rho/3}(\triangle \ln p(x))^{2/3})^{2/3}\right\}^3 dx$$

となる．

References

[1] L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum, Springer, (Japanese translation from Mizuho Shobo) 1972.

[2] P. Zador, Asymptotic quatization error of continuous signals and their quatization dimensions, IEEE Transactions on Information Theory 28 (1996), pp.139-149.

[3] A. Gersho, Asymptotically optimal block quatization, IEEE Transactions on Information Theory 25 (1979), pp.373-380.

[4] J. A. Bucklew, A note on optimal multidimensional companders, IEEE Transactions on Information Theory 29 (1983), p.279.

[5] T. Kawabata and H. Nakanishi, Harmonic cluster in the asymptotically optimal vector quantizer (in Japanese) Proceedings of the IEICE spring conference, Vol. 6 (1985), p.4.

[6] T. Kawabata and K. Uchiyama, Differential geometrical theory on two dimensional nonuniform optimal Voronoi structure and its experimental verification (in Japanese) The 9th symposiumon Science on Forum(1987), pp.26-27.

一般情報源に関する概符号化定理

村松　純

NTT コミュニケーション研究所

次の 2 つの符号を扱う．以下 $\mathcal{A}$ は適当なアルファベットの集合である．

固定長符号, FF $\{\varphi_n\}$

全単射 $\varphi_n : \mathcal{A}_c^n \to \{0,1\}^m$．$\mathcal{A}^n \setminus \mathcal{A}_c^n$ の要素を符号化するときは誤りとする．

可変長符号, FV $\{\varphi_n\}$

各 n で $\mathcal{A}^n \setminus \mathcal{B}^*$ が単射で，$\varphi_n(\mathcal{A}^n)$ が語頭集合になるもの．

Borel 可測空間 $(\mathcal{A}^\infty, \mathcal{F}, \mu)$ 上に確率測度 μ 考え，これを一般情報源と呼ぶ.（このとき consistency が必然的に成り立つが，Han and Verdú はこれも仮定しない一般情報源を定義している.）

ここで次のよう各種の符号化レートを考える．

固定長符号　任意の n に対して，$\mathcal{A}_c^n \subset \mathcal{A}^n$ が存在して，誤り確率が 0 に近づく：

$$\forall\gamma, \varepsilon > 0, \frac{1}{n}\log_2|\mathcal{A}_c^n| \le R_f + \gamma, \quad \mu(x \in \mathcal{A}^\infty; x^n \notin \mathcal{A}_c^n) \le \varepsilon.$$

可変長符号 average rate　可変長符号 $\{\varphi_n\}^n$ が存在して，平均符号長が漸近的に R を超えない：

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mu(x^n)l(\varphi(x^n)) \le R_{ave}.$$

可変長符号 in-probability rate　可変長符号 $\{\varphi_n\}^n$ が存在して，x^n の符号化レートが R を超えない確率が 1 に近づく：

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x \in \mathcal{A}^\infty; \frac{1}{n}l(\varphi(x^n)) \le R_{ip}\}) = 1.$$

可変長符号 almost-sure rate　可変長符号 $\{\varphi_n\}^n$ が存在して，確率が 1 で無限列の符号化レートが R を超えない．平均符号長が漸近的に R を超えない：

$$\mu\{x^n \in \mathcal{A}^\infty; \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}l(\varphi(x^n)) \le R_{as}\}) = 1.$$

μ がシフト T に関して定常エルゴード的であれば，これらの下限はすべて Shannon-McMillan-Breiman entropy H_μ^{SMB} に等しいが，そうでない場合は異なる場合があり得る．

次にこれらの符号化レートとエントロピーの関係を見る．まず

$$\begin{aligned}
\bar{h}_\mu(x) &\equiv \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_2\mu^n(x^n)), \quad x \in \mathcal{A}^\infty \\
\bar{H}_\mu^{MK} &\equiv \mu\text{-essup}\bar{h}_\mu(x) \\
&= \inf\left\{h; \mu\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{\log_2\mu^n(x^n)} \le h\right) = 1\right\}.
\end{aligned}$$

とすると，R_{as} の下限が $\bar{H}_\mu^{MK}$ である．一方

$$\bar{H}_\mu^K \equiv \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{x^n\in\mathcal{A}^n}\mu^n(x^n))\log_2\frac{1}{\mu^n(x^n))} \qquad \text{Kieffer (1989)}$$

は R_{ave} の下限を与え，

$$\overline{H}_{\mu}^{HV} \equiv \inf \left\{ h; \lim_{n\to\infty} \mu \left(\frac{1}{n} \log_2 \frac{\mu^n(x^n)}{>} h \right) = 0 \right\} \qquad \text{Han and Verdú (1993)}$$

は R_f, R_{ip} の下限を与える．さらに

$$\overline{H}_{\mu}^{K} \equiv \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{x^n \in \mathcal{A}^n} \mu^n(x^n) \log_2 \frac{1}{\mu^n(x^n)}, \quad \underline{H}_{\mu}^{K} \equiv \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{x^n \in \mathcal{A}^n} \mu^n(x^n) \log_2 \frac{1}{\mu^n(x^n)}$$

$$\overline{H}_{\mu}^{HV} \equiv \inf \left\{ h; \lim_{n\to\infty} \mu(A_{h,n}) = 0 \right\}, \quad \underline{H}_{\mu}^{HV} \equiv \sup \left\{ h; \lim_{n\to\infty} \mu(A_{h,n}) = 0 \right\},$$

$$\text{where} \quad A_{h,n} = \left\{ x \in \mathcal{A}^{\infty}; \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{\mu^n(x^n)} > h \right\}$$

$$\overline{H}_{\mu}^{MK} \equiv \inf \{h; \mu(A_h) = 0\}, \quad \underline{H}_{\mu}^{MK} \equiv \sup \{h; \mu(A_h) = 0\},$$

$$\text{where} \quad A_h = \left\{ x \in \mathcal{A}]^{\infty}; \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\log_2 \mu^n(x^n)} > h \right\}$$

のように定義すると，次が成り立つ．

定理　μ が一般情報源のとき，

$$0 \le \underline{H}_{\mu}^{MK} \le \underline{H}_{\mu}^{HV} \le \underline{H}_{\mu}^{K} \le \overline{H}_{\mu}^{K} \le \overline{H}_{\mu}^{HV} \le \overline{H}_{\mu}^{MK} \log_2 |\mathcal{A}|.$$

$\overline{H}_{\mu}^{K} \neq \overline{H}_{\mu}^{HV}$ であるような μ の例が Han によって，$\overline{H}_{\mu}^{HV} \neq \overline{H}_{\mu}^{MK}$ であるような μ の例が Miyake によって挙げられている．

情報源のクラスをいくつか定義する．まず，$\mathcal{A}^{\infty}$ 上のシフトに関連させて，定常性 (S)、エルゴード性 (E)，定常エルゴード性 (SE) が定義できる．

$$\forall C \in \mathcal{F}, \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}C)$$

のとき mu は AMS (Asymptotically Mean Stationary) であるという．以下
Average AEP : $\underline{H}_{\mu}^{K} = \overline{H}_{\mu}^{K}$.
in-probability AEP : $\underline{H}_{\mu}^{HV} = \overline{H}_{\mu}^{HV}$.
LDP for AEP: in-probability AEP をもつ情報源で

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \{r(\varepsilon, n)\}_n \quad \text{s.t.} \quad \mu \left(\left| \frac{1}{\log_2 \mu^n(x^n)} - H_{\mu}^{SMB} \right| > \varepsilon \right) < r(\varepsilon, n).$$

almost-sure AEP : $\underline{H}_{\mu}^{MK} = \overline{H}_{\mu}^{MK}$.
とする．このとき，それぞれのクラスを $\mathcal{C}(\cdot)$ と書くと，次の結果が得られる．

定理

$\mathcal{C}(\text{SE}) \subset \mathcal{C}(\text{S}) \subset \mathcal{C}(\text{AMS}) \subset \mathcal{C}(\text{average AEP})$,
$\mathcal{C}(\text{LDP for AEP}) \subset \mathcal{C}(\text{almost-sure AEP}) \subset \mathcal{C}(\text{in-probability AEP}) \subset \mathcal{C}(\text{average AEP})$.
$\mathcal{C}(\text{SE}) \subset \mathcal{C}(\text{almost-sure AEP}) \subset \mathcal{C}(\text{in-probability AEP}) \subset \mathcal{C}(\text{average AEP})$.

一般情報源における固定長符号化の誤り確率

杁山　公徳
名古屋大学人間情報学研究科

まず，アルファベット $\mathcal{X}$ に値をとる確率過程 $\mathbf{X} = \{X_n\}$ を考える．符号化関数 (encoder) $\varphi_n : \mathcal{X}^n \to \mathcal{M}_n := \{1, 2, \cdots, M_n\}$, および復号化関数 (decorder) $\psi_n : \mathcal{M}_n \to \mathcal{X}^n$ に対して，

$$\varepsilon_n := \Pr\{X^n \neq \psi(\varphi(X^n))\}, \quad X^n := (X_1, \cdots, X_n)$$

を誤り確率という．このような encoder, decorder の組 (φ, ψ) を (n, M_n, ε_n) 符号という．ここでは $\mathcal{X}^n$, X^n のように直積構造を仮定しない一般情報源 ([3]) を扱う．すなわち $\mathcal{X}^n$, X^n のかわりに可算アルファベット $\mathcal{X}_n$ と $\mathcal{X}_n$-値確率変数 X_n がらなる $\mathbf{X} = \{X_n\}$ （および $\mathbf{Y}$) を考える．我々は $\varepsilon \sim e^{-nr}$ を要求したときに符号化レートをどれだけ小さくできるかを明らかにする．一般情報源の性質を調べるのには Han and Verdú の「情報スペクトル理論」が有効であり，この問題も韓 [3] により解明されているが，ここでは新しい手法を用いて別表現を与える．

まず $\overline{R}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, $\underline{R}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ を次によって定義する．

$$\overline{R}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) := \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X_n}(Y_n)}, \quad \underline{R}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) := \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X_n}(Y_n)}:$$

また χ -値確率変数 X, Y に対して，$D(Y\|X) := \sum_{y \in \mathcal{X}} P_Y(y) \log \frac{P_Y(y)}{P_X(y)}$ とするとき，

$$D_u(\mathbf{Y}\|\mathbf{X}) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} D(Y_n\|X_n), \quad D_l(\mathbf{Y}\|\mathbf{X}) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} D(Y_n\|X_n)$$

と定義する．

定義　レート R が r-achievable

$$\iff \exists (n, M_n, \varepsilon_n) \text{ 符号} \quad \text{s.t.} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\varepsilon_n} \geq r, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R,$$

$$R_e(r|\mathbf{X}) := \inf\{R : R \text{ が } r\text{-achievable}\}$$

このとき次のことが成り立つ．

定理 1.　任意の $r \geq 0$ に対して，

$$R_e(r|\mathbf{X}) = \sup_{P_{Y_n} \in M(\mathcal{X}_n)} \{\underline{R}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - D_l(\mathbf{Y}\|\mathbf{X}) : D_l(\mathbf{Y}\|\mathbf{X}) :< r\}$$

である．ただし $R_e(0|\mathbf{X}) = 0$.

これは次の補題 2 および定理 3 を使って証明できる．

補題 2.　任意の $\mathcal{X}_n$ -値確率過程 $\{X_n\}$ に可測関数列 $\{f_n\}$ に対して，

$$\begin{aligned} -\inf_{P_{Y_n} \in M(\mathcal{X}_n)} \{D_l(\mathbf{Y}\|\mathbf{X}) : \underline{f}(\mathbf{Y}) > \mathbf{R}\} &\leq \frac{1}{n} \log P_{X_n}(f_n(X_n) \geq R) \\ &\leq \inf_{P_{Y_n} \in M(\mathcal{X}_n)} \{D_l(\mathbf{Y}\|\mathbf{X}) : \underline{f}(\mathbf{Y}) > \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

である．ただし $\underline{f}(\mathbf{Y}) = p\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n(X_n)$．

定理 3.([3])．任意の $r \geq 0$ に対して，

$$R_e(r\|\mathbf{X}) = \sup_{R\geq 0}\{R - \sigma(R) : \sigma(R) < r\}$$

となる．ただし，

$$\sigma(R) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X_n}\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X_n}(X_n)} \geq R\}}.$$

他に同様に正しく復号される確率の性質も考察できる [2].

References

[1] T. S. Han and S. Verdú, Approximation theory of output statics, IEEE Trans. Inform. Theory, 39 (1993),752-772.

[2] 杁山公徳, 一般情報源における固定長符号化の誤り確率, The 21st Symposium on INformation Theory and Its application(SAITA 98) 77-80.

[3] 韓太瞬, 情報理論における情報スペクトル的方法，培風館 (1998).

Dynamics of rational semigroups and the skew products

Hiroki Sumi
Graduate School of Human and Envirmental Studies, Kyoto University

Let G be a *rational semigroup*, which means that G is a subsemigroup of End($\bar{\mathbf{C}}$) which does not contain any constant elements. We set

$$F(G) = \{z \in \bar{\mathbf{C}} \mid G \text{ is normal in a neighborhood of } z\}, \quad J(G) = \bar{\mathbf{C}} \setminus F(G)$$

which are called the *Fatou set* and the Julia set of G respectively. $J(G)$ is backward invariant, while not forward invariant in general. If $G =< f_1, f_2, \cdots, f_m >$,then $J(G) = \cup_{i=1}^{m} f_i^{-1}(J(G))$ (*backward self-similarity*).

We next set $E(G) = \{z \in \bar{\mathbf{C}} \mid \sharp G^{-1}(z) < 2\}$, where $G^{-1}(z) = \cup_{g \in G} g^{-1}(z)$. We have that where exists and element of G of degeree at least two or if there exists an element of G of degree one and the order is infinite, then $E(G) = \{z \in \bar{\mathbf{C}} : \sharp G^{-1}(z) < \infty\}$ and $\sharp E(G) \leq 2$. For any $z \in \bar{\mathbf{C}} \setminus E(G)$, we have $J(G) \subset \overline{G^{-1}(z)}$. If $\sharp J(G) \geq 3$, then $J(G)$ is perfect and is equal to the closure of the points $z \in \bar{\mathbf{C}}$ such that there exists $g \in G$ with $g(z) = z$, $|g'(z)| > 1$. In general, the Julia set may have non-empty interior points.

Set

$$P(G) = \overline{\cup_{g \in G}\{ \text{ critical values of } g\}},$$

which is called *critical set* of G. One also says that G is *hyperbolic* if $P(G) \subset F(G)$, and *sub-hyperbolic* if $P(G) \cap F(G)$ is compact and $\sharp\{P(G) \cap J(G)\} < \infty$. For an open $U \subset \bar{C}$, we denote by $c(U, g)$ the set of all conneceted components of $g^{-1}(U)$. G is said to be *semi-hyperbolic* if there exists a positive number N and a positive number δ such that $\deg(g : V \to B(x, \delta)) \leq N$ for each $V \in c(B(x, \delta), g)$.

Theorem 1. *Let G be finitely generated and contains an element of degree at least two. Assume further that G is sub- or seim-hyperbolic and $Aut(\bar{\mathbf{C}}) \cap G$ is empty or consists of loxodromic element. Then there exists an attractor in $F(G)$ for G.*

Theorem 2. *A sufficient condition to be semi-hyperbolic is given.*

Set $\Sigma_m = \{1, 2 \ldots, m\}^{\mathbf{N}}$ and let σ be the shift map on Σ_m. Suppose that $G =< f_1, f_2, \cdots, f_n >$, $\deg(f_i) = d_i, i = 1, 2, \cdots, m$ and we define

$$\tilde{f} : \Sigma_m \times \bar{\mathbf{C}} \to \Sigma_m \times \bar{\mathbf{C}}$$

by $\tilde{f}(w, x) = (\sigma w, f_{w_1} x)$ for $w = (w_1, w_2, \cdots) \in \Sigma_m$ and $x \in \bar{\mathbf{C}}$. The map $\tilde{f}$ is finite to one and open, but have infinitely many critical points in general.

With respect to the map $\tilde{f}$, the Fatou set $F(\tilde{f})$ and the Julia set $J(\tilde{f})$ is defined similarly as before. We also define the sets F_w and J_w according to the normality of the family $\{f_{w_n} \circ \cdots \circ f_{w_1}\}$. See [4] for various results on these Fatou and Julia sets.

Let $K \subset \Sigma_m \times \bar{\mathbf{C}}$ be compact and backward invariant with respect to $\tilde{f}$. We define an operator $\tilde{B}_a$ on $C(\tilde{K})$ for each (probability) weight $a = (a_1, \ldots, a_m)$ by

$$\tilde{B}_a \tilde{\varphi}(z) = \sum_{\zeta \in \tilde{f}^{-1}(z)} \tilde{\varphi}(\zeta) \tilde{\psi}_a(\zeta)$$

where $\tilde{\psi}_a(\zeta) = \frac{a_{w_1}}{d_{w_1}}$ if $\pi_1(\zeta) = (w_1, w_2, \dots)$ ($\pi_1 : \Sigma_m \times \bar{\mathbf{C}} \to \Sigma_m$ is the natural projection w.r.t. the first coordinate).

Theorem 3. *Let $\pi_2 : \Sigma_m \times \bar{\mathbf{C}} \to \bar{\mathbf{C}}$ be the natural projection w.r.t the second coordinate. Assume that there exists an element $g_0 \in G$ of degree at least two, the exceptional set $E(G)$ for G is included in $F(G)$ and $F(H) \supset J(G)$ where H is a rational semigroup defined by $H = \{h^{-1} \mid h \in Aut(\bar{\mathbf{C}}) \cap G\}$. (If H is empty, put $F(H) = \bar{\mathbf{C}}$.) Then for each positive weight a, there exists a unique probability measure $\tilde{\mu}_a$ on $\Sigma \times \bar{\mathbf{C}}$ with the following properties.*

For each $\tilde{f}$- backward invariant compact $\tilde{K} \subset \pi_2^{-1}(\bar{\mathbf{C}} \setminus E(G))$ and each $\tilde{\varphi} \in C(\tilde{K})$,

$$\lim_{n\to\infty} ||\tilde{B}_a^n \tilde{\varphi} - \tilde{\mu}_a(\tilde{\varphi})||_{\tilde{K}} = 0.$$

In this case $(\tilde{f}, \tilde{\mu}_a)$ is exact. Furthermore the following entropy formula holds.

$$h_{\tilde{\mu}_a}(\tilde{f}) = -\sum_{j=1}^{m} a_j \log a_j + \sum_{j=1}^{m} a_j \log d_j.$$

Furthermore the Hausdorff diemnsion of $\dim_{\mathrm{H}}(J(G)$ is also estimated ([2]).

References

[1] H. Sumi, On dynamics of hyperbolic semigroups, J. Math. Kyoto Univ. 37(1997), 717-733.

[2] H. Sumi, On Hausdorff dimension of Julia sets of hyperbolic rational semigroups, Kodai Math. J. 21(1998), 10-28.

[3] H. Sumi, Dynamics of sub-hyprbolic and semi-hyperbolic rational semigroups, Mathematica Goettingensis

[4] H. Sumi, Skew product maps related to finitely generated rational semigroups, preprint.

回転写像の Kolmogorov complexity

高橋　勇人（科学技術振興事業団「脳を創る」領域，東京電機大・工）
合原　一幸（東京大・工）

$\omega = \omega_1\omega_2\cdots \in \{0,1\}^\infty$ に対して，$\omega_{1;n} = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n$, $x = x_1x_2\cdots x_n \in \{0,1\}^* = \cup_{n\geq 0}\{0,1\}^n$ に対して，$|x| = n$ と書く．prefix function とは partial recursive function でその入力が prefix code になっているものとする．$T_1, T_2, \cdots$ と prefix function を帰納的に枚挙できるが，prefix function U が存在して，$U(0^n1p) = T_n(p)$ となる．この U を universal prefx funciton と呼ぶ．

定義 1. $K(x) \equiv \min\{|p| \mid U(p) = x\}$ と定義し，これを *Kolmogorov complexity* と呼ぶ．

$x \in \{0,1\}^*$ により定まるシリンダー集合を Γ_x と書き，

$$P(\Gamma_\epsilon) = 1\ (\{\epsilon\} = \{0,1\}^0,\ \Gamma_\epsilon = \{0,1\}^\infty), \quad P(\Gamma_x) = P(\Gamma_{x0}) + P(\Gamma_{x1})\ (\forall x \in \{0,1\}^*)$$

が成り立つとき P を確率測度と呼ぶ．特に P が帰納的ならば帰納的確率測度という．

定義 2. P は帰納的確率測度とし，$\delta : N \to \mathbf{N} \cup \infty$ が次の 1,2 を満たすとき，δ を *sequential P-test* という．

1. $\delta(\omega) = \sup_{n\in\mathbf{N}}\{\gamma(\omega_{1;n})\}$, ただし $\gamma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ で $V = \{(m,y) : \gamma(y) \geq m\}$ は帰納的可算．
2. 各 m に対して $P(V_m) \leq 2^{-m}$．ただし $V_m = \{\omega : \delta(\omega) \geq m\}$．

もし $\delta(\omega) = 1$ ならば ω は test δ に失敗したと言い，その他の場合は合格したと言う．

$$\omega \text{ が } \delta \text{ に合格する．} \Longleftrightarrow \delta(\omega) < \infty \Longleftrightarrow \omega \notin \cap_{m=1}^{\infty} V_m,$$

$$\omega \text{ があらゆる test に合格する．} \Longleftrightarrow \omega \notin \cup U_{V_m \in A} \cap_{m=1}^{\infty} V_m.$$

ただし A はすべての sequential test の集合とする．

定義 3. ω が P-random であるとは $\omega \notin U_{V_m \in A} \cap_{m=1}^{\infty} V_m$ が成り立つことであるとする．

P-random な ω の集合は確率 1 で，これより次の評価が示されることが知られている．

定理 1.

$$\forall P\ (recursive), \quad \exists c, c' > 0 \quad \text{s.t.}$$

$$-\log P(\omega_{1;n}) - c \leq_{a.e.} K(\omega_{1;n}) \leq -\log P(\omega_{1;n}) + \log n + 1 \log\log n + c'\ (\forall n)$$

次に力学系 $T : X \to X$ に対して，$X = A_0 \cup A_1$, $\ A_0 \cap A_1 = \emptyset$, となっているとき，

$$\omega_n^x = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad T^n x \in A_0 \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad f : X \to \{0,1\}^\infty, \quad f(x) = \omega_1^x\omega_2^x\cdots\omega_n^x\cdots,$$

$$S_{\omega_{1;n}} := f^{-1}(\Gamma_{\omega_{1;n}}) = A_{\omega_1} \cap T^{-1}A_{\omega_2} \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}A_{\omega_n}$$

と定義する．m を X 上の確率測度とし，$P(\omega_{1;n}) := m(S_{\omega_{1;n}})$ とすると，P が帰納的ならば，定理 1 の評価が成り立つが，P が帰納的でないと，定理中の c, c' が発散し，Kolmogorov complexity の挙動はわからない．m が T-不変かつエルゴード的ならば，P が帰納的でなくても次が成立する．

定理 2.(Brudno)　shift とそのエルゴード的な不変測度 P のエントロピーを h_P とすると，$\lim_{n\to\infty} K(\omega_{1;n})/n = h_P \quad P\text{-a.e.}\omega$

この場合 $o(n)$ の具体的な評価は得られないが，これに役立つ手法を発見したので以下に述べる．

連続写像 $T_\alpha : X \to X$, $\alpha \in [0,1] = Y$ に対して，$X = [0,1] = A_0 \cup A_1$,　$A_0 \cap A_1 = \emptyset$ とする．ここで A_0, A_1 は連結で境界が有理数であるとする．また $T_\alpha(x)$ は α, x が有理数のとき，帰納的であるとする．前と同様に

$$\omega_n^{\alpha,x} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad T_\alpha^n(x) \in A_0 \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases}, \qquad f_\alpha : X \to \{0,1\}^\infty, \quad f_\alpha(x) = \omega_1^{\alpha,x}\omega_2^{\alpha,x}\cdots\omega_n^{\alpha,x}\cdots,$$

$$S^\alpha_{\omega_{1;n}} := f_\alpha^{-1}(\Gamma_{\omega_{1;n}}) = A_{\omega_1} \cap T_\alpha^{-1}A_{\omega_2} \cap \cdots \cap T_\alpha^{-(n-1)}A_{\omega_n}$$

と定義し，さらに $f : X \times A \to \{0,1\}^\infty$, $f(x,\alpha) = f_\alpha(x)$，また X 上の確率測度 m に対して，$P_\alpha(\omega_{1;n}) := m(S^\alpha_{\omega_{1;n}})$ とする．このとき $X \times A$ 上に確率測度 $M := m \times L$ （L はルベーグ測度）を考えると，$P(\omega_{1;n}) := M(S_{\omega_{1;n}}) = \int_0^1 P_y(\omega_{1;n})dy$ となるが，次のことが成り立つ．

定理 3. $P_y(\omega_{1;n})$ は y が有理数のとき帰納的であるとする．さらに $y \in [\tilde{y} - d, \tilde{y} + \tilde{d}], \tilde{y} \in X$ としたとき次のような関数 g が存在すると仮定する．

(1) $P_y(\omega_{1;n}) \geq P_{\tilde{y}}(\omega_{1;n}) - g(\tilde{y}, d, n)$.

(2) $\lim_{d \to 0} \sup_{y \in Y} g(y, d, n) = 0$.

(3) $g(y, d, n)$ は y, d が有理数のとき帰納的.

このとき $P(\omega_{1;n})$ は帰納的となる．

定理 4. α を有理数とし，m は帰納的で点密度を持たないとする．また $S^\alpha_{\omega_{1;n}}$ は連結であるとする．このとき $P_\alpha(\omega_{1;n})$ は帰納的となる．

定理 5. $y_{\max}$ は $P_y(\omega_{1;n})$ の最大値を与えるものとし，$\frac{d\tilde{F}}{dy}(y) = \lim_{d \to 0} \frac{g(y,d,n)}{d}$,　$\tilde{F}(y_{\max}) = P_{y_{\max}}(\omega_{1;n})$ として，$\tilde{F}$ を定義すると，

$$\int_{0 \leq \tilde{F} \leq P_{y_{\max}}} \tilde{F}(y)dy \leq P_y(\omega_{1;n}).$$

定理 6. $y_1 = \inf\{y | P_y(\omega_{1;n}) > 0\}$, $y_2 = \sup\{y | P_y(\omega_{1;n}) > 0\}$ とすると，

$$P_y(\omega_{1;n}) \leq (y_2 - y_1)P_{y_{\max}}(\omega_{1;n}).$$

これらの定理の応用として，回転写像の Kolmogorov complexily の評価が得られる：$T_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$, $A_0 = [0, 1/2)$, $A_1 = [1/2, 1)$ とし，X, $Y (= [0,1])$ 上にルベーグ測度を考える．この場合定理 3 の条件を満たすから，$P(\omega_{1;n})$ は帰納的となる．$g(y,d,n) = 2dn$ となることがわかり，これを使えば，定理 5, 6 から，$P^2_{y_{\max}}(\omega_{1;n})/(4n) \leq P(\omega_{1;n}) \leq P^2_{y_{\max}}(\omega_{1;n})/n$ となることが示される．したがって，定理 2 から

$$\exists c, c' \text{ s.t.} \forall n, \ -\log P_{y_{\max}}(\omega_{1;n}) + \log n + c \leq_{P\text{-}a.e.} K(\omega_{1;n}) \leq -2\log P_{y_{\max}}(\omega_{1;n}) + 2\log n + 2\log\log n + c'$$

となる．下側の評価は新しいものである．

References

[1] A. Brudno, Entropy and the complexity of the trajectories of a dynamical system, Transactions of the Moscow Mathematical Society, 44(1983), pp.127-151.

[2] M. van Lambalgen, Von Mises'definition of random sequences reconsidered, J. Symbolic Logic 52 (1987), pp.725-755.

[3] M. Li & P. M. B. Vitanyi, An introduction to Kolmogorov complexity and its application, Springer, 1997.

[4] H. Takahashi & K. Aihara, Kolmogorov complexity of measure preserving transformations, IBIS '98 予稿集 (1998), pp. 75-78.

7.

安定過程及びその応用に関する研究

分担者 竹中茂夫、高嶋惠三（岡山理科大学）

この研究班では、安定型確率過程の基礎的理論の拡充とその応用についての研究を目指した。　研究費の主な用途は次のページからの概要にあるような研究集会を行うための旅費に充てられた。国内から２２人、特筆すべきは丁度岡山理科大学に滞在中だったこの分野の代表的な研究者の１人、ボストン大学の M. Taqqu 教授の参加もあり、彼も加えた積極的な討論が行われた。

尚、シンポジウムで行われた講演の概要は日本人参加者は、予稿又はその一部、Taqqu 教授の分は、分担者竹中のメモより起こしたものである。

シンポジウムの概要

場所：　岡山国際交流センター（岡山駅西口前）

期間：　１９９９年1月７日～９日（午前）

プログラム

１９９９年1月７日

１０：３０－１１：００　古城克也（新居浜工業高等専門学校）
2-dimensional symmetric stable distributions and their marginal distributions.

１１：１０－１２：１０ M.Taqqu (Boston Univ.)（*）
Models for computer network traffic

１２：１０－１３：３０ 昼休み

１３：３０－１４：２０ 井上和行（信州大学）
A stochastic model for a dam with non-additive input

１４：３０－１５：２０ 井上昭彦（北海道大学）

Long time behavior of the partial autocorreation coefficients of a stationary time series.

１５：４０－１６：４０　T.K.Choi　(＊＊)

Limit theorems for the larege and small increments of Gauusian random fields

1月8日

１０：００－１１：００ 渡部俊郎（会津大学）

Absolute continuity of some semi-self decomposable distributions.

１１：１０－１２：１０ M.Taqqu (Boston Univ.)（＊）

Renewal reward processes with heavy-taile interrenewal times and heavy-tailed rewards.

１２：１０－１３：１０ 昼休み

１３：１０－１４：００ 山里 真（琉球大学）

On strage processes

１４：１０－１５：００ 志村隆彰（統計数理研究所）

The product of independent random variables characterized by regular variation.

１５：２０－１６：１０ 山田啓吾（神奈川大学）

Fractional derivatives of local times of symmetric stable Levy processes as the limits of occupation time problems.

１６：２０－１６：５０　上村稔大（神戸商科大学）

一次元安定型過程の標本路の性質について。

1月9日 １０：００－１２：００

１０：００－１０：３０　石川保志　（筑波大学数学系）

Jumping processes and boundary value problem

１０：３０－１１：００　竹中茂夫　（岡山理科大学）

On determinisms of set-indexed S α S-processes

１１：００－１１：３０　高嶋恵三　（岡山理科大学）

擬似乱数と random walk 検定

１１：３０－１２：００　討論

参加者一覧

石川 保志	筑波大	助手
磯崎 泰樹	大阪大理	助手
井上 昭彦	北海道大学	助教授
井上 和行	信州大学	教授
上村 稔大	神戸商科大学	講師
金川 秀也	金沢大学	教授
久保 泉	広島大学	教授
河野 敬男	京都大学総合人間	教授
古城 克也	新居浜高専数理	講師
崔 容甲	韓国慶尚大学校	教授
佐藤 由身子	愛知工業大学	教授
志村 隆彰	統計数理研究所	助手
島 唯史	広島大学 総合科学	助教授
高嶋 恵三	岡山理科大学	教授
高野 優	静岡大学工	教授
M. Taqqu	Boston University	教授
竹中 茂夫	岡山理科大学	教授
田沢 紘一郎	信州大学	助教授
陳 春航	琉球大学	助教授
藤崎 正敏	神戸商科大学	教授
洞 彰人	岡山大環境理工	助教授
山里 眞	琉球大学	教授
山田 啓吾	神奈川大学	教授
渡部 俊朗	会津大	講師

2-dimensional symmetric stable distributions and their marginal distributions

Katsuya Kojo (Niihama National College of Technology)

In this talk, we consider the following question.

Question. Does there exist a pair $(X = (X_1, X_2), \tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2))$ of 2-dim random variables which satisfies the following conditions (C1), (C2) and (C3)?,

(C1) X is 2-dim SαS.

(C2) $\tilde{X}$ is not identically distributed with X.

(C3) There exists a number $\theta_0 \in (0, \pi)$ such that $a_1 X_1 + a_2 X_2$ and $a_1 \tilde{X}_1 + a_2 \tilde{X}_2$ are identically distributed if $\arg(a_1, a_2) \in [0, \theta_0] \cup [\pi, \pi + \theta_0]$.

If $0 < \alpha \leq 1$, the answer is *yes.*

Proposition. *Let* $0 < \alpha \leq 1$. *Then there exist 2-dim random variables* $X = (X_1, X_2)$, $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ *such that*

$$E \exp i(z_1 X_1 + z_2 X_2) = \exp(-|z_1 + z_2|^\alpha), \quad (z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2,$$

$$E \exp i(z_1 \tilde{X}_1 + z_2 \tilde{X}_2) = \begin{cases} \exp(-|z_1 + z_2|^\alpha), \\ \qquad \qquad \textit{if } \arg(z_1, z_2) \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2], \\ \exp(-|z_1 - z_2|^\alpha), \quad \textit{otherwise}, \end{cases} \tag{1}$$

and the pair $(X, \tilde{X})$ *satisfies* (C1), (C2) *and* (C3) *with* $\theta_0 = \pi/2$.

Let $\tilde{\varphi}(z_1, z_2)$ be a function given by the right hand side of (1). To prove this proposition, we have only to show that $\tilde{X}$ really exists, in other words, the function

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{R}^2} \exp(-i(x_1 z_1 + x_2 z_2)) \tilde{\varphi}(z_1, z_2) dz_1 dz_2$$

is non-negative and $\int_{\mathbf{R}^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$.

Corollary. *Let* $0 < \alpha \leq 1$ *and* $0 < \theta_0 < \pi$. *Then there exist 2-dim random variables* $X = (X_1, X_2)$, $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ *such that*

$$E \exp i(z_1 X_1 + z_2 X_2) = \exp(-|z_1 + (1 - \cos\theta_0) z_2 / \sin\theta_0|^\alpha), \quad (z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2,$$

$$E \exp i(z_1 \tilde{X}_1 + z_2 \tilde{X}_2) = \begin{cases} \exp(-|z_1 + (1 - \cos\theta_0) z_2 / \sin\theta_0|^\alpha), \\ \qquad \qquad \textit{if } \arg(z_1, z_2) \in [0, \theta_0] \cup [\pi, \pi + \theta_0], \\ \exp(-|z_1 - (1 - \cos\theta_0) z_2 / \sin\theta_0|^\alpha), \quad \textit{otherwise}, \end{cases}$$

and the pair $(X, \tilde{X})$ *satisfies* (C1),(C2) *and* (C3).

Models ofr computer network traffic
コンピュータネットワークの情報流通量の数学モデル

Murad Taqqu (Boston University)

1. データは、Bellcore 社の 1998 年 8 月 29 日に始まる 27 時間の社内ＬＡＮに流れる情報量で、単位時間あたりのパケット数で、分解能は $20\mu sec$ である。このデータの時間スケールには明らかなスケール則（自己相似性が見られる）。　次の様に考えれば分数幂ブラウン運動 (Fractional Brownian motion) と考えれば巨視的な、すなわちデータの見かけに対する近似が得られる。

まず、時間当たりのパケット量は正値定常過程と考える。　これは平均を引き去る事により、平均０の定常過程となる。　されに、ある開始時間からの積分をかんがえれば、平均０の定常増分を持つ確率過程が得られる。　最後の確率過程を Fractional Brownian motion でモデルを作ろうというアイデアである。　上で出てきた定常増分を Fractional Gaussian Noise と呼ぶ。

2. モデルの元になったアイデアは次のようなものである。まず、

$$U_1(1), U_1(2), U_1(3), \cdots$$

を、あるワークステーションの ON Time, すなわちパケットを送出している i 番目の期間を示す確率変数。

$$U_2(1), U_2(2), U_2(3), \cdots$$

を同じく OFF Time, すなわちパケットを送出していない期間を示す確率変数とする。

ON Time は、独立同分布であり、その末尾関数が

$$F_1(x) = P(U_1 > x) \sim= \ell_1 x^{-\alpha_1},\ 1 < \alpha_1 < 2,\ x \to \infty$$

, OFF Time も ON Time とは独立な独立同分布な確率変数系で、

$$F_2(x) = P(U_2 > x) \sim= \ell_2 x^{-\alpha_2},\ 1 < \alpha_1 < 2$$

を満たすものとする。　また、$\alpha_2 = 2$ の場合には、$E[U_2^2] < \infty$ としておく。また$\mu_1 = E[U_1],\ \mu_2 = E[U_2],\ W(t) = 1,\ if\ t \in ON\ Time,\ W(t) = 0,\ if\ t \in OFF\ Time$ とおく。

3. 問題は、積分

$$\int_0^{Tt} \sum_{m=1}^{M} W^{(m)}(u))du$$

が、適当な正規化定数をつかって、$M \to \infty,\ T \to \infty$ で、求める Fractional Brownian motion に収束するかどうかである。

結論をいうと、

$$\lim_{M,T\to\infty} \frac{1}{T^H} \left[\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{M} \left(W^{(m)}(u) - E[W^{(m)}(u)] \right) \right] du = B_H(t)$$

A Stochastic Model for a Dam with Non-additive Input

Kazuyuki INOUE and Naoki TAKAYAMA (Shinshu University)

We are concerned with a dam content process $\mathbf{X} = \{X(t);\ t \geq 0\}$ determined by the stochastic integral equation

(1) $$X(t) = x + A(t) - \int_0^t r(X(s))ds \qquad (t \geq 0)$$

with initial content $x \geq 0$, cumulative input process $\mathbf{A} = \{A(t);\ t \geq 0\}$ and release rate $r(z),\ z \geq 0$. The typical form of $r(z)$ is given by $r(z) = cz^\alpha$ $(c > 0,\ \alpha > 0)$.

put $W_n = \dfrac{V_n}{T_n}$ $\mathbf{X}$. In this talk we devote ourselves to the following

$$\text{Case I}: \ r(z) = cz \qquad \text{and} \qquad \text{Case II}: \ r(z) = cz^2.$$

Then $\{X_n\}$ can be described by the fractional linear transformation $\Phi_A(x)$ given by

$$\Phi_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (x \in \mathbf{R}) \qquad \text{for } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{R}).$$

Theorem 1. *Assume either Case I or Case II. Then there exists a sequence $\{M_n\}$ of i.i.d. random matrices in $GL(2, \mathbf{R})$ such that, for each $n \geq 0$,*

(2) $$X_{n+1} = \Phi_{M_n}(X_n) \qquad \textit{with } X_n \textit{ and } M_n \textit{ independent.}$$

The explicit form of $\{M_n\}$ is given as follows.

Case I (linear case):

(3) $$M_n = \begin{pmatrix} R_n & Y_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) $$R_n = e^{-cT_n}, \qquad Y_n = \frac{W_n}{c}(1 - R_n).$$

Case II (non-linear case):

(5) $$M_n = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(J_n)\begin{pmatrix} J_n(Q_n+1) & J_n^2(Q_n-1) \\ Q_n - 1 & J_n(Q_n+1) \end{pmatrix} + \mathbf{1}_{\{0\}}(J_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cT_n & 1 \end{pmatrix}$$

(6) $$J_n = \sqrt{\frac{W_n}{c}}, \qquad Q_n = e^{2cJ_nT_n}.$$

Theorem 2. *The following four conditions are equivalent:*

(i) *The sequence $\{X_n\}$ converges in law to some random variable X_∞.*

(ii) *There exists a random variable X satisfying the stochastic equation*

(7) $$X =^d RX + Y \qquad \textit{with } X \textit{ and } (R, Y) \textit{ independent.}$$

(iii) $$E[\log^+ Y] < \infty.$$

(iv) $$E[\log^+ V] < \infty.$$

Long Time Behavior of the partial autocorrelation coefficients of a stationary time series

Akihiko INOUE (Hokkaido University)

Results

Let $X = (X_n : n \in \mathbf{Z})$ a real, centered, weakly stationary time series defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. We write γ for the autocovariance function of X: $\gamma(n) := E[X_n X_0]$. For $n \geq 2$, we denote by $P_{[1,n-1]}$ the orthogonal projection operator of $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ to the subspace spanned by $\{X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}\}$. The *partial autocorrelation coefficient* $\alpha(n)$ is defined by

$$\alpha(n) := \frac{E[\epsilon_n^+ \epsilon_n^-]}{E[(\epsilon_n^+)^2]^{1/2} \cdot E[(\epsilon_n^-)^2]^{1/2}} \qquad (n = 2, 3, \cdots),$$

where

$$\epsilon_n^+ := X_n - P_{[1,n-1]} X_n, \quad \epsilon_n^- := X_0 - P_{[1,n-1]} X_0.$$

The partial autocorrelation coefficient $\alpha(n)$ is thus the correlation coefficient of the residuals obtained after regressing X_0 and X_n on the intermediate observations $X_1, \cdots, X_{n-1}$.

We are concerned with the asymptotic behavior of $\alpha(n)$ as $n \to \infty$. The main difficulty of this problem comes from the fact that it involves quantities related to the prediction from a *finite* part of the past.

Here we assume that the autocovariance function γ is regular to the extent

there exists a finite Borel measure σ *on* $(0,1)$ *such that* $\gamma(n) = \int_0^1 t^{|n|} \sigma(dt) \quad (n \in \mathbf{Z})$. (1)

EXAMPLE. Let $-\infty < d < 1/2$. Since

$$(1 + |n|)^{2d-1} = \int_0^1 t^{|n|} \frac{(-\log t)^{-2d}}{\Gamma(1-2d)} dt \qquad (n \in \mathbf{Z}),$$

$\gamma(n) = (1 + |n|)^{2d-1}$ are autocovariance functions which satisfy (A).

THEOREM We assume (A). Let ℓ be a slowly varying function at infinity.

1. Let $0 < d < 1/2$. If $\gamma(n) \sim n^{2d-1} \ell(n)$ as $n \to \infty$, then

$$|\alpha(n)| \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty). \tag{2}$$

2. Let $-\infty < d < 0$. If $\gamma(n) \sim n^{2d-1} \ell(n)$ as $n \to \infty$, then

$$|\alpha(n)| \sim \frac{1}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)} \gamma(n) \qquad (n \to \infty). \tag{3}$$

LIMIT THEOREMS FOR THE LARGE AND SMALL INCREMENTS OF FRACTIONAL LÉVY BROWNIAN FIELDS

Yong-Kab Choi (Gyeongsang National University, Korea)

eter fractional Lévy Brownian two-parameter Wiener process in the books of Csörgő and Révész (1981),Lin and Lu (1992). Our results for the m those results in the previous books because the structures of the above two processes differ from each other.

Let $\{X(x,y) : 0 \le x < \infty, 0 \le y < \infty\}$ be a two-parameter fractional L 'evy Brownian motion of order 2α with $0 < \alpha < 1$ on the probability space $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, that is, let $\{X(x,y) : 0 \le x < \infty, 0 \le y < \infty\}$ be an almost surely continuous, real-valued Gaussian process with mean zero, $X(0,0) = 0$ and stationary increments

$$E\{X(x_1,y_1) - X(x_2,y_2)\}^2 = \{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\}^\alpha \tag{1}$$

for all distinct two time points (x_1,y_1) and (x_2,y_2) in $R_+^2 := [0,\infty) \times [0,\infty)$.

Let us consider the rectangle $R := R(s,t,u,v) := [s, s+t] \times [u, u+v] \subset R_+^2$ for all $s, u \ge 0$ and $t, v > 0$, and define the increment $X(R)$ of a two -parameter fractional Lévy Brownian motion on R by

$$\begin{aligned} X(R) &:= X(R(s,t,u,v)) \\ &:= X(s+t, u+v) - X(s, u+v) - X(s+t, u) + X(s,u). \end{aligned}$$

$$B_T = \frac{T}{{h_T}^2}, \quad B_T^* = B_T\Big(\frac{a_T}{h_T} \vee 1\Big),$$

where $m \vee n = \max\{m,n\}$, and for $e < T < \infty$

$$\beta_T = \{2(\log B_T + \log\log T)\}^{1/2}, \quad \beta_T^* = \{2(\log B_T^* + \log\log T)\}^{1/2}.$$

$$\begin{aligned} D(a_T, h_T) &= \sup_{0 \le s \le T - a_T} \sup_{0 \le u \le 1 - h_T} \frac{|X(R(s, a_T, u, h_T))|}{S(a_T, h_T)\beta_T}, \\ D^*(a_T, h_T) &= \sup_{0 \le t \le a_T} \sup_{0 \le v \le h_T} \sup_{0 \le s \le T-t} \sup_{0 \le u \le 1-v} \frac{|X(R(s,t,u,v))|}{S(h_T \vee t, h_T)\beta_T^*}. \end{aligned}$$

Theorem 1 *Let a_T and h_T satisfy above conditions* (i)$\sim$(iv). *Then we have*

$$\limsup_{T\to\infty} D^*(a_T, h_T) \le 1 \qquad \text{a.s.}$$

Theorem 2 *Let a_T and h_T be as in Theorem 1. Further assume that*

(v) $\lim_{T\to\infty} \log B_T / \log\log T = \infty$.

Then we have

$$\liminf_{T\to\infty} D(a_T, h_T) \geq 1 \qquad \text{a.s.}$$

Combining Theorems 1 and 2, we immediately obtain the following limit theorem:

Corollary 1 *Under the assumptions of Theorem 2, we have*

$$\lim_{T\to\infty} D^*(a_T, h_T) = \lim_{T\to\infty} D(a_T, h_T) = 1 \qquad \text{a.s.}$$

Example 1 Let $\{X(x,y) : 0 \leq x < \infty,\ 0 \leq y < \infty\}$ be a two-parameter Lévy Brownian motion with $\alpha = 1/2$. For $T > e$, let $a_T = \sqrt{T+2}/3$ and $h_T = 1/(3\sqrt{T})$. Then all conditions of Corollary 1 are satisfied, and $\mu = 1/9$ in the condition (iii). Thus, we have

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\leq s\leq T-a_T} \sup_{0\leq u\leq 1-h_T} \frac{|X(R(s,a_T,u,h_T))|}{(\sqrt{T+2}-\sqrt{T})^{1/2}\gamma_T} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{a.s.,}$$

where $\gamma_T = \{\log(3T(3T-\sqrt{T+2})) + \log\log T\}^{1/2}$.

参考文献

1 M. Csörgő and P. Révész, *Strong approximations in probability and statistic*, Academic

Press, New York (1981).

2 Z. Y. Lin and C. R. Lu, *Strong limit theorems*, Science Press, Kluwer Academic Publishers (1992)

Absolute continuity of some semi-selfdecomposable distributions

Toshiro Watanabe (The University ofAizu)

determined by μ. Let p be a real number in $(0,1)$. We define a b-decomposable distribution $\nu_{b,p}$ on $\mathbf{R}^1$ by

$$\widehat{\nu}_{b,p}(z) = \prod_{n=0}^{\infty}(p + (1-p)\exp(ib^n z)). \tag{1.3}$$

We say that b in $(0,1)$ is a *Peres-Solomyak number* (P.S. number, for short) if there exist p in $(2^{-1}, 1)$ and a positive integer n such that $\widehat{\nu}_{b,p}(z)$ belongs to $L^n(\mathbf{R}^1)$. A positive algebraic integer θ is said to be a *Pisot-Vijayaraghavan number* (P.V. number, for short) if $\theta > 1$ and all algebraic conjugates of θ have absolute values less than 1. The upper Hausdorff dimension of a probability distribution μ on a metric space is denoted by $\dim^* \mu$, that is,

$$\dim^* \mu = \inf\{\dim E : \mu(E) = 1\},$$

where $\dim E$ stands for the Hausdorff dimension of a Borel set E in the metric space. The entropy of a discrete distribution μ on $\mathbf{R}^d$ is denoted by $h(\mu)$, that is,

$$h(\mu) = -\sum_{a\in A}\mu(\{a\})\log\mu(\{a\}),$$

where the set A is given by $A = \{a \in \mathbf{R}^d : \mu(\{a\}) > 0\}$. Let η_t be the Poisson distribution on $\mathbf{R}^1$ with a parameter $t > 0$, namely, $\eta_t(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t}(n!)^{-1}t^n\delta_n(dx)$. We define a function $H(t)$ for $t > 0$ as

$$H(t) = h(\eta_t). \tag{1.4}$$

Our results are as follows.

Theorem 1. Suppose that $\lambda^* < \infty$.

(i) We have

$$\dim^* \mu_t \le \frac{H(t\lambda^*)}{-\log b}. \tag{1.6}$$

(ii) The distribution μ_t is continuous singular for $0 < t < H^{-1}(-\log b)/\lambda^*$.

Corollary 2. Let ζ_t be an infinitely divisible distribution on $\mathbf{R}_+$ for $t > 0$ such that

$$\widehat{\zeta}_t(z) = \exp(t\sum_{n=0}^{\infty}(\exp(ib^n z) - 1)\gamma_n), \tag{1.7}$$

where γ_n is nonnegative, $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0$, and $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n = \infty$. Then $\dim^* \zeta_t = 0$ and ζ_t is continuous singular for all $t > 0$.

Renewal reward processes with heavy-tailed inter renewal times
and heavy-tailed rewards
重い裾野分布の内部更新時間と報酬を持った新生報酬過程

Murad Taqqu (Boston Unversity)

4. 確率変数 U は、$P(U > x) \sim cx^{-\alpha}$, $x \to \infty 1 < \alpha < 2$ を満たすものとする。ここで、初期値を表す確率変数 S_0 が、$P(S_0 = x) = \frac{1}{\mu}P[U > x]$ を満たすなら、S_t は定常な離散時間新生過程となり、P(新生過程が値 x を持つ) $= \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = x) = \frac{1}{\mu}$ が成り立つ。
別に期間 U_nでの負荷を表す確率変数 W_nを用意する。これは独立同分布で、U達とも独立だとしておく。また、$EW_k = 0$, $EW_k^2 < \infty$ を仮定しておく。
確率過程 $W(t)$ を、時刻 S_{i-1}から、時刻 S_iまでは値 W_iを取ると定義すると、新生報酬過程 (renewal reward process) となる。
5.

$$W^*(T) = \sum_{t=1}^{T} W(t)$$

とおいて、前と同じようにこれのコピー $W_m(t)$ の和、

$$W^*(TyM) = \sum_{t=1}^{[Ty]} \sum_{m=1} MW_m(t),\ M, T \to \infty$$

の挙動を調べると、
Theorem 1.

$$\frac{1}{T^H}\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{t=1}^{[Ty]}\sum_{m=1}^{M} W_m(t) \to B_H(y)$$

ここに、$H = \frac{3-\alpha}{2}$.

同様にして、裾野の重い分布に従う報酬、$P(W_k > x) \sim x^{-\beta}$ に対して、
Theorem 2. $\beta > \alpha$ を満たすなら、

$$\frac{1}{T^{1/2}}\frac{1}{M^{1/\beta}}\sum_{t=1}^{[Ty]}\sum_{m=1}^{M} W_m(t) \to \beta - Levy\ stable\ motion,\ 1 < \alpha < \beta < 2$$

Theorem 5. 確率過程$\tilde{Z}_\beta^\epsilon(s)$ は、混合型移動平均過程 (mixed moving average process) である。実際

$$\tilde{Z}_\beta^\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(s-u, x)\tilde{M}(du, ds)$$

と表すことが出来る。

On Storage processes

Makoto Yamazato (University of Ryukyus)

Let $\{A(t)\}$ be a subordinator with $A(0) = 0$ and

$$E(e^{-\theta A(t)}) = \exp\{\int_0^\infty t(e^{-\theta y} - 1)\nu(dy)\}$$

for $\theta \geq 0$ where, ν is a Lévy measure satisfying $0 < \int_0^\infty (x \wedge 1)\nu(dx) < \infty$. Let r be a function defined on $R_+ = [0, \infty)$ to R_+, $r(0) = 0$, $r(x) > 0$ for $x > 0$ and left continuous with positive right limits on $(0, \infty)$. We roughly say that a stochastic process is a storage process if it satisfies the following stochastic integral equation:

$$X(t) = x - \int_0^t r(X(s))ds + A(t). \tag{4}$$

Refer [?] for precise definition and construction. The storage processes are known to be Hunt processes.
We discuss the properties of semigroups corresponding to the storage processes and give recurrence criteria.

Semigroups corresponding to storage processes
Let $T_t f(x) = E_x f(X(t))$. Let C_0 be the class of continuous functions on R_+ vanishing at infinity.

Theorem 1. Assume that (1) $\int_1^\infty \frac{1}{r(y)}dy = \infty$ and (2) $\nu(R_+) < \infty$ or r is nondecreasing. Then $\{T_t\}$ is a C_0-strongly continuous nonnegative contraction semigroup.

Theorem 2. Assume that $\nu(R_+) < \infty$ and $\int_1^\infty \frac{1}{r(y)}dy = \infty$. Then $D(G) = D_1$ and

$$Gf(x) = -r(x)f'(x) + \int_0^\infty \{f(x+z) - f(x)\}\nu(dz) \tag{1}$$

for $x \geq 0, f \in D(G)$.

Theorem 3. Suppose that r is nondecreasing and $\int_1^\infty \frac{1}{r(y)}dy = \infty$. Then, D_2 is a core for G and $Gf(x)$ has the representation (??) for $f \in D_2$.

Recurrence classification of storage processes
Let τ_y be the hitting time for $[0, y]$.

Theorem 4. The storage processes are classified into the following three types:
(a) For all $x > y > 0$, $0 < P_x(\tau_y < \infty) < 1$.

(b) For all $x > y > 0$, $P_x(\tau_y < \infty) = 1$ but $E_x(\tau_y) = \infty$.
(c) For all $x > y > 0$, $P_x(\tau_y < \infty) = 1$. For some y and for all $x > y$, $E_x(\tau_y) < \infty$.

We say that a storage process is transient, null recurrent or positive recurrent according as (a), (b) or (c) holds, respectively. Null or positive recurrent process is said to be a recurrent process.

Theorem 5.
If, for some $c > 0$,

$$\int_c^\infty \frac{\nu(x,\infty)}{r(x)} dx = \infty \tag{1}$$

and

$$\int_c^\infty \frac{1}{r(x)} \exp\{-\int_c^x \frac{\nu(y,\infty)}{r(y)} dy\} dx < \infty, \tag{2}$$

then $\{X(t)\}$ is transient.

参考文献

brockwell P. J. Brockwell, S. I. Resnick, R. L. Tweedie, *Storage processes with general release rule and additive inputs,* Adv. Appl. Prob., **14** (1982) pp. 392–433.

sato K. Sato, M. Yamazato, *Operator-selfdecomposable distributions as limit distributions of processes of Ornstein-Uhlenbeck type,* Stochastic processes appl. **17** (1984) pp. 73-100.

shiga T. Shiga, *A recurrence criterion for Markov processes of Ornstein-Uhlenbeck type,* Probab. Th. Rel. Fields **85** (1990) pp. 425–447.

watanabe T. Watanabe, *Sato's conjecture on recurrence conditions for multidimensional processes of Ornstein-Uhlenbeck type,* J. Math. Soc. Japan **50** (1998) pp.155-168.

The Product of Independent Random Variables characterized by Regular Variation

Takaaki Shimura (The Institute of Statistical Mathematics)

Let X and Y be independent positive random variables with distributions μ and ν, respectively. We denote the distribution of the product XY by $\mu \circ \nu$ and call it the Mellin-Stieltjes convolution (MS-convolution) of μ and ν. A distribution μ_1 is said to be a factor of a distribution μ, if $\mu = \mu_1 \circ \nu$ with some ν. Let $\mathbf{M}(\alpha)(\alpha > 0)$ and $\mathbf{D}(\alpha)(\alpha \geq 0)$ be the class of distributions μ on $[0, \infty)$ whose α-th truncated moments $\int_0^x t^\alpha \mu(dt)$ are slowly varying and the class of distributions μ on $[0, \infty)$ whose tails $\mu(x, \infty)$ are regularly varying with index $-\alpha(\leq 0)$, respectively. Though it is known that both $\mathbf{M}(\alpha)$ and $\mathbf{D}(\alpha)$ are closed under MS-convolution, our purpose is to study the property of factors of distributions in $\mathbf{M}(\alpha)$ and $\mathbf{D}(\alpha)$.

Theorem A If $\mu \circ \nu \in \mathbf{D}(0)$ and $\int_0^\infty t^\varepsilon \nu(dt) < \infty$ for some $\varepsilon > 0$, then $\nu \in \mathbf{D}(0)$.

Theorem B Assume that $\mu \circ \nu$ belongs to $\mathbf{D}(\alpha)(\alpha > 0)$ and the support of ν is included in a set that consists of a finite geometrical progression $\{t_k = t_0 r^k; k = 0, 1, \ldots, n-1, t_0 > 0, r > 1\}$. Let

$$\mathbf{C} = \{|z| \mid \sum_{k=0}^{n-1} r^{k\alpha} \nu(\{t_k\}) z^k = 0.\}.$$

(i) If $1 \notin \mathbf{C}$ and $\mu \circ \nu \in \mathbf{D}(\alpha)$, then μ belongs to $\mathbf{D}(\alpha)$.

(ii) If $1 \in \mathbf{C}$, then, for arbitrary regularly varying function $F(x)$ with index $-\alpha$ (< 0), there exist distribution $\mu_1 \in \mathbf{D}(\alpha)$ and $\mu_2 \notin \mathbf{D}(\alpha)$ satisfying that

$$\lim_{x \to \infty} \mu_1 \circ \nu(x, \infty)/F(x) = \lim_{x \to \infty} \mu_2 \circ \nu(x, \infty)/F(x) = 1.$$

We prove the following theorem which leads previous one.

References

[1] Shimura,T. (1994) Decomposition problem of probability measures related to monotone regularly varying functions, *Nagoya Math.J.* , 135, 87-111

[2] Shimura,T.(1997). The product of independent random variables with slowly varying truncated moments, *J.Austral. Math.Soc.(Series A)*, 62, 186-197

Fractional derivatives of local times of α - stable Levy processes as the limits of occupation time problems

Keigo Yamada (Kanagawa University)

we consider occupation time problems for $X(t)$. If $f \in L^1(R)$, then it is known that

$$n^{-(1-1/\alpha)} \int_0^{nt} f(X(s))ds \to_{\mathcal{L}} \int_R f(x)dx \cdot L_t^0$$

Theorem 1 Assume that a function f satisfies $\int_R f(x)dx = 0$, and that for $\gamma \in (0, (\alpha - 1)/2)$, $|\, x \,|^{1+\gamma} f(x)$ is bounded and $\lim_{x \to +\infty(-\infty)} |\, x \,|^{1+\gamma} f(x) = f_+(f_-)$. Then,

$$n^{-(1-\frac{1+\gamma}{\alpha})} \int_0^{nt} f(X(s))ds \to_{\mathcal{L}}$$

$$f_+ \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{1+\gamma}}(L_t^x - L_t^0)dx + f_- \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{|\, x \,|^{1+\gamma}}(L_t^x - L_t^0)dx$$

Theorem 2 In Theorem 1, we assume $\gamma = 0$. Moreover, the assumption $\int_R f(x)ds = 0$ is understood as $\lim_{N \to \infty} \int_{|x|<N} f(x)dx = 0$. Then, we have

$$n^{-(1-\frac{1}{\alpha})} \int_0^{nt} f(X(s))ds \to_{\mathcal{L}} f_+ \left(\int_0^t \frac{1}{X(s)} 1(X(s) > 1)ds + \int_0^1 \frac{1}{x}(L_t^x - L_t^0)dx \right)$$

$$+ f_- \left(\int_0^t \frac{1}{|\, X(s) \,|} 1(X(s) < -1)ds + \int_{-1}^0 \frac{1}{|\, x \,|}(L_t^x - L_t^0)dx \right)$$

II Theorem 3 Assume (B1), (B2) and that $f \in L_1(R_+)$. Then,

$$n^{-(1-1/\alpha)} \int_0^{nt} f(W(s))ds \to_{\mathcal{L}} \int_0^{\infty} f(x)dx \cdot L_t^0(X)$$

where $L_t^x(X)$ is the local time of the reflecting α-stable Levy process X in Proposition(*). When $\int_0^{\infty} f(x)dx = 0$, we assume that $f \in L_1^{local}(R_+)$ and that for $\gamma \in (0, (\alpha - 1)/2)$, $x^{1+\gamma} f(x) \to \bar{f}$ when $x \to \infty$. Then,

$$n^{-(1-(1+\gamma)/\alpha)} \int_0^{nt} f(W(s))ds \to_{\mathcal{L}} \bar{f} \cdot \int_0^{\infty} \frac{L_t^x(X) - L_t^0(X)}{x^{1+\gamma}} dx$$

where $H(x)$ is given by

$$H(x) = \int_0^{\infty} \frac{|\, x - y \,|^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}}{y^{1+\ gamma}} dy$$

References properties for fractional derivatives of the local times of a stable process. Ann.Inst.Henri.Poincare.28,no,2 [1] Yamada,T.(1986) On some limit theorems for occupation times of one dimensional brownian motion and its continuous additive functionals locally of zero energy. J.Math.Kyoto Univ. Vol.26,No.2 309-322

一次元安定型過程の標本路の性質について

上村 稔大　　(神戸商科大学・管理科学)

Introduction.　以下のような形式を考える：

$$\mathcal{D}[\mathcal{E}^\alpha] = \left\{u \in L^2(\mathbf{R}^d; dx) : \int\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{d+\alpha(x)}} dxdy < \infty\right\}$$

$$\mathcal{E}^\alpha(u,v) = \int\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+\alpha(x)}} dxdy.$$

関数 α が定数で $0 < \alpha < 2$ であれば，$L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の非局所形式となり，対応する Markov 過程は指数 α の対称安定過程となることはよくしられている。しかし，α を変数にしたとき，無条件で上の形式は閉形式とはなりえない。**定理 1.** α が以下の条件を満たすときに限って，$C_0^{Lip}(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{D}[\mathcal{E}^\alpha]$ となることを示す：

$$0 < \alpha(x) < 2, \quad a.e., \tag{3}$$

$$\frac{1}{2-\alpha(x)}, \ \frac{1}{\alpha(x)} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d) \tag{4}$$

かつ，適当なコンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}^d$ が存在して，

$$\int_{\mathbf{R}^d - K} |x|^{-d-\alpha(x)} dx < \infty. \tag{5}$$

Exceptionality of points.　以下 $d = 1$ とし，α は前節の (1)-(3) を満たすとする。

この時，$(\mathcal{E}^\alpha, C_0^{Lip}(\mathbf{R}^d))$ の閉包に対応する Markov 過程を安定型過程 (stable-like process) とよぶことにする。

さて，通常の一次元の指数 α の対称安定過程に対しては，$0 < \alpha \leq 1$ であれば，$\mathbf{R}$ の一点は exceptional となり，$1 < \alpha$ であれば一点は exceptional ではない (see *e.g.* [?])。α を変数としたときの安定型過程に関する一点の exceptionality について以下の結果を得た：

定理 2. x_0 を $\mathbf{R}$ の点とする. このとき，以下が成り立つ：

(1) もし，適当な x の空でない開近傍 G が存在して，

$$\alpha(x) \leq 1 \ a.e.on \ G,$$

であれば，点 x_0 は除外集合 (exceptional set) となる.

(2) もし，適当な x の空でない開近傍 G と正定数 α_1 が存在して，

$$1 < \alpha_1 \leq \alpha(x) \ \ a.e. \ on \ G,$$

であれば，点 x_0 は除外集合とならない. (すなわち，確率過程は x_0 に到達する).

定理 3.　以下の二つの条件が成り立てば，形式 $(\mathcal{E}^\alpha, \mathcal{F}^\alpha)$ は再帰的である：

(1) $\lim_{R\to\infty} \int_{B(R)} \left(\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{2-\alpha(x)}\right) R^{-\alpha(x)} dx = 0.$

(2) $\lim_{R\to\infty} \int_{B(R)^c} |x|^{-\alpha(x)} dx = 0,$

ジャンプ過程と境界値問題

石川　保　　(筑波大学数学系)

Dを $\mathbf{R}^d$の開集合、∂Dをその topological boundary, $barD = D \cup \partial D$とおく。$\tilde{X}_t$を $\mathbf{R}^d$のジャンプ過程で $tildeX_0 = x_0 \in D$なるもの、L をその infinitesimal generator (integral operator) とする。つぎの Boundary Value Problem を考える：

$$(*)\ \ Lh = \ell \quad \text{in} \quad D, \quad h \equiv \varphi \quad \text{in} \quad D^c.$$

ここで$\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}, h :\ mbox\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ である。$p_t(x, dy)$ で $tildeX_t$の transition function をあらわす。密度関数の存在を仮定する：$p_t(x, dy) = p_t(x, y)dy$. われわれはすでに ([?]) 密度関数の short time asymptotic を得ている：

$$p_t(x, y) \asymp t^{\alpha(x,y)-\frac{d}{\beta}} \quad as \quad t \to 0. \tag{1}$$

ここで$\alpha(x, y)$ は、"the minimum number of jumps of $\tilde{X}_t$ to reach y ¿from x" をあらわす。したがって、"the more $\alpha(x, y)$ large is, the more $p_t(x, y)$ smooth is" がなりたっている。この結果を $(*)$ の解 h の regularity の評価に使いたい。$\ell \in C^\infty(D)$ をあたえて、問題 (*) を考える。

問題。(a) (*) の解 h は存在するか。(b) h は Dでなめらかか。

(a) について、$\ell \equiv 0$ in Dのもとで、(*) の weak solution h の存在にたいする criterion がしられている [?]。これには balayage theory をつかう。解 h は、適当な条件の下で、次の表示をもつ：

$$h(x) = E_x[\varphi(\tilde{X}_{\tau_D})]. \tag{2}$$

Here $\tau_D \equiv \inf\{t > 0; \tilde{X}_t \in D^c\}$. なお、ここで weak solution というのは、つぎをみたす h のことである：for all $\psi \in C_0^\infty(D)$ it holds $\int_{\mathbf{R}^d} Lh(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^d} \ell(x)\psi(x)dx$. ただし [?] の方法 (Dirichlet form の方法) では、h の regularity を示すのはむづかしい。

(b) について。以下にのべる結果を要約すると次のようになる。

結果１。([?]) h を (*) の解とし、$\ell \in C^\infty(D)$, $x_0 \in D$とする。任意の jについて、もし $h \notin C^j(\{\text{near}x_0\})$ ならば、$\tilde{X}_t$は x_0から D^cに $n = n(j)$ 回のジャンプで到達可能。

結果２。([?]) $h \in C^\infty(\bar{D})$ とする。もし、$\tilde{X}_t$はある $x \in D$ から D^cに有限回のジャンプで到達可能ならば、$\ell \in C^\infty(\bar{D})$ とは限らない。(つまり $\ell \notin C^\infty(\bar{D})$ となる ℓが存在する。)

On determinisms of set-indexed $S\alpha S$-processes

竹中 茂夫　　(岡山理科大学)

A symmetric α stable ($S\alpha S$)-process $\{X(t); t \in \mathbf{T}\}$ is called set-indexed process if it is represented as $X(t) = Y(S_t)$, where $\{Y(B); B \in \mathcal{B}\}$ is an $S\alpha S$ random measure with control measure $(E, \mathcal{B}, \mu)$ and S_t is a map from $\mathbf{T}$ to $\mathcal{B}$ and it holds $X(t) = Y(S_t)$.

Definition. We call that a stochastic process $\{X(t); t \in \mathbf{T}\}$ has n-dimensional determinism if this process is determined by its n-dimensional marginal distributions. That is if a process $\{Z(t)\}$ shares same n-dimensional distributions with $\{X\}$ then the both processes share the same marginals of any dimensions.

Any Gaussian processes have 2-dimensional determinism in this sense. Are there examples which have 2-dimensional or higher dimensional determinisms? Now, we have following examples of set-indexed $S\alpha S$-processes:

(1) $\mathbf{R}^n$-parameter self-similar processes having $n+2$-dimensional determinism.([1])

(2) $\mathbf{R}^1$-parameter self-similar processes having $2n+1$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ dimensional determinisms.([2],[4])

(3) $\mathbf{R}^n$-parameter stational processes having $n+2$-dimensional determinism.([5]).

In the talk, an application of the determinisms to linearly additive field ([3]) is discussed. Recently K. Kojo proves that an important class of $S\alpha S$-processes of not-set-indexed type has determinism in above sense ([6]).

References

[1] Sato, Y. *Distributions of stable random fields of Chentsov type.* Nagoya Math. J. **123** pp. 119–139 (1991)

[2] Sato, Y. and Takenaka, S. *On determinism of symmetric α-stable processes of generalized Chentsov type.* 'Gaussian Random Fields' pp. 332–345, World Scientific (1991)

[3] Mori, T. *Representation of linearly additive random fields.* Prob. Theory and Related Fields **92**, pp. 91–115 (1992)

[4] Takenaka, S. *Examples of self-similar stable processes.* 'Stochastic Processes' pp. 303–311, Springer Verlag (1993)

[5] Takenaka, S. *Determinisms of stable processes derived form elementary geometry,* Bull. Okayama Univ. of Science. **33A**, pp. 15–24 (1997) (in Japanese)

[6] Kojo, K. *On the determinism of the distributions of multiple markov non-Gaussian symmetric stable processes.* Nagoya Math. J. **150** pp. 177–196 (1998)

擬似乱数と random walk 検定

高嶋　恵三　　(岡山理科大学)

擬似乱数の統計的検定について.　偶然現象のシミュレーションなどを行う場合や、確率微分方程式の数値解を求める場合などにおいては、"乱数" を用いる必要がある。計算機上で行う場合には、"乱数モドキ" として擬似乱数を用いるのが一般的である。時系列のシミュレーションや確率微分方程式の数値解などの応用の場合、擬似乱数は確率過程の模倣のために利用される。このような使用においては、単に多次元における均等分布性の問題より、擬似乱数の "独立性" が問題になる。つまり、x_n を擬似乱数とするとき、$\{x_k, n \leq k \leq N\}$, と $\{x_k, m \leq k \leq M\}$, とが互いに "独立な確率変数列" とみなせるかどうか、が重要である。現在実用に供されている擬似乱数生成法の多くは、十分な長さの周期を持っている。さらに実際に擬似乱数を利用する場合、一周期全体を利用すると、乱数とは見なせなくなるという問題のため、現実には一周期全体を使用しないようにしている。このような考察から、擬似乱数の一周期の一部分に対する、確率過程のシミュレーションを視野に入れた、乱数性に対する議論や統計的検定の必要性が出てくる。

Random walk の汎関数 Feller に従って、1 次元 random walk の見本関数の汎関数を幾つか挙げておく。これらの分布やその他の性質などは Feller, などを参照されたい。

X_n, $n > 0$, を独立同分布確率変数列とする : $\Pr(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. 1 次元 simple symmetric random walk S_n を $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n > 0$, $S_0 = 0$ で定義する。

Sojourn time : 時刻 $2n$ までの正の部分への滞在時間 SJ_2n は

$$SJ_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} I(S_{2k-1}), \quad I(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる。

Maximum : 時刻 $2n$ までの見本関数の最大値 MX_{2n} は以下で与えられる :

$$MX_{2n} = \max\{S_k \ : \ 0 \leq k \leq 2n\}.$$

8.

「確率論における諸問題」

日時: 平成11年1月21日 (木曜日) ー 1月23日 (土曜日)
場所: 東北大学大学院情報科学研究科405大講義室
世話人: 会田 茂樹[1] (大阪大学大学院基礎工学研究科)

この研究集会は, 平成10年度も終り近くに開かれたが, 成果発表よりむしろ, 次年度にできそうなこと, 考えたいことを論ずるということを一つの目標として行われた. そのため論文紹介などを何人かの人にして頂いた. この研究集会では世話人が当時関心があった(今もあるが) ランダム行列 (日合, 白井両氏の講演), パス空間上のGibbs測度に関する話題 (杉浦, 針谷両氏の講演) を中心として, いろいろな話があった.

参加人数は20名ほどで, 時間的にも余裕があったため参加者同士でいろいろな議論ができたようである.

プログラム, 講演内容は次ページ以下の通りである.

[1] 平成10年度は東北大学大学院情報科学研究科に在籍

プログラム

1月21日 (木曜日)

1：20 − 3：20 白井 朋之 (東工大) ランダム行列の固有値と点過程

3：40 − 5：40 日合 文雄 (東北大) Random matrices and large deviations

1月22日 (金曜日)

10：10 − 12：10 針谷 祐 (東大数理、名大多元数理)
Gibbs measure and Dirichlet forms on C(R;R)

1：40 − 2：40 杉浦 誠 (名大) C(R;R) 上の Gibbs 測度の混合性について

3：00 − 4：00 谷口 説男 (九大) The Malliavin gradient of stochastic line integrals

4：20 − 5：50 原 啓介 (立命館大) Review −− Tsirelson's "Triple points"

1月23日 (土曜日)

10：00 − 11：00 石川 保志 (筑波大) ジャンプ過程と境界値問題

11：10 − 12：10 日野 正訓 (京大)
Landim, Olla, Yau Convection−diffusion equation with space−time ergodic random flow の紹介

1：30 − 2：30 会田茂樹 (東北大) ループ空間上の対数ソボレフ不等式について

ランダム行列の固有値と点過程

白井 朋之 （東工大理工）

$\mathcal{H}_N = \{X; N\times N$-エルミート行列$\}$ とし，$\mathcal{H}_N$ 上のルベーグ測度を dX とするときに，$\mathcal{H}_N$ 上の確率測度として $P(dX) \propto \exp\left(-\mathrm{Tr}(\lambda^2 X^2)\right) dX$ なるものを考える．このとき組 $(\mathcal{H}_N, P_N)$ を Gaussian Unitary Ensemble (GUE) という．この GUE の固有値の結合分布関数は次のようになることがよく知られている [1].

$$\mu_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) = Z_N^{-1} \prod_{1\le i<j\le N} |x_i - x_j|^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \lambda^2 x_i^2\right),$$

ここに Z_N は正規化定数である．

$(\mathcal{H}_N, P_N)$ の N 個の固有値は点過程として見なして，$N \to \infty$ の極限の性質を調べることが一つの中心課題である．上の固有値分布をもとにして，この点過程のあるスケール極限 ($N \to \infty$) で半円則が出ることは古くから知られており [1]，そのまわりでの CLT, LD などもわかってきている．H. Spohn は半円則が出るのとは別のスケール極限 ($N \to \infty$) を考えて無限粒子系として捉え，その時間発展などを研究している [2].

この講演では上で研究された粒子系を含む点過程の族が構成可能であることを報告した．

R をポーランド空間，$d\lambda$ を R 上のラドン測度，K を $L^2(R, d\lambda)$ からそれ自身への対称な積分作用素．また，$Q = Q(R)$ を R 上の非負整数値のラドン測度で，その元を $\xi = \sum_i \delta_{x_i}$ と表わす．また，$f \in C_c^+(R)$ に対して，$\langle \xi, f\rangle = \sum_i f(x_i)$ と定義する．このとき以下の基本的な事実が証明できる．

定理 1 ([3]) K は以下の性質を満たすものとする．*(1)* $Spec(K) \subset [0,1]$, *(2)* 任意のコンパクト集合 $\Lambda \subset R$ に対して，$K_\Lambda = 1_\Lambda K 1_\Lambda$ はトレース族作用素で，$Spec(K_\lambda) \subset [0,1)$ ．このとき $Q = Q(R)$ 上の確率測度が唯一存在して，次を満たす．

$$\int_Q \mu(d\xi) \exp(-\langle \xi, f\rangle) = \det(I - K_\phi).$$

この講演の内容は高橋陽一郎氏（京大数理研）との共同研究である．

但し，$\phi = 1 - \exp(-f)$, $K_\phi = \sqrt{\phi}K\sqrt{\phi}$，右辺はフレドホルム行列式．

例 1 $R = \mathbf{R}^d$, $0 \le \hat{k} \le 1$ なる $\mathbf{R}^d$ 上可積分な偶関数に対して，$k(x)$ をそのフーリエ変換で決まる関数とする．また K は積分核 $k(x-y)$ を持つ $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上のたたみこみ作用素であるとする．このとき，対応する確率測度 μ が存在する．特に，$d=1$, $\hat{k} = 1_{[-\pi,\pi]}$ とすると，$k(x,y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}$ を持つ．このとき K に対応する μ は前に述べた GUE のスケーリング極限で得られる無限粒子系となる．

例 2 $R = \mathbf{Z}^d$, $K = \alpha I$ $(0 < \alpha < 1)$ とする．このとき K に対応する μ は $(\alpha, 1-\alpha)$-ベルヌイ系となる．更に一般に $[0,1]$ に値をとる T^d 上の偶関数に対して，そのフーリエ係数から得られる $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ 上のテプリッツ作用素を K とすると定理の条件を満たすので，対応する点過程が存在する．

注意 1 $\mathbf{R}^d$ 上のポアソン点過程は上の定理で与えられるクラスには含まれない．

例 1 でも与えた GUE に関わる点過程は数論など他分野でも活発に研究されている．数論では number variance と呼ばれている量について次のような結果は容易に得られる．

命題 1 確率測度 μ は例 1 で与えられたものとする．f を台がコンパクトな有界可測関数とし，$f_N = f(\cdot/N)$ とおく．このとき，$N \to \infty$ で

$$\int_Q \langle \xi, f_N \rangle^2 \mu(d\xi) - \left(\int_Q \langle \xi, f_N \rangle \mu(d\xi) \right)^2$$
$$\sim \quad N^d \int_{\mathbf{R}^d} f(x)^2 dx \times \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbf{R}^d} \hat{k}(\xi)(1 - \hat{k}(\xi)) d\xi.$$

$R = \mathbf{R}^1$ の場合に定理で得られるクラスの中で GUE の極限として得られる μ については $\hat{k} = 0$ or 1 であることに注意すると，上の命題から退化した特別な点過程であることが見てとれる．

参考文献

[1] M. L. Mehta, *Random Matrices, 2nd edition*, Academic Press, 1991.

[2] H. Spohn, *Interacting Brownian Particles: a study of Dyson's model*, in Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems, ed. by G. C. Papanicolaou, IMA Volumes in Math. **9**, 151–179, Springer, Berlin, Heidelberg.

[3] T. Shirai and Y. Takahashi, *Random point fields associated with certain Fredholm determinants*, preprint.

ランダム行列と大偏差原理

日合文雄 (東北大情報科学研究科)

ランダム行列とは，各変数が確率変数である行列のことである．これは元来は多変量統計の分野に属するものであるが，E. Wignerが原子核のエネルギー・レベルの統計をハミルトニアン自己共役作用素の代わりに自己共役なランダム行列の固有値分布によって説明することを提唱して以来，むしろ数理物理学で有用な道具となっている．また，確率論では，ランダム行列の固有値の次数 $\to\infty$ (いわゆるlarge N-limit)における極限分布に関して多くの研究がなされてきた．一方，最近１５年ほどの間に D. Voiculescuを中心として自由確率論と呼ばれる新種の非可換確率論が台頭している．この自由確率論では，古典論の独立性に対応するものとして，非可換確率変数に対する自由性の概念が基本的である．そして，独立なランダム行列の族が自由な非可換確率変数の“漸近的”モデルとして重要な役割を演じることが知られている．さらに，Voiculescuによって導入された自由エントロピーは，古典論におけるBoltzmann-Gibbsエントロピーの自由確率版として重要である．このような背景の下で，Ben Arous等 [1, 2] や筆者等 [4, 5, 8] の研究で，ランダム行列の標本固有値分布が大偏差原理を満たし，そのレイト関数が自由エントロピーのマイナス符号(つまりポテンシャル論の対数エネルギー)を主要項にもつことが示された．

1. ランダム行列とその固有値分布

$n\times n$ 複素行列全体のなす$*$-環を M_n で表し，tr_n を M_n 上の正規化されたトレースとする．確率空間 $(\Omega,\mathbf{P})$ 上で定義された $n\times n$ ランダム行列 X で各成分 X_{ij} が $\bigcap_{1\le p<\infty}L^p(\Omega,\mathbf{P})$ に属するものを考える(つまり X_{ij} のすべてのモーメントが有限と仮定する)．このような $n\times n$ 行列の全体 $M_n(\mathcal{L})=M_n\otimes\mathcal{L}$ は$*$-環となり，トレース状態 $\tau_n(X):=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_{ii})=E(\mathrm{tr}_n(X))$ により，$(M_n(\mathcal{L}),\mathrm{tr}_n)$ は非可換確率空間の例となる．ランダム行列 X の n 個の(ランダム)固有値を $\lambda_1(X),\dots,\lambda_n(X)$ とすると，X の標本スペクトル密度 $R_X:=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta(\lambda_i(X))$ ($\delta(x)$ は $x\in\mathbb{C}$ での点測度)および平均スペクトル密度 $\mu_X:=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^n\delta(\lambda_i(X))$ が定義される．μ_X のモーメントは X の τ_n に関するモーメントに等しい: $\int x^k\,d\mu_X(x)=\tau_n(X^k)$．固有値ベクトル $(\lambda_1(X),\dots,\lambda_n(X))$ により，$\mathbb{C}^n$ (固有値の空間)上に変数の置換に対し不変な確率分布が定まる．これを X の固有値の同時分布といい，その密度関数を X の固有値の同時密度関数という．固有値の同時分布は，X が実対称または自己共役のときは $\mathbb{R}^n$ 上に，ユニタリのときは $\mathbb{T}^n$ 上にのっている．例えば，標準実対称Gauss行列(GOE)は，実対称ランダム行列 $T(n)=[T_{ij}(n)]$ で $\{T_{ij}(n):1\le i\le j\le n\}$ が独立な Gauss 確率変数であり $T_{ii}(n)\sim N(0,\frac{2}{n+1})$, $T_{ij}(n)\sim N(0,\frac{1}{n+1})$ $(i\ne j)$ であるものをいう．$T(n)$ の実対称行列の空間上の分布は直交行列 O による変換 $T\mapsto OTO^t$ に対し不変であり，$\tau_n(T(n)^2)=1$ と正規化されている．標本スペクトル密度 $R_{T(n)}$ は標準半円(Wigner)分布 $w_2:=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\chi_{[-2,2]}(x)\,dx$ にa.s.の意味でモーメント収束(したがって弱収束)する．$T(n)$ の固有値の $\mathbb{R}^n$ 上の同時密度関数は

$$\frac{2^{-n(n+3)/4}(n+1)^{n(n+1)/4}}{n!\prod_{j=1}^n\Gamma(j/2)}\exp\biggl(-\frac{n+1}{4}\sum_{i=1}^n x_i^2\biggr)\prod_{i<j}|x_i-x_j|.$$

他に有名なランダム行列として，標準自己共役 Gauss 行列(GUE), 標準非自己共役Gauss行列，標準ユニタリ・ランダム行列などがある．([7] が詳しい.) 他に，楕円型Gauss行列 [8] や Wishart行列 [5] に対しても，極限分布および固有値の同時密度関数が知られている．

2. ランダム行列に対する大偏差原理

$X(n)$ を実対称または自己共役な $n\times n$ ランダム行列とする．(自己共役でないときは，以下の説明で $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に置き換えればよい．またユニタリのときは，$\mathbb{T}$ に置き換える.) $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の

確率分布全体に弱位相を入れた空間(可分な完備距離空間)とする．ランダムな原子的確率測度である標本スペクトル密度 $R_{X(n)}$ の $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 上の分布 P_n を $X(n)$ の標本固有値分布と呼ぶ．つまり，Borel 集合 $\Gamma \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ に対し

$$P_n(\Gamma) := \mathbf{P}(R_{X(n)} \in \Gamma) = \nu_n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i) \in \Gamma\right\}\right).$$

上の ν_n は $X(n)$ の固有値の同時分布．我々の目標は，適当なランダム行列 $X(n)$ $(n \in \mathbb{N})$が与えられたとき，その標本固有値分布の列 (P_n) に対する大偏差原理を示すことである．スケール n^{-2} を採用して，(P_n) がレイト関数 I をもつ大偏差原理を満たすとは，任意の Borel 集合 $\Gamma \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned} -\inf\{I(\mu) : \mu \in \Gamma^{\circ}\} &\le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\log P_n(\Gamma) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\log P_n(\Gamma) \le -\inf\{I(\mu) : \mu \in \overline{\Gamma}\} \end{aligned}$$

が成立することをいう．ここで $\Gamma^{\circ}, \overline{\Gamma}$ は Γ の開核，閉包であり，レイト関数 I は $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 上の非負下半連続関数である．I のレベル集合 $\{\mu : I(\mu) \le c\}$ がすべての $c \ge 0$ に対しコンパクトのとき，I はgoodという．(大偏差原理の一般論は [3] を参照.) 次の定理 [1] は，ランダム行列に対する大偏差原理として最初のものである．

定理. 標準実対称 Gauss 行列 $T(n)$ の標本固有値分布の列 (P_n) は次のgoodレイト関数をもつ大偏差原理を満たす:

$$I(\mu) := -\frac{1}{2}\Sigma(\mu) + \frac{1}{4}\int x^2\,d\mu(x) - \frac{3}{8} \qquad (\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})).$$

ここで $\Sigma(\mu) := \iint \log|x-y|\,d\mu(x)\,d\mu(y)$ は自由エントロピー(つまり対数エネルギーのマイナス符号)．さらに $I(\mu)$ が最小値 0 をとるのは $\mu = w_2$ (半円分布)のときに限る．

この定理は，$T(n)$ の標本スペクトル密度が w_2 に指数関数的な速さで収束することを主張している．同様な大偏差原理が，ユニタリ・ランダム行列 [4], 非自己共役Gauss行列 [2, 8], Wishart行列 [5] に対しても証明されている．

文　献

[1] G. Ben Arous and A. Guionnet, Large deviation for Wigner's law and Voiculescu's noncommutative entropy, *Probab. Theory Related Fields* **108** (1997), 517–542.

[2] G. Ben Arous and O. Zeitouni, Large deviations from the circular law, *ESAIM: Probability and Statistics* **2** (1998), 123–134.

[3] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviation Techniques and Applications*, Second Edition, Springer, New York, 1998.

[4] F. Hiai and D. Petz, A large deviation theorem for the empirical eigenvalue distribution of random unitary matrices, preprint, 1997.

[5] F. Hiai and D. Petz, Eigenvalue density of the Wishart matrix and large deviations, *Infinite Dimensional Anal., Quant. Probab. and Related Topics* **1** (1998), 633–646.

[6] F. Hiai and D. Petz, *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*, in preparation.

[7] M.L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, Boston, 1991.

[8] D. Petz and F. Hiai, Logarithmic energy as entropy functional, in *Advances in Differential Equations and Mathematical Physics*, E. Carlen et al. (eds), Contemp. Math. **217**, Amer. Math. Soc., 1998, pp. 205–221.

Gibbs measure and Dirichlet forms on C(R;R)

針谷 祐

本講演の目的は, 長田博文, Herbert Spohn 両氏によって構成された, パス空間 $W := C(R;R)$ 上のギブス測度μに関して, ディリクレ形式と呼ばれる双線形形式を構成し, Wのある商空間$\widetilde{W}$上に値を取る拡散過程を, ディリクレ形式の理論を用いて構成することである. ここでは, distorted Brownian motion と呼ばれる次のタイプの双線形形式を扱う:

$$E(u,v) = \int_W \Gamma[u,v](z)\,d\mu(z), \quad u,v \in D_0 \subset L^2(W;\mu).$$

まずギブズ測度μは, 次の（形式的な）ハミルトニアンについて DLR 方程式を満たすもの, として定義される [1]:

$$H^{\varphi,\psi}(z) := \int \varphi(z(x))\,dx + \int\int \psi(x-y, z(x)-z(y))\,dxdy, \quad z \in W.$$

ここに$\varphi : R \to R \cup \{\infty\}$ は free-potential, $\psi : R^2 \to R \cup \{\infty\}$ は interaction-potential を表す. 尚, φ, ψへの dependence を明示する場合は, (φ,ψ)-ギブズ測度（(φ,ψ)-Gibbs measure）と書く.

次に D_0は

$$u(z) = f(l_1(z),\cdots,l_n(z));\ n \in N,\ f \in C_b^\infty(R^n),\ l_i \in (W')_0$$

なる形の元から成るもの, とする. ここに $(W')_0$は Wの双対空間 W'の部分空間で, 特に定数関数を分離しない元から成る. 即ち, $z_1 - z_2 \equiv \exists$constant であるような Wの任意の元 z_1, z_2について, $l \in (W')_0$は $l(z_1) = l(z_2)$ を満たす.

また, $\Gamma[\cdot,\cdot]$ は以下のように定義される:

$H_r := \{h \in W; h$ は絶対連続, $h(x) = 0$ if $|x| \geq r$, $\int_R |\dot{h}(x)|^2\,dx < \infty\}$ とし, ∇_rを H_r上の covariant derivative とする. そして, ∇_rについて, $\Gamma_r[u,v] := \langle \nabla_r u, \nabla_r v\rangle_{H_r}$ と定め, $\Gamma[\cdot,\cdot]$ をその単調増大極限とする. 即ち,

$$\Gamma[u,u] := \lim_{r\to\infty} \Gamma_r[u,u].$$

上で定めた D_0の各元は, この極限値が有限になるものであることに注意されたい.

さて, 主結果を述べる前に, 2つ仮定をおく.

1. φ is bounded from below and $\partial\{\varphi = \infty\}$ consists of at most countable points. Moreover, φ is bounded on $\{a \in R; \varphi(a) < \infty, |a| < n\}$ for each $n \in N$. ψ is represented as $\psi(x,a) = \psi_1(x)\psi_2(a)$ with ψ_1, ψ_2 even functions. ψ_1 satisfies $0 \leq \psi_1 \leq \psi_0$ on R^+ for some $\psi_0 : R^+ \to R \cup \{\infty\}$ which is integrable, convex and non-increasing. ψ_2 is convex and there exist $C > 0$ and $p > 1$ such that

$$\psi_2(a) \leq C(1+|a|)^p \quad \text{for all } a \in R.$$

2. μ is a (φ,ψ)-Gibbs measure that is translation invariant and satisfies

$$\int_W |z(0)|^{p'}\,d\mu(z) < \infty \quad \text{for some } p' > p.$$

定理 1 上の2つの仮定の下, (E, D_0) は可閉である.

さて, Wの2つの元 z_1,z_2に対し, 同値関係を

$$z_1 \sim z_2 \iff z_1 - z_2 \equiv \exists\mathrm{constant}$$

で入れ, さらにWをその同値関係で割った空間を$\widetilde{W}$とする. またπを$\pi : W \to \widetilde{W}$ なる射影とする. すると, その定義から, (E, D_0) は自然に$\widetilde{W}$上の双線形形式とみなせ (それを $(\widetilde{E}, \widetilde{D_0})$ と書く), $\tilde{\mu} := \mu \circ \pi^{-1}$ とおけば, 定理1から $(\widetilde{E}, \widetilde{D_0})$ の $L^2(\widetilde{W}, \tilde{\mu})$ における可閉性が従う. そこでその閉包を $(\widetilde{E}, D(\widetilde{E}))$ とすれば, 次の定理が得られる.

定理 2 $(\widetilde{E}, D(\widetilde{E}))$ は *quasi-regular* なディリクレ形式である.

従って, ディリクレ形式の一般論から, $\tilde{\mu}$を不変測度とする$\widetilde{W}$ - 値の拡散過程の存在が示されることになる.

参考文献

[1] H. Osada and H. Spohn, Gibbs measures relative to Brownian motion.

C(R;R) 上の Gibbs 測度の混合性について

杉浦 誠（名古屋大学大学院多元数理研究科）[1]

本講演では $\mathcal{C} = C(\mathbf{R};\mathbf{R})$ 上の Gibbs 測度についての混合性について議論する。そのためいくつかの記号を導入する。

Configuration space: 配置空間は次とする。

$$\mathcal{C}_\Lambda = C(\Lambda;\mathbf{R}) \qquad \Lambda = [a, b] \Subset \mathbf{R}$$
$$\mathcal{C} = C(\mathbf{R};\mathbf{R})$$

Hamiltonian: 有界閉区間 $\Lambda = [a, b]$ と外部状態 $\xi \in \mathcal{C}$ に対し $H_{\Lambda,\xi} : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathbf{R}$ を次で定義する。

$$H_{\Lambda,\xi}(X) = \int_a^b U(X(x))dx + \frac{1}{2}\int_a^b dx \int_a^b dy J(x-y)\{X(x) - X(y)\}^2 + \int_a^b dx \int_{\Lambda^c} dy J(x-y)\{X(x) - \xi(y)\}^2$$

Assumption (**A**): 関数 $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $J : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は次を満たすと仮定する。

$U(s) = V(s) + W(s)$ と表され、V は strictly convex, W は Lipschitz 連続とできる。J は非負値連続な関数で $J(x) = J(-x)$ を満たし、特に compact support を持つ。

finite volume Gibbs states: $\mathcal{C}_\Lambda$ 上の確率測度 $\mu_{\Lambda,\xi}$ を次で定める。

$$\mu_{\Lambda,\xi}(dX) = Z_{\Lambda,\xi}^{-1} \exp\{-H_{\Lambda,\xi}(X)\} \mathcal{W}_{\Lambda,\xi}(dX)$$

ここで、$Z_{\Lambda,\xi}$ は正規化定数、$\mathcal{W}_{\Lambda,\xi}$ は Λ 上の pinned Brownian motion に対応する $\mathcal{C}_\Lambda$ 上の確率測度で境界条件

$$\mathcal{W}_{\Lambda,\xi}(X(a) = \xi(a), X(b) = \xi(b)) = 1$$

を満足するものとする。

我々の主定理は以下である。ただし、$E[f\,;\,g]$ で correlation を表すものとする：

$$E[f\,;\,g] = E[(f - E[f])(g - E[g])].$$

Theorem 1 仮定 (A) において、特に V がある $\alpha > 0$ と $\lambda \in \mathbf{R}$ を用いて

---

[1]現住所：琉球大学理学部　E-mail : sugiura@math.u-ryukyu.ac.jp

$$V(s) = \frac{1}{2}\alpha s^2 + \lambda s$$

と表されると仮定する。このとき、α, $\|W\|_{\mathrm{Lip}}$, J のみに依存する定数 C が存在して次が成立する。任意の有界閉区間 $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$, 外部条件 $\xi \in \mathcal{C}$ 及び $\mathcal{C}_{\Lambda_1}$ 上の "よい" 関数 f, $\mathcal{C}_{\Lambda_2}$ 上の "よい" 関数 g に対し、

$$|E^{\mu_{\Lambda,\xi}}[\,f\,;\,g]| \le C_1 e^{-d(\Lambda_1,\Lambda_2)/C}$$

となる。ここで、C_1 は $f, g, \alpha, \|W\|_{\mathrm{Lip}}, J$ のみに依存する定数である。

特に two point function $E[X(x); X(y)]$ については次を得た。

Theorem 2 仮定 (**A**) のもと、$\inf_s V''(s)$, $\|W\|_{\mathrm{Lip}}$, J のみに依存する定数 C が存在して、任意の有界閉区間 Λ, $x, y \in \Lambda$ と外部条件 $\xi \in \mathcal{C}$ に対し、

$$(DS) \qquad |E^{\mu_{\Lambda,\xi}}[\,X(x)\,;\,X(y)\,]| \le Ce^{-|x-y|/C}.$$

が成立する。

我々のこの問題を考える動機付けは、確率偏微分方程式：

$$dX_t(x) = \frac{1}{2}\Delta X_t(x)\,dt - D\mathcal{H}(X_t(x))\,dt + dw_t(x), \qquad t > 0, x \in \mathbf{R}$$

で定義されるマルコフ過程の生成作用素のスペクトルギャップや対数ソボレフ不等式を導出することにある。ここで、$D\mathcal{H}$ は形式的に定義された Hamiltonian $\mathcal{H}(X) = H_{\mathbf{R},\cdot}(X)$ の $L^2(\mathbf{R})$ 上での Fréchet 微分を、$w_t(x), t > 0, x \in \mathbf{R}$ は $L^2(\mathbf{R})$-柱状ブラウン運動をそれぞれ表す。

このモデルを離散化した $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ 上の格子型非有界スピン模型に対して、Zegarlinski (CMP, 1996) は、仮定 (**A**) と同様の仮定のもと、指数的混合性 (DS) を示し、それを用いて対数ソボレフ不等式を証明した。最近、吉田が高次元模型である $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ 上の格子型非有界スピン模型に対して、混合性 (DS) と対数ソボレフ不等式の同値性を証明している。

$C(\mathbf{R};\mathbf{R})$ 上の Gibbs 測度の性質については、長田-Spohn (1997) により、上記より一般的な設定のもと、DLR 状態の存在、一意性のための十分条件や相転移の起こる例が示されている。我々の結果は有限 Gibbs 測度の範囲や境界条件に依存しない評価であるため、DLR 状態に対する指数的減衰もその系として導出される。

一方、相転移領域における two point function の減衰については、Imbrie (CMP, 1982) により $\{-1,+1\}^{\mathbf{Z}}$ 上の格子模型で衝突ポテンシャルが $J(r) = r^{-2}$ $r \ge 1$ の場合に、$|x-y|^{-2}$ の速さで減衰することが示されている。また、最近 Spohn-Zwerger (JSP, 1999) により $O(N)^{\mathbf{Z}}$ 上の模型についても同様の減衰が起こることがことが示された。

THE MALLIAVIN DERIVATIVES OF STOCHASTIC LINE INTEGRALS

谷 口　説 男 (九州大学 大学院数理学研究科)

1976年に Paul Malliavin により創始された無限次元空間 (ウィナー空間) 上の変分学，今日言うところのマリアヴァン解析は，当初無限次元空間上の微分，そしてそれに付随する部分積分の公式を経由し，Hörmander の定理の確率論的解決，Watanabe の超関数，指数定理への応用などの成果を生んだ．また最近では無限次元上の微積分学，微分幾何学を展開するための基礎としての側面も再び脚光を浴びている．この報告ではシュレディンガー方程式の確率論的理解との関連でマリアヴァン微分について再考したい．

(W, H, μ) を古典的ウィナー空間，すなわち

$$\begin{aligned} W &= \{w : [0,1] \to \mathbf{R}^d \mid w \text{ is continuous and } w(0) = 0\} \\ H &= \left\{ h \in W \mid \begin{matrix} h \text{ is absolutely continuous and has a} \\ \text{square integrable derivative } \dot{h} \text{ on } [0,1] \end{matrix} \right\}, \end{aligned}$$

μ は W 上のウィナー測度とする．$H_0 = \{h \in H : h(1) = 0\}$ とし，P_0 で H から H_0 への直交射影を表す．マリアヴァン微分 ∇ と P_0 との合成を $\nabla_0 := P_0 \circ \nabla$ とおこう．基本となる事実は確率線積分のマリアヴァン微分に関わる次の等式である．$\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$, $v \in C^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ は共に自身も高階の微分もすべて高々多項式増大であるとしよう．このとき，

$$\begin{aligned} &\Big\langle \nabla_0 \Big(\int_0^1 \langle \eta(w_{x_1,x_2}(t)), \circ dw(t) \rangle + \int_0^1 v(w_{x_0,x_1}(t)) dt \Big), h \Big\rangle_H \\ &= \sum_{\alpha=1}^d \int_0^1 \Big(\int_0^t \Big\{ \langle H_\alpha^\eta(w_{x_0,x_1}(s)), \circ dw_{x_0,x_1}(s) \rangle - \frac{\partial v}{\partial x^\alpha}(w_{x_0,x_1}(s)) ds \Big\} \Big) \dot{h}^\alpha(t) dt \qquad (1) \end{aligned}$$

とおく．ただし，$x_0, x_1 \in \mathbf{R}^d$，$h \in H_0$，$w_{x_0,x_1} = x_0 + w(t) + t(x_1 - x_0)$，$H_\alpha = (\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \eta_\beta}{\partial x^\alpha})_{1 \le \beta \le d}$ であり，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbf{R}^d$ の内積を，$\circ$ はストラトノビッチ積分を表している．

x_0，$N \in \mathbf{N}$，$\Theta = (\theta^0, \ldots, \theta^N) \in C^\infty(\mathbf{R}^d; (\mathbf{R}^d)^{N+1})$，$V = (v^0, \ldots, v^N) \in C^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^{N+1})$，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in [0,1)^N$ および $\lambda > 0$ に対し，

$$\begin{aligned} q_{x_0}^\lambda[\Theta, V, \mathbf{a}] &= \int_0^1 \langle \theta^0(w_{x_0}(t)), \circ dw(t) \rangle + \int_0^1 v^0(w_{x_0}(t)) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \lambda^{-(1-a_i)} \Big\{ \int_0^1 \langle \theta^i(w_{x_0}(t)), \circ dw(t) \rangle + \int_0^1 v^i(w_{x_0}(t)) dt \Big\} \end{aligned}$$

とおく．ただし，$w_{x_0}(t) = x_0 + w(t)$ である．さらに

$$p_1^\lambda(x_0, x_1) := \int_W \exp[\sqrt{-1}\, \lambda q_{x_0}^\lambda[\Theta, V, \mathbf{a}](w)] \delta_{x_1}(w_x(1)) \mu(dw),$$

と定義する ($x_1 \in \mathbf{R}^d$，$\delta_{x_1}(w_{x_0}(t))\mu(dw)$ は Wananabe の引戻し)．

$$\Theta^{\lambda,\mathbf{a}} = \lambda \theta^0 + \sum_{i=1}^N \lambda^{a_i} \theta^i, \quad V^{\lambda,\mathbf{a}} = \lambda v^0 + \sum_{i=1}^N \lambda^{a_i} v^i$$

とおき，シュレディンガー作用素 $S^{\lambda,\mathbf{a}}$ を

$$S^{\lambda,\mathbf{a}}u = \tfrac{1}{2}\Delta u + \sqrt{-1}\,\langle \Theta^{\lambda,\mathbf{a}}, du\rangle + \{\sqrt{-1}\,d^*(\tfrac{1}{2}\Theta^{\lambda,\mathbf{a}} + V^{\lambda,\mathbf{a}}) - \tfrac{1}{2}\|\Theta^{\lambda,\mathbf{a}}\|^2\}u, \quad u \in C^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}),$$

と定める．ただし，Δ はラプラシアンであり，$d^*\Theta^{\lambda,\mathbf{a}} = \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial \Theta^{\lambda,\mathbf{a}}_\alpha}{\partial x^\alpha}$．良く知られているように $p_1^\lambda(x_0,x_1)$ は $S^{\lambda,\mathbf{a}}$ に対応する熱核である．(1) は 1 微分形式による表示をその外微分に置き換える点で，シュレディンガー方程式のゲージ不変性と関連した興味深いマリアヴァン微分の側面を覗かせている．

本報告では (1) を基本に報告者が構築した抽象ウィナー空間上の変数変換公式[1] を援用することで次のような漸近挙動に関する評価式を得た．

定理 1 $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^d$，$\Theta = (\theta^0, \ldots, \theta^N) \in (C^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d))^{N+1}$ とする．次の 2 条件を仮定する．

(A.1) θ^i_α, v^i, $i = 0,\ldots,N$, $\alpha = 1,\ldots,d$ はすべて $\mathbf{R}^d$ 上の多項式である，

(A.2) $d\theta^0(x_0) \neq 0$.

$$D = \max\{\deg \theta^i_\alpha, (\deg v^i) - 1 : i = 0,\ldots,N,\ \alpha = 1,\ldots,d\}$$

とおく．このとき $C_1, C_2 > 0$ がとれて次の評価式が成り立つ．

$$|p_1^\lambda(x_0,x_1)| \leq C_1 \exp[-C_2|\lambda|^{1/(D+5)}] \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

注 2 (i) (A.2) より，$D \geq 1$ である．

(ii) もし θ^0 が一様磁場に対応する $\mathbf{R}^2$ 上の 1 微分形式であり，他の θ^i がすべて 0 ならば，すなわち，$d = 2$，$\theta^0_1(x_1,x_2) = x_2$，$\theta^0_2(x_1,x_2) = -x_1$ となっていれば，上の定理からは $p_1^\lambda(x,x)$ は指数 $-\lambda^{1/6}$ の指数減少であることが言える．良く知られているように[2] 正確な指数は $-\lambda$ である．

[1] Taniguchi, S., On the exponential decay of oscillatory integrals on an abstract Wiener space, J. Funct. Anal., **154** (1998), 424 – 443.

[2] 例えば，Ikeda, N. and Manabe, S., Asymptotic formulae for stochastic oscillatory integrals, in "Asymptotic problems in Probability theory: Wiener functionals and asymptotics" (ed. by K.D. Elworthy and N. Ikeda), Pitman Research Notes in Math. **284**, Longman Sci. Tech., Essex, 1993, 136–155.

Review of Tsirelson's "Triple Points"

Keisuke HARA*
Department of Computer Science
Ritsumeikan University

この講演では、Tsirelson の論文 [1] "Triple Points" の前半部分、filtration の同型問題における Cosiness の概念とその応用について、S.Watanabe[2] の方針に従って紹介した。

(Ω, F, P) を complete な確率空間、$\mathcal{F} = (F(t))_{t\in[0,\infty)}$ をその filtration とし、右連続性と $F(0)$ が全ての P-null set を含むことを仮定する。$F(\infty) = \bigvee_{t\in[0,\infty)} F(t)$ とおく。$\mathcal{F}$ を確率空間 (Ω, F, P) の filtraiton とし、$\mathcal{M}(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ についての局所二乗可積分マーチンゲール $M(t)$ で $M(0) = 0$ なるものの全体の集合とする。また、同じ確率空間の上の二つの filtration $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ は、全ての $t \geq 0$ について $F(t) \subset G(t)$ となる時、$\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ と書く。$\mathcal{F}'$ をまた別の確率空間 (Ω', F', P') の filtraion とする。この時、確率空間の間の (または filtration の間の) 同型を以下のように定義する。

Definition 1 *$\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ が $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}'$ への morphism であるとは、$\pi_* : L^0(\Omega', F'(\infty)) \to L^0(\Omega, F(\infty))$ (ここに L^0 は与えられた filtration について可測な実確率変数の空間) が以下の条件を満たすことである。*

(i) 任意の $X_1, \ldots, X_n \in L^0(\Omega', F'(\infty))$ について、分布の意味で

$$([X_1, \ldots, X_n], P') = ([\pi_*(X_1), \ldots, \pi_*(X_n)], P).$$

(ii) 任意の $X_1, \ldots, X_n \in L^0(\Omega', F'(\infty))$ と任意の *Borel* 可測な $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ について、

$$\pi_*[f(X_1, \ldots, X_n)] = f(\pi_*(X_1), \ldots, \pi_*(X_n))$$

(iii) 任意の $X \in L^1(\Omega', F'(\infty))$ について、

$$\pi_*[E[X|F'(t)]] = E[\pi_*(X)|F(t)] \qquad (t \geq 0)$$

Definition 2 上の定義に加えて π_* が上への写像であるとき、$\pi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ は *isomorphism* (同型) であると言う。

この morphism 写像についての新たな保存量として 'Cosiness' が Tsirelson によって定義された。

*hara@theory.cs.ritsumei.ac.jp

Definition 3 確率空間 (Ω, F, P) 上の *filtration* $\mathcal{F}_\alpha = (F_\alpha(t)), \alpha \in [0,1]$ が *T-system* であるとは、以下の条件 *(i)* から *(iii)* を満たすことである。

(i) 任意の $\alpha \in [0,1]$ について、$\mathcal{F}_\alpha \subset \hat{\mathcal{F}}$ かつ $M(\mathcal{F}_\alpha) \subset M(\hat{\mathcal{F}})$ となるような *filtration* $\hat{\mathcal{F}}$ が存在する。

(ii) 各 $\alpha \in (0,1]$ に対し、任意の $M \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ と $N \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_\alpha)$ について、

$$|\langle M, N \rangle| \le \rho(\alpha)\sqrt{\langle M \rangle(t)\langle N \rangle(t)} \qquad (t \ge 0, a.s.)$$

となるような $0 < \rho(\alpha) < 1$ が存在する。

(iii) 各 $\alpha \in (0,1]$ に対し、任意の $X \in L^2(F_0(\infty))$ について、$\alpha \to 0$ のとき、

$$\|X - (\pi_\alpha)_*(X)\|_2 \to 0$$

となるような同型写像 $\pi_\alpha : \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{F}_0$ が存在する。

Definition 4 確率空間 (Ω, F, P) 上の *filtration* $\mathcal{F}$ が *cozy* であるとは、ある *T-system* $\{(\Omega', F', P'), \{\mathcal{F}'_\alpha\}, \hat{\mathcal{F}}'\}$ と *morphism* $\pi : \mathcal{F}'_0 \to \mathcal{F}$ が存在することである。

この cozy の性質は morphism について保存する。複素平面の $\{z : z^3 \in [0,\infty)\}$ なる 3-ray の上の複素値連続マーチンゲール Z(t) で $|Z(t)|^2 - t$ がマーチンゲールになるようなものを Walsh Brownian Motion と呼ぶ。直観的には 3-ray の上を運動する Brown 運動である。Walsh Brownian Motion が Brown 運動と異なる filtration を持つことが、この cosiness の概念を用いて示される。すなわち、Brown 運動の自然な filtration は cozy であるが、Walsh Brownian Motion は cozy ではない。

References

[1] B. Tsirelson: *"Triple Points: From Non-Brownian Filtrations to Harmonic Measure"*, Geom.Func.Anal. 7, pp.1096 – 1142, (1997)

[2] S. Watanabe: *"The Existance of a Multiple Spider Martingale in the Natural Filtration of a Certain Diffusion in the Plane"*, preprint (1998)

ジャンプ過程と境界値問題

石川　保志 [筑波大学数学系]

Abstract

ジャンプ過程 X_tの性質と、その生成作用素 L にたいする積分方程式 $Lh=\ell$の解の領域境界および内部でのなめらかさとの関係について考察する。

1 Introduction

Dを $\mathbf{R}^d$の開集合、∂Dをその topological boundary, $\bar{D}=D\cup\partial D$とおく。$\tilde{X}_t$を $\mathbf{R}^d$のジャンプ過程で$\tilde{X}_0=x_0\in D$なるもの、L をその infinitesimal generator (integral operator) とする。つぎの Boundary Value Problem を考える

$$(*)\quad Lh=\ell \quad \text{in} \quad D, \quad h\equiv\varphi \quad \text{in} \quad D^c.$$

ここで$\varphi:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}, h:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ である。$p_t(x,dy)$ で$\tilde{X}_t$の transition function をあらわす。密度関数の存在を仮定する $p_t(x,dy)=p_t(x,y)dy$. われわれはすでに ([5]) 密度関数の short time asymptotic を得ている

$$(1)\qquad p_t(x,y)\asymp t^{\alpha(x,y)-\frac{d}{\beta}} \quad as \quad t\to 0.$$

ここで$\alpha(x,y)$ は、"the minimum number of jumps of $\tilde{X}_t$ to reach y from x" をあらわす。したがって、"the more $\alpha(x,y)$ large is, the more $p_t(x,y)$ smooth is" がなりたっている。

この結果を $(*)$ の解 h の regularity の評価に使いたい。$\ell\in C^\infty(D)$ をあたえて、 問題 (*) を考える。

問題。(a) (*) の解 h は存在するか。(b) h は Dでなめらかか。

(a) について、$\ell\equiv 0$ in Dのもとで、(*) の weak solution h の存在にたいする criterion がしられている [2]。これには balayage theory をつかう。解 h は、適当な条件の下で、次の表示をもつ

$$(2)\qquad h(x)=E_x[\varphi(\tilde{X}_{\tau_D})].$$

Here $\tau_D\equiv\inf\{t>0;\tilde{X}_t\in D^c\}$. なお、ここで weak solution というのは、つぎをみたす h のことである　for all $\psi\in C_0^\infty(D)$ it holds $\int_{\mathbf{R}^d}Lh(x)\psi(x)dx=\int_{\mathbf{R}^d}\ell(x)\psi(x)dx$. ただし [2] の方法 (Dirichlet form の方法) では、h の regularity を示すのはむづかしい。

(b) について。以下にのべる結果を要約すると次のようになる。

結果 1。([11]) h を (*) の解とし、$\ell\in C^\infty(D)$, $x_0\in D$とする。任意の jについて、もし $h\notin C^j(\{\mathrm{near}x_0\})$ ならば、$\tilde{X}_t$は x_0から D^cに $n=n(j)$ 回のジャンプで到達可能。

結果 2。([3]) $h\in C^\infty(\bar{D})$ とする。もし、$\tilde{X}_t$はある $x\in D$ から D^cに有限回のジャンプで到達可能ならば、$\ell\in C^\infty(\bar{D})$ とは限らない。 つまり $\ell\notin C^\infty(\bar{D})$ となる ℓが存在する。)

ここで $C^\infty(\bar{D})$ は、the space of functions in $C^\infty(D)$ having continuous extensions (including the derivatives) to $\bar{D}$をあらわす。

結果 1 はつぎのようにもいえる　各 jについて、もし$\tilde{X}_t$が各 x_0から D^cに $n=n(j)$ 回のジャンプで到達不可ならば、$h\in C^j(\{\mathrm{near}x_0\})$ である。これは、(1) の右辺で$\alpha(x,y)$ が大きいほど左辺の基本解がなめらかになることの反映である。

参考文献

[1] W. Hoh and N. Jacob, Some Dirichlet forms generated by pseudo differential operators, Bull. Sc. math. **116** (1992), pp. 383-398.

[2] W. Hoh and N. Jacob, On the Dirichlet problem for pseudo differential operators generating Feller semigroups, J. Funct. Anal. **137** (1996), pp. 19-48.

[3] Y. Ishikawa, Remarks on transmission, antitransmission and antilocal properties for sums of stable generators, Tsukuba J. Math. Vol. **12** (1987), pp. 477-487.

[4] Y. Ishikawa, Asymptotic behavior of the transition density for jump-type processes in small time, *Tohoku Math. J.* Vol. **46** (1994), pp. 443-456.

[5] Y. Ishikawa, Density estimate in small time for jump processes with singular Lévy measures, preprint (submitted), 1998.

[6] Y. Ishikawa, An example of non-local operators having no transmission property, Mathematical Research Note 98-007, Inst. Math., Univ. Tsukuba, 1998.

[7] N. Jacob and R. Schilling, Subordination in the sense of S. Bochner - An approach through pseudo differential operators, *Math. Nachr.* Vol. **178** (1996), pp 199-231.

[8] J.Picard, On the existence of smooth densities for jump processes, Probab. Th. Relat. Fields **105** (1996), 481-511.

[9] J.Picard, Density in small time at accessible points for jump processes, Stochastic Processes and their Applications **67** (1997), 251-279.

[10] J.Picard, Density in small time for Levy processes, ESAIM Probab. Statist **1** (1997), 358-389 (electronic).

[11] J. Picard and C. Savona, Smoothness of harmonic functions and time reversal of Markov processes, preprint, 1998.

[12] M. Tsuchiya, Lévy measure with generalized polar decomposition and the associated SDE with jumps, Stochastics and Stochastic Reports **38** (1992), 95-117.

(注) 講演者は現在, 愛媛大学理学部数理科学科に在籍している.

C. Landim, S. Olla, H. T. Yau: Convection-diffusion equation with space–time ergodic random flow の紹介

日野　正訓（京大情報）

1. 概要

この論文では次の convection-diffusion equation

$$\partial_t u = \Delta u + \mathbf{F}\cdot\nabla u \qquad (\mathbf{F}\text{ は適当な条件をみたすランダムなベクトル場})$$

をみたす解が巨視的なスケール変換によりある (deterministic な) 拡散方程式の解に収束することを示している．このような random flow における homogenization の問題はさまざまな設定の元で研究が行われているが，本論文では flow が時間に依存している場合を扱っていることが特長である．証明については，対応する拡散過程の有限次元分布収束を示すのに [1] の手法を用い，生成作用素の core の問題を [2] における摂動の議論により処理している．

2. 問題の定式化と結果

$(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を確率空間，$G = \{\tau_{\mathbf{x},t};\ (\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^{d+1}\}$ を Ω 上に ergodic に作用する保測変換群であるとする．$f\in L^2(\mu)$ に対し $T_{\mathbf{x},t}f(\omega) = f(\tau_{\mathbf{x},t}\omega)$ として $L^2(\mu)$ 上のユニタリ群 $\{T_{\mathbf{x},t};\ (\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^{d+1}\}$ を定める．また

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}T_{\mathbf{x},t}\bigg|_{\mathbf{x}=0,\,t=0},\ (i=1,\dots,d),\quad D_t = \frac{\partial}{\partial t}T_{\mathbf{x},t}\bigg|_{\mathbf{x}=0,\,t=0}$$

により無限小変換を定める．

$\mathbf{F}' = \{F'_i = \sum_{j=1}^d D_j H_{i,j},\ i=1,\dots,d\}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}'+\mathbf{v}$ とおく．ここで $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^d$ は定ベクトル，$\{H_{i,j}(\omega)\}_{i,j=1}^d$ は次の条件をみたす Ω 上の函数列とする:

(i) 行列 $(H_{i,j}(\omega))_{i,j=1}^d$ は a.e.ω で歪対称かつ有界．

(ii) $D_l H_{i,j}(\omega)$ $(l=1,\dots,d)$ が存在して有界．

(iii) $D_l D_h H_{i,j}(\omega)$ $(l,h=1,\dots,d)$ が存在して $L^2(\mu)$ に属する．

本質的な条件は (i) であり，(ii)(iii) は主に以下定義する確率過程の存在を保証するためのものである．

$\mathbf{w}_t$ を $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動とし，$\omega\in\Omega$ 毎に次の確率微分方程式を考える．

$$\begin{cases} d\mathbf{y}^\omega(t) = \sqrt{2}d\mathbf{w}_t + \mathbf{F}(\mathbf{y}^\omega(t),t,\omega)\,dt \\ \mathbf{y}^\omega(0) = 0 \end{cases}.$$

$\mathbf{x}^\varepsilon(t) = \varepsilon(\mathbf{y}^\omega(\varepsilon^{-2}t) - \varepsilon^{-2}t\mathbf{v})$, $\varepsilon>0$ とおくとき次の定理が成り立つ．

定理 1. 確率過程 $\{\mathbf{x}^\varepsilon(t)\}$ は $\varepsilon\to 0$ のとき，(ω についての) 分布 μ の下で拡散係数行列 $a^{\mathbf{v}}$ に対応する対称拡散過程に弱収束する．但し $a^{\mathbf{v}}$ は次式により定まるもの:

$$\mathbf{e}\cdot a^{\mathbf{v}}\mathbf{e} = |\mathbf{e}|^2 + 2\sup_{\varphi\in\mathcal{C}_{-1}}\{2\langle(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{e})\varphi\rangle - \|(D_t+\mathbf{F}\cdot\mathbf{D})\varphi\|_{-1}^2 - \|\varphi\|_1^2\},\qquad \mathbf{e}\in\mathbb{R}^d.$$

ここで $\langle\cdot\rangle$ は μ による ω の積分を表わし，$\mathcal{C}_{-1}$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_{-1}$ は次節で定義を与える．

3. 証明について

$\eta(t) = \tau_{\mathbf{y}^\omega(t),t}\omega$, $\eta(0)=\omega$ とおくと $\{\eta(t)\}$ は Ω に値をとる Markov 過程で，$L := \sum_{i=1}^d D_i^2 + \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} + D_t$ $(\mathbf{D} = (D_1,\dots,D_d))$ を生成作用素にもつ．更に関係式

$$\mathbf{x}^\varepsilon(t)\cdot\mathbf{e} = \sqrt{2}\varepsilon\mathbf{w}_{\varepsilon^{-2}t} + \varepsilon\int_0^{\varepsilon^{-2}t}\mathbf{F}'(\eta(s))\cdot\mathbf{e}\,ds$$

が成立する．以下のように Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1}$ を導入する．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$（急減少函数全体からなる集合），$\varphi \in L^2(\mu)$ に対して $\varphi_f(\omega) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} T_{\mathbf{x},t}\varphi(\omega) f(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}\,dt$ と定め，$\mathcal{C} = \{\varphi_f \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}), \varphi \in L^2(\mu)\}$ とおく．$\mathcal{C}$ をノルム $\|\varphi\|_1 = \langle |\mathbf{D}\varphi|^2\rangle^{1/2}$ で完備化した空間を $\mathcal{H}_1$ とする．また $\mathcal{C}_{-1} = \{\varphi_f \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}),$ $\varphi \in L^2(\mu), \mathrm{supp} f \cap \left([-h_0, h_0]^d \times \mathbb{R}\right) = \emptyset \text{ for some } h_0 > 0\}$ とし，ノルム

$$\|\varphi\|_{-1} = \sup_{\psi \in \mathcal{C},\, \psi \neq 0} \frac{\langle \varphi\psi\rangle}{\|\psi\|_1} \left(= \sup_{\psi \in \mathcal{C}} \left\{ 2\langle\varphi\psi\rangle - \|\psi\|_1^2 \right\} \right)$$

で $\mathcal{C}_{-1}$ を完備化した空間を $\mathcal{H}_{-1}$ とする．確率過程 $\{\mathbf{x}^\varepsilon(t)\cdot\mathbf{e}\}$ の有限次元分布収束を示すためには，まず (a) $\mathbf{F}'\cdot\mathbf{e}$ を $L(\mathcal{C}_{-1})$ の元の列 $\{Lu_n^{\mathbf{e}}\}$ で近似し，$\varepsilon\int_0^{\varepsilon^{-2}t} Lu_n(\eta(s))\,ds$ をマルチンゲール部分と negligible term に分け，次に (b) $\mathbf{F}'\cdot\mathbf{e}$ と $Lu_n^{\mathbf{e}}$ の差から生じる項が 0 に収束することを示す．(a) は $\mathbf{F}'\cdot\mathbf{e} \in \mathcal{H}_{-1}$ であることに注意して，[2] による摂動の議論から示される次の命題を用いる．

命題 2. $L(\mathcal{C}_{-1})$ は $\mathcal{H}_{-1}$ で稠密．

(b) 及び $\{\mathbf{x}^\varepsilon(t)\cdot\mathbf{e}\}$ の法則の tightness は [3, 4] による次の評価式より導く．

$$E^\mu\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t g(\eta(s))\,ds\right|^2\right] \le 16T\|g\|_{-1}^2, \quad g \in \mathcal{H}_{-1}\cap L^2(\mu).$$

この不等式は被積分函数をマルチンゲールと後ろ向きマルチンゲールの和で表わし，Doob の不等式に持ち込むことで示される．(ここで初期分布が μ であることが重要.) $\{u_n^{\mathbf{e}}\}$ は $\mathcal{H}_1$ 内で収束し，その極限を $u_0^{\mathbf{e}}$ としたときマルチンゲール部分の極限は 2 次変分 $\|u_0^{\mathbf{e}}\|_1^2$ を持つマルチンゲールとなる．従って定理の主張中の $\mathbf{e}\cdot a^{\mathrm{v}}\mathbf{e}$ は $|\mathbf{e}|^2 + 2\|u_0^{\mathbf{e}}\|_1^2$ に等しく，これを変分原理に基づいた形で書き換えて証明が完了する．

4. 補足

報告者にとって未解決だと思われるのは次の 2 点である：

・この論文の証明方法で convection-diffusion equation のラプラシアンの部分にもランダムな係数をつけられるかどうか．

・定理 1 で a.e.ω に関して $\{\mathbf{x}^\varepsilon(t)\}$ の弱収束が言えるかどうか．

参考文献

[1] Kipnis, C., Varadhan, S. R. S.: Central limit theorem for additive functional of reversible Markov processes and applications to simple exclusions, Comm. Math. Phys. **104**, 1–19 (1986).

[2] Landim, C., Yau, H. T.: Fluctuation-dissipation equation of asymmetric simple exclusion processes, Prob. Th. Rel. Fields, **108**, 321–356 (1997).

[3] Sethuraman, S., Varadhan, S. R. S., Yau, H. T.: Central limit theorem for a tagged paticle in asymmetric symmetric exclusion processes, preprint.

[4] Wu, L.: On functional limit theorems for additive functionals of a stationary ergodic Markov process, preprint.

ループ空間上の対数ソボレフ不等式について

会田茂樹
大阪大学大学院基礎工学研究科

M を完備リーマン多様体とし，その上の道の空間 $P_x(M) = C([0,1] \to M \mid \gamma(0) = x)$, ループ空間 $L_x(M) = C([0,1] \to M \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x)$ はそれぞれブラウン運動の測度 μ_x, 条件つきブラウン運動の測度 ν_x, 自然な filtration の σ-field $\mathfrak{F}_t$ をもった確率空間とみなせる．M がユークリッド空間のとき, $P_x(M)$ は標準ブラウン運動の測度つきの Wiener 空間である．Ito の結果により Wiener 空間上の L^2 関数 F は $\mathfrak{F}_t$-適合な確率過程 $\{f_t\}$ のブラウン運動の確率積分で表示できる．Clark-Ocone-Haussmann formula は被積分関数 f_t を F の H-微分で表示する公式である．Capitaine-Hsu-Ledoux はこの公式を M が一般のリーマン多様体のときにまで拡張し, $P_x(M)$ 上の対数ソボレフ不等式を証明した．さらに彼らは, $\frac{1}{2}\Delta + V_t$, (Δ はラプラス作用素, V_t はベクトル場) を生成作用素とするマルコフ過程 (=この測度を P_x と書こう, x は出発点を表す) にまで拡張した．その公式をラフにいうとつぎのようになる．γ_t を P_x を与えられた semi-martingale とする．γ_t を T_xM に Ito-Cartan 展開した確率過程を b_t と書く．V_t を γ_t に沿って T_xM に確率平行移動して得られる T_xM 値の確率過程を $\overline{V_t(\gamma)}$ とかくと Girsanov の公式により $w_t = b_t - \int_0^t \overline{V_s(\gamma)}ds$ は確率測度 P_x の下で標準ブラウン運動になる．したがって $L^2(P_x)$ 関数 F は Ito の公式により $\mathfrak{F}_t$-適合な確率過程 f_t の w_t による確率積分で表される．f_t を F の H-微分で表示する式を Capitaine たちは見つけたのであるが, それは次のような形をしている．

$$F = E^{P_x}[F] + \int_0^1 (H(s,\gamma), dw(s))\,. \tag{1}$$

ここで

$$H(s,\gamma) = E^{P_x}\left[L(\gamma)(DF(\gamma)^{\cdot})(s)|\mathfrak{F}_s\right] \quad ds \otimes dP_x\text{-a.s. } (s,\gamma). \tag{2}$$

(2) は predictable projection を表す．$L(\gamma)$ は $L^2([0,1] \to T_xM)$ 上の有界線形作用素で V_t と M の Ricci 曲率に依存する．さて講演者が考えたいのは P_x ではなく $L_x(M)$ 上の確率測度 ν_x に関する L^2 関数を同様に表示する Clark-Ocone formula である．この条件付ブラウン運動はドリフト $V_t = \nabla_y \log p(1-t,x,y)$ ($p(t,x,y)$ はブラウン運動の熱核) がついたブラウン運動だから Capitaine たちの結果が使えそうだが, このベクトル場は $t \to 1$ で singularity があるため, すぐには使えないのである．そこで講演者は三次元双曲型空間のとき, 熱核の対数微分が

$$\sup_{x,y,0<t\le 1}\left|\nabla_y^2 \log p(t,x,y) + \frac{1}{2t}\nabla_y^2\left\{d(x,y)^2\right\}\right| < \infty \tag{3}$$

をみたすことから Clark-Ocone formula および対数ソボレフ不等式が成立することを示した．

(注) 講演者は当時, 東北大学大学院情報科学研究科に在籍していた．また上の話しはさらに一般化された．それについては次の論文を参照して欲しい．

S. Aida, Logarithmic derivatives of heat kernels and logarithmic Sobolev inequalities with unbounded diffusion coefficients on loop spaces, J. Funct. Anal. 174 (2000), 430–477.

また熱核の対数微分を評価する別の方法 (Elworthy-Truman formula を用いる) を " Logarithmic Derivatives of Heat Kernels on Rotationally Symmetric Riemannian Manifolds and their Applications, 2000, Preprint"

で与えた．また Capitaine たちの論文は次です．

M. Capitaine, E. Hsu and M. Ledoux, Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces, Elect. Comm. in Probab. **2** (1997), 71–81.

9.

力学系とフラクタル

（ミニワークショップ）

平成１１年５月２４日（月）～２６日（水）

広島大学理学部数学教室 大講究室Ｂ７０７

責任者　久保　泉、宍倉　光広

当該科学研費により来日される Prof. Yakov Pesin (Penn State Univ.) を中心に、力学系とフラクタルに関するミニ・ワークショップを行った。

プログラム

５月２４日（月）

１４：００～１５：３０ Yakov Pesin

Dimension characteristics of dynamical systems (1)

１５：５０～１６：５０ 辻井 正人（北海道大学）

多次元区分拡大写像のエルゴード的性質

５月２５日（火）

１０：００～１１：３０ Yakov Pesin

Dimension characteristics of dynamical systems (2)

１１：４０～１２：４０ 中石 健太郎（東京大学）

中立不動点をもつ力学系のマルチフラクタル解析

１４：００～１５：００ 由利 美智子（札幌大学）

ある非双曲型力学系に対する weak Gibbs measures の統計的性質

１５：１０～１６：１０ 印南 信宏（新潟大学）

Circles and ellipses from the point of view of convex billiard ball problems

１６：２０～１７：２０ 鷲見　直哉（東京都立大学）

正のエントロピーをもつ微分同相写像の（不）安定多様体

5月２６日（水）

１０：００～１１：３０ Yakov Pesin

Dimension characteristics of dynamical systems (3)

１１：４０～１２：４０ 鄭 容武（広島大学）

非可逆写像の双曲型測度

Prof. Pesin の講演内容:

"Dimension characteristics of dynamical systems."

This will include the general concept of the Caratheodory dimension of which the Hausdorff dimension and the box dimension are just examples (this can be the first lecture). Other examples are multifractal spectra for dynamical systems (with elements of the multifractal analysis; this may be the second lecture) and topological pressure (with elements of the thermodynamic formalism; the third lecture). Of course, for such a short period of time I can only give an introduction to these subjects but I will be able to provide all basic notions and describe some basic ideas.

Pesin 教授には、この他九州大学、京都大学、東京工業大学において、以下のような講演をして頂いている。

5月２１日（金）　15:40 ～ 17:10 （於九州大学大学院数理学研究科）

Entropy and Dimension Families of Equilibrium Measures for Hyperbolic Dynamical Systems

Abstract: Given a subshift of finite type σ and a Hölder continuous function ψ, consider the one-parameter family of equilibrium measures $\{\mu_\beta\}_{\beta\geq 0}$ corresponding to the one-parameter family of functions $\varphi_\beta(x) = -\beta\psi$. I study the entropy family $h_{\mu_\beta}(\sigma)$ associated with these measures. One of the problems is whether

this spectrum contains all values of the metric entropy (over all invariant measures for the subshift). It turns out that this problem is closely related to the study of entropy spectrum for local entropies. The latter was introduced in an attempt to obtain a substantial additional information to the classical Shannon-McMillan-Breiman theorem.

Similarly, one can consider the dimension family $\dim_H \mu_\beta$ associated with the equilibrium measures $\{\mu_\beta\}_{\beta\geq 0}$ and relate it to the dimension spectrum.

The entropy and dimension spectra constitute an essential part of the modern multifractal analysis of dynamical system. In my lecture I will give some insight into this topic.

5月28日（金）15:30 ~ 17:00 （於京都大学数理解析研究所）

A General Concept of Multifractality for Smooth Dynamical Systems

Abstract: I introduce the mathematical concept of multifractality and describe various multifractal spectra for dynamical systems, including spectra for dimensions and spectra for entropies. I provide some physical motivation as well as describe some examples.

6月2日（火）（於東京工業大学大学院理工学研究科）

The Structure of the Lyapunov Spectrum for Smooth Dynamical Systems

Abstract: I introduce the spectrum of Lyapunov exponents for smooth dynamical systems.t is characterized by the Hausdorff dimension of the sets on which the Lyapunov exponent takes on given values. I will provide a complete description of the spectrum in the case when the system is hyperbolic.

10.

Symbolic Dynamics and its Related Fields

平成11年8月2日（月）～8月5日（木）
於 812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1
九州大学大学院数理学研究科演習棟

世話人：濱地敏弘（九大・数理）

このシンポジウムは，記号力学系を中心に，関連する確率論分野，工学分野の研究者の最近の研究成果の発表，討論，及び，研究交流を目的として開催した．

参可者人数は30人．日本学術振興会の日独研究者特別招聘事業により九州大学に研究滞在中の Prof. W.Krieger (University of Heidelberg) が講演した．

研究成果の概要は次の通りである．

1. 記号力学系の研究成果
   サブシフトと可換な連続写像は，セル構造オートマトンとも呼ばれ大きな研究課題である．それがまたサブシフトになるときには，その二つのサブシフトは同型の観点からもエントロピー最大測度の観点からも強い類似性を持つことが従来知られている．今回，テキスタイルの概念を用いることによりこれらの状況を精密化できることが分かった (那須)．サブシフトの中には，サンプルパス間に積が定義出来，積がまたそのサブシフトのサンプルパスになるような，サブシフトが存在することが今回明らかにされ，そうした代数構造をもつサブシフトの研究の重要性と，その統一的な研究方法が示された (Krieger)．あるクラスの1次元写像のパラメター領域の連結性と不連結性の状況解明に，サブシフトの有効な適用例が報告された (中村)．
2. C^*-環の記号力学系への応用
   サブシフトを位相マルコフシフトに限れば，同型問題はその遷移行列の強同値関係で説明できることが知られている．今回これを拡張して，一般のサブシフトに対して，付随した遷移行列の列を求めることが出来，同型問題が扱えるようになった．遷移行列の列から C^*-環を作ることにより，同型不変量を C^* の K-理論を介して導き出せることも解明出来た (松本)．Cantor minimal homeomorphism の位相軌道同型理論が，Giordano-Putnum-Skau によって確立し，強軌道同型が付随する C^*-環の K^0-群によって完全把握されることが分かっている．そこで Cantor minimal homeomorphism と可換な同相写像を，今回新たに導入した C^*-環の EXT-群により構造を捉えられることが示された (松井)．
3. 工学分野の記号力学系の応用
   符号器・複号器の設計では符号化率を考えることができ性能を見るのに

重視される. ある符号・復号化では, 異なる符合化率をもつ符号化を考える必要性があり, 今回, 記号力学系の分野で同型写像を作る方法として従来から知られている状態分割法を改良し, 順序を込みにした状態分割法を新たに開発し, 要請に応えることができた (鎌部).

4. 力学系の再帰性の精密化
   Pascal-ダイアグラムの各無限パスの空間に作られるパスカル変換は, 弱混合性を持つのではないかという予想があり, 今回, ランダムウォークの再帰性とこの予想との密接な関りが明らかにされた ([7]). Frustenberg による多重再帰性定理「どんな有限保測変換も多重再帰性をもつ」が, 無限大不変測度の場合には成立しないことが少しずつ分かってきている. 今回, 角谷の α-タイプと関連付けて多重再帰性の成り立たない状況をより鮮明にできた (仲田)
5. 力学系の中心極限定理, エルゴード定理
   可逆でない保側変換に対して一様混合性を少し強くした条件のもとで中心極限定理が成立することが報告された (石谷) . 無限大不変測度を持つあるクラスの 1 次元写像について, 積分値が無限の関数についての比のエルゴード定理の成立状況と, 1 次元写像の中立点の性質との関係が報告された (井上) .

以上のような成果があった.

プログラムと内容は次頁以降の通り.

プログラム

Aug. 2(Mon.)

2.00 - 2.10 Registration

2.10 - 3.00 M.Nasu (Hiroshima Univ.)
LR textile systems

3.20 - 4.10 H.Kamabe (Gifu Univ.)
Real-Time state splitting and Variable rate codes

Aug. 3(Tues.)

10.00 - 11.00 K.Matsumoto (Joetsu Ed.Univ.)
Topological conjugacy invariants of subshifts and K-theory for certain C^*-algebras(I).

11.30 - 12.30 W.Krieger (Heidelberg Univ.)
A class of algebraic subshifts

2.30 - 3.20 H.Nakada (Keio Univ.)
Multiple recurrence and partial rigidity of infinite measure preserving transformations

3.40 - 4.30 H.Matsui (Kyoto Univ.)
Dimension groups and automorphisms of Cantor minimal systems

4.50 - 5.40 Y.Ito (Keio Univ.)
On the Pascal-adic transformation Aug. 4 (Wed.)

10.00 - 11.00 K.Matsumoto (Joetsu Ed.Univ.)
Topological conjugacy invariants of subshifts and K-theory for certain C^*-algebras(II)

11.30 - 12.30 W.Krieger (Heidelberg Univ.)
Monoids and presentations of subshifts

2.30 - 3.20 S.Nakamura (Osaka Univ.)
Symbolic Dynamics for bimodal maps

3.40 - 4.30 M.Kurata (Nagoya Inst.Tech.Univ.)
Lyapunov Regular Sets with Non-zero Exponents and Associated Subsets of Shifts.

Aug. 5(Thurs.)

10.00 - 10.50 H.Ishitani (Mie Univ.)
Perron Frobenius operators for statinary processes and central limit theorems for uniformly mixing sequences

11.10 - 12.00 T.Inoue (Ehime Univ.)
Ratio of ergodic sums for one-dimensional maps with infinite invariant measures

1. 那須正和 (広島大学工学部) LR textile systems

Blanchard and Maass [BM] proved

Theorem A ([BM]). If $\tilde{\varphi}$ is a positively expansive endomorphism of the one-sided full l-shift, then there is a positive integer k such that
(1) for all sufficiently large n, $\tilde{\varphi}^n$ is conjugate to a one-sided full k^n-shift, and
(2) k and l are divisible by the same primes.

Boyle, Fiebig and Fiebig [BFF] obtained, extending a result of Blanchard and Maass [BM],

Theorem B ([BFF]). If $\tilde{\varphi}$ is a positively expansive endomorphism of a mixing one-sided topological Markov shift $(\tilde{X}, \tilde{\sigma})$, then $\tilde{\varphi}$ and $\tilde{\sigma}$ have the same measure of maximal entropy.

Earlier than this, Boyle and Lind [BL] proved

Theorem C ([BL]). If φ is an automorphism of a mixing topological Markov shift (X, σ) and the directions of σ and φ are in the same expansive component of the directions of a $\mathbf{Z}^n$-action, then σ and φ have the same measure of maximal entropy.

We present results on LR textile systems which generalize part of Theorem A, give an analogue of Theorem A, and are useful to understand Theorems B and C. We follow the terminology and notation of [N1].

Theorem 1 ([N1, Theorems 2.5 and 2.12]). Let T be a textile system.
(1) If ξ_T is 1-1, then $\varphi_T = \eta_T \xi_T^{-1}$ is expansive if and only if both ξ_{T^*} and η_{T^*} are 1-1; if all ξ_T, η_T, ξ_{T^*}, and η_{T^*} are 1-1, then χ_T is a homeomorphism with $\chi_T \sigma_T = \varphi_{T^*} \chi_T$ and $\chi_T \varphi_T = \sigma_{T^*} \chi_T$.
(2) If $\tilde{\xi}_T$ is 1-1, then $\tilde{\varphi}_T = \tilde{\eta}_T \tilde{\xi}_T^{-1}$ is positively expansive if and only if $\tilde{\xi}_{T^*}$ is 1-1; if both $\tilde{\xi}_T$ and $\tilde{\xi}_{T^*}$ are 1-1, then $\hat{\chi}_T$ is a homeomorphism with $\hat{\chi}_T \tilde{\sigma}_T = \tilde{\varphi}_{T^*} \hat{\chi}_T$ and $\hat{\chi}_T \tilde{\varphi}_T = \tilde{\sigma}_{T^*} \hat{\chi}_T$.

Remark 2. If φ is an expansive, essentially LR automorphism of a topological Markov shift (X, σ), then the directions of σ and φ are in the same expansive component of directions, in the sense of Boyle and Lind [BL], for the $\mathbf{Z}^2$-action generated by σ and φ.

Remark 3. There is an expansive automorphism of a topological Markov shift which is not an essentially LR one and whose inverse is not either (and which is conjugate to a topological Markov shift)([N1, Section 10]).

In contrast with this remark, we have the following combination of Theorem 3.13 of [N1] and a result which was independently obtained by [K] and [N2](Theorem 8.6).

Theorem 4. If $\tilde{\varphi}$ is a positively expansive onto endomorphism of an irreducible one-sided topological Markov shift $(\tilde{X}, \tilde{\sigma})$, then $\tilde{\varphi}$ is an essentially LR endomorphism of $(\tilde{X}, \tilde{\sigma})$.

Theorem 5 ([N1, Proposition 8.8]). If φ is an expansive essentially LR automorphism of a topological Markov shift (X, σ) , then there is a positive integer r such that φ^n is an LR automorphism of (X, σ) for all $n \geq r$.

Corollary 6. If φ is an expansive, essentially LR automorphism of a topological Markov shift (X, σ) whose defining matrix is M, then there is a positive integer r such that for all $n \geq r$, (X, φ^n) is conjugate to a topological Markov shift whose defining matrix commutes with M . In particular, if φ is an expansive, essentially LR automorphism of a full shift , then there are positive integers r and k such that φ^n is conjugate to the full k^n-shift for all $n \geq r$.

Theorem 7. Let T be an LR textile system over a graph with adjacency matrix M and let T^* be over a graph with adjacency matrix N.
(1) If $\tilde{\xi}_T$ is 1-1 and M is irreducible, then there are a positive integer r and a nonnegative integral matrix E such that $\lambda_E \lambda_N = (\lambda_M)^r$ and E and M (and N) have the same right eigenvector corresponding to λ_E and λ_M (and λ_N), respectively, where λ_E, λ_M, and λ_N are the maximal eigenvalues of E, M, and N, respectively.
(2) If both ξ_T and η_T are 1-1, then there are a positive integer r and a nonnegative integral matrix E such that $EN = M^r$ and E, M, and N pairwise commute.
(3) If all ξ_T, η_T, ξ_{T^*}, and η_{T^*} are 1-1, then there are positive integers r, s and nonnegative integral matrices E and F such that $EN = M^r, FM = N^s$, and E, F, M, and N pairwise commute.

Theorems 1, 4, and 7 generalize part of Theorem A.

Corollary 8. Let $(\tilde{X}, \tilde{\sigma})$ be an irreducible one-sided topological Markov shift and $\tilde{\varphi}$ a positively expansive onto endomorphism of $(\tilde{X}, \tilde{\sigma})$. Let $\log \lambda_{\tilde{\sigma}}$ and $\log \lambda_{\tilde{\varphi}}$ be the topological entropies of $\tilde{\sigma}$ and $\tilde{\varphi}$, respectively. Then there are integers $r, s > 0$ such that $\lambda_{\tilde{\sigma}}^r \lambda_{\tilde{\varphi}}^{-1}$ and $\lambda_{\tilde{\varphi}}^s \lambda_{\tilde{\sigma}}^{-1}$ are the maximal eigenvalues of nonnegative integral matrices.

By Theorems 1, 5, and 7 we have

Corollary 9. Let φ be an expansive, essentially LR automorphism of a full l-shift. Then there is a positive integer k such that for all sufficiently large n, φ^n is conjugate to the full k^n-shift and k and l are divisible by the same primes.

Theorem 10. Let T be an LR textile system over an irreducible graph.
(1) If $\tilde{\xi}_T$ is 1-1, then $\hat{\chi}_T$ is measure preserving with respect to the Parry measures.
(2) If ξ_T and η_T are 1-1, then χ_T is measure preserving with respect to the Parry measures.

¿From (1) of this theorem and Theorems 1 and 4, Theorem B follows. (2) is strongly linked with Theorem C.

References

[BM] F. Blanchard and A. Maass, Dynamical properties of expansive one-sided cellular automata, Israel J. Math. 99 (1997), 149-174.

[BFF] M. Boyle, D. Fiebig and U. Fiebig, A dimension group for local homeomorphisms and endomorphisms of one-sided shifts of finite type, J. Reine Angew. Math. 487 (1997), 27-59.

[BL] M. Boyle and D. Lind, Expansive subdynamics, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 55-102.

[K] P. Kůrka, Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 17 (1997), 417-433.

[N1] M. Nasu, Textile systems for endomorphisms and automorphisms of the shift, Mem. Amer. Math. Soc. 546 (1995).

[N2] M. Nasu, Maps in symbolic dynamics, in Lecture Notes of The Tenth KAIST Mathematics Workshop 1995, ed. G.H. Choe, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Mathematics Research Center, Taejon, 1996.

2. 鎌部　浩（岐阜大学工学部）

1 Introduction

We introduce a real-time state-splitting method which is a variant of a well-known code construction method for constrained channels [1]. In general our method is applied to a k-th order higher power system of a given constrained system. Codes constructed by our method can be implemented by relatively small hardware even if k is very large.
When we use a long code word for a constrained channel we must use an error correcting code to prevent error propagations in decoding. Therefore we extend the state-splitting method so that we can use a coding scheme introduced in [2].

2 Restricted Partitions

Let $G = (S_G, E_G)$ be a labeled graph which represents a given constraint where S_G and E_G are sets of states and edges in G, respectively.

A fundamental procedure of the state-splitting method is to partition follower sets of states in G. In our method we use only partitions described below. For each state σ in G let $\mathcal{F}_G(\sigma)$ denote the follower set of σ, i.e., outgoing edges from σ. Let $ord(e)$ be an ordering on the set of edges. We can define a partition $\mathcal{P}_\sigma^1, \ldots, \mathcal{P}_\sigma^{\ell(\sigma)}$ of $\mathcal{F}_G(\sigma)$ so that there are numbers a_i and b_i satisfying the following.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\sigma^1 &= \{e \in \mathcal{F}_G(\sigma) : a_1 \le ord(e) \le b_1\}, \\ \mathcal{P}_\sigma^2 &= \{e \in \mathcal{F}_G(\sigma) \backslash \cap P_\sigma^1 : \\ &\qquad a_2 \le ord(e) \le b_2\}, \\ &\vdots \\ \mathcal{P}_\sigma^{\ell(\sigma)} &= \{e \in \mathcal{F}_G(\sigma) \backslash (\bigcup_{i=1}^{\ell(\sigma)-1} \mathcal{P}_\sigma^i) : \\ &\qquad a_{\ell(\sigma)} \le ord(e) \le b_{\ell(\sigma)}\}. \end{aligned}$$

Then a decoding map is implemented by arithmetic operations and small memories. We can find such partitions by using a variant of the algorithm for finding partitions given in [1].

3 Variable rate code

In order to use a coding scheme proposed in [2] we need two finite state codes having different code rates, say, $r_1 = p_1/q_1$ and $r_2 = p_2/q_2$. We first construct a variable length graph and we then apply a modified state-splitting algorithm to it.

By G^q we mean the q-th order power graph of G. We assume that $\lambda^{q_1} \ge 2^{p_1}$ and $\lambda^{q_2} \ge 2^{p_2}$ where λ is the largest real eigen value of an adjacency matrix of G. We construct a new graph $H = (S_H, E_H)$ as follows:

$$\begin{aligned} S_H &= \{(\sigma,1) : \sigma \in S_G\} \cup \{(\sigma,2) : \sigma \in S_G\} \\ E_H &= \{((i(e),1),(t(e),2)) : e \in E_{G^{q_1}}\} \\ &\qquad \cup \{((i(e),2),(t(e),1)) : e \in E_{G^{q_2}}\}, \end{aligned}$$

where $i(e)$ and $t(e)$ are the initial and the terminal states of edge e, respectively. Let $K = \#S_G$. We index states in $S_H = \{\sigma_1', \ldots, \sigma_{2K}'\}$ so that

$$\begin{aligned} \{(\sigma,1) : \sigma \in S_{G^{q_1}}\} &= \{\sigma_1', \ldots, \sigma_K'\} \\ \{(\sigma,2) : \sigma \in S_{G^{q_2}}\} &= \{\sigma_{K+1}', \ldots, \sigma_{2K}'\}. \end{aligned}$$

We define a diagonal matrix Λ by

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\underbrace{2^{p_1}, \ldots, 2^{p_1}}_{K}, \underbrace{2^{p_2}, \ldots, 2^{p_2}}_{K}).$$

We can find a vector $\boldsymbol{u}$ with $A_H \boldsymbol{u} \geq \Lambda \boldsymbol{u}$ by a modified version of an algorithm for finding an approximate eigenvector [1, Appendix] where A_H is an adjacency matrix of H.

We have two cases: (1) all states (σ, m) in H have at least 2^{p_m} outgoing edges, (2) there is a state $\sigma' = (\sigma, m)$ in H with $u(\sigma') > 1$ and we can define partitions $\mathcal{P}^1_{\sigma'}, \ldots, \mathcal{P}^{\ell(\sigma')}_{\sigma'}$ of $\mathcal{F}_H(\sigma')$ and $u^1(\sigma'), \ldots, u^{\ell(\sigma')}(\sigma')$ of $u(\sigma')$ such that for i with $1 \leq i \leq \ell(\sigma')$

$$u^i(\sigma') > 0, \qquad u(\sigma') = \sum_{j=1}^{\ell(\sigma')} u^j(\sigma'),$$

$$2^{p_m} u^i(\sigma') \quad \leq \quad \sum_{e \in \mathcal{P}^i_{\sigma'}} u(t(e)).$$

We split states in H if we have the case (2). We repeat the state-splitting procedure until we have the case (1). ¿From the final graph we can easily construct a finite state encoder with variable rate and a sliding block decoder for the encoder.

参考文献

[1] R. Adler, D. Coppersmith and M. Hassner, "Algorithms for sliding block codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-29, pp. 5–22, January 1983.

[2] K. A. S. Immink, "A practical method for approaching the channel capacity of constrained channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-43, pp. 1389–1399, 1997.

3. 松本　健吾（上越教育大学）Topological conjugacy invariants of subshifts and K-theory for certain C^*-algebras

C^*-algebras

There is a subclass of the class of all topological dynamical systems called the class of subshifts or the class of symbolic dynamics. The subclass is much wider than the class of topological Markov shifts. Each of the topological Markov shifts is presented by a nonnegative square matrix or equivalently a finite directed graph. We have already know classification theory for the topological Markov shifts up to topological conjugacy by using underlying matrices (Williams 1973). And also several topological conjugacy invariants for topological Markov shifts have been introduced and studied. They are closely related to K-theory for Cuntz-Krieger algebras. However, there is no known concrete presentation for general subshifts. We have not found their classification yet. Of course we do not have good computable invariants for general subshifts comparing with topological Markov shifts.

In this talk, I first introduce the notion of symbolic matrix system that is a presentation of general subshifts. I second formulate two kinds of equivalence relations on the symbolic matrix systems that I call strong shift equivalence and shift equivalence. I then show that the topological conjugacy classes of the subshifts are completely classified by the strong shift equivalence classes of the symbolic matrix systems. But there is no general algorithm to decide whether two symbolic matrix systems are strong shift equivalent or not. So I construct several shift equivalence invariants for the symbolic matrix systems that give rise to topological conjugacy invariants of the associated subshifts. What I would like to emphasize here is that these invariants come from K-theoretic objects of the C^*-algebras associated with subshifts that I have constructed before as a generalization of Cuntz-Krieger algebras.
I next talk about flow equivalence of subshifts. The flow equivalence relation is defined as an equivalence relation of the associated suspension flows. I say that some of of the invariants mentioned here are also flow equivalence invariants. The proof is due to C^*-algebra theory. I finally present examples of the invariants for some subshifts and apply the results to classification of them by flow equivalence.

4. Wolfgang Krieger (University of Heidelberg) A class of algebraic subshifts

5. 仲田　均（慶応大学理工学部） Multiple recurrence and partial rigidity of infinite measure preserving trasformations

6. 松井　宏樹（京都大学） Dimension groups and automorphisms of Cantor minimal systems

Let X be the Cantor set and ϕ be a minimal homeomorphism on X. We call the pair (X, ϕ) a Cantor minimal system. Giordano, Putnam and Skau defined the dimension group $K^0(X, \phi)$ associated with (X, ϕ) as the quotient group of $C(X, \mathbf{Z})$ by its coboundary subgroup

$$B_\phi = \{f - f \circ \phi^{-1}; f \in C(X, \mathbf{Z})\}.$$

The dimension group $K^0(X, \phi)$ is precisely the K_0-group of the C^*-algebra $C^*(X, \phi)$ arising from (X, ϕ). We denote by $[f]$ the equivalence class of f in $K^0(X, \phi)$. The dimension group $K^0(X, \phi)$ has a natural order structure induced from the positive cone of $C(X, \mathbf{Z})$ and the distinguished order unit [1]. In [GPS], Giordano, Putnam and Skau introduced the notion of strong orbit equivalence and proved that two Cantor minimal systems are strong orbit equivalent if and only if the dimension groups associated with the Cantor minimal systems are order isomorphic by a map preserving the distinguished order units.

In this note, we would like to consider automorphism groups of Cantor minimal systems and the kernel of mod maps. When $\gamma \in \mathrm{Homeo}(X)$ preserves the coboundary subgroup B_ϕ,

$$[f] \mapsto [f \circ \gamma^{-1}]$$

is a well-defined automorphism on the dimension group $K^0(X, \phi)$ and we denote it by $\mathrm{mod}(\gamma)$. In [GPS2], it was shown that the kernel of the mod map coincides with the closure of the topological full group

$$\tau[\phi] = \{\tau \in \mathrm{Homeo}(X); \exists n \in C(X, \mathbf{Z}) \text{ such that } \tau(x) = \phi^{n(x)}(x) \text{ for all } x \in X\}.$$

Let $C(\phi)$ be the automorphism group of (X, ϕ), that is,

$$C(\phi) = \{\gamma \in \mathrm{Homeo}(X); \gamma \circ \phi = \phi \circ \gamma\},$$

and $T(\phi)$ be the intersection of $C(\phi)$ and the kernel of the mod map. When γ is in $T(\phi)$, the mod map gives us no information. So, we defined a new invariant $\eta(\gamma)$ taking its value in $\mathrm{Ext}(K^0(X, \phi), \mathbf{Z})$ in [M] and proved the following.

Theorem 1 ([M]) *For $\gamma \in T(\phi)$, the automorphism on the associated C^*-algebra induced from γ is homotopic to an inner automorphism if and only if γ is in the kernel of the map η.*

However, for general Cantor minimal systems, we don't know the structure of $C(\phi), T(\phi)$ and $\ker(\eta)$. We need to know the dynamical meaning of the map η.

Finally, we give some examples of Cantor minimal systems.

(a) For any even number r, there exists a Cantor minimal system (X, ϕ) such that the dimension group $K^0(X, \phi)$ is isomorphic to $\mathbf{Z}[1/r] \oplus \mathbf{Z}$, and that $C(\phi)$ is generated by ϕ and a flip γ which satisfies $\mathrm{mod}(\gamma) = \mathrm{id}$ and $\eta(\gamma) = 0$. Thus, our new invariant can be zero for a non-trivial γ.

(b) Let (X, ϕ) be a Cantor minimal system such that the dimension group is isomorphic to $\mathbf{Z}[1/r] \oplus \mathbf{Z}$ for some odd number r and the positive cone is

$$\{(x, y) \in \mathbf{Z}[1/r] \oplus \mathbf{Z}; x + sy > 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

for some natural number s. Then, there exists no flip in $C(\phi)$.

(c) There exist Cantor minimal systems such that the automorphism group $C(\phi)$ is not abelian. But I don't know any examples of Cantor minimal systems such that $T(\phi)$ is not abelian.

(d) There exists a Cantor minimal system (X, ϕ) which is strong orbit equivalent to an odometer system such that (X, ϕ^2) and (X, ϕ^3) are Cantor minimal systems but not uniquely ergodic.

参考文献

[GPS] T.Giordano, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Topological orbit equivalence and C^*-crossed products*, J. reine angew. Math., 469 (1995), 51-111.

[GPS2] T.Giordano, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Full groups of Cantor minimal systems*, preprint.

[M] Matui H., *Ext and OrderExt classes of certain automorphisms of C^*-algebras arising from Cantor minimal systems*, preprint.

7. 中村　里美（大阪大学）　Symbolic dynamics for bimodal maps

Bimodal maps are the maps on the interval with three monotone segments. Let $F_{\lambda,\mu,d}(x)$ be a piecewise-linear bimodal map defined as follows:

$$F_{\lambda,\mu,d}(x) = \begin{cases} \lambda(x-d+\frac{1}{\mu})+1 & (x \le -\frac{1}{\mu}+d), \\ -\mu(x-d) & (-\frac{1}{\mu}+d \le x \le \frac{1}{\mu}+d), \\ \lambda(x-d-\frac{1}{\mu})-1 & (x \ge \frac{1}{\mu}+d), \end{cases}$$

where the parameter λ, μ and d satisfy $\lambda > 0$, $\mu > 1$ and $-1 < d < 1$. The topological entropy of a map gives a quantitative measure of complexity of a dynamical system defined by the iteration of the map. For the special case $d = 0$, $F_{\lambda,\mu,0}$ becomes a symmetric bimodal map with two parameters λ and μ. Oka and I proved the following theorem.

Theorem 1 *Given a constant c with $0 < c < \log 3$, the iso-entropy curve $\{(\lambda,\mu) | h(F_{\lambda,\mu,0}) = c\}$ is connected.*

For $d \neq 0$, I proved the connectivity fails.

Theorem 2 *Fix $d \in (-1,1) \setminus \{0\}$. There is c such that the iso-entropy curve $\{(\lambda,\mu) | h(F_{\lambda,\mu,d}) = c\}$ is not connected.*

We proved Theorem 1 by using symbolic sequences. The itinerary of x for $F_{\lambda,\mu,0}$ is the sequence $I(x) = (A(x), A(F_{\lambda,\mu,0}(x)), A(F^2_{\lambda,\mu,0}(x)), \cdots)$, where

$$A(x) = \begin{cases} L & (-1 \le x < -\frac{1}{\mu}) \\ C_L & (x = -\frac{1}{\mu}) \\ M & (-\frac{1}{\mu} < x < \frac{1}{\mu}) \\ C_R & (x = \frac{1}{\mu}) \\ R & (\frac{1}{\mu} < x \le 1). \end{cases}$$

The itineraries $K_L(\lambda,\mu) = I(F_{\lambda,\mu,0}(-\frac{1}{\mu}))$ and $K_R(\lambda,\mu) = I(F_{\lambda,\mu,0}(\frac{1}{\mu}))$ for the critical values are called kneading sequences. We denote the pair of $K_L(\lambda,\mu)$ and $K_R(\lambda,\mu)$ by $K(\lambda,\mu)$. We say $K(\lambda_1,\mu_1) < K(\lambda_2,\mu_2)$ if and only if $K_L(\lambda_1,\mu_1) < K_L(\lambda_2,\mu_2)$ and $K_R(\lambda_1,\mu_1) > K_R(\lambda_2,\mu_2)$. The topological entropy is related with the kneading sequences. Theorem 1 follows from

(a) in the essentially unimodal case, the topological entropy is monotone increasing with respect to the parameter λ and μ.
(b) monotonicity and continuity of the topological entropy with respect to μ.
(c) monotonicity of the topological entropy with respect to λ as λ to infinity.

The proof of Theorem 2 is given by comparing the orbit of the bimodal map with the orbit of discontinuous map which is studied by Hata.

参考文献

[1] S.Nakamura & H.Oka, "Monotonicity of topological entropy for symmetric PL bimodal maps", preprint

[2] S.Nakamura "Non-monotonicity of the topological entropy for piecewise-linear bimodal maps", preprint

(8) 石谷　寛（三重大学）

(9) 井上（愛媛大学工学部）　Ratio of ergodic sums of one-dimensional maps with infinite invariant measures

Ratio of ergodic sums for one-dimensional maps with infinite invariant measures

井上 友喜　　(愛媛大学工学部)

議論を簡単にするため（もう少し一般化できるが），次のような写像を考える．$0 < c < 1$ とし，$T : [0,1] \to [0,1]$ は次の条件を満たすとする：

(i) T を区間 $(0,c)$ と $(c,1)$ に制限したものは C^2class で，それぞれ $(0,c]$ と $[c,1)$ へ C^2 関数として拡張できる;
(ii) $T(0)=0$,　$T(1)=1$;
(iii) $T(0,c)=(0,1)$，$T(c,1)=(0,1)$;
(iv) $T'(x) > 1$ for $x \neq 0, c, 1$.

さらに，A，B をそれぞれ 0 の小さな近傍，1 の小さな近傍とし，

$$T(x) - x = \theta_0 x^{d_0} + o(x^{d_0}) \quad \text{in } A,$$

$$x - T(x) = \theta_1 (1-x)^{d_1} + o((1-x)^{d_1}) \quad \text{in } B$$

を満たすとする．ただし，$\theta_0 > 0, \theta_1 > 0, d_0 \geq 1, d_1 \geq 1$ は定数である．写像 T は, ルベーグ測度と絶対連続な σ-有限エルゴード的不変測度 μ をもち，$\mu([0,1] \setminus (A \cup B)) < \infty$ であり，$d_0 \geq 2$ と $\mu(A) = \infty$ は同値，ま

た，$d_1 \geq 2$ と $\mu(B)=\infty$ は同値である．この写像 T に対して，以前次の極限を考えた．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} 1_A(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n} 1_B(T^k(x))} \tag{1}$$

ここで，1_A は A の定義関数である．

d_0 と d_1 が共に 2 以上の場合は，既存のエルゴード定理から極限 (1) を得ることはできない．このような場合に，極限 (1) が存在するか，存在する場合には極限値がどのようになるかを研究し，この極限は，$2 \leq d_0 < d_1$ のときは a.e. で 0，$d_0 = d_1 = 2$ のときは a.e. で正の定数 ([1])，$2 < d_0 = d_1$ のときには a.e. で存在しないことがわかっている ([2])．

そこで，今回は，$2 < d_0 = d_1 (= d$ とおく$)$ のときに，m を正定数として

$$f_A(x) = x^m \cdot 1_A(x), \qquad f_B(x) = (1-x)^m \cdot 1_B(x)$$

とおくと，m の値によっては極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f_A(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n} f_B(T^k(x))} \tag{2}$$

が a.e.x に対して存在することがあるかどうかを調べた．

$m > d-2$ のときは，$f_A, f_B \in L^1(\mu)$ であることを示すことができるので，既存のエルゴード定理により極限 (2) が存在する．

$m \leq d-2$ のときは，$f_A, f_B \in L^1(\mu)$ ではないので，結果が既存のエルゴード定理からはわからないが，$m = d-2$ のときには極限 (2) が存在することがわかった．

REFERENCES

[1] T.Inoue. Ratio ergodic theorems for maps with indifferent fixed points. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **17** (1997), 625-642.

[2] T.Inoue. Sojourn times in small neighborhoods of indifferent fixed points of one-dimensional dynamical systems, *to appear in Ergod. Th. & Dynam. Sys.*

11.

「確率解析とその周辺」

日時: 平成11年10月14日 (木曜日) − 10月16日 (土曜日)
場所: 大阪大学基礎工学部シグマホール
世話人: 会田 茂樹 (大阪大学), 重川 一郎 (京都大学), 上木 直昌 (京都大学)

確率解析を狭い意味でいうと, 伊藤解析, マリアバン解析, ホワイトノイズ解析, ディリクレ形式の理論を用いた解析学ということになるかもしれない. 本研究会でも大半の講演が上記の内容にかかわっていたが, ここではさらに広い意味でとらえた研究交流の場として研究集会を開催した. 取り上げられた話題としては, 対数ソボレフ不等式の応用, ループ空間上の解析, 格子上およびその連続版の空間上のギッブス測度の解析, 情報幾何学, 確率過程の収束とリーマン多様体の崩壊, 飛躍型マルコフ過程の研究, ディリクレ形式の理論とその応用, マリアバン解析のある評価の簡易化, 磁場付きパウリ作用素のスペクトルの研究, $\bar{\partial}_b$ 作用素の準楕円性など多彩であった. 参加者は約40名であった. 以下にプログラムと講演者自身による要旨を付する. なおこの研究集会は一部, 科学研究費基盤 (B) 「無限次元空間上の確率解析の多角的研究」 (研究代表者 : 重川一郎, 課題番号番号 : 11440045) の援助を受けている.

プ ロ グ ラ ム

10月14日(木)

10:00～11:00　会田 茂樹 (阪大基礎工)
熱核の対数微分とループ空間上の対数ソボレフ不等式

11:10～12:10　重川 一郎 (京大理)
対数 Sobolev 不等式と Littlewood-Paley の定理

13:10～14:10　貞末 岳 (京大理)
Equivalence-singulality dichotomy for the Gibbs measure of unbounced lattice spin systems

14:20～15:20　杉浦 誠 (琉球大理)
$C(\mathbf{R};\mathbf{R})$ 上の Gibbs 測度の性質とその応用

15:50～16:50　吉澤 真太郎 (総合研究大学院大)
Dual differential geometry associated with the Kullback-Leibler information on the Gaussian distributions and its 2-parameter deformations

17:00～18:00　小倉 幸雄 (佐賀大理工)
多様体上の確率過程の法則の弱収束について

10月15日(金)

10:00～11:00　桑江 一洋 (横浜市大理)
On strong maximum principle for Dirichlet forms

11:10～12:10　竹田 雅好 (東北大理)
The large deviation principle for additive functionals of Brownian motion

13:10～14:10　Walter Hoh (Bielefeld Univ.)
Generators of jump-type Markov processes of variable order

14:20～15:20　小松孝・竹内敦司 (大阪市大理)
On a new method of estimating Malliavin covariances

15:50～16:50　福島 正俊 (関西大工)
On Ito's formulae in the classical Dirichlet spaces

17:00～　Short Communication

- 石川 保志 (愛媛大理)
Density estimate in small time for jump processes with singular Lévy measure
- 桑江 一洋 (横浜市大理)
Convergence of spectral structures (joint work with T. Shioya)

10月16日(土)

10:00~11:00　日野 正訓 (京大情報)
On short time asymptotic behavior of some symmetric diffusions on general state spaces

11:10~12:10　小栗栖 修 (金沢大理)
Anomalous Pauli electron states for magnetic fields with tails

13:10~14:10　上木 直昌 (京大人環)
Hypoellipticity of the $\overline{\partial_b}$-Laplacian with infinite degeneracy

熱核の対数微分とループ空間上の対数ソボレフ不等式

会田 茂樹　(大阪大学基礎工学部数理教室)

1. Introduction

M を完備連結なリーマン多様体とする．その上の条件付きブラウン運動の測度 $\nu_{x,y}$ が与えられた pinned path space

$$P_{x,y}(M)=C([0,1]\to M\mid\gamma(0)=x,\gamma(1)=y)$$

を考える．この講演では $P_{x,y}(M)$ 上で対数ソボレフ不等式 (=LSI) が成立するかどうかを論じたい．LSI は次の形の不等式である．$F\in\mathcal{F}C_b^\infty$(smooth cylindrical function の空間) に対して

$$\int_\Omega F^2\log\left(F^2/\|F\|^2_{L^2(P)}\right)dP\le\int_\Omega C(\gamma)|DF(\gamma)|^2dP. \tag{1.1}$$

(1.1) で Ω は $P_{x,y}(M)$ を P は pinned measure などを表す．D は Wiener 空間の H-微分の一般化の H 微分である．上の空間で $\gamma(1)=y$ という条件を落とした空間 $P_x(M)$ は単に path space と呼ばれる (測度はブラウン運動の測度 μ_x)．Path space 上で対数ソボレフ不等式は $C(\gamma)$ を定数として，次の 3 つの方法で証明されている．

(1) (Hsu) LSI が空間の積をとる操作に関して安定であるという証明をブラウン運動がマルコフ過程であることを用いて拡張した方法
(2) (Aida-Elworthy) Elworthy と Yor による gradient Brownian system という多様体上のブラウン運動を与える SDE の filtration の性質 (redundant noise に関する性質) と $\mathbb{R}^n$ 上の通常のブラウン運動に関する LSI を用いる証明
(3) (Capitaine-Hsu-Ledoux, Fang) M 上のブラウン運動の filtration に関するマルチンゲールの表現定理 (Clark-Ocone-Haussman formula, $P_x(M)$ 上の H-微分を用いて表示する) を用いた方法

これらの方法を拡張して pinned のケースを証明しようという試みはこれまでにもいくつかあった．筆者自身は (2) の方法を用いて (1.1) の右辺に $\int_\Omega V(\gamma)^2F(\gamma)^2dP$ を付け加えたもので左辺が押さえられることを示した (Gross がこの形のポテンシャル付 LSI を loop group のときはじめて証明した)．また Gong-Ma は (3) のアプローチを用いてもっと explicit なポテンシャルを用いて評価した．しかし，ポテンシャルがついたままでは，スペクトルギャップの情報が得られず，あまり良い評価とはいえない．

ここではやはり (3) のアプローチをとりポテンシャルなしで (しかし一般に $C(\gamma)$ が γ の非有界関数となってしまうが) LSI を証明する．§ 2 で，双曲型空間のケースを例にあげるがそのとき $C(\gamma)$ を定数にして，(1.1) が成立するかどうかは現在の所，まだわからない．以下，M 上の熱核を $p(t,y,z)$, リーマン距離を $d(y,z)$ とかく．

定理 1. *M の Ricci 曲率 Ric は有界とする．$t>0,y\in M$ に依存する T_zM 上の非負値対称作用素 $C_i(t,y,z)$ $(i=1,2)$, および対称作用素 $C_3(t,y,z)$ が存在して任意の $t>0$ に対して，次が成立すると仮定する．*

$$\nabla_z^2\log p(t,y,z)=-\frac{1+\varepsilon}{2t}I_{T_zM}-\frac{1}{t}\left(C_1(t,y,z)+C_2(t,y,z)d(y,z)^\beta\right)+C_3(t,y,z)\quad(\beta,\varepsilon>0) \tag{1.2}$$

$$\sup_{t,y,z}\|C_i(t,y,z)\|_{op}\le D_i<\infty\quad(i=1,2,3)$$

すると $\Omega=P_{x,y}(M)$ のとき (1.1) が

$$C(\gamma)=2\left\{1+\frac{2e^{D_3}}{\varepsilon}\left(\frac{1+\varepsilon}{2}+D_1+D_2\sup_{0\le t\le1}d(y,\gamma_t)^\beta+D_3\right)\right\}^2$$

で成立する．$\|\ \|_{op}$ は作用素ノルムを表す．

注意． 1. $\nabla_z^2 \log p(t,y,z)$ は T_zM 上の対称な作用素であることに注意．また I_{T_zM} は *identity operator* である．

2. M がユークリッド空間のときは $\varepsilon = 1, D_i = 0$ $(i = 1,2,3)$ で $C(\gamma) = 18$ となる．(実際はこのときは (1.1) のベストな定数として $C(\gamma) = 2$ が知られている.) 従って距離がユークリッド距離に近ければ $C(\gamma)$ を有界な定数として (1.1) を証明できるであろう．そのための *Riemann* 計量に関する十分条件を現在計算中である．

3. *Malliavin-Stroock* は z が y の *cut-locus* の中にあり，ある仮定をみたすと

$$\lim_{t\to 0} |t^2 \nabla_z^2 \log p(t,y,z)| > 0$$

となり，$1/t$ のオーダーでは押さえられないことを示している．

4. この定理の仮定の下で，*Clark-Ocone formula* を証明できる．これを用いれば，$C(\gamma)$ を定数におきかえた $P_{x,y}(M)$ 上の *Dirichlet* 形式 $\int_{P_{x,y}(M)} |DF(\gamma)|^2 d\nu_{x,y}$ の既約性が証明できる．これは筆者が以前証明した結果の特別なケースの別証明といえる．

2. 負定曲率リーマン多様体上の結果

定理 1 の仮定は双曲型空間のときはチェックできる．$M = \mathbb{H}^n$ (以下断面曲率 $-a$ $(a > 0)$ とする，$a = 0$ でも同じ証明が通用する) であるのときの pinned path space $P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$ を考えよう．

$$f(t,y,z) := p(t,y,z) \exp\left\{\frac{d(y,z)^2}{2t}\right\}$$

と定める．$M = \mathbb{H}^n$ のときは，

$$\nabla_z^2 \frac{d(y,z)^2}{2} = I - (1 - \sqrt{a}r \coth \sqrt{a}r) P_{y,z}^{\perp} \tag{2.1}$$

$$\sup_{0<t<T, y,z\in\mathbb{H}^n} |\nabla_z^2 \log f(t,y,z)| < C_T' A \tag{2.2}$$

という具体形と評価から定理 1 の仮定 (1.2) を $\beta = \varepsilon = 1$ として示すことができる．(2.1) はよく知られた結果である．$r = d(y,z)$ で $P_{y,z}^{\perp}$ は $\exp_z(v_{y,z}) = y$ で定まる方向 $v_{y,z} \in T_zM$ の直交補空間への正射影である．(2.2) は $\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^3$ で具体的に

$$p(t,y,z) = \begin{cases} C_a \frac{\sqrt{2}e^{-at/8}}{\sqrt{2\pi a t}^3} \int_{\sqrt{a}r}^{\infty} \frac{s e^{-s^2/2at}}{\sqrt{\cosh s - \cosh \sqrt{a}r}} ds & (2\text{ 次元}) \\ C_a (2\pi a t)^{-3/2} \frac{\sqrt{a}r}{\sinh(\sqrt{a}r)} e^{-\frac{ta}{2} - \frac{r^2}{2t}} & (3\text{ 次元}) \end{cases}$$

とかけることと $\mathbb{H}^{n+2}$ の熱核は $\mathbb{H}^n$ の熱核の微分で書けることから帰納的に示すことができる．結局，$\Omega = P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$ のとき (1.1) が

$$C(\gamma) = 2\left\{1 + 2e^{aC_3}\left(1 + C_1 a + C_2 \sqrt{a} \sup_{0\le t\le 1} d(y,\gamma_t)\right)\right\}^2 \tag{2.3}$$

の係数を用いて成立することがわかる．C_i は次元にのみ依存する定数である．

さてつぎにコンパクトな負定曲率リーマン多様体 M を考える．その上の基点付ループ空間 $C([0,1] \to M \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x)$ の各ホモトピー類 (すなわち連続関数の位相で見ての連結成分)$L_x^\alpha(M)$(と書こう) およびいわゆるループ空間 $C(S^1 \to M)$ の各ホモトピー類 $L^\alpha(M)$ でも (1.1) のような対数ソボレフ不等式が証明できる．$C(\gamma)$ はおおざっぱにいって，M の普遍被覆空間 $\mathbb{H}^n$ にブラウン運動のパス γ をリフトしたものを $\tilde{\gamma}$ として (2.3) の γ を $\tilde{\gamma}$ に置き換えたものである．$L_x^\alpha(M)$ 上での LSI は $P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$ 上の LSI と M が $\mathbb{H}^n$ の isometry のなす群による商空間であることから従う．$L_x^\alpha(M)$ の LSI を用いて，$L^\alpha(M)$ の LSI が示されるのは積空間のケースと同様である (また，これを示すだけなら M は任意のコンパクトリーマン多様体でよい)．それを実行するには pinned measure に関する平均 $E_x[F(\gamma_{t_1}, \ldots, \gamma_{t_n}) \mid \gamma_1 = x]$ を x に関して微分したときに，F の微分などで具体的に表示する式が必要である．$\gamma_1 = x$ という条件をつけないものの微分に関する表示式は，Path space の時の Hsu のアプローチ (1) で基本的に重要であった．これらの話は別の機会に述べたい．

対数 Sobolev 不等式と Littlewood-Paley の定理

重川一郎　(京都大学理学研究科)

空間 $(M, \mathcal{B}(M), \mu)$ 測度空間とする．すなわち M は位相空間で $\mathcal{B}(M)$ は Borel σ-algebra, m は Borel 確率測度とする．M 上に対称拡散過程 (X_t) が与えられているとする．対応する Dirichlet 形式を $\mathcal{E}$ とする．生成作用素を L, 半群を $\{T_t\}$ と表わすことにする．特に $\mathcal{E}$ は

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_M (\nabla u, \nabla v) d\mu(x)$$

で与えられているとする．∇ は具体的には gradient operator を考えることが多いが，ここでは適当な Hilbert 空間 K が存在して閉作用素 $\nabla\colon L^2(\mu) \to L^2(\mu; K)$ として与えられていればよい．より一般的には $L^2(\mu; K)$ はベクトル束の L^2 section として与えられてもよい．∇ にたいし局所性 $\nabla(f \cdot g) = g\nabla f + f\nabla g$ を仮定する．さらに $\mathcal{E}(1,1) = 0$ および次の対数 Sobolev 不等式を仮定する：ある $\alpha > 0, \beta \geq 0$ に対し

$$\int_M u^2 \log u/\|u\|_2 \mu(dx) \leq \alpha \mathcal{E}(u,u) + \beta(u,u).$$

ベクトル値の関数 ∇u を扱うためにもう一つの半群 $\{\hat{T}_t\}$ が $L^2(\mu; K)$ 上に与えられていて半群の比較定理 $|\hat{T}_t \theta|_K \leq T_t |\theta|_K$ が満たされているとする．さらに $\{\hat{T}_t\}$ の生成作用素を $\hat{L}$ と記し，交換則 $\nabla L = (\hat{L} - R)\nabla$ を仮定する．R は Riemann 多様体の場合は Ricci 曲率であるが，ここでは抽象的な 0 階の作用素として与えられる．R の負の部分に対し指数可積分性を仮定するが，それは次のように定式化する．実数値関数 V が存在し $(R(x)k, k)_K \geq V(x)|k|_K^2$ および $e^{V_-} \in L^{\infty-} = \bigcap_{p \geq 1} L^p$ を満たす．ここで V_- は V の負の部分を表わす: $V_- = (-V) \vee 0$.

以上の仮定の下で次の定理を得る．

定理 1 任意の $1 < p < q < \infty$ に対し正数 C_1, C_2 がとれて

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_p &\leq C_1 \|\sqrt{1-L}\,u\|_q, & (1) \\ \|\sqrt{1-L}\,u\|_p &\leq C_2 (\|\nabla u\|_q + \|u\|_q) & (2) \end{aligned}$$

が成立する．

この定理は指数が $p < q$ と弱いノルムを強いノルムで評価した形になっている．指数をそろえた形で証明できるかもしれないが，現時点ではこの点は克服できていない．その一つの理由は最大エルゴード不等式が次の弱い形でしか示せていないことによる．V を上のようにとり，$\{T_t^V\}$ を $L - V$ で生成される半群とする．この時 $\{T_t^V\}$ は L^p での強連続半群となるが（[2] 参照）t について上限を取る時次の評価を得る．

命題 2 任意の $1 < p < q < \infty$ に対し $\lambda > 0$ を十分大きくとれば，適当な正数 $c > 0$ が存在して

$$\left\| \sup_{t \geq 0} |e^{-\lambda t} T_t^V u| \right\|_p \leq c \|u\|_q, \qquad \forall u \in L^q \tag{3}$$

とできる.

$|\hat{T}_t^R \theta| \leq T_t^V |\theta|$ だから上のことから $\sup_{t \geq 0} |\hat{T}_t \theta|$ が評価できることになる.

定理 1 の証明は Littlewood-Paley の G-関数を用い Meyer-Bakry の確率論的な証明を踏襲する.

文献

[1] D. Bakry, Etude des transfomations de Riesz dans les variétés riemaniennes à courbure de Ricci minorée, *Séminaire de Prob.* XXI, Lecture Notes in Math., vol. 1247, 137–172, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

[2] I. Shigekawa, L^p contraction semigroups for vector valued functions, *J. Funct. Anal.*, **147** (1997), 69–108.

[3] I. Shigekawa, Semigroup domination on a Riemannian manifold with boundary, preprint.

[4] I. Shigekawa and N. Yoshida, Littlewood-Paley-Stein inequality for a symmetric diffusion, *J. Math. Soc. Japan*, **44** (1992), 251–280.

[5] N. Yoshida, Sobolev spaces on a Riemannian manifold and their equivalence, *J. Math. Kyoto Univ.*, **32** (1992), 621–654.

E-mail address: `ichiro@kusm.kyoto-u.ac.jp`
URL: `http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/`

Equivalence-Singularity dichotomy for the Gibbs measure of unbounded lattice spin systems

Gaku Sadasue (Kyoto University)

The purpose of this talk is to show that the dichotomy between equivalence and mutual singularity under the translation also holds for the Gibbs measure of unbounded lattice spin systems.

We denote by $\mathcal{C}$ the class of all finite subset of $\mathbb{Z}^d$. Let $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{C}}$ be the potential of our lattice spin system which is defined by

$$\Phi_\Lambda(x) = \begin{cases} V(x_i) & \text{if } \Lambda = \{i\}, \\ W_{i,j}(x_i - x_j) & \text{if } \Lambda = \{i,j\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Here, $V, W_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, and $W_{i,j} = W_{j,i}$ are even functions.

Let μ be a Gibbs measure for Φ, and $g_\Lambda(x|\mu)$ be the probability density of $(\pi_\Lambda)_*(\mu)$ with respect to the Lebesgues measure on $\mathbb{R}^\Lambda$. It is well-known that, if Φ is superstable and satisfies some additional condition, there exist $A > 0$ and $\delta > 0$ such that

$$g_\Lambda(x|\mu) \le \exp\left(-\sum_{i \in \Lambda} (Ax_i^2 - \delta) \right) \quad \text{for all} \quad \Lambda \in \mathcal{C}. \tag{1}$$

First, we study the quasi-invariance of μ. On V and $W_{i,j}$, we suppose the following conditions:

(V.1) V is C^2-class and

$$|V''(x)| \le K_1 e^{ax^2} \quad \text{for some } K_1 > 0,\ 0 < a < \frac{1}{2}A.$$

(W.1) W is C^2-class and

$$|W''_{i,j}(x)| \le \frac{1}{2} J(|i-j|).$$

Here J is a non-negative decreasing function on $\mathbb{N}$ which satisfies

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} J(|r|) < A.$$

Under (V.1) and (W.1), we have the following theorem.

Theorem 1. *For $h \in l^2(\mathbb{Z}^d)$, set $\mu^h := \mu(\cdot - h)$. Then, μ^h and μ are equivalent.*

Theorem 1 is shown by using a bound for the relative entropy.

In the case of the finite range interaction, we have an explicite expression for the Radon-Nycodym density:

Theorem 2. *We suppose further that*

$$W_{i,j}(x) = 0 \quad \textit{if } |i-j| \geq r \quad \textit{for some} \quad r \in \mathbb{N}.$$

Then, for $h \in l^1(\mathbb{Z}^d)$, we have

$$\frac{d\mu^h}{d\mu}(x) = \lim_{n\to\infty} \exp(U_n(x) - U_n(x-h)),$$

where we set

$$U_n(x) = \sum_{|i|\leq n} V(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{|i|\leq n \\ |j|\leq n}} W_{i,j}(x_i - x_j).$$

In the case of one dimensinal lattice, we can characterize the admissible set as $l^2(\mathbb{Z})$. Besides (V.1),(W.1), we assume

(V.2) $$V''(x) \geq 4A \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}.$$

(W.2) $$6\sum_{n=1}^{\infty} J(n) < A \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} nJ(n) < \infty.$$

Theorem 3. *Let $d = 1$ and suppose (V.1),(V.2) and (W.1),(W.2). Then, the dichotomy between equivalence and singularity holds for the Gibbs measure as follows:*

$$\begin{aligned} &1. \quad h \in l^2(\mathbb{Z}) \qquad \Rightarrow \mu^h \sim \mu. \\ &2. \quad h \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \setminus l^2(\mathbb{Z}) \Rightarrow \mu^h \perp \mu. \end{aligned}$$

We prove Theorem 3 by showing that the Hellinger integral vanishes.

References

[1] J.L. Lebowitz and E. Presutti, Statistical mechanics of systems of unbounded spins, *Commun. Math. Phys.* **50** (1976), 195-218

[2] J.L. Lebowitz and E. Presutti, *Commun. Math. Phys.* **78** (1980), 151

[3] Y.M. Park and H.J. Yoo, A characterization of Gibbs states of lattice Boson systems, *J. Stat. Phys.* **75**(1/2) (1994), 215-239

[4] Y.M. Park and H.J. Yoo, Uniqueness and clustering properties of Gibbs states, *J. Stat. Phys.* **80**(1/2) (1995), 223-271

[5] D. Ruelle, Superstable interaction in classical statistical mechanics, *Commun. Math. Phys.* **18** (1970), 127-159

[6] D. Ruelle, Probability estimates for continuous spin systems, *Commun. Math. Phys.* **50** (1976), 189-194

$C(\mathbf{R};\mathbf{R})$ 上の Gibbs 測度の性質とその応用[1]

杉浦 誠（琉球大学理学部）[2]

1. Definitions

The configuration spaces: The configuration spaces are defined as follows;

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\Lambda &= C(\Lambda;\mathbf{R}) \qquad \Lambda = [a\,,b] \Subset \mathbf{R} \\ \mathcal{C} &= C(\mathbf{R};\mathbf{R}) \end{aligned}$$

Hamiltonian: For $\Lambda = [a\,,b] \Subset \mathbf{R}$ and its boundary condition $\xi \in \mathcal{C}$ we introduce a function $H_{\Lambda,\xi} : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathbf{R}$ by

$$\begin{aligned} H_{\Lambda,\xi}(X) = &\int_a^b U(X(x))dx + \frac{1}{2}\int_a^b dx \int_a^b dy J(x-y)\{X(x)-X(y)\}^2 \\ &+ \int_a^b dx \int_{\Lambda^c} dy J(x-y)\{X(x)-\xi(y)\}^2, \end{aligned}$$

where $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ and $J : \mathbf{R} \to [0,\infty)$ are functions satisfying the assumption **(A)** below.

Assumption **(A)**: The function U is given as $U(s) = V(s) + W(s)$ for some smooth functions V and W satisfying $\inf_s V''(s) > 0$ and $\|W\|_\infty + \|W'\|_\infty < \infty$ respectively. The interaction J is a continuous even function with compact support. (We assume that the support of J is a subset of $(-1,1)$ without loss of generality.)

Gibbs states: The finite volume Gibbs state $\mu_{\Lambda,\xi}$ is a probability measure on $\mathcal{C}_\Lambda$ defined by

$$\mu_{\Lambda,\xi}(dX) = \frac{\exp\{-H_{\Lambda,\xi}(X)\}}{\text{normalization}}\, \mathcal{W}_{\Lambda,\xi}(dX),$$

where $\mathcal{W}_{\Lambda,\xi}$ is the path measure of the Brownian bridge on Λ with boundary condition

$$\mathcal{W}_{\Lambda,\xi}(X(a) = \xi(a), X(b) = \xi(b)) = 1.$$

The log-Sobolev constant: We define the log-Sobolev constant $\gamma_{\Lambda,\xi}(\Gamma)$, $\Gamma \Subset \Lambda$, as the smallest γ for which the following inequality is true for all good functions F on $\mathcal{C}_\Gamma$

$$E_{\Lambda,\xi}\left(F^2 \log \frac{F^2}{E_{\Lambda,\xi}(F^2)}\right) \le \gamma E_{\Lambda,\xi}(|DF|^2_{L^2(\Gamma)}),$$

where DF denotes the Fréchet derivative on $L^2(\Gamma)$.

---

[1]Note for a talk on October 14, 1999 at Osaka University.

[2]E-mail : sugiura@math.u-ryukyu.ac.jp

2. Results

Theorem 1 Under the assumption (**A**), there is $J_M > 0$ depending on V and W such that, if $\|J\|_\infty \le J_M$, we have

$$\sup_{\Lambda,\xi} \gamma_{\Lambda,\xi}(\Gamma) < \infty.$$

Theorem 2 Under the assumption (**A**), there is $J_M > 0$ depending only on $\inf_s V''(s)$ such that, if $\|J\|_\infty \le J_M$, we have

$$|E_{\Lambda,\xi}[X(x); X(y)]| \le Ce^{-|x-y|/C} \min\{x-a, 1\} \min\{b-y, 1\}$$

for all $\Lambda = [a,b]$, $\xi \in \mathcal{C}$ and $a < x < y < b$, where C is a constant depending only on V, W and J.

Corollary Under the assumption (**A**), there is $J_M > 0$ depending only on $\inf_s V''(s)$ such that, if $\|J\|_\infty \le J_M$, we have

$$\begin{aligned}&\left|E_{\Lambda,\xi}[X(x)] - E_{\Lambda,\tilde{\xi}}[X(x)]\right| \\ &\le C\left(|\xi(b) - \tilde{\xi}(b)| + \int_b^{b+r} |\xi(z) - \tilde{\xi}(z)|\, dz\right) e^{-|x-b|/C} \min\{x-a, 1\}\end{aligned}$$

for all $\Lambda = [a,b]$, $\xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{C}$ with $\xi(z) = \tilde{\xi}(z)$ $(z \le a)$ and $a < x < b$ with a constant C depending only on V, W and J, where r is chosen so that the support of J is a subset of $(-r, r)$.

The key lemma for the above theorems is following.

Lemma 1 There is $J_M > 0$ depending only on $\inf_s V''(s)$ such that, if $\|J\|_\infty \le J_M$, we have

$$|E_{\Lambda,\xi}[X(x)]| \le x\left\{\frac{4}{T}\left(|\xi(T)| + \|J\|_\infty \int_T^{T+1} |\xi(y)|\, dx\right) + 8T\|W'\|_\infty\right\}.$$

for $\Lambda = [0,T]$, $0 < x < 1, 3 < T$, and $\xi \in \mathcal{C}$ with $\xi(y) \equiv 0$ $(y \le 0)$.

In order to prove Theorem 1, we also require the following lemma.

Lemma 2 Let $\alpha > 0$ and $L > 0$. We have

$$M(\alpha, L) \equiv \sup E_{\Lambda,\xi}[X(x); X(x)] < \infty,$$

where the supremum is taken over all $\Lambda \Subset \mathbf{R}$, $\xi \in \mathcal{C}$, $x \in \Lambda$ and $U = U(x,s) = V(x,s) + W(x,s)$ satisfying $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(x,s) \ge \alpha$ and $|\frac{\partial V}{\partial s}(x,s)| \le L$.

DUAL DIFFERENTIAL GEOMETRY ASSOCIATED WITH THE KULLBACK-LEIBLER INFORMATION ON THE GAUSSIAN DISTRIBUTIONS AND ITS 2-PARAMETER DEFORMATIONS

吉澤 真太郎
総合研究大学院大学

1. はじめに

統計解析の中に現われるパラメトリック確率分布族の微分幾何（接続理論）は、Čencov、Efron、Dawid、甘利らによって創始された。また、この幾何は、ヘッシアン多様体（志摩１９９５参照）としての構造を持っている。特に、甘利・長岡による正準パラメータと期待値パラメータに関する双対定理と呼ばれるものがあるが、パラメトリゼーションという概念と凸解析を援用し、この定理を多次元ガウス分布上で再考する。この分布上に２パラメータクラス双対微分幾何（２パラメータの接続のクラス）を具体的に構成することによって、２パラメータクラスの相互情報量の中で、Kullback-Leibler 情報量の特徴付けを行う。

2. パラメトリック確率分布の微分幾何

微分幾何構造についてまとめる。

(M,g) をリーマン多様体とする。この時、M 上の任意のベクトル場 X,Y,Z に対して、次式を満たす接続のペア (∇,∇^*) を考える。

$$Xg(Y,X)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla^*_X Z).$$

ネジレ及びリーマン曲率が、これらの接続に対して0になる時、(M,g,∇,∇^*) を、双対平坦、或いは、単に平坦と呼ぶ。この時、$\nabla_X\frac{\partial}{\partial\theta_i}=0$ $\nabla^*_X\frac{\partial}{\partial\eta_j}=0$ それぞれを満たす ∇-アファイン座標 $\theta=(\theta_i)$ 及び ∇^*-アファイン座標 $\eta=(\eta_i)$ が存在し、更に、M 上の任意の点で、$g\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i},\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right)=\delta_{ij}$ となるように座標系を選べる。この時、座標系 θ、η は、計量 g に対して相互に双対であると呼ばれる。

以上の条件下で、甘利・長岡の双対定理を述べれば次のようになる。

$$\theta_i=\frac{\partial\phi}{\partial\eta_i}(\eta),\quad \eta_i=\frac{\partial\psi}{\partial\theta_i}(\theta),$$
$$\psi(\theta)+\phi(\eta)-\theta\cdot\eta=0,$$

を満たすような M 上のポテンシャル関数 $\psi(\theta),\phi(\eta)$ が、存在する。

ここで $\theta\cdot\eta=\sum_{i=1}^n\theta_i\eta_i$. このポテンシャル関数を用いて $p_1\in M$ から $p_2\in M$ への ダイバージェンス D は、次のように定義される。

$$D(p_1,p_2)=\psi(\theta_2)+\phi(\eta_1)-\theta_2\cdot\eta_1,$$

ここで、η_1 と θ_2 は、点 p_1、p_2 のそれぞれのη- θ-座標系である。

3. パラメトリゼーション

多次元ガウス密度関数のパラメトリゼーションを与える。

$$(1)\quad p(x;\mu,\Sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det\Sigma)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]$$
$$=\exp\left[-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x+x^T\Sigma^{-1}\mu-\frac{1}{2}\log(\det\Sigma)-\frac{1}{2}\mu^T\Sigma^{-1}\mu-\frac{n}{2}\log(2\pi)\right],$$

ここで、 $x,\mu\in R^n$ であり、 Σ は対称正定置行列である。

次のパラメトリゼーションのクラスを考える。

$$(2)\quad \mathfrak{I}_{\tilde\Theta_{\beta,\gamma}}\ :\ \mathfrak{N}\ni N(\mu,\Sigma)\mapsto\tilde\Theta_{\beta,\gamma}\equiv(\theta_{\beta,\gamma},\Theta_{\beta,\gamma})\equiv(\Sigma^{-\frac{\beta+1}{2}}\mu,(2\Sigma)^{-\gamma})\in\mathfrak{D}_{\beta,\gamma}\equiv R^n\times\mathfrak{S}_n^+$$

これによって、主ポテンシャル関数が次のように表示できる。

(3)
$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_{\beta,\gamma} &\equiv \psi(\mathfrak{I}^{-1}_{\tilde{\Theta}_{\beta,\gamma}}(\tilde{\Theta}_{\beta,\gamma}))\\ &= 2^{-(\beta+1)}Tr(\Theta^{-\frac{\beta}{\gamma}}_{\beta,\gamma}\theta_{\beta,\gamma}\theta^T_{\beta,\gamma}) - \frac{1}{2\gamma}\log(\det\Theta_{\beta,\gamma}) + \frac{n}{2}\log(\pi).\end{aligned}$$

この関数は、$0<\beta$, $0<\gamma$ 及び $\frac{\beta}{\gamma}<1$ の時、このパラメトリゼーションに関して凸関数となっている。双対空間を $\mathfrak{D}^*_{\beta,\gamma} \equiv \{(\eta_{\beta,\gamma}, H_{\beta,\gamma}) \in R^n \times \mathfrak{S}^-_n \mid \partial_{\theta_{\beta,\gamma}}\tilde{\Psi}_{\beta,\gamma} = \eta_{\beta,\gamma}, \partial^s_{\tilde{\Theta}_{\beta,\gamma}}\tilde{\Psi}_{\beta,\gamma} = H_{\beta,\gamma}\}$ と定義すれば、双対ポテンシャル関数が、次のように求まる。

(4)
$$\phi_{\beta,\gamma} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)\mu^T\Sigma^{-1}\mu - \frac{1}{2}\log(\det\Sigma) - \frac{n}{2}\log(2\pi e^{\gamma^{-1}}).$$

4. ダイバージェンス

2パラメータクラスのダイバージェンスは、次のように構成できる。

Theorem 4.1. 2つのガウス分布 $N(\mu_1,\Sigma_1)$ と $N(\mu_2,\Sigma_2)$ の間のダイバージェンス $Div_{\beta,\gamma}$ は、次のように構成できる。

$$\begin{aligned}&Div_{\beta,\gamma}(N(\mu_2,\Sigma_2),N(\mu_1,\Sigma_1))\\ &\quad= \frac{1}{2}Tr(\Sigma_2^{-1}\mu_2\mu_2^T) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\det\Sigma_2}{\det\Sigma_1}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)Tr(\Sigma_1^{-1}\mu_1\mu_1^T) - \frac{n}{2\gamma}\\ &\quad - Tr(\Sigma_1^{\frac{\beta-1}{2}}\Sigma_2^{-\frac{\beta+1}{2}}\mu_2\mu_1^T) + \frac{1}{2\gamma}Tr(\Sigma_1^{\gamma}\Sigma_2^{-\gamma})\\ &\quad - 2^{-(\beta+1)}\mu_1^T\Sigma_1^{-\frac{\beta+1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\Gamma \lambda^{-\frac{\beta}{\gamma}}[\lambda I-(2\Sigma_1)^{-\gamma}]^{-1}(2\Sigma_2)^{-\gamma}[\lambda I-(2\Sigma_1)^{-\gamma}]^{-1}d\lambda\right)\Sigma_1^{-\frac{\beta+1}{2}}\mu_1,\end{aligned}$$

これは次の不等式を満たす,

$$Div_{\beta,\gamma}(N(\mu_2,\Sigma_2),N(\mu_1,\Sigma_1)) \geq 0,$$

ここで、等号成立の必要十分条件は、$(\mu_1,\Sigma_1)=(\mu_2,\Sigma_2)$ である。

Corollary 4.2. $(\beta,\gamma)=(0,1/2)$ の時、

$$\begin{aligned}Div_{0,\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\mu_1^T\Sigma_1^{-1}\mu_1 + \frac{1}{2}\log(\det\Sigma_1)\\ &+ \frac{1}{2}\mu_2^T\Sigma_2^{-1}\mu_2 - \frac{1}{2}\log(\det\Sigma_2)\\ &- \mu_1^T\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\Sigma_2^{-\frac{1}{2}}\mu_2 + Tr[(2\Sigma_1)^{-\frac{1}{2}}(2\Sigma_2)^{\frac{1}{2}}] - n.\end{aligned}$$

$(\beta,\gamma)=(1,1)$ の時、ダイバージェンスは、*Kullback-Leibler* 情報量となる。

$$\begin{aligned}Div_{1,1}(N(\mu_2,\Sigma_2),N(\mu_1,\Sigma_1)) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\det\Sigma_2}{\det\Sigma_1}\right) + \frac{1}{2}Tr[\Sigma_1\Sigma_2^{-1} + \Sigma_2^{-1}(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_2)^T] - \frac{n}{2}\\ &= \int_{R^n} p(x;\Xi_1)\log\frac{p(x;\Xi_1)}{p(x;\Xi_2)}dx.\end{aligned}$$

Corollary 4.3. (β,γ) パラメータは、典型的な非自己双対幾何と自己双対幾何の間の変形を与えている。

References

[1] Fujiwara, A. and Amari, S. *Gradient systems in view of information geometry,* Physica D80, No.3, pp.317-327, (1995).

[2] Ohara, A.Suda, N and Amari, S *Dualistic Differential Geometry of Positive Definite Matrices and Its Applications to Related Problems,* Linear Algebra and Its Applications, 247, pp.31-53 (1996).

[3] Shima, H. *Hessian manifolds of constant Hessian sectional curvature,* J. Math. Soc. Japan. Vol. 47, No.4, pp.735-753, (1995).

[4] Skovgaard, L. T. *A Riemannian geometry of the multivariate normal model,* Scand. J. Statist 11, pp.211-223, (1984).

[5] Yoshizawa, S and Tanabe, K. *Dual Differential Geometry Associated with the Kullback-Leibler Information on the Gaussian Distributions and its 2-Parameter Deformations.* Sut Journal of Mathematics, Vol.35, No.1, pp.113-137, (1999).

多様体上の確率過程の法則の弱収束について

小倉幸雄 (佐賀大学理工学部)

1. 序

文献 [3] と [4] で扱われた熱核と体積が一様有界であるコンパクトリーマン多様体のクラスを考え，この中の多様体上のブラウン運動から得られる確率過程の法則の弱収束について調べる．その際，二つの主な困難点がある．一つは，有限次元分布の収束は [3] にある加須栄−久村のスペクトル距離の収束に依拠するが，タイト性は [1] で論じられている Gromov-Hausdorff 距離に関するプレコンパクト性に依存していて両者は必ずしも一致しないことである．この点については，最近加須栄 [2] が部分列を取れば極限は異なることがあるが，擬距離を用いると近似写像は共通に取れることを示したので，これを用いることにする．二つ目は，Gromov-Hausdorff 距離による近似では ε の誤差を許しているので，ブラウン運動そのもののタイト性は言えないことである．これを解決するためには，ε に依存したメッシュで切った離散時間の確率過程を考える．

2. 結果

$\mathcal{M}$ を，体積要素 μ_g を持つ連結コンパクト (M,g) とその上の滑らかで真に正な関数 w からなる三つ組 $M=(M,g,w)$ の集合とする．$\nu,\alpha,\beta>0$ に対し，$\mathcal{M}(\nu,\alpha,\beta)$ を

$$p^M(t,a,b) \le \frac{\alpha}{(t\wedge 1)^{\nu/2}}, \quad t>0,\ a,b\in M,$$
$$\mu_g^w(M) \le \beta$$

をみたす $M=(M,g,w)\in\mathcal{M}$ の全体とする．ただし $p^M(t,a,b)$ は $M=(M,g,w)\in\mathcal{M}$ に付随する熱核である．$M_n=(M_n,g_n,w_n)$ に対応するブラウン運動を $(Y^n(t),P_a)$ $(t>0,\ a\in M_n)$ とする．

つぎの定理の仮定は [2] の議論から自然に考えられ，また系は [4] 等にある豊富な例を含んでいる．

定理 (i) 多様体の列 $\{M_n=(M_n,g_n,w_n)\}\subset\mathcal{M}(\nu,\alpha,\beta)$ と連結コンパクト，ハウスドルフ空間 X とその上の擬距離 δ，それに可測写像 $F_n: M_n\to X$ と正数 $\varepsilon_n\downarrow 0$ があって

$$\sup_{a,b\in M_n} |d_{g_n}(a,b)-\delta(\pi\circ F_n(a),\pi\circ F_n(b))| < \varepsilon_n^2 \tag{1}$$

が成り立つとする．$\sim_\delta$ を擬距離 δ の決める同値関係，$X_\delta = X/\sim_\delta$ とし，π を X から距離空間 (X_δ,δ) への自然な射影とする．さらに，$[\ ]$ をガウス記号とし $\varphi_n(t)=[t/\varepsilon_n]\varepsilon_n$ と

ON STRONG MAXIMUM PRINCIPLE FOR DIRICHLET FORMS

桑江一洋　　　横浜市立大理

1. Framework

X を局所コンパクト可分距離空間, m を X 上で full support を持つ Radon 測度とする. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(X;m)$ 上の strongly local な正則 Dirichlet 形式で $\mathcal{C}$ を special standard 核にもつものとする. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する m-対称拡散過程を $\mathbf{M}:=(\Omega,X_t,\{P_x\}_{x\in X})$ とおく. G を空でない開集合として, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の G 上の part space は

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G := \{u\in\mathcal{F}\mid \tilde{u}=0 \text{ q.e. on } X\setminus G\} \\ \mathcal{E}_G(u,v) := \mathcal{E}(u,v) \text{ for } u,v\in\mathcal{F}_G. \end{cases}$$

で与えられる. このとき $(\mathcal{E}_G,\mathcal{F}_G)$ は $L^2(G;m)$ 上の strongly local な正則 Dirichlet 形式で $\mathcal{C}_G:=\{u\in\mathcal{C}\mid \mathrm{supp}[u]\subset G\}$ を special standard 核に持つ (Theorem 4.4.3 in [5]).

また符号値有限測度 $\mu_{\langle u,v\rangle}$ が存在して次を満たす.

$$\begin{aligned} \int_X \tilde{f}(x)\mu_{\langle u,v\rangle}(dx) &= \mathcal{E}(uf,v)+\mathcal{E}(u,vf)-\mathcal{E}(uv,f),\ u,v,f\in\mathcal{F}_b \\ \mathcal{E}(u,v) &= \frac{1}{2}\mu_{\langle u,v\rangle}(X),\ \text{for } u,v\in\mathcal{F}. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_G$) の局所化空間 $\mathcal{F}_{loc}$ (resp. $(\mathcal{F}_G)_{loc}$) を次のように定める.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{loc} &:= \{u:X\to\mathbb{R}\mid \text{for any relatively compact open set } O \text{ there} \\ &\qquad \text{exists } u_O\in\mathcal{F} \text{ such that } u=u_O\ m\text{-a.e. on } O\}. \\ (\mathcal{F}_G)_{loc} &:= \{u:G\to\mathbb{R}\mid \text{for any relatively compact open set } O \text{ with} \\ &\qquad \overline{O}\subset G, \text{ there exists } u_O\in\mathcal{F}_G \text{ such that } u=u_O\ m\text{-a.e. on } O\}. \end{aligned}$$

強局所性の性質より $u,v\in\mathcal{F}_{loc}$ に対して $\mu_{\langle u\rangle}$, $\mu_{\langle u,v\rangle}$ を符号値 Radon 測度として拡張することができる. そこで $u\in\mathcal{F}_{loc}$, $v\in\mathcal{F}_G$ with compact support $\mathrm{supp}[v]\subset G$ に対して

$$\mathcal{E}(u,v) := \frac{1}{2}\int_G \mu_{\langle u,v\rangle}(dx)$$

と form の記号 $\mathcal{E}$ を流用することとする.

2. Subharmonic function

strongly local な正則 Dirichlet 空間 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の枠組で劣調和関数を次で定める.

定義 2.1 (Subharmonic functions). Take an open subset U of X with $G\subset U$.

(i) A function $u:X\to\mathbb{R}$ is said to be *subharmonic in* X if $u\in\mathcal{F}_{loc}$ and $\mathcal{E}(u,\varphi)\le 0$ for any $\varphi\in\mathcal{C}$ with $\varphi\ge 0$.

(ii) A function $u:G\to\mathbb{R}$ is said to be *subharmonic in* G if $u\in(\mathcal{F}_G)_{loc}$ and $\mathcal{E}(u,\varphi)\le 0$ for any $\varphi\in\mathcal{C}_G$ with $\varphi\ge 0$.

(iii) A function $u : U \to \mathbb{R}$ is said to be *subharmonic in* G if $u \in (\mathcal{F}_U)_{loc}$ and $\mathcal{E}(u,\varphi) \leq 0$ for any $\varphi \in \mathcal{C}_G$ with $\varphi \geq 0$.

Denote by $sub\mathcal{H}(G,U)$ the family of subharmonic functions in G on U and set $sub\mathcal{H}(G) := sub\mathcal{H}(G,G)$

3. Strong maximum principle

定理 3.1 (Strong maximum principle). U を G を含む開集合とし, G が連結で相対コンパクトとする. $(\mathcal{E}_G, \mathcal{F}_G)$ に対応する G 上の m-対称拡散過程 $\mathbf{M}^G$ が strong Feller process, すなわち $\mathbf{M}^G$ の推移半群が G 上の有界 Borel 可測関数を G 上の有界連続関数に写すならば, $u \in sub\mathcal{H}(G,U)$ で $\overline{G}$ に連続拡張をもつものに対し u が G 内で最大値をとれば, それは G 上で定数.

定理の証明には細位相の連結性が鍵となる.

命題 3.1 (fine connectivity). 前定理と同じ条件下で $\mathbf{M}^G$ の細位相は連結である. すなわち Y を $\mathbf{M}^G$ の細位相に関し, 開かつ閉な G の Borel 部分集合ならば $Y = \emptyset$ or $Y = G$ が成立.

例 3.1 ([6]). X を曲率 $\geq \kappa$ の n-次元 Alexandrov 空間とし $(n \in \mathbb{N})$, G を X の空でない相対コンパクト連結開集合とする. このとき G は弧状連結. X から δ-特異集合 S_δ を抜くと $X \setminus S_\delta$ には n-次元 Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^n$ で測って 0 の集合をを除いて Riemann 計量がはいり ([7]), その Riemann 構造から定まる自然なエネルギー形式 $(\mathcal{E}, W^1(X))$ は台がコンパクトな Lipschitz 関数全体 $C_0^{\mathrm{Lip}}(X)$ を核にもつ正則 Dirichlet 形式であり, 埋め込み $\mathcal{F}_G \subset L^2(G,\mathcal{H}^n)$ はコンパクトになる. またそれに対応する $L^2(G,\mathcal{H}^n)$-半群は strong Feller property を持つ. $(\mathcal{E}_G, \mathcal{F}_G)$ に対応する $L^2(G,\mathcal{H}^n)$-生成作用素は離散スペクトルを持ちその第 1 固有関数 u の絶対値 $|u|$ は再び第 1 固有関数で非負連続優調和関数となる. 強最大値原理を局所的に適用することにより, $|u|$ は G において正であり, これから第 1 固有空間の次元, すなわち最小固有値の重複度は 1 であることが得られる (smooth Riemannian manifold のときは [8] を参照).

References

[1] M. Biroli and U. Mosco, A Saint-Venant type principle for Dirichlet forms on discontinuous media. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **169** (1995), 125–181.

[2] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor, "Markov processes and potential theory,"Pure and Applied Mathematics, Vol. **29** Academic Press, New York-London 1968.

[3] Yu. Burago, M. Gromov and G. Perel'man, A. D. Aleksandrov spaces with curvatures bounded below, (Russian) *Uspekhi Mat. Nauk* **47** (1992), 3–51, 222; *translation in Russian Math. Surveys* **47** (1992), 1–58.

[4] K. L. Chung, Doubly-Feller process with multiplicative functional, "Seminar on stochastic processes,"1985. Edited by E. Cinlar, K. L. Chung, R. K. Getoor and J. Glover. Progress in Probability and Statistics, **12** Birkhäuser Boston, Inc., Boston, Mass., 63–78, 1986.

[5] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, "Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes,"de Gruyter Studies in Mathematics, **19** Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[6] K. Kuwae, Y. Machigashira and T. Shioya, Sobolev spaces, Laplacian, and heat kernel on Alexandrov spaces, preprint, 1998.

[7] Y. Otsu and T. Shioya, The Riemannian structure of Alexandrov spaces, *J. Differential Geom.* **39** (1994), 629–658.

[8] T. Sakai, "Riemannian geometry,"Translated from the 1992 Japanese original by the author. Translations of Mathematical Monographs, **149**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[9] M. Takeda, On exit times of symmetric Levy processes from connected open sets, *Probability theory and mathematical statistics (Tokyo, 1995)*, 478–484, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.

The large deviation principle for additve functionals of Brownian motion

東北大理　　竹田 雅好

Let (P_x^W, B_t) be d-dimentional Brownian motion. A positive Radon measure μ on R^d is said to be in the *Kato class* K_d if

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\sup_{x\in R^d}\int_{|x-y|<\alpha}\frac{\mu(dy)}{|x-y|^{d-2}}=0,\quad d\geq 3$$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\sup_{x\in R^d}\int_{|x-y|<\alpha}(\log|x-y|^{-1})\mu(dy)=0,\quad d=2$$

$$\sup_{x\in R^d}\int_{|x-y|\leq 1}\mu(dy)<\infty,\quad d=1.$$

We introduce a subclass K_d^∞ of K_d by

$$K_d^\infty=\left\{\mu\in K_d:\lim_{A\to\infty}\sup_{x\in R^d}\int_{|y|\geq A}g_1(x,y)\mu(dy)=0\right\},$$

where $g_1(x,y)$ is the 1-order resolvent density:

$$g_1(x,y)=\int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}e^{-|x-y|/2t}dt.$$

If a measure $\mu\in K_d$ is finite, $\mu(R^d)<\infty$, then μ belongs to K_d^∞. Denote by A_t^μ the positive continuous additive functional corresponding to $\mu\in K_d$.

Let

$$C(\theta)=-\inf\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u)-\theta\int_{R^d}u^2d\mu:u\in C_0^\infty(R^d),\ \int_{R^d}u^2dx=1\},$$

and $I(\lambda)$ the Legendre transformation of $C(\theta)$:

$$I(\lambda)=\sup_{\theta\in R^1}\{\lambda\theta-C(\theta)\},\quad \lambda\in R^1.$$

We then have the main theorem.

Theorem. Assume $d=1$ or 2. For any $\mu\in K_d^\infty$, A_t^μ/t obeys the large deviation principle with rate function $I(\lambda)$:

(i) For any open set G,

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log P_x^W(A_t^\mu/t\in G)\geq-\inf_{\lambda\in G}I(\lambda).$$

(ii) For any closed set K,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log P_x^W(A_t^\mu/t\in K)\leq-\inf_{\lambda\in K}I(\lambda).$$

We showed in [2] that for $\mu \in K_d$,

$$C(\theta) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E_x^W \left(\exp(\theta A_t^\mu)\right) \quad \text{for any } \theta \in R^1.$$

Hence, the differentiablity property of $C(\theta)$ implies the theorem above by Gärtner-Ellis Theorem (Theorem II.2 in [1]). We can show the differentiablity of $C(\theta)$ under the condition that $\mu \in K_d^\infty$.

For $d \geq 3$, we can only show that $C(\theta)$ is differentiable at $\theta = 0$ and $C'(0) = 0$. Hence we see from Theorem IV.1 in [1] that for $\mu \in K_d^\infty$, A_t^μ/t tends to 0 exponentially: for any $\epsilon > 0$ there exists $M(\epsilon) > 0$ such that

$$P_x^W \left(\frac{A_t^\mu}{t} \geq \epsilon\right) \leq \exp(-M(\epsilon)t).$$

As a result,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_t^\mu}{t} = 0, \quad P_x^W\text{-a.e.}$$

References

[1] R.S. Ellis, Large deviations for general class of random vectors, Ann. Probab. 12 (1984), 1-12.

[2] M. Takeda, Asymptotic properties of generalized Feynman-Kac functionals, Potential Analysis 9 (1998), no. 3, 261–291.

Generators of jump-type Markov processes of variable order

Bielefeld Univ. Walter Hoh

We consider symbols $p(x,\xi) = s(x,\xi)^{m(x)}$ of pseudo differential operators. Here $s(x,\xi)$ is an negative definite function of ξ and satisfies upper and lower estimates w.r.t. a reference function and $m(x)$ is a variable power taking values in $(0,1]$. We employ a combined argument using both pseudo differential calculus and a martingale problem approach to prove that the corresponding operator of variable order generates a Markov process and a Feller semigroup.

On a new method of estimating Malliavin covariances

小松　孝、　竹内敦司　　（大阪市大・理）

$W = D([0,1] \to \boldsymbol{R}^m) \ni w,\ X_t(w) = w(t),\ \mathcal{W}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(X_s; s < t+\varepsilon)$ とし、次の性質を持つ $\{W, (\mathcal{W}_t)\}$ 上の確率測度 P を固定する。

$$\begin{aligned} &X_t \;=\; X_0 \;+\; \beta_X(t) \;+\; \int_0^t\!\!\int \theta\, J_X(dsd\theta), \\ &(\beta_X(t),\ P) : \text{ Brownian motion}, \\ &(J_X(dsd\theta), P) : \text{ Poisson random measure with } \hat{J}_X(dsd\theta) = \pi(d\theta)ds, \end{aligned}$$

ただし、 $\pi(d\theta) = |\theta|^{-m-\alpha} d\theta \ \ (0 < \alpha < 2)$ とする。 $\xi \in \boldsymbol{R}^d$ および non-anticipating な $d \times m$ − 行列値過程 $l(s,X)$ と $C^1(\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^d)$ 値過程 $h(s,X,\theta)$ に対して

$$X_t^\xi \;=\; X_0 + \beta_X(t) + \int_0^t l(s,X)^*\xi\, ds + \int_0^t\!\!\int \exp[\xi \cdot h(s-,X,\theta)]\theta\, J_X$$

と定める。 cád-lág space W 上の汎関数 $\Psi(X)$ の (l,h) − 方向微分は $\langle \nabla_{l,h}\Psi, (l,h)\rangle = \partial_\xi\, \Psi(X^\xi)\,|_{\xi=0}$ で定義される。 $a_k(x) = (a_k^i(x)) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^d \to \boldsymbol{R}^d)$ で、 $b(x,\theta) \in C^1(\boldsymbol{R}^d \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^d)$ は $b(x,0) = 0$ かつ $b(x,\theta),\ \partial_\theta b(x,\theta)$ が x に関して滑らか (etc.) とし、作用素 $A_k,\ B_\theta$ を $A_k\phi(x) = a_k(x)\cdot\partial_x\phi,\ \ B_\theta\phi(x) = \phi(x + b(x,\theta))$ と定義する。生成作用素

$$L \;=\; A_0 \;+\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m (A_k)^2 \;+\; \int (B_\theta - I)\,\pi(d\theta)$$

を持つ Markov 過程の推移確率の正則性を示す目的で、W 上の Malliavin 解析を行う。

生成作用素 L の Markov 過程は SDE :

$$dx_t \;=\; a_0(x_t)\,dt + \sum_{k=1}^m a_k(x_t)\circ d\beta_X^k(t) + \int_0^t\!\!\int b(x_{t-},\theta) J_X(dtd\theta), \quad x_0 = x^\Delta$$

の解 $x_t = \Phi_t(X, x^\Delta)$ として得られる。 $d\times d$ − 行列値過程 u_t を線形 SDE :

$$du_t \;=\; -u_{t-}\Big[\, a_0'(x_t)\,dt + \sum_k a_k'(x_t)(\circ d\beta_X^k) + \int (I - [I + b'(x_{t-},\theta)]^{-1}) J_X \Big], \quad u_0 = I$$

の解として定める。$\tilde{b}(x,\theta) = [I + b'(x,\theta)]^{-1}(\theta\cdot\partial_\theta) b(x,\theta)$ とし、$l(s,X) \approx u_s(a_1(x_s), \cdots, a_m(x_s))$, $h(s,X,\theta) \approx u_s\tilde{b}(x_s,\theta)$ と置いて、 $V_t(X) = \partial_\xi \Phi_t(X^\xi, x^\Delta)\,|_{\xi=0}$ を定義すると、

$$V_t(X) \;\approx\; u_t^{-1}\int_0^t \Big\{\sum_{k=1}^m u_s a_k(x_s) a_k(x_s)^* u_s^*\, ds + \int\ u_s\tilde{b}(x_s,\theta)\tilde{b}(x_s,\theta)^* u_s^*\, J_X\Big\}$$

を得る。 $V_t(X)(u_t^{-1})^*$ は Malliavin 共分散に相当する。 Malliavin 解析における主な道具は部分積分公式であるが、そのためには、Malliavin 共分散の非特異性を示す必要がある。その証明の繁雑さが「難解な Malliavin 解析」のイメージの元になってきた。

定理 1　条件 $[V_T]$: $E[\,|\det V_T(X)|^{-p}] < \infty \quad (^\forall p > 1)$ が満たされるならば、確率変数 x_T の分布は Lebesgue 測度に関して滑らかな密度関数を持つ。

$z \in \boldsymbol{R}^d$, $\Phi = \phi(x) \cdot \partial_x$ に対して、汎関数 Q, $\hat{Q}$ を次のように定義する。

$$Q[z,\Phi] = |z|^2 \int_0^T (z \cdot u_t \phi(x_t))^2 \, dt, \qquad \hat{Q}[z,\Phi] = |z|^2 \int_0^T (z \cdot u_t \phi(x_t))^2 \wedge 1 \, dt.$$

$\tilde{B}_\theta = \tilde{b}(x,\theta) \cdot \partial_x$ とおく。条件 $[V_T]$ が満たされるための十分条件として次のものがある。

条件 $[Q_T]$:
$$\sup_{|\zeta|=1} E\Big[\exp\Big(-\sum_{k=1}^m Q[\lambda\zeta, A_k] - \int \pi(d\theta)\ \hat{Q}[\lambda\zeta, \tilde{B}_\theta]\Big)\ \Big] \;=\; o(\lambda^{-p}) \quad (^\forall p > 1)$$

条件 $[Q_T]$ を具体化するために、Q, $\hat{Q}$ の評価方法について考える。先ず

$$\begin{aligned} \wp_\theta \Phi \;&=\; \begin{cases} [A_k, \Phi] & (\theta = k \in \{1,\cdots,m\}) \\ [B_\theta, \Phi] B_\theta^{-1} & (\theta \in \boldsymbol{R}^m \setminus \{0,1,\cdots,m\}) \end{cases} \\ \wp_0 \Phi \;&=\; [A_0, \Phi] \;+\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m (\wp_k)^2 \Phi \;+\; \int_{|\eta|\le 1} \wp_\eta \Phi \ \pi(d\eta) \end{aligned}$$

と定義する。次に、$\Phi = \phi(x) \cdot \partial_x$ に対し、$\Phi_\theta = \wp_\theta \Phi$, $\Phi_{\theta\omega} = \wp_\omega \wp_\theta \Phi$ とし、$\|\Phi\| = \sup_{t \le T} |u_t\ \phi(x_t)|$, etc. として、$\ell > 0$ について、W の部分集合 $\Gamma(\ell, \Phi)$ を

$$\Gamma(\ell,\Phi) = \Big\{\ w \mid \sum_{k=0}^m (\|\Phi_k\|^2 + \|\Phi_{0k}\|^2) + \int_{|\theta|\le 1} (\|\Phi_\theta\|^2 + \|\Phi_{0\theta}\|^2)\ \pi(d\theta) + \sup_{\theta \notin \boldsymbol{Z}} \|\Phi_{0\theta}\|^2 > \ell^2 \ \Big\}$$

と定義する。このとき、次の結果を得る。

定理 2　$0 < \nu < 1/4$, $\lambda > 1$, $|\zeta| = 1$ とする。$\lambda\zeta$, Φ に無関係な正定数 $C_0, \cdots, C_3$ と $E[M_T] \le 1$ である確率変数 $M_T = M_T[\lambda\zeta, \Phi] > 0$ が存在し、不等式

$$\begin{aligned} &\hat{Q}[\lambda\zeta,\Phi] + \lambda^{-\nu}\ \log M_T[\lambda\zeta,\Phi] + C_3 \\ &\qquad \ge C_0 \lambda^{1-4\nu}\ Q[\zeta,\Phi_0] + C_1 \lambda^{2-2\nu} \sum_{k=1}^m Q[\zeta,\Phi_k] + C_2 \lambda^{-2\nu-2} \int \hat{Q}[\lambda\zeta,\Phi_\theta]\ \pi(d\theta). \end{aligned}$$

が $\Gamma(\lambda^\nu, \Phi)$ の補集合上で成立する。

(x_t), (u_t) の moment 評価を用いて、$P[\Gamma(\lambda^\nu,\Phi)] = o(\lambda^{-p})\ \ (^\forall p > 1)$ が示され、Jensen の不等式を用いて M_T の影響も除去出来る。この評価不等式を累次的に適用することにより、条件 $[Q_T]$ が成立するための具体的条件として、*Generalized Hörmander Condition* が導かれる。特筆すべきは、連続な確率過程の場合には上の評価不等式はごく簡単に証明出来ることである。従って、この方法を適用することによって、拡散過程に関する同種の問題についての Malliavin 解析が、これまでのものよりずっと平易で圧縮されたものになる。

Ito's formulae in the classical Dirichlet spaces

M. Fukushima

Notations

Let $(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ be a strongly local, regular Dirichlet space and $\mathbf{M} = (X_t, P_x)$ be an associated diffusion process on X. The space $\mathbf{A}^+$ of PCAF's of $\mathbf{M}$ and the space S^+ of (positive) smooth measures are related by the Revuz correspondence. $\mu_A(\in S^+)$ denotes the Revuz measure of $A \in \mathbf{A}^+$. We let

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+, \quad S = S^+ - S^+.$$

For $A \in \mathbf{A}$, its total variation process is denoted by $\{A\}(\in \mathbf{A}^+)$. We consider a subclass of $\mathbf{A}$ defined by

$$\mathbf{A}_{0,loc} = \{A \in \mathbf{A} : \mu_{\{A\}}(K) < \infty \quad \forall K \text{ compact}\}.$$

For $u \in \mathcal{F}_{loc}$, we have a unique decomposition

$$u^*(X_t) - u^*(X_0) = M_t^{[u]} + N_t^{[u]}, \quad M^{[u]} \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}_{loc}, \quad N^{[u]} \in \mathcal{N}_{c,loc}.$$

Brownian motion

Theorem 1 *Let $\mathbf{M}$ be the Brownian motion on R^d for $d \geq 2$. For $u \in H^1_{loc}(R^d)$, the following conditions are equivalent each other:*
(i) $N^{[u]} \in \mathbf{A}_{0,loc}$.
(ii) *The Schwartz distribution Δu is a signed Radon measure.*

In this case, Δu becomes smooth in the sense that it charges no set of zero capacity, and $\frac{1}{2}\Delta u$ and $N^{[u]}$ are in the Revuz correspondence.

Distorted Brownian motion

Denote by m_0 the Lebesgue measure on R^d. We consider a non-negative locally integrable function ρ on R^d and the associated *energy form* defined by

$$\mathcal{E}^\rho(u,v) = \frac{1}{2}\int_{R^d} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, \rho(x)\, m_0(dx), \quad u, v \in C_0^1(R^d).$$

We assume the Hamza type condition on ρ :

(H) $\rho = 0$ m−a.e. on $S(\rho) = \{x \in R^d : \int_{U(x)} \rho(y)^{-1} m_0(dy) = \infty \ \forall U(x)\}$.
Then the form $\mathcal{E}^\rho$ is closable on $L^2(R^d; \rho \cdot m_0)$ and the closure $(\mathcal{E}^\rho, \mathcal{F}^\rho)$ is a strongly local regular Dirichlet form on $L^2(\overline{R(\rho)}; \rho \cdot m_0)$ where $R(\rho) = R^d - S(\rho)$. The associated diffusion $\mathbf{M}^\rho = (X_t^\rho, P_x^\rho)$ on $\overline{R(\rho)}$ is called a *distorted Brownian motion.* Its sample path admits the expression

$$X_t^\rho - X_0^\rho = B_t + N_t^\rho, \quad N_t^\rho = (N_t^1, N_t^2, \cdots, N_t^d)$$

where B_t is a d-dimensional Brownian motion.

A function $\rho \in L^1_{loc}(R^d)$ is called BV (denoted by $\rho \in BV_{loc}$) if there exist a positive Radon measure μ^ρ on R^d and a μ^ρ-measurable R^d-valued function σ^ρ with $|\sigma^\rho(x)| = 1$ μ^ρ−a.e. such that, for any $v \in C_0^1(R^d; R^d)$,

$$\frac{1}{2}\int_{R^d} div\ v\ \rho(x) m_0(dx) = -\int_{R^d} v(x) \cdot \sigma^\rho(x) d\mu^\rho(x).$$

Theorem 2 $N^i \in \mathbf{A}_{0,loc}$, $1 \leq i \leq d$, *if and only if* $\rho \in BV_{loc}$.
In this case, μ^ρ *becomes automatically smooth and, if we denote by* A^ρ *the associated PCAF by the Revuz correspondence, we have the expression*

$$N_t^\rho = \int_0^t \sigma^\rho(X_s^\rho) dA_s^\rho, \quad t \geq 0.$$

Theorem 3 *Assume that* $\rho \in BV_{loc}$ *and consider* $u \in C^1(R^d)(\subset \mathcal{F}_{loc})$. $N^{[u]} \in \mathbf{A}_{0,loc}$ *if and only if there exists a signed Radon measure* $\nu_{u,\rho}$ *with support* $\overline{R(\rho)}$ *satisfying*

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \rho \Delta u^\epsilon m_0 = \nu_{u,\rho}$$

in the vague limit sense, where u^ϵ *is a mollification of* u.

In this case, for any $v \in C_0^1(R^d)$,

$$\mathcal{E}^\rho(u, v) = -\frac{1}{2}\int_{\overline{R(\rho)}} v\ d\nu_{u,\rho} - \frac{1}{2}\int_{\overline{R(\rho)}} v\ \nabla u \cdot \sigma^\rho\ d\mu^\rho$$

Moreover $\nu_{u,\rho}$ *is automatically in* S *and, if we denote the associated CAF by* $A_t^{\Delta u} (\in \mathbf{A}_{0,loc})$, *then,* P_x *almost surely for q.e.*$x \in X$, *it holds that*

$$u(X_t) - u(X_0) = M_t^{[u]} + \frac{1}{2}A_t^{\Delta u} + \frac{1}{2}\int_0^t (\nabla u \cdot \sigma^\rho)(X_s) dA_t^\rho.$$

and further, for some sequence $\epsilon_n \downarrow 0$.

$$\lim_{n \to 0} \int_0^t \Delta u^{\epsilon_n}(X_s^\rho) ds = A_t^{\Delta u} \quad \text{locally uniformly in } t$$

On short time asymptotic behavior of some symmetric diffusions on general state spaces

京都大学大学院情報学研究科　　日野　正訓

Ricci 曲率が下に有界な完備 Riemann 多様体に対しては次の Varadhan 型の短時間漸近挙動が良く知られている.

$$\lim_{t\to 0} 4t\log p_t(x,y) = -d_M(x,y)^2, \quad x,y\in M.$$

ここで $p_t(x,y)$ は熱核, d_M は M の Riemann 距離. これを無限次元空間の場合に拡張する試みが [5, 6, 7, 2, 3] によって行われてきた. この場合一般には推移密度が存在しないので集合から集合へ粒子が移る確率の漸近挙動を考えることになる. 抽象 Wiener 空間 (W,H,μ) の場合に Fang [5] に倣って結果を述べると, Borel 集合 A, B に対して

$$\varlimsup_{t\to 0} 4t\log\int_W 1_A\cdot T_t 1_B\,d\mu \le -d_H(A,B)^2$$

であり, 更に A 又は B が open ならば

$$\varliminf_{t\to 0} 4t\log\int_W 1_A\cdot T_t 1_B\,d\mu \ge -d_H(A,B)^2.$$

ここで $\{T_t\}$ は Ornstein-Uhlenbeck 半群, $d_H(A,B)$ は A と B の H-距離で, 2点間の H-距離を集合の場合に拡張したものである.

他の例を扱った論文でも下からの評価を行うには集合に何らかの位相的条件が必要であった. そこで一般の可測集合に対して下からの評価が得られるかどうかというのは自然な問題である. また, Riemann 多様体上の path 空間や loop 空間 (の上の Ornstein-Uhlenbeck 過程) などには従来の議論は適用できない. このような場合にも通用するような方法を探ることも興味がある. 本講演ではこれら2つの問題について得られた結果を紹介する.

(X,m) を測度空間で $m(X)=1$ なるものとし, $\{T_t\}$ を $L^2(m)$ 上の対称マルコフ半群で保存的なもの, すなわち $T_t 1 = 1\ {}^\forall t>0$ となるものとする. A, B を X の可測集合とするとき, $\varphi(t)=\varphi(t,A,B)=\int_X 1_A\cdot T_t 1_B\,dm$, $t>0$ とおく. $t\log\varphi(t)$ の $t\to 0$ における挙動について, 次の定理が成り立つ.

定理 1. $0<s<t$ に対して

$$t\log\varphi(t)\le (1/\pi)s\log\varphi(s)\le 0$$

が成立する. 特に

$$\pi\sup_{t>0} t\log\varphi(t) \le \varlimsup_{t\to 0} t\log\varphi(t) \le \frac{1}{\pi}\varliminf_{t\to 0} t\log\varphi(t)\le 0. \tag{1}$$

上式で, もし $1/\pi$ を1にすることができれば $\lim_{t\to 0} t\log\varphi(t)$ の存在が言えることに注意されたい. (1) より, 集合 A と B の距離を $\tilde d(A,B)=\{-\varliminf_{t\to 0} 4t\log\varphi(t,A,B)\}^{1/2}$ として定めるのは妥当のように思われる. この値が意味を持つこと (0 や ∞ に退化しないこと) は次のようにして分かる. positive な対称半群についてよく知られているように $\varphi(t)>0$ for some $t>0 \iff \varphi(t)>0$ for all $t>0$ であることと (1) を用いれば, $\tilde d(A,B)=\infty \iff \varphi(t)=0$ for all $t>0$ がわかる. 特に $\{T_t\}$ がエルゴード的であれば, $\tilde d(A,B)=\infty \iff m(A)=0$ or $m(B)=0$. 以下簡単のため常に $\{T_t\}$ はエルゴード的であるとする. $\tilde d(A,B)$ の下からの評価を得るために, 更に次の条件を加える.

条件 1. $\{T_t\}$ に対応する Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は次のように表せる.

$$\mathcal{E}(f,g)=\int_X \Gamma(f,g)\,dm, \qquad f,g\in\mathcal{F}.$$

ここで $\Gamma:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to L^1(m)$ は双線形写像で, 任意の $\mathbf{f}=(f_1,\dots,f_n)\in(\mathcal{F}_b)^n$, $g\in\mathcal{F}_b$, $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して $\Phi(\mathbf{f})\in\mathcal{F}_b:=\mathcal{F}\cap L^\infty(m)$ で次をみたす.

$$\Gamma(\Phi(\mathbf{f}),g)=\sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(\mathbf{f})\Gamma(f_i,g).$$

また，集合 A と B の intrinsic metric $d(A,B)$ を

$$d(A,B)=\sup_{f\in\mathcal{F}_1}\left\{\operatorname*{ess.inf}_{x\in B}f(x)-\operatorname*{ess.sup}_{x\in A}f(x)\right\},\quad \mathcal{F}_1=\{f\in\mathcal{F}\mid\Gamma(f,f)\le 1\ m\text{-a.e.}\}$$

で定める．このとき [5, 6, 2] と同様にして Lyons-Zheng 分解を用いる方法で次が証明できる．

定理 2. 条件1の下，更に $\mathcal{E}$ に対応する拡散過程が存在すれば，任意の可測集合 A, B に対して $\varlimsup_{t\to 0}4t\log\varphi(t)\le -d(A,B)^2$. 特に $\tilde{d}(A,B)\ge d(A,B)$.

逆向きの評価を得るために更に条件を課す．($L^2(m)$ 上とみた)半群 $\{T_t\}$ の生成作用素を L, 定義域を $D(L)$ とする．

条件 2. $D(L)$ の部分空間 $\mathcal{A}$ で次の条件をみたすものが存在する: $\mathcal{A}$ は *algebra* で $L^2(m)$ で稠密．更に作用素 L, T_t と $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ との合成に関し閉じている．

このとき $\Gamma_2:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ を $\Gamma_2(f,g)=(1/2)\{L(\Gamma(f,g))-\Gamma(f,Lg)-\Gamma(g,Lf)\}$ で定める．

定理 3. 条件 1, 2 の下，ある定数 K が存在して $\Gamma_2(f,f)\ge -K\Gamma(f,f)$, ${}^\forall f\in\mathcal{A}$ が成り立つものとする．このとき任意の可測集合 A, B に対して $-\tilde{d}(A,B)^2=\varliminf_{t\to 0}4t\log\varphi(t)\ge -d(A,B)^2$.

例えば冒頭の抽象 Wiener 空間の場合のように定理 2, 3 が共に適用できるとき，任意の可測集合 A, B に対して $\lim_{t\to 0}4t\log\varphi(t)=-d(A,B)^2=-\tilde{d}(A,B)^2$ となることが分かる．定理 3 と類似の定理は [2] により Harnack 型の不等式を経由して与えられている．ここでの証明方法は [2] と異なり，集合 A, B や状態空間に特別な構造を要しない．

以下，定理 1 の副産物について述べる．

- 再び，最初の仮定のみに戻る．すなわち，$\{T_t\}$ を $L^2(m)$ 上の保存的な対称マルコフ半群という仮定のみ課すとする．このとき以下は同値である．
  - (a) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\sup\{\tilde{d}(A,B)\mid A,\ B\subset X,\ m(A)\ge\varepsilon,\ m(B)\ge\varepsilon\}<\infty$.
  - (b) 任意の $\varepsilon>0$ に対してある定数 $c>0$ が存在して, 任意の $0<t\le 1$ と $m(A)\ge\varepsilon$, $m(B)\ge\varepsilon$ をみたす可測集合 A,B に対し $\varphi(t,A,B)\ge\exp(-c/t)$ が成り立つ．
  - (c) 任意の $\varepsilon>0$ に対してある定数 $T>0$, $\delta>0$ が存在して, 任意の $m(A)\ge\varepsilon$, $m(B)\ge\varepsilon$ をみたす可測集合 A,B に対し $\varphi(T,A,B)\ge\delta$ が成り立つ．
  - (d) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\sup_{\|f\|_2\le 1}\left\|T_tf-\int_X f\,dm\right\|_1=0.$
  - (e) もし $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$ が $\int_X f_n\,dm=0$, $\|f_n\|_2\le 1$, $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(f_n,f_n)=0$ をみたせば, $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_1=0$.

  (c)∼(e) の同値性はすでに知られており，(a)⇔(b)⇒(c) は明らか．定理 1 より (c)⇒(a) が従う．これらは $\mathcal{E}$ のirreducibility より強く，Poincaré の不等式の成立より弱い．ループ空間上の Ornstein-Uhlenbeck 過程については (e) の成立が [1] で示されている．

- もし $\varphi(t)\le C_1\exp(-C_2/t^\gamma)$, $0<t\le 1$ という上からの評価があれば，定理 1 より $\gamma\le 1$ でなければならない．フラクタル集合上の対称拡散過程ではしばしばこのような（更にはもっと強く，推移確率密度の上下からの）評価が得られる．このとき $\gamma\le 1$ は walk 次元が 2 以上ということに対応し，対称拡散過程は diffusive 又は subdiffusive であるという結論を得る．[4] ではもう少し強い仮定の下で，より強い結論が述べられている．

References

[1] S. Aida: Uniform positivity improving property, Sobolev inequality and spectral gaps, J. Funct. Anal. **158** (1998), 152–185.

[2] S. Aida and H. Kawabi: Short time asymptotics of certain infinite dimensional diffusion process, preprint.

[3] S. Aida and T. S. Zhang: On the small time asymptotics of diffusion processes on path groups, preprint.

[4] M. T. Barlow: Diffusions on fractals, Lectures on Probability Theory and Statistics (Saint-Flour, 1995), 1–121, Lecture Notes in Math. 1690, Springer, 1998.

[5] S. Fang: On the Ornstein-Uhlenbeck process, Stochastics and Stochastic Reports **46** (1994), 141–159.

[6] S. Fang and T. S. Zhang: On the small time behavior of Ornstein-Uhlenbeck processes with unbounded linear drift, Prob. Th. Rel. Fields **114** (1999) ,487–504.

[7] T. S. Zhang: On the small time asymptotics of diffusion processes on Hilbert spaces, preprint.

Anomalous Pauli electron states for magnetic fields with tails [1]

P. Exner,[a,b] M. Hirokawa,[c] and O. Ogurisu[d]

a) Nuclear Physics Institute, Academy of Sciences, Czech Republic
b) Doppler Institute, Czech Technical University
c) Department of Mathematics, Okayama University
d) Department of Computational Science, Kanazawa University

Several recent papers — see [2]–[5] and references therein — discussed the discrete spectrum of the two-dimensional Pauli operator with a localized magnetic field B, coming from an excess magnetic moment, $g > 2$. The most general result available concerns fields with a compact support. In this situation the discrete spectrum is nonempty whenever B is nonzero, and its dimension is $1 + [F]$ where $[F]$ is the integer part of the related flux (in natural units).

The main aim of this report is to extend this result to non-compactly supported fields which behave as $\mathcal{O}(|x|^{-2-\delta})$ for $|x| \to \infty$.

We consider a two-dimensional electron interacting with a non-homogeneous magnetic field $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ perpendicular to the plane. The field corresponds to a vector potential $A = (A_1, A_2) = (-\partial_2\phi, \partial_1\phi)$ with

$$\phi(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} B(y) \ln|x-y| \, d^2y \,. \tag{1}$$

The particle is described by the Pauli Hamiltonian

$$H_P^{(\pm)}(A) = (-i\nabla - A(x))^2 \pm \frac{g}{2} B(x) \tag{2}$$

We are particularly interested in the case when the electron has an excess magnetic moment, $g > 2$.

We shall suppose that $B \in L^1(\mathbb{R}^2)$. This ensures the existence of a global quantity characterizing the field,

$$F := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} B(x) \, d^2x \,. \tag{3}$$

Without loss of generality we may assume $F \geq 0$.

We are interested in the situation when the compact-support requirement is weakened and the decay of the AC states [1] is given by the following result.

Proposition 0.1 *Let $B(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2-\delta})$ for some $\delta > 0$. Then ϕ is a continuous function and to any $\varepsilon > 0$ there is a positive R such that*

$$|\phi(x) - F \ln|x|| < \varepsilon \ln|x| \tag{4}$$

holds for all $|x| > R$.

[1] mp_arc 99-328; math-ph/9909011

We will also need a bound on the vector potential, or equivalently, on the gradient of the potential (1). While in general $\nabla\phi(x)$ behave as $\mathcal{O}(|x|^{-1})$, in case of zero flux we have a stronger result.

Proposition 0.2 *In addition to the stated integrability and decay assumptions, suppose that* $\int_{\mathbb{R}^2} B(y)\, d^2y = 0$*; then there is* $\mu > 0$ *such that* $(\nabla\phi)(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1-\mu})$ *as* $|x| \to \infty$.

Now we are ready to extend the result of [2] about the existence and number of bound states to fields without a compact support.

Theorem 0.3 *Let* $B \in L^1$ *be nonzero,* $B(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2-\delta})$ *as* $|x| \to \infty$*, and let the corresponding flux be* $F = N + \eta$ *for some* $N \in \mathbb{N}_0$ *and* $\eta > 0$*. Then the operator* $H_P^{(-)}(A)$ *has for* $g > 2$ *at least* $N+1$ *isolated eigenvalues in* $(-\infty, 0)$*, multiplicity being counted.*

In distinction to the analogous result in [2], Theorem 0.3 says nothing about the situation when $F = 0$. For radially symmetric strong and weak fields the bound state existence is established in [3] and [2], respectively. For weak fields without the rotational symmetry we can employ the method of Sec. 6 in [2], but without the assumption about the decay of $\nabla\phi$ used there.

Theorem 0.4 *Let* B *be as in Theorem 0.3 with* $F = 0$*. Then each of the operators* $H_P^{(\pm)}(\lambda A)$ *with* $g > 2$ *has for small nonzero* λ *a bound state whose energy satisfies the bound*

$$\epsilon^{(\pm)}(\lambda) < -\exp\left\{-\left(\frac{c\lambda^2}{16\pi}(g^2-4)\int_{\mathbb{R}^2} A(x)^2\, d^2x\right)^{-1}\right\} \tag{5}$$

for any fixed $c \in (0,1)$ *and* λ *small enough.*

References

[1] Y. Aharonov, A. Casher: Ground state of a spin–1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field, *Phys. Rev.* **A19** (1979), 2641–2642.

[2] F. Bentosela, R.M. Cavalcanti, P. Exner, V.A. Zagrebnov: Anomalous electron trapping by localized magnetic fields, *J. Phys.* **A32** (1999), 3029–3039.

[3] F. Bentosela, P. Exner, V.A. Zagrebnov: Electron trapping by a current vortex, *J. Phys.* **A31** (1998), L305–311.

[4] M. Bordag, S. Voropaev: Charged particle with magnetic moment in the Aharonov-Bohm potential, *J. Phys.* **A26** (1993), 7637–7649.

[5] R.M. Cavalcanti, E.S. Fraga, C.A.A. de Carvalho: Electron localization by a magnetic vortex, *Phys. Rev.* **B56** (1997), 9243–9246.

[6] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, B. Simon: *Schrödinger Operators with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry,* Springer, Berlin 1987.

Hypoellipticity of the $\overline{\partial_b}$-Laplacian with infinite degeneracy

上木直昌　　　京大人環

$f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}$ は C^∞ 級で, $f(z_1,z_2)=\sum_{j=1}^2 f_j(z_j)$ と書けて, ある $\rho>0$ に対して条件

(E,ρ)　$\Delta f_j(z_j)$ は x_j だけに依り, ある $\nu>0$ があって $\Delta f_j(z_j)\geq \exp(-|x_j|^{-\rho})\wedge |x_j|^{-\nu}$

が成り立つとする. ここで $\Delta f_j=(\partial_{x_j}^2+\partial_{y_j}^2)f_j$.

$$D_f:=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}:\operatorname{Im}w>f(z)\}$$

とし, D_f に次の $\{Z_j\}_{j=1}^3$ が unitary frame となる Hermitian metric を与える:

$$Z_j=\partial_{z_j}+i(\partial f/\partial z_j)\partial_w,\ j=1,2,\quad Z_3=i\sqrt{2}\partial_w.$$

以下, coordinate は (z,u,r) を用いる. ここで $u=\operatorname{Re}w$, $r=\operatorname{Im}w-f(z)$ である. すると $D_f=B_f\times\mathbb{R}_+$ with product metric, (z,u) は B_f の coordinate とみなせる.

B_f 上の $\overline{\partial_b}$-operator をまず compact support をもつ smooth な微分形式の空間上で

$$\varphi\in C_0^\infty(B_f) \text{ に対して }\ \overline{\partial_b}\varphi=\sum_{j=1}^2(\overline{Z_j}\varphi)\overline{\omega^j},\quad \overline{\partial_b}(\varphi\overline{\omega^k})=\sum_{j=1}^2(\overline{Z_j}\varphi)\overline{\omega^j}\wedge\overline{\omega^k}$$

で定義し (ここで $\{\overline{\omega^j}\}$ は $\{Z_j\}$ の conjugate dual frame), L^2 上の閉作用素に拡張する:

$$L^2(B_f:d\,\mathrm{vol})\xrightarrow{\overline{\partial_b}}L^2(\Lambda^{0,1}(B_f):d\,\mathrm{vol})\xrightarrow{\overline{\partial_b}}L^2(\Lambda^{0,2}(B_f):d\,\mathrm{vol})\quad (d\,\mathrm{vol}=2^2dx_1dy_1dx_2dy_2du).$$

この列は complex を成し, 対応する Laplacian $\Box_b=\overline{\partial_b}\,\overline{\partial_b}^*+\overline{\partial_b}^*\,\overline{\partial_b}$ は $L^2(\Lambda^{0,1}(B_f))$ 上で

$$\Box_b(\varphi_1\overline{\omega^1}+\varphi_2\overline{\omega^2})=(-L\varphi_1/4)\overline{\omega^1}+(-\overline{L}\varphi_2/4)\overline{\omega^2}$$

となる. ここで L は複素数値関数に作用する次の様な微分作用素である: $L=L_1+L_2$,

$$L_j=(\partial_{x_j}+(\partial f/\partial y_j)\partial_u)^2+(\partial_{y_j}-(\partial f/\partial x_j)\partial_u)^2+(-1)^{j-1}i\Delta f_j\partial_u.$$

この微分作用素に対して次が成り立つ:

定理 1. ある $0<\rho<1$ で条件 (E,ρ) が成り立てば L は B_f 上で C^∞ *locally hypoelliptic,* 即ち $\varphi\in\mathcal{D}'(B_f)$ に対し $L\varphi$ が B_f の開集合 W 上で C^∞ 級ならば φ も W 上で C^∞ 級.

証明は Kusuoka-Stroock (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **32** (1985)) の方法と次の定理に拠る:

定理 2. ある $0<\rho<2$ で条件 (E,ρ) が成り立ち, $f_j\in C_b^\infty$ とすると半群 $\exp(tL/2)$ の *Lebesgue* 測度に関する積分核 *(heat kernel)* $k(t,X,X')$ が *smooth* な関数として存在し, 任意の α, $\alpha'\in\mathbb{Z}_+^5$, $\beta\in\mathbb{Z}_+$, $\gamma\in\mathbb{R}$, B_f の *compact* 集合 K, ε, $\delta>0$, $\rho<\rho'<2$ に対して $c_1,c_2,c_3,c_4>0$ が存在して任意の $t>0$ と $(X,X')\in(K\times B_f)\cup(B_f\times K)$ に対して

$$|\partial_t^\beta\partial_X^\alpha\partial_{X'}^{\alpha'}k(t,X,X')|\le c_1\exp\left(c_2t+c_3\left(\frac{1}{t}\right)^{\rho'/(2-\rho')}+c_4\left(\frac{1}{t}\right)^{2\gamma-1}-\frac{|z-z'|^2}{2(1+\varepsilon)t}-\frac{\delta|u-u'|}{t^\gamma}\right).$$

証明には $k(t,X,X')$ に対する次の表現を用いる:

$$k(t,(z,u),(z',u'))=\frac{1}{2\pi}\int_\infty^\infty d\xi e^{-i\xi(u-u')}\prod_{j=1}^2 q_j(t,z_j,z_j';\xi).$$

ここで $q_j(t,z_j,z_j';\xi)$ は

$$L_j(\xi)=(\partial_{x_j}-i\xi(\partial f/\partial y_j))^2+(\partial_{y_j}+i\xi(\partial f/\partial x_j))^2+(-1)^j\xi\Delta f_j$$

の 1/2 に対応する heat kernel であり, Feynman-Kac-Itô formula により表現される:

$$q_j(t,z_j,z_j';\xi)=E_{0,z_j}^{t,z_j'}\left[\exp\left(-i\xi\int_0^t\nabla f(z(s))*dz(s)+\xi\int_0^t\frac{\Delta f_j}{2}(z(s))ds\right)\right]\frac{\exp\left(-\frac{|z-z'|^2}{2t}\right)}{2\pi t}.$$

ここで $E_{0,z_j}^{t,z_j'}$ は2次元 Brown 運動 $z(s)=(x(s),y(s))$ の $z(0)=z$, $z(t)=z'$ の条件付平均,

$$\int_0^t\nabla f(z(s))*dz(s)=\int_0^t(\partial_{y_j}f_j(z(s))dx(s)-\partial_{x_j}f_j(z(s))dy(s))$$

である. この表現は一般に振動積分であるために評価が難しいが, Δf_j が x_j だけにしか依らない時は $y(\cdot)$ に関する平均が計算出来て評価しやすいものになる. 詳細は URL: http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~ueki/ の preprint を参照されたい.

12.

「情報解析に関する理論的あるいは実証的研究」

平成 11 年 10 月 26 日 (火) - 10 月 28 日 (木)

於東京大学工学系研究科

世話人： 井原 俊輔 (名大情報文化), 岡部 靖憲 (東大工学系研究科)

標記シンポジウムは，主な分野として，(1) 情報理論，(2) 確率過程の定常性あるいは因果性の解析，を取り上げ，理論的な立場からの研究と，具体的なデータに基づく実証的な研究の双方からの研究成果を持ち寄り，討論することにより，理論と実際の応用との有機的結合による今後の研究の進展を目指す目的で開催された．

情報理論に関しては，何人かの工学の人にも参加を要請し，情報理論におけるホットな話題，あるいは，確率過程の問題と深く関連する情報理論の話題などについて講演がなされた．

定常過程に関しては，定常性あるいは因果性に関する理論的な研究のみならず，実証的な研究成果の発表，たとえば実際の気象データを基に一般理論の実際的な適用についての研究，あるいは統計学の立場からの研究など，がなされた．

講演は１３件，参加者は４４名で，理論と応用の両面から興味のある発表があり，関連して活発な討論もなされ，学際的で有意義なシンポジウムであった．

プログラムおよび講演内容は次頁以降の通りである．講演内容は各講演者の予稿を基にして，体裁あるいは長さなどの関係で，分担者が修整を加えたものである．

プ ロ グ ラ ム

10月26日(火)

13:00–14:00　井原 俊輔（名古屋大学情報文化学部）
情報源符号化における有歪信頼性関数

14:00–15:00　有村 光晴（電気通信大学情報システム学研究科）
ソートを用いた無歪みデータ圧縮法

15:15–16:15　韓 太 舜（電気通信大学情報システム学研究科）
乱数生成と情報源符号化問題

16:15–17:15　山根 敏志（東京大学工学系研究科）
On-Off Intermittency and Nonlinear Time Series Modeling

10月27日(水)

9:30–10:30　川崎 秀二，森田 啓義（電気通信大学情報システム学研究科）
Evaluation for Convergence of Wavlet-Based Estimation on Fractional Brownian Motion

10:30–11:30　大濱 靖匡（九州大学システム情報学研究科）
複数の補助情報を伴う多端子情報伝送システムの符号化

13:00–14:00　池口 徹（東京理科大学工学部）
入出力システムの埋め込み定理と非線形因果性について

14:00–15:00　松浦 真也（東京大学工学系研究科）
退化した流れに対する KM_2O-ランジュヴァン方程式論について

15:15–16:15　岡部 靖憲（東京大学工学系研究科）
非線形情報解析と非線形予測問題について

16:15–17:15　金子 明人（北海道大学理学系研究科）
多次元の非線形因果解析と非線形予測解析について

10月28日(木)

9:30–10:30　尾崎 統（統計数理研究所）
Predictions in Nonlinear Sciences and Time Series Analysis

10:30–11:30　金子 明人（北海道大学理学系研究科），
山根 敏志，松浦 真也，岡部 靖憲（東京大学工学系研究科）
地球温暖化と大気変動に対する非線形時系列解析について

13:00–14:00　守田 治（九州大学理学部），中野 裕治（滋賀大学経済学部）
The Impact of ENSO Event on Japanese Climate

情報源符号化における有歪信頼性関数

井原 俊輔　(名古屋大学情報文化)

情報源符号化において，無歪みの場合，ある種の情報源に対しては符号長 n とともに誤り確率 e_n は指数関数的に 0 に収束する，即ち $e_n \sim e^{-rn}$ が示せる．このとき，指数 r を error exponent という．与えられた error exponent に対しそれを達成し得る最小の符号化レートを最小符号化レートという．最小符号化レートの逆関数は信頼性関数と呼ばれている．無歪みの場合の最小符号化レートおよび信頼性関数の最新の研究は [1] にある．

ここでは歪みを許す場合を考える．歪みを測る歪み関数が与えられていて，長さ n の符号化に対し歪みがレベル D を越える確率を $e_n(D)$ とする．漸近挙動 $e_n(D) \sim e^{-rn}$ を達成し得る最小の符号化レート $R(D,r)$ を (D,r)-最小符号化レートという．有歪みの場合の最小符号化レートを求めることは基本的な問題であるが，1974 年に K. Marton が有限アルファベット無記憶情報源に対して (D,r)-最小符号化レート求めたのみで，それ以後研究はほとんど進展していない．

上記の問題は指数関数的な漸近挙動を調べることであり，確率論における大偏差定理の研究の進展をみるとき，より一般的な情報源に対して最小符号化レートが求まることが期待できる．その手始めとして，無記憶ガウス型情報源の最小符号化レートを求める．

情報源 $X = \{X_n\}$ が分布 $N(0,\sigma^2)$ の i.i.d. のとき，無記憶ガウス型情報源という．歪み関数は $\rho(x,y) = |x-y|^2,\ x,y \in \mathbf{R}$, とする．次の結果が証明できる．

定理 1 (Ihara, Kubo [2])　無記憶ガウス型情報源に対し，

$$R(D,r) = \max_{\nu}\{R(D;\nu); D(\nu\|\mu) \le r\} \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，μ は $N(0,\sigma^2)$ の分布，$D(\nu\|\mu)$ は分布 μ に対する ν のダイバージェンス（相対エントロピー），$R(D;\nu)$ は ν のレート・歪み関数．

表現 (1) は，有限アルファベット無記憶情報源に対する Marton の公式に他ならない．これより，もっと一般の情報源に対しても (1) の形の公式が成り立つことが予想される．

符号化レートがレート・歪み関数より小さいときには，一定の条件の下では，誤り確率は 1 に指数関数的に収束する．この場合の (D,r)-最小符号化レート $R^*(D,r)$ を同様に定義できる．この正しく復号される確率については次の結果が証明できる．

定理 2 ([2]) 定理 1 の無記憶ガウス型情報源に対し，

$$R^*(D,r) = \min_{\nu}\{R(D;\nu); D(\nu\|\mu) \le r\} \tag{2}$$

が成り立つ．

参考文献

1. 韓太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 倍風館, 東京, 1998.

2. S. Ihara and M. Kubo, Error exponent for coding of memoryless Gaussian sources with fidelity criterion, IEICE Trans. Fundamentals, E-83-A (2000), 1891–1897.

ソートを用いた無歪みデータ圧縮法

有村 光晴　(電通大情報システム学研究科)

最近，ブロックソート法，文脈ソート法，ACB法といった，ソートという操作を用いる無歪みデータ圧縮法が数多く提案されている．ソートを用いた圧縮法に関するこれまでの研究では，実験的な評価が主に行われており，圧縮性能に関する理論的な評価はほとんど行われていない．本発表では，ソートを用いた無歪みデータ圧縮法に関する研究成果を紹介すると共に，ソートという操作によって高圧縮率が達成できる理由を明らかにする．

ブロックソート法は Burrows, Wheeler [1] によって提案された．まず系列をソートを用いたBW変換と呼ばれる変換によって別の系列に変換した後に符号化を行うという手法を圧縮に用いている．この後，アルゴリズムの細かい工夫は数多く提案されているものの，BW変換によって系列が確率過程とは呼べない系列に変換されるため，情報理論的な解析はまだ十分には行われていない．有村，山本は，定常エルゴード情報源に対しブロックソート法における概収束 [3] を，さらにマルコフ情報源に対しては平均収束 [2] を示し，Burrows-Wheeler のアルゴリズムによりエントロピーレートを達成できるような，情報源の性質の十分条件 [4] を与えた．横尾 [5] はブロックソート法による反復記号列の検出能力とKMRアルゴリズムの関連について調べた．Effros (1999) は有限状態情報源に対する冗長度を与えた．

横尾，高橋 (1996) が提案した文脈ソート法は，ブロックソート法が系列をまとめて別の系列に変換した後に符号化を行うのに対して，系列を1シンボルずつ読み込むごとに符号化の操作を行っている．

Lempel-Ziv圧縮法は，その一部に上述の文脈ソート法を組み込むことによって，圧縮性能の向上が可能であることが明らかになりつつある．Buyanovski (1994) は Associative Coder を提案している．

今後の研究方向としては，提案されている各種のアルゴリズムの理論的な圧縮性能の解析が必要である．また，ソート法は無歪みデータ圧縮にしか用いられていないが，有歪みデータ圧縮への応用も考えられる．

参考文献

[1] M. Burrows and D. J. Wheeler, A block-sorting lossless data compression algorithm, SRC Research Report 124, Digital Systems Research Center, Palo Alto, CA, 1994.

[2] M. Arimura and H. Yamamoto, Asymptotic optimality of the block sorting data compression algorithm, *IEICE Trans. Fundamentals*, E81-A (1998), 2117-2122.

[3] M. Arimura and H. Yamamoto, Almost sure convergence coding theorem for block sorting data compression algorithm, In *Proc. 1998 Int. Symp. on Inform. Theory and Its Appl.*, 286-289, Mexico City, 1998.

[4] 有村光晴, ブロックソートデータ圧縮法に関する情報理論的研究, 東大博士論文, 1999.

[5] 横尾 英俊, ブロックソートデータ圧縮法に関する考察, 電子情報通信学会論文誌, J81-A (1998), 437-444.

乱数生成と情報源符号化問題

韓 太 舜　（電通大情報システム学研究科））

In the problem of random number generation, the purpose is in general to simulate the source $\boldsymbol{Y}$ with a distribution $\boldsymbol{q}$ (*target* distribution) by using the source $\boldsymbol{X}$ with a given probability $\boldsymbol{p}$ (*coin* distribution). von Neumann [1] has considered the problem to simulate a fair random bit by repeatedly using a biased coin with an unknown distribution. Elias [2] has clarified that optimal expected number of generated fair random bits per coin toss is equal asymptotically to the entropy rate of $\boldsymbol{X}$. Vembu and Verdú [3] have shown that the optimal rate at which we can generate fair random bits from a general source $\boldsymbol{X}$ with arbitrary accuracy in the sense of some vanishing distance between the distribution of the generated codeword process and the uniform distribution is equal to $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X^n)$. On the other hand, it was conjectured for a long time that an output sequence from an optimal source code be a *uniform* random sequence, because any incompressible sequence seemingly looks like a uniform random sequence. Visweswariah *et al.* [4] and Han [5] have independently made clear that this folklore is in fact true.

On the other hand, if we impose *unequal costs* on code symbols, it is no longer optimal to use the code which minimizes the average codeword length. It is instead required to use the codes which minimize the average codeword cost. Several studies have been made on the source coding problem in this setting. Karp [6] has given an algorithm for constructing minimum-redundancy prefix codes with unequal cost symbols. Iwata *et al.* [7] have proposed an universal lossless coding algorithm for minimizing the average codeword cost for stationary sources based on the Lempel-Ziv (LZ78) code. Hereafter, we shall call the code constructed in the case with unequal cost symbols the *source code with cost.* Naturally, there would exist a bias in the frequency of code symbols generated by an optimal source code with cost. Can we then consider the optimal variable-length source code with cost as a variable-length *nonuniform* random number generator? The purpose of this talk is to demonstrate that the answer to this question is "yes".

References

[1] J. von Neumann, *Applied Math. Series*, 12 (1951), 36–38.

[2] P. Elias, *Ann. Math. Stat.*, 43 (1972), 865–870.

[3] S. Vembu and S. Verdú, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 41 (1995), 1322–1332.

[4] K. Visweswariah, S. R. Kulkarni and S. Verdu, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44 (1998), 462–471.

[5] T. S. Han, *Information-Spectrum Methods in Information Theory*, Baifukan-Press, Tokyo, 1998 (In Japanese).

[6] R. M. Karp, *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-7 (1961), 27–38.

[7] K. Iwata, M. Morii and T. Uyematsu, *IEICE Trans. Fundamentals*, E80-A (1997), 2232–2237.

On-Off Intermittency and Nonlinear Time Series Modeling

山根 敏志　(東京大学工学系研究科)

A simple form of two coupled oscillators in a synchronized state is given by

(1) $$X(n+1) = F(X(n)),$$

(2) $$Y(n+1) = G(Y(n), \mu(n)),$$

(3) $$\mu(n) = H(X(n)),$$

where the μ is a system parameter. Since the variable $X(n)$ controls the system parameter of the dynamics of $Y(n)$, the stability of $Y(n)$ changes along the time evolution of these variables.

The state in which the dynamics of $Y(n)$ is stable and the synchronized state is maintained is called laminar or off-state. On the other hand, the state in which dynamics of $Y(n)$ becomes unstable and the synchronized state is violated is called sudden busts or on-state. The random changes between on and off state is often called on-off intermittency.

In the mechanism of on-off intermittency, there exists unobservable variables $X(n)$ which control the stability of the observable variable $Y(n)$. We can introduce the notion of unobservables into the statistical time series model by replacing the equation (1) by AR(1)-process, and assuming the most simple interaction of bilinear type $G(Y(n), X(n-1)) = Y(n)X(n-1)$ for (2) and (3):

(4) $$X(n) = aX(n-1) + \varepsilon(n),$$

(5) $$Y(n) = Y(n-1)X(n) + e(n),$$

where a is a constant and $\varepsilon(n)$, $e(n)$ are sequences of independent random variables. We call this model autoregressive coefficient autoregressive model (ACA model). The behavior of this model is very similar to on-off intermittency chaos. While the unobservables in the on-off intermittency control the stability of synchronized state, the unobservable in ACA model controls the stationarity of the observable, that is if $X(n)$ enters the region of $|X(n)| \geq 1$, $Y(n)$ becomes nonstationary, which results in the burst behavior of $Y(n)$. The ACA model can be easily expanded to the generalized model of the form

(6) $$X_i(n) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} X(n-j) + \varepsilon_i(n),$$

(7) $$Y(n) = \sum_{i=1}^{q} X_i(n) Y(n-i) + e(n),$$

where a_{ij} is a constant and $\varepsilon_i(n)$, $e(n)$ are sequences of independent random variables. We call this model ACA(p,q) model. We will discuss the parameter estimation algorithm, prediction based on state space representation and its application to the data of population dynamics.

Evaluation for Convergence of Wavelet-Based Estimation on Fractional Brownian Motion

川崎 秀二,　森田 啓義　(電通大情報システム学研究科)

Two wavelet-based estimators on fractional Brownian motion (FBM) are evaluated through the large deviation principle (LDP). These are $\widehat{\sigma}_j^2$ and $\widehat{H}$, the estimator of (i) the variance of wavelet coefficients of FBM for each scale j and (ii) the Hurst parameter, respectively, where $\widehat{H}$ is obtained from the slope of the linear regression of $\widehat{\sigma}_j^2$ for a number of scales. Both estimators are shown to be consistent from the ergodic theorem. We perform detailed calculations related to LDP for stationary Gaussian processes with unbounded and non-L^2 power spectrum, to obtain L^1-estimates of the convergence of both estimators. A wavelet-based representation of the bias of the estimators is introduced and successfully used in the theory, reflecting the quantitative analysis results on FBM to the corresponding analysis of wavelet coefficients.

Let $B_H(t)$ be a FBM and let the wavelet coefficients $\{d_j(k); j,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$ of FBM be

$$d_j(k) = \int B_H(t)\overline{\psi_{j,k}(t)}dt$$

where $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k)$. Let $T_0 > 0$ be a time instant up to which FBM signal is observed. Then, the number $N_j = N_j(T_0)$ of available wavelet coefficients at scale j up to T_0 satisfied $N_j \sim 2^{-j}T_0$.

The two estimators we consider are $\widehat{\sigma}_j^2 = \widehat{\sigma}_j^2(T_0)$ and $\widehat{H}_{T_0}$, defined by

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{N_j}\sum_{k=1}^{N_j}|d_j(k)|^2, \quad \log\widehat{\sigma}_j^2 = (2\widehat{H}_{T_0} + 1)j + \text{constant}.$$

The following results are our main theorems.

Theorem 1. For $N_j = N_j(T_0)$, there exists a conctant $C_H > 0$ such that

$$E\left[\left|\frac{1}{N_j}\sum_{k=1}^{N_j-1}|d_j(k)|^2 - E[|d_j(0)|^2]\right|\right] \leq C_H \cdot 2^{(2H+(3/2))j} \cdot T_0^{-1/2}.$$

Theorem 2. There exists a conctant $\overline{C}_H > 0$ so that

$$E\left[\left|\widehat{H}_{T_0} - H|\right|\right] \leq \overline{C}_H \cdot T_0^{-1/2}.$$

These results are derived from a theorem obtained from a LDP for stationary Gaussian processes.

複数の補助情報を伴う多端子情報伝送システムの符号化

大濱 靖匡 (九州大学システム情報学研究科)

相関を持つ $L+1$ 個の無記憶情報源から発生するデータ系列を各々の地点で独立に符号化して，復号器へ送るという多端子符号化システムを考える．復号器は $L+1$ 個の情報源出力のうちのある指定された一つを復元しようとする．この場合，復号器において，残りの L 個のデータ系列は符号化された形で指定されたデータ系列の復元のための補助情報として働くことになる．復号に際しては元のデータと復元データとの間の適当な歪み尺度を考え，その平均値がある基準値以下になるようにする．このような多端子符号化システムにおいて，歪み基準値 D と各地点で行われる符号化の圧縮率からなる伝送率ベクトルのトレードオフ関係を示す領域（伝送率・歪み領域という）$\mathcal{R}_L(D)$ を陽に計算することが基本問題である．

この問題は，Many-Help-One 問題と呼ばれ，多端子情報理論の分野では２０数年近い基本的未解決問題として知られている．本稿では，この問題に関するこれまでの幾つかの結果について解説する．

有限アルファベットで歪み測度が $d(x,y)=0$ if $x=y$ and 1 else の場合を考える．この場合の Two-Help-One 問題の一例題に対する解が Körner, Marton [1] によって与えられた．彼等は問題の特殊性を最大限利用し，線形符号に基づく符号化の手法により符号化定理を証明し，領域を決定した．一方，Gelfand, Pinsker [2] は情報源が次の，CI 条件と呼ばれる，相関条件を満たす場合に注目した．

CI 条件：X_0 が与えられた条件の下で $X_1,...,X_L$ は条件付独立である．

彼等は，情報源が CI 条件を満たす場合に領域 $\mathcal{R}_L(0)$ を L 個の補助確率変数を用いた計算可能な形で陽に求めた．しかし $D>0$ の場合には，ほとんど結果が得られていない．

情報源が CI 条件を満たすガウス情報源であり，かつ歪み測度が平均２乗誤差の場合については Oohama [3] が領域 $\mathcal{R}_L(D)$ を決定した．この結果は Oohama による２つの結果 [4, 5] を特別の場合として含む．

References

[1] J. Körner and K. Marton, How to encode the module-two sum of binary sources, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 25 (1979), 219–221.

[2] S.I. Gelfand and M.S. Pinsker, Source coding with incomplete side information, *Probl. Pered. Inform.*, 15-2 (1979), 45–57.

[3] Y. Oohama, Multiterminal source coding for correlated memoryless Gaussian sources with several side informations at the decoder, in *Proc. 1999 IEEE ITW*, pp. 100.

[4] Y. Oohama, Gaussian multiterminal source coding, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 43 (1997), 1912–1923.

[5] Y. Oohama, The rate-distortion function for the quadratic Gaussian CEO problem, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44 (1998), 1057–1070.

入出力システムの埋め込み定理と非線形因果性について

池口 徹 (東京理科大学基礎工)

カオス的挙動を示す複雑な現象は，物理，工学，統計学等の様々な側面からの解析が行われている．これらの現象を決定的カオスの立場から捉えようとする時系列の手法は「カオス時系列解析」と呼ばれている [1]．このような立場に基づいて時系列信号を解析する際の基盤となるのは，埋め込み定理である [2, 3]．ある自律力学系から生じた時系列信号を観測し，時間遅れの座標を構成することにより，元の力学系と等価な情報を再構築できることが保証されている．カオス時系列解析では，これらの定理に基づいて対象とする時系列信号の特徴，例えば，アトラクタのフラクタル性，軌道不安定性などを，各々，フラクタル次元解析，リアプノフスペクトル解析等を通じて定量的に議論する．

時系列信号間の因果関係を探る研究には，例えば，岡部らのKM_2O-ランジュバン方程式論に基づく解析等があるが，ここでは，力学系の埋め込み定理の入出力システムへの拡張について考察する．以下の状況を考える．

$$
(1) \qquad \begin{cases} x(t+1) = f_\mu(x(t), u(t)) \\ u(t+1) = g(u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}
$$

但し，x は状態ベクトル．f は力学系（パラメータ μ），u は入力，g は u のダイナミクス，h を観測関数とする．このような状況において，[4, 5] で証明されている埋め込み定理を，フラクタル集合に対しても適用できる形への拡張を考える．

この定理に基づいて，以下のような状態空間

$$
(2) \qquad v(t) = \{y(t), y(t-1), ..., y(t-(m-1)), u(t), u(t-1), ..., u(t-(l-1))\}
$$

を構成し，

$$
(3) \qquad y(t+1) = F(\{y(t), y(t-1), ..., y(t-(m-1)), u(t), u(t-1), ..., u(t-(l-1))\})
$$

で定義される関数 F を考える．次元 m, l を十分高くすることで，少なくとも元のダイナミクス f と再構成ダイナミクス F の間には1対1の関係を保証することが出来る．そこで，時系列信号 y と u の間に，式 (1) のような関係があるとき，式 (2) による再構成と，

$$
(4) \qquad v(t) = \{y(t), y(t-1), ..., y(t-(m-1))\}
$$

による再構成を比較する．式 (2) による変換が埋め込みとなれば，正しく f を推定できる．Grenger [6] により，予測精度の変化に基づく時系列信号間の因果関係の存在を定義すれば，式 (2) による予測精度の向上が，y と u の間の因果関係の存在を示すことになる．

参考文献

[1] 池口，山田，小室，合原, カオス時系列解析の基礎と応用，産業図書, 1999.
[2] Takens, Lecture Notes in Math., 898, Springer, 1991, pp. 366–381.
[3] Sauer, Yorke and Casdagli, J. Stat. Phys., 65 (1991), 579–616.
[4] Stark, J. Non. Sci., 9 (1999), 255–332.
[5] Stark, Broomhead and Huke, Non. Anal., 30 (1997), 5303–5314.
[6] Grenger, Econometrica, 37 (1969), 424–438.

退化した流れに対する$\mathbf{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式論

松浦 真也　(東京大学工学系研究科)

$\mathrm{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式論は計量ベクトル空間内の流れに対する理論であり，時系列の決定解析，因果解析，予測解析などに用いられる．今回の発表では，マサニ・ウィナーの非線形予測問題を念頭におき，流れが退化している場合に注目して議論する．

$\mathbf{X} = (X(n); 0 \le n \le N)$ $(X(n) = {}^t(X_1(n), ..., X_d(n)))$ を計量ベクトル空間 W 内の d 次元の流れとする．$X(n)$ の各成分を空間 $M_0^{n-1}(\mathbf{X}) \equiv \{X_j(k); 1 \le j \le d, 0 \le k \le n-1\}$ に射影することにより，揺動流 $\nu_+(\mathbf{X}) = (\nu_+(\mathbf{X})(n); 0 \le n \le N)$ を抜き出す：

$$\nu_+(\mathbf{X})(n) \equiv X(n) - P_{M_0^{n-1}(\mathbf{X})}X(n).$$

このとき，次を満たす行列関数 $\gamma_+ = (\gamma_+(n,k); 0 \le k \le n \le N)$ が存在する：

$$X(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n,k)X(k) + \nu_+(\mathbf{X})(n) \quad (1 \le n \le N).$$

上の関係式を満たす γ_+ の全体を $\mathcal{LMD}_+(\mathbf{X})$ とおく．流れ $\mathbf{X}$ を時間反転した流れ $\mathbf{X}^{(rev)} = (X^{(rev)}(l); -N \le l \le 0)$ を考えることにより，$\mathcal{LMD}_-(\mathbf{X})$ も同様に定義される．

定理 1 (i) 流れ $\mathbf{X}$ が非退化，即ち，$\{X_j(n); 1 \le j \le d, 0 \le n \le N\}$ が一次独立ならば，$\mathcal{LMD}_\pm(\mathbf{X})$ は唯一つの元 $\gamma_\pm(\mathbf{X})$ から成る．
(ii) $\mathcal{LMD}_\pm(\mathbf{X})$ の元のうち，ノルム $\|\gamma_\pm\| \equiv (\sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \gamma_{\pm pq}(n,k)^2)^{1/2}$ が最小となる元 $\gamma_\pm^0(\mathbf{X})$ が唯一つ存在する．

元 $\gamma_\pm^0(\mathbf{X})$ 流れ $\mathbf{X}$ に付随する$\mathrm{KM_2O}$-ランジュヴァン散逸行列関数の呼び，流れ $\mathbf{X}$ の時間発展を記述する方程式

$$X(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+^0(n,k)X(k) + \nu_+(\mathbf{X})(n) \quad (1 \le n \le N),$$

$$X(N-n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-^0(n,k)X(N-k) + \nu_-(\mathbf{X}^{(rev)})(n) \quad (1 \le n \le N).$$

を，流れ $\mathbf{X}$ に付随する $\mathrm{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式という．

$\gamma_\pm^0(\mathbf{X})$ を具体的に求めるために，任意の正数 w に対して，$\mathbf{X}^w = (X^w(n))$ を

$$X^w(n) \equiv X(n) + w\xi(n) \quad (0 \le n \le N)$$

で定義する．ここで，$\xi = (\xi(n))$ は$\mathbf{X}$ と直交する非退化な流れである．

定理 2 (i) 流れ $\mathbf{X}^w$ は非退化 $(w > 0)$．
(ii) 極限 $\gamma_\pm^0(\mathbf{X};\xi) \equiv \lim_{w\to 0} \gamma_\pm^0(\mathbf{X}^w)(n,k)$ が存在し，$\gamma_\pm^0(\mathbf{X};\xi) \in \mathcal{LMD}_\pm(\mathbf{X})$.
(iii) ξ がホワイトノイズ流，即ち，$(\xi(m), {}^t\xi(n)) = \lambda\delta_{mn}I$ のとき，$\gamma_\pm^0(\mathbf{X};\xi) = \gamma_\pm^0(\mathbf{X})$.

定理 3 W を $\dim W > (N+1)d$ なる計量ベクトル空間とし，$\xi = (\xi(n))$ を W 内の非退化な d 次元の流れとする．このとき，$(M_0^N(\xi))^\perp$ 内の任意の流れ$\mathbf{X} = (X(n))$ に対して $\gamma_\pm^0(\mathbf{X};\xi) = \gamma_\pm^0(\mathbf{X})$ が成り立つならば，ξ はホワイトノイズ流である．

非線形情報解析と非線形予測問題について

岡部 靖憲 (東京大学工学系研究科)

Masani-Wiener は論文 [1] において，次の条件 (SS), (B), (M), (P) を満たす1次元確率過程 $\boldsymbol{X} = (X(n); n \in \boldsymbol{Z})$ に対して，その非線形予測子を求める公式を与えた：

(SS) 強定常性

(B) 有界性：$\exists c > 0$; $|X(n)(\omega)| \le c$ ($n \in \boldsymbol{Z}$, a.s. $\omega \in \Omega$)

(M) 平均はゼロ：$E(X(n)) = 0$ ($n \in \boldsymbol{Z}$)

(P) 任意個数の $n_j \in \boldsymbol{Z}$ $(1 \le j \le p)$, $n_1 < \cdots < n_p$, に対して，確率分布 $P_{(X(n_1),\ldots,X(n_p))}$ の支えのルベーグ測度は正

しかし，上記論文と Wiener 選集に述べられているように，

(i) 条件 (B), (P) を緩める

(ii) 非線形予測子を求める「workable and computable」なアルゴリズムを与える

という非線形予測子問題が残され，長い間未解決であった．

この講演では，Dobrushin-Minlos の多項式汎関数に関する研究 [2] の結果を用いて条件 (B) を次の条件 (E)：

(E) 任意の n $(l \le n \le r)$ に対して，次の条件を満たす正数 $\lambda_0(n)$ が存在する：
任意の実数 λ $(|\lambda| \le \lambda_0(n))$ に対して

$$E(\exp\{\lambda X(n)\}) < \infty$$

に置き換え，退化した流れに対する KM_2O-ランジュヴァン方程式論を用いることによって条件 (P) は全く必要がなく，上記の非線形予測問題を完全に解決する ([7])．

非線形情報空間を生成する確率過程として，上の研究では多項式を用いているが，この講演では動径基底関数，ウエーブレットを用いることについても触れる．

[1] P. Masani and N. Wiener, Non-linear prediction, Probability and Statistics, The H. Cramér Volume, John Wiley, 1959, 190–212.

[2] R. L. Dobrushin and R. A. Minlos, Polynomials in linear random variables, Russian Math. Surveys, 32:2 (1977), 71–127.

[3] Y. Okabe and T. Ootsuka, Application of the theory of KM_2O-Langevin equations to the non-linear prdediction problem for the one-dimensional strictly stationary time series, J. Math. Soc. Japan, 47 (1995), 349–367.

[4] Y. Okabe, On the theory of KM_2O-Langevin equations for stationary flows (1): characterization theorm, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[5] Y. Okabe, ______ (2): construction theorem, to appear in the special volume in honor of the 70th birthday of Prof. T. Hida.

[6] Y. Okabe and M. Matsuura, ______ (3): extension theorem, to appear in Hokkaido Math. J..

[7] M. Matsuura and Y. Okabe, On a non-linear prediction problem for one-dimensional stochastic processes, in preparation.

多次元の非線型因果解析と非線型予測解析について

金子 明人　(北海道大学理学研究科)

$\mathbf{X} = (X(n); 0 \leq n \leq N)$ を，確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で定義された，1次元確率過程とする．$\mathbf{X}$ の非線型予測子は次のように定義される：

$$P_{N_0^{n-1}(\mathbf{X})} X(n)$$

この非線型予測子の定義では，$\boldsymbol{X}$ 以外の情報は一切使われていない．

一方，現実の世界では単独で閉じた系を構成しているのは希で，通常他の系から何らかの影響を受けつつ時間発展していると考えられる．その開放系の中で調べる対象とする時系列 $\mathcal{X}$ のダイナミクスを推定したり，その未来を予測する際に，$\mathcal{X}$ に影響を及ぼしている別の時系列 $\mathcal{Y}$ を用いれば，$\mathcal{X}$ に対して，より予測精度の高い解析が行えるはずである．

$\mathbf{Y} = (Y(n), n \leq n \leq N)$ を $\mathbf{X}$ に何らかの意味で“影響を及ぼしている”d 次元の確率過程とする．この時 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ の非線型の情報を用いた $\mathbf{X}$ の予測子は以下のように定義される：

$$P_{N_0^{n-1}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} X(n)$$

ただし

$$N_0^{n-1}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \{f \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P);\ f \text{ は } \mathcal{B}_0^{n-1}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\text{-可測}\}$$
$$\mathcal{B}_0^{n-1}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \sigma(X(k), Y_j(k); 0 \leq k \leq n-1,\ 1 \leq j \leq d)$$

本講演では，この予測子を構成する際に基礎となる，多次元の非線型因果解析の理論について解説する．そして，上で述べた“影響を及ぼす”という点について，多次元となって初めて現れる“弱い意味”の因果解析を行うことによって確認し，非線型予測子がどのように計算されるかについて説明する．

また実データを使用した実験を通して，あるデータに影響を及ぼすと考えられるデータの候補がいくつかある時に，その中で一番影響を及ぼすと考えられるデータを選択する方法を提案し，その方法を用いる予測の有効性について検討する．この実験においては，エルニーニョに関連したデータを用いる．

なお，本研究は岡部靖憲教授との共同研究である．

Predictions in Nonlinear Sciences and Time Series Analysis

尾崎 統　(統計数理研究所)

The behavior of chaotic processes generated by relatively simple dynamical systems is the subject of ongoing research in complex systems. Many researchers in these fields are scientists with backgrounds in physical sciences and engineering interested in constructing simple non-linear models to simulate complex phenomena in natural and social sciences.

On the other hand, a major concern of traditional statistical time series analysis has been the model estimation, prediction and control of linear and nonlinear time series generated from stochastic processes. Models for prediction and control of multivariate systems often involve complex feedbacks among the variables. Linear models have been useful in producing good results in real applications such as control of power plant boilers or cement rotary kilns. With the development of Akaike's Information Criterion, the linear time series approach has made remarkable progress in the last few decades.

Since the late 1970's, however, new types of time series data, often with very nonlinear and complex patterns of oscillation, for example limit cyclic nonlinear vibrations in mechanical engineering, EEG data taken from epileptic subjects or ECG data in biomedical sciences, have lead statistical time series analysts to the development of non-linear and non-stationary time series models. Here, although their main concern is still model estimation, prediction and control, checking whether an "estimated" model generates time series "similar" to the real data is also an important issue.

It is easy to contrast statistical time series analysis and chaos time series analysis born from physics. However, it is more productive to find similarities in the two approaches which will help to solve many difficult problems arising from sciences. In the present talk I would like to show that the concept of "prediction" can still play an important role in yielding useful applications by bringing the classic time series methods and models in modern nonlinear sciences together.

地球温暖化と大気変動に対する非線型時系列解析について

金子 明人 (北海道大学理学研究科), 山根 敏志 (東京大学工学系研究科)
松浦 真也 (東京大学工学系研究科), 岡部 靖憲 (東京大学工学系研究科)

現在では“地球温暖化”や“エルニーニョ”という言葉は広く知られている．これらの気象現象は，天候の変化だけでなく我々の社会生活にも間接的，直接的に少なからず影響を及ぼすからである．

これらの地球規模の気象現象を解析するために，世界規模での観測態勢が採られている．海上に観測機器を付けたブイや人工衛星を用いて海水温度，気温，気圧，湿度など，さまざまなデータが蓄積されている．また，規模が大きいため，国家的プロジェクトとして行なわれている．加えて，歴史的な観点からの研究も行なわれており，考古学的データも使用されることがある．

これらのデータは，例えば，地球規模の大気の流体方程式を解く際の初期値や，生命現象や社会現象を考える際の重要な資料として用いられている．

本講演では，これらのデータに対して KM_2O-ランジュヴァン方程式論をベースとする時系列解析的な手法で解析を行なう．この手法を用いることで，データの定常性・決定性，データ間の因果関係の有無を調べることが可能であり，データの時間発展を与えるダイナミクスを推定し，そのダイナミクスに基づく将来の予測を行なう．重要な点は，データの背後に隠された性質をチェックすることにより，客観的に判断を行なうことができることである．

具体的に使用するデータとしては，ペルー沖海水温度，タヒチやダーウィンの気圧，また世界各地点での気温，気圧等との関連性やそれ自身のダイナミクスについて解析を行ない，地球温暖化の原因を探りたい．また，地点別の気温と気圧との間の因果解析の結果と，その地点での気象条件についての関連性について検討を行なう．

The Impact of ENSO Event on Japanese Climate

守田 治　（九州大学理），　中野 裕治　（滋賀大学経済）

時系列間の因果性は，Granger によって定義されたものがよく知られている．岡部は，KM_2O -Langevin 方程式の理論を構築し，Okabe-Inoue（Nagoya M.J.,1994）により新しい因果の定義を与え，Okabe-Yamane (Nagoya M.J.,1998) によって，非線形因果解析を発展させた．

Nakano(Hokkaido M.J.,1995) は，局所因果性を定義し，その実証法を提案している (preprint)．

本報告では，局所因果解析法をエルニーニョ・南方振動現象（ENSO）と日本の気象との関係に適用し，ENSO が日本の気象にどのように影響しているか調べた結果を述べる．

解析に用いたデータは熱帯太平洋の４つの海域NINO1+2, NINO3, NINO3.5, NINO4の海水面温度（SST），南方振動指数 (SOI, タヒチとダーウィンの海面気圧差）と日本各地の気圧・気温・降水量で，1951年1月から1997年12月までの月平均値である．

データに一切の手を加えずに解析を行うと，ENSO と日本の気象との間には影響関係が見られなかったが，これは後者に対して太陽入射エネルギーの季節変化が強く影響しているためと考えられる．

次に，季節変動を取り除くために，日本の気象データに関しては，全期間にわたる各月の平均値からの偏差をとり，ENSO データと比較した．結果の一部を要約する：

(1) 鹿児島の月平均気圧偏差に対してはNINO3.5 と NINO4 の SST が影響を及ぼしているが，NINO1+2 と NINO3 の SST は影響を与えていなかった．

(2) 南鳥島の月平均気圧偏差に対しては全海域の SST と SOI が強い影響を及ぼしており，逆に南鳥島の月平均気圧偏差はNINO3.5 と NINO4 の SST に強い影響を及ぼしている．

(3) 鹿児島の月平均気温偏差はNINO4 の SST に強い影響を及ぼしており，NINO4 の SST は鹿児島の月平均気温偏差に弱い影響を与えている．

(4) 南鳥島の月平均気温偏差はNINO4 の SST から弱い影響を受けている．

(5) 南鳥島の月降水量偏差はNINO1+2 の SST に強い影響を与えている．

以上の結果は，日本の気象観測点と熱帯太平洋の海域との距離に応じて影響関係が現われており，妥当なものと思われる．

13. 生物現象と非線形微分方程式

平成１１年１１月１０日(水)～１１月１２日(金)

於広島大学理学部

責任者：平良和昭、岩田耕一郎

1999年

1. 川東 真人（横浜国大工），佐藤 一憲（静岡大工），今野 紀雄（横浜国大工）：植生遷移モデルにおける定常分布，相図，相関不等式
2. 今野 紀雄（横浜国大工）：コンタクトプロセス型モデルの相関不等式とペア近似
3. 守田 智（静岡大工）：結合カオス写像系の集団運動
4. 稲葉 寿（東京大数理）：人口と伝染病の数理
5. 竹内 康博（静岡大工）：数理生物モデルにおける安定性とパーマネンス（存続）
6. 泰中 啓一（静岡大工）：囚人のジレンマゲームのメタ個体群動態
7. 伊藤 栄明（統計数理研究所）：種分化の確率モデルと粒子系
8. 梅津 健一郎（前橋工科大学 工）：非線形境界条件に対する人口動態モデルの正値解の挙動
9. 橋本 康（東京大総合文化）：Mutation による Hetero-clinic カオスの摂動

川東氏、佐藤氏、今野氏は植生遷移モデルとして各サイトが3状態を持つ $\mathbb{Z}^2$ 上の連続時間マルコフ過程をとりあげ、それをMonte Carloシミュレーションにより解析し、Harris-FKG不等式は成立するがBFKL不等式については明確な規則性は見られないこと、３種共存領域の存在とその臨界線は平均場近似によるものと類似していることならびに定常分布の初期状態依存性は平均場近似によるものとほぼ一致していることを報告した。今野氏はコンタクト・プロセス型モデルにおける絶滅確率に関してはHarris-FKG不等式、BFKL不等式などの相関不等式が知られていてこれらを応用して臨界値や生存確率の評価が得られることにふれた後で、非吸収的ないし多状態の場合の相関不等式を巡る課題を報告した。守田氏には写像で表現されるカオス的ダイナミカルユニットをその平均場によって相互作用させたものすなわち大域結合写像系によって集団運動生成の原理について報告していただいた。稲葉氏には年齢構造、空間構造や生理的な内部構造を持つ人口集団の数理モデルおよび感染症の予測と解析のための数理モデルのサーベイをした後、線形の古典的人口モデルおよび非線形モデルの例としてペア形成モデルならびに人口レベルにおける古典的なSIR型モデルや最近のエイズモデルなどを紹介いただいた。竹内氏には生態系で生物種の共存を表す基本的な概念である安定性とパーマネンスの解説の後、ロトカ・ボルテラモデルについて大域的に安定な非負の平衡点を持つための十分条件とそれを満たす系の構造ならびにパーマネンスであるための必要条件、十分条件を報告していただいた。泰中氏には島モデルと格子モデルを使ってメタ個体群動態を取り扱うとALL C戦略がALL D戦略を完全に打ち負かすという「相転移」が起きることについて報告していただいた。伊藤氏はグラフの構造を反映したrandom samplingによる相互作用を持つ多粒子系について報告した。梅津氏は人口動態モデルに現れる半線形楕円型方程式を非線形境界条件のもとで考えその自明解が不安定な場合の最小正値解の片側漸近安定性と拡散係数が大きいときの挙動を報告した。橋本氏はchaoticなヘテロクリニックネットワークをattracting setに持つようなLotka-Volterra系にmutationを導入すると別のchaoticな遷移現象が生じることとmutation rarteの大きさに応じてその性質が変化する様を報告した。

植生遷移モデルにおける定常分布, 相図, 相関不等式

川東真人 (横浜国大工)(1), 佐藤一憲 (静岡大工)(2), 今野紀雄 (横浜国大工)(3)

(1) masato@lam.osu.sci.ynu.ac.jp
(2) sato@sys.eng.shizuoka.ac.jp
(3) norio@mathlab.sci.ynu.ac.jp

§1 はじめに

本研究では, Sato and Konno [1] により導入された, 植生遷移モデルのクラスについて検討する. このクラスの特別な場合には, Matsuda, Ogita, Sasaki and Sato [2] によって, ペア近似とシミュレーションを用いて, また Durrett and Swindle [3], Durrett and Schinazi [4], Durrett [5], Schinazi [6] によって, 数学的に解析がされている. このような状況をふまえて, 我々は, Monte Carlo シミュレーションにより, 以下の 3 つの事柄について解析を行った.

(1) Harris-FKG 及び BFKL 不等式の解析
Harris-FKG 不等式は以下のようなタイプをいう:

$$\frac{\rho(ij)}{\rho(j)} \leq \rho(i), \qquad \frac{\rho(ij)}{\rho(j)} \geq \rho(i) \qquad (i,j \in \{0,1,2\}). \tag{1}$$

この不等式は, 最近接にある 2 サイト間の相関を表している. 具体的には, 状態 i の確率 $\rho(i)$ と, 状態 j の隣に状態 i が存在する確率 $\rho(ij)$ を比較するものである. 一方, BFKL 不等式は以下のようなタイプをいう:

$$\frac{\rho(ijk)}{\rho(jk)} \leq \frac{\rho(ij)}{\rho(j)}, \qquad \frac{\rho(ijk)}{\rho(jk)} \geq \frac{\rho(ij)}{\rho(j)} \qquad (i,j,k \in \{0,1,2\}). \tag{2}$$

この不等式は, 隣接 3 サイト間の相関を表す. つまり, 状態 j の隣に状態 i が存在する確率と, 状態 j 及び k の隣に状態 i が存在する確率 $\rho(ijk)$ を比較するものである (Belitsky, Ferrari, Konno and Liggett [7] 参照).

(2) パラメータを変化させたときの, 定常分布を表す相図の作成. 特に, 3 種共存領域の存在とその臨界線について

(3) 平均場近似と初期状態依存性を表す定常分布のグラフの作成

§2 モデルの説明

$\mathbf{Z}^2$ の各サイトは, $0,1,2$ の 3 状態をとる. 0 は空地に, 1,2 はそれぞれ陽樹, 陰樹が存在する場合に対応する. このモデルは, $\{0,1,2\}^{\mathbf{Z}^d}$ に値をとる連続時間のマルコフ過程で, ダイナミクスは以下で与えられる.

(Rule 1) $1 \to 0$, 遷移率 1

(Rule 2) $2 \to 0$, 遷移率 1
(Rule 3) $0 \to 1$, 遷移率 $\lambda \times n(1)$
(Rule 4) $0 \to 2$, 遷移率 $\alpha \times \mu \times n(2)$
(Rule 5) $1 \to 2$, 遷移率 $\mu \times n(2)$

ここで，$\lambda, \alpha, \mu \geq 0$ であり，また，$n(1), n(2)$ は，それぞれ着目しているサイトの最近接の 1,2 の数を表す．

§3 結果及び今後の課題

Monte Carlo シミュレーションを，様々な初期状態から始め 1500 step まで続ける．格子サイズは $100 \times 100 = 10000$ である．相図については，平均場近似の結果と定性的に類似した結果になった．次に，$\alpha = 0, 1$ の場合に，相関不等式についての結果をまとめると以下のようになる．

初めに，Harris-FKG タイプの相関不等式については，以下のことが成り立つと予想される．

$$\frac{\rho(ii)}{\rho(i)} \geq \rho(i), \tag{3}$$

$$\frac{\rho(ij)}{\rho(i)} \leq \rho(j) \qquad \text{for } i \neq j. \tag{4}$$

次に，BFKL タイプの相関不等式については，上式で見られるような明確な規則性は見られなかった．また，定常状態では，解析した範囲ではどのような初期状態から始まっても，平均場近似の結果とほぼ一致した結果となり，このことは大変興味深い．

今後は，このクラスの特殊な場合について，数学的手法を用い解析的な結果が出るようにしたい．

最後に，本研究に対してご指導いただいた，今野先生，佐藤先生に感謝します．

参考文献

[1] K. Sato and N. Konno, Successional dynamical models on the 2-dimensional lattice space, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. **64**, pp. 1866-1869, 1995.
[2] H. Matsuda, N. Ogita, A. Sasaki and K. Sato, Statistical mechanics of population, *Prog. Theor. Phys.*, **88**, pp.1035-1049, 1992.
[3] R. Durrett and G. Swindle, Are there bushes in a forest ?, *Stoc. Proc. Appl.*, **37**, pp.19-31, 1991.
[4] R. Durrett and R. Schinazi, Asysmptotic critical value for a competition model, *Ann. Appl. Prob.*, **3**, pp.1047-1066, 1993.
[5] R. Durrett, *Ten Lectures on Particle Systems*, St. Flour Lecture Notes, 1993.
[6] R. Schinazi, On an interacting particle system modeling an epidemic, *J. Math. Biol.*, **34**, pp.915-925, 1996.
[7] V. Belitsky, P. A. Ferrari, N. Konno and T. M. Liggett, A strong correlation inequality for contact processes and oriented percolation, *Stoch. Proc. Appl.* Vol. **67**, pp.213-225, 1997.

コンタクト・プロセス型モデルの相関不等式とペア近似

今野 紀雄 (横浜国大工)

norio@mathlab.sci.ynu.ac.jp

本講演では，コンタクト・プロセス型モデルということで，可算集合上，例えば，d 次元の超立方格子やツリー上で定義できる，連続時間の所謂コンタクト・プロセス（空間的に非一様でも構わない，詳細は講演中に述べる）や，1次元の方向性をもつパーコレーションの場合に成立する相関不等式と，それから得られるペア近似の正当化の話を中心に述べる（コンタクト・プロセスは，1974年に T.E.Harris [1] によって導入された．また，コンタクト・プロセス周辺の話を扱った著書を幾つか挙げておく [2-6]）．

以下話を簡単にするために，ここでは1次元の（basic）コンタクト・プロセスに話を限定する．適用限界については，講演中に適宜指摘することにする．

まず，$\sigma(A)$ は，初期状態として病人の集合を A としたとき，時間発展しても病人がずっと存在し続ける，病人の生存確率とする．この生存確率 $\sigma(A)$ に対して，$\nu(A) = 1 - \sigma(A)$ なる量を考える．これは，A から出発した病人の集合が早晩空集合になる，つまり病人が絶滅する確率をあらわしている．この病人の絶滅確率に対して，以下のような幾つかの相関不等式が知られている．

（1）Harris-FKG 不等式（T.E.Harris [7]）

統計物理学で有名な FKG 不等式 [8] のコンタクト・プロセス版を用いることにより，つぎの相関不等式がえられる．

$$\nu(A \cup B) \geq \nu(A)\nu(B)$$

但し，A, B は任意の集合である．以下も同じ．

（2）Submodularity（T.E.Harris [1]).

$$\nu(A \cap B) + \nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B)$$

（3）BFKL 不等式（V.Belitsky，P.A.Ferrari，N.Konno and T.M.Liggett [9]）

最近我々は上記2つの相関不等式を精密化した、以下の新しいタイプの不等式を得ることに成功した．

$$\nu(A \cap B)\nu(A \cup B) \geq \nu(A)\nu(B)$$

この新しいタイプの不等式を、本稿では「BFKL 不等式」と呼ぶことにしよう．BFKL 不等式は、コンピュータ・シミュレーションの結果をもとに，数理生物学の分野で用いられていた「ペア近似」[10-12] の一部を数学的に正当化したことにも成功している．

上記3種の相関不等式の応用としては，これらを用いることにより臨界値 λ_c の下限や一点から出発した生存確率 $\rho(\lambda)$ の上限を求めることが出来ることである．この相関不等式を用いる方法（相関不等式法）以外にも幾つか別の手法も知られているが，相関不等式法が他の方法に比べて，比較的議論の道筋が分かり易く，見通しが良い場合が多い．例えば，文献 [13-16] を参照．

一方，臨界確率 λ_c の上限や生存確率 $\rho(\lambda)$ の下限を求めるために必要な相関不等式も予想されているが，残念ながら証明は成功していない．ここで説明している1次元コンタクト・プロセスの場合には，シミュレーションにより既に検討が行われており，成立することが示唆されている（A.Y.Tretyakov, V.Belitsky, N.Konno and T.Yamaguchi [17] ）．この相関不等式は，1978年に，R.Holley and T.M.Liggett [18] が，更新測度を用い，1次元のコンタクト・プロセスの臨界値に関する，当時としては驚異的に良い上限を与えた手法に深く関係している．

しかし，この強力な相関不等式法にも今後の課題として幾つかの問題点が存在する．それを述べる前に，コンタクト・プロセスが相関不等式法（特に，BFKL 不等式）になじむ理由について考えてみよう．実は少なくとも以下３つの理由が存在する．

第１は，コンタクト・プロセスが吸収的（attractive）という性質を持っていることである．この性質は，健康な人は健康な人どうしかたまり易く，逆に病人どうしもかたまり易いという性質である．磁性体のモデルをご存知の方は，「強磁性」に対応する性質である．

第２は，コンタクト・プロセスが $\{0,1\}$ という２状態をとるプロセスであること．従って，$\{0,1,2\}$ のように３状態やそれ以上の状態数をとるモデルに対しては、残念ながら上記に対応する相関不等式はほとんど知られていない．例えば，多状態の無限粒子系は，多種生物が存在する生態系の環境問題とも密接に関係し，ある種の絶滅確率が評価できることは，重要だと考えられる．

第３は、コンタクト・プロセスは一旦全ての格子点で健康な人になってしまうと，それ以降ずっと健康な人だけの世界になるという性質である．(この性質により，詳細釣り合いの条件を満たさず，全てが健康人であるという以外の，自明でない定常分布の形の見当がつかない.)

上記のことを考慮しつつ，相関不等式法の課題，及びそれに対する最近の我々の研究について，以下簡単に述べてみたい．

相関不等式法の今後の課題としては，特に上で述べた２つの性質「吸収的」,「２状態」のいずれかの性質が欠けたときに，相関不等式が成立するのか，ということである．

まず第１番目の吸収的という性質に関連して，上記２つの不等式（Harris-FKG 不等式と BFKL 不等式）が非吸収的な場合でも成立するのか，検討中である．具体的には，離散時間の確率セルオートマトン（Domany-Kinzel model とも呼ばれる [19,20]）において，特別な A，$B(\subset 2\mathbf{Z})$（例えば $A=\{0\}$，$B=\{2\}$ や，$A=\{-2,0\}$，$B=\{0,2\}$）の場合に，モンテカルロ・シミュレーションを行っている．その結果，Harris-FKG 不等式の場合は，非吸収的な場合でも成立している可能性が高いことが分かった．一方，BFKL 不等式の場合は現段階では微妙で，どちらとも決められない状況である (S.Takahashi, A.Y.Tretyakov and N.Konno [21])．

また，Harris の補題 [7] を用いる議論によっても，ある種の Harris-FKG 不等式の成立は示唆されることが分かっている（N.Konno [22]）．

個人的には，今まで Harris-FKG 不等式や BFKL 不等式は，吸収的な場合にのみ成り立つようなイメージを持っていた．しかし，上記のシミュレーションの結果などを検討すると，どうもそうではなく，もっと一般に非吸収的な場合でも成立するようである．むしろ，成立するための条件として重要なのは，コンタクト・プロセスの場合には，伝染過程に対応する，隣りに粒子を生成するルールの存在の方である可能性が強い．

第２番目の多状態の場合にどうなるかということに関連して，最近我々は２次元格子上の３状態のサイクリック系や植生遷移モデル（共に非吸収的モデル）に対する Harris-FKG タイプの不等式や BFKL タイプの不等式についても，モンテカルロ・シミュレーションを中心に研究を始めている．いずれの場合も， 同種がかたまりやすいという意味で，両タイプの不等式は成立しているようである (M.Urano, N.Konno and K.Sato [23]，M.Kawahigashi, N.Konno and K.Sato [24])．特に，植生遷移モデルに関しては，本講演の前の発表「植生遷移モデルにおける定常分布, 相図, 相関不等式（川東真人 (横浜国大工), 佐藤一憲 (静岡大工), 今野紀雄 (横浜国大工)」にて詳しく述べられる予定である．

以上のような，非吸収的や多状態の場合にも，Harris-FKG タイプの不等式や BFKL タイプの不等式を証明することは，今後の課題である．また，吸収的な場合に，T.M.Liggett [25] が導入した total positivity の概念に基づき，BFLK 不等式を拡張した不等式が成立するかについては，興味深い問題である．

参考文献

[1] Harris, T.E., Contact interactions on a lattice, Annals of Probability, 2(1974),969-988.

[2] Liggett, T.M., Interacting Particle Systems, Springer-Verlag, New York, 1985.

[3] Durrett, R., Lecture Notes on Particle Systems and Percolation, Wadsworth, Inc., California, 1988.

[4] Konno, N., Phase Transitions of Interacting Particle Systems, World Scientific, Singapore, 1994.
[5] Schinazi, R.B., Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser, Boston, 1998.
[6] Liggett, T.M., Stochastic Interacting Systems - Contact, Voter, and Exclusion Processes, Springer-Verlag, New York, 1999.
[7] Harris, T.H., On a class of set-valued Markov processes, Annals of Probability, 4(1976),175-194.
[8] Fortuin, C. M., Kasteleyn, P. W., and Ginibre, J., Correlation inequalities on some partially ordered sets, Communications in Mathematical Physics, 22(1971),89-103.
[9] Belitsky, V., Ferrari, P.A., Konno, N., and Liggett, T.M., A strong correlation inequality for contact processes and oriented percolation, Stochastic Processes and Applications, 67(1997),213-225.
[10] Matsuda, H., Ogita, N., Sasaki, A., and Sato, K., Statistical mechanics of population - the lattice Lotka-Volterra model, Progress of Theoretical Physics, 88(1992),1035-1049.
[11] 佐藤一憲, 生態学における格子モデルーペア近似の有効性, 日本生態学会誌, 45(1995),247-258.
[12] 巌佐庸, 生態学における格子モデル, 日本物理学会誌, 53(1998),319-326.
[13] Konno, N., Lecture Notes on Harris Lemma and Particle Systems, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1996.
[14] Konno, N., Lecture Notes on Interacting Particle Systems, Rokko Lectures in Mathematics, No.3, Kobe University, March 1997.
[15] Konno, N., Correlation inequalities and particle systems, Proceedings of Percolation Theory and Particle Systems '96,(1997),89-111.
[16] 今野紀雄, 無限粒子系の数理ーコンタクトプロセスの相転移現象, トライボロジスト, 43(1998),696-701.
[17] Tretyakov, A.Y., Belitsky, V., Konno, N., and Yamaguchi, T., Numerical estimation on correlation inequalities for Holley-Liggett bounds, Memoirs of the Muroran Institute of Technology, 48(1998),101-105.
[18] Holley, R., and Liggett, T.M., The survival of contact processes, Annals of Probabability, 6(1978),198-206.
[19] Domany, E., and Kinzel, W., Equivalence of cellular automata to Ising models and directed percolation, Physical Revew Letters, 53(1984),311-314.
[20] 今野紀雄, ある無限粒子系の局所性と大域性ー Domany-Kinzel モデルの相転移現象, 数理科学, 10 月号 (1999),37-43.
[21] Takahashi, S., Tretyakov, A.Y., and Konno, N., Positive correlation inequalities for nonattractive stochastic cellular automata, Proceedings of International Workshop on Soft Computing in Industry '99,(1999),474-478.
[22] Konno, N., Upper bounds on survival probabilities for a nonattractive model, Journal of the Physical Society of Japan, 66(1997),3751-3755.
[23] Urano, M., Konno, N., and Sato, K., Correlation inequalities for 3-state cyclic advantage model, Proceedings of International Workshop on Soft Computing in Industry '99,(1999),86-91.
[24] Kawahigashi, M., Konno, N., and Sato, K., Correlation inequalities for successional model, Proceedings of International Workshop on Soft Computing in Industry '99,(1999),479-484.
[25] Liggett, T.M., Total positivity and renewal theory, Probability, Statistics and Mathematics: Papers in Honor of Samuel Karlin, Academic Press, (1989), 141-162.

結合カオス写像系の集団運動

静岡大学 工学部　　守田 智

自然界で見られる運動をシミュレーションによって解析するという手法は、計算機の飛躍的発展に伴い重要視されるようになっている。精密な仮定に基づくシミュレーションにより実際に存在する対象を計算機上でリアルに再現することができる。その一方、現象を系統的に理解していくためには、むしろ本質的な性質だけを抜き出した抽象的なモデルを用いること有効であると考えられる。抽象的なモデルを解析することから複雑な現象にひそむ普遍的な性質を見出したり、新たな概念で分類したりすることができると期待される。

系がカオス的な場合には、決定論的に記述されているにもかかわらず、予測不可能な乱雑な振舞を見せる。その一方で確率的なランダムノイズは見られない秩序が内在する事が分かっている。よく知られているカオス系は少数自由度のものであるが、自然界に見られる運動が少数自由度のモデルで記述できる保証はない。そこで 全体系がいくつかの部分系から成り立ち、その部分系自身がそれぞれ (少数自由度の) カオス的な運動を持つ場合を想定する。多くのカオス的ダイナミクスを持つユニット (カオス素子) が相互作用しながら時間発展する結合力学系モデルを考える。このモデルでは、局所的に与えられた微小な誤差が部分系のカオス的性質によって増幅され全体に広がっていく状況を再現できる。このような状況は、自然界に普遍的に存在していると考えられる。部分系だけでもカオス的なダイナミクスを持つことから系全体では自由度の大きいカオス系になりえる。

数理モデルとして 大域結合写像系 (Globally Coupled Maps) を用いた場合を考える。大域結合写像系とは、写像で表現されるダイナミカルユニットをその平均場によって相互作用させたものである。最近接素子だけの結合で相互作用を入れた Coupled Map Lattice が近距離相互作用の極限モデルと考えられる一方、 Globally Coupled Maps は 長距離相互作用の極限モデルであると考えられている。大域結合写像系は、簡単な形をしているにも関わらずさまざまな複雑な運動を呈することが知られており、そのうちいくつかを紹介をする。特に集団運動生成の原理について考察する。

人口と伝染病の数理 '99

東京大学大学院数理科学研究科 稲葉 寿 (Hisashi INABA) [1]

人間や生物個体群の動態を数学的に記述しようという試みは長い歴史をもっており、少なくとも１３世紀のフィボナッチ(Fibonacci, 1202)による兎の増殖モデルにまで遡ることができる。その後１７世紀にはグラントやハレー等によって生命表が作製されて人間の寿命や死亡の法則性があきらかにされるようになった。さらにオイラー(Euler, 1760)は年齢構造のある人口の増加モデルを考察して、それが漸近的に幾何学的な成長をおこなうことを初めて示した。人口の幾何学的な成長という概念は有名なマルサスの「人口論」(初版、1798)によって広く受容されるようになった。

今世紀にはいって年齢構造のある人間人口の数理モデルはボルトキヴィッチやロトカ(1907)などによって再び研究されるようになり、Sharp and Lotka (1911)によって初めて更新過程(renewal process)として明確に定式化された。この後、シャープ・ロトカのモデルはロトカ自身によって様々に発展させられ、またフェラー(1941)によって主要命題に厳密な数学的証明が与えられるに至り、安定人口理論(stable population theory)として数理人口学(mathematical demography)における基本的なフレームとなった。ロトカ等はその理論をもっぱら積分方程式によって定式化していたが、後にMcKendrick (1926)、Von Foerster (1959)はそれぞれ独立に年齢分布関数に対する偏微分方程式を提出し、これによって連続時間の安定人口モデルは偏微分方程式の初期値・境界値問題として考察される道が開かれた。

安定人口モデルは人口学の分野において実用的にも非常な有効性を示してきたが、その線形性、単性という隘路を突破する試みについては以外にも７０年代に至るまでほとんど見るべきものがなかった[2]。しかし1974年にGurtin and MacCamyによる非線形モデルの研究が出現すると様相は一変し、数学者、数理生物学者によって年齢構造、空間構造や様々な生理的な内部構造をもつ人口集団の数理モデル(structured population dynamics)が組織的に研究されるようになった(Metz and Diekmann 1986, Iannelli 1995, Cushing 1998)。この過程でエポックメイキングであったのはWebb (1984)によるシャープ・ロトカ・フェラーの古典的結果の半群理論による現代的な証明の提出であった。Webb (1985)はさらに非線形の年齢構造化人口モデルに対して半群による組織的な研究をおこなった。一般に構造化人口モデルに典型的に現れる発展方程式の微分作用素が半群を生成することを示すのは必ずしも容易ではない。さらに解の線形化安定性や分岐を扱うために、こうした非線形半群を線形半群の摂動として構成する（一般化された定数変化法の公式）ことに関心がもたれ、こうした観点から摂動論的な方法が様々に提案され、半群理論の発展に対するひとつの動機付けを提供した(Clément, et al. 1987-1989; Desch, Schappacher and Kang Pei Zhang 1989; Diekmann, et al. 1993, 1995; Greiner 1989; Thieme 1990, 1991)。しかしながら微分可能性という現象にとっては必ずしも必然的ではない数学的要請を回避するために、最近ではDiekmann, et al. (1998)はモデル構成の段階から微分方程式を用いないというアプローチを提案している。こうした点には立ち入れないが、本報告では線形の古典的人口モデルおよび非線形モデルの例としてペア形成モデルを紹介する。

一方、伝染病モデル(epidemic models)は人口論とともに数理生物学のなかでも最も長い研究の伝統があり、１８世紀のベルヌーイの研究に遡ると言われる(Bernoulli 1760, Anderson 1991)。今世紀初頭のロス卿によるマラリア流行に関する閾値定理の発見、Kermack and McKendrickによる２０年代の一連の仕事は時代を超越した意義を持ち続けている。しかし一般人口モデルと同様に７０年代に至るまでその歩みは比較的遅々としたものであったが、その後過去２０年間にわたって、構造化人口モデルの発達や数理生態学と交流しながら、応用数理の一分野として急速に発展してきている。その背景には、抗生物質耐性菌等

[1] E-mail: inaba@ms.u-tokyo.ac.jp
[2] 1970年頃までの数理人口学についてはKeyfitz (1977), Pollard (1973)等を参照。

の出現によりマラリア、結核等の従来からある感染症が再興してきたり、エイズやエボラ等の新興感染症の相次ぐ出現によって、医学的な対処法（治療行為）のみでは感染症流行の被害を防ぐのに十分ではないことが広く再認識されるようになってきたことがあるのではなかろうか。とりわけ80年代におけるエイズの世界的流行は、それが欧米先進諸国の中枢で発生しただけに学界にも大きなインパクトを与え、感染症流行の予測と解析のための数理モデル研究は著しく促進されたのである。

巨視的な人口レベルにおける適切な流行防止策の策定の基礎としての数理モデルの果たす役割は益々重要になりつつあるが、今日ではマイクロレベル、すなわち人体内におけるウィルス感染症（肝炎等）や免疫系との相互作用などについても数理モデルによる研究が活発になされてきている。本稿後半ではこうしたマイクロレベルでのモデルには立ち入れないが、人口レベルにおける古典的なＳＩＲ型モデルや最近のエイズモデルなどをstructured population modelとの関連で紹介する。伝染病数理モデルについてはAnderson and May (1991), Busenberg and Cooke (1993), Capasso (1993), Mollison (1995), Isham and Medley (1996)等がすぐれた解説である。またここでは専ら人間の感染症を念頭においているが、動植物や昆虫等の感染症についてはGrenfell and Dobson (1995)がある。

数理生物モデルにおける安定性とパーマネンス（存続）

竹内康博　静岡大学工学部システム工学科

数理生態学における最も重要な問題は、生態系を構成する生物種が絶滅せず共存できることを保証している系の構造と機能を解明することである。この講演では、数理生態モデルにおいてもっとも基本的なロトカ・ヴォルテラモデル

$$\frac{d}{dt}x_i = x_i(r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

を取り上げ、生態系で生物種の共存を表す基本的な概念である安定性とパーマネンスを考察する。

（１）の初期値 $x(0) > 0$ に対する解 $x(t)$ について、$\lim_{t\to+\infty} \inf x_i(t) > \delta$ と $\lim_{t\to+\infty} \sup x_i(t) > D$ を満たす $\delta > 0, D > 0$ が存在し、定数 δ, D が $x(0)$ と無関係である場合、（１）はパーマネンスであるといわれる。（１）が大域的に安定な正の平衡点を持てば（１）はパーマネンスであるが、一般に逆は成り立たない。パーマネンスは、系の大域安定性を含む（周期的振動解やカオス解を含む）生物種のより一般的な共存概念である。

講演の内容は以下のとおりである。

(a) ロトカ・ヴォルテラモデルの誕生；ヴィトー・ヴォルテラが生物学者ダンコーナから受けた疑問「何故、戦争がサメに有利であったか？」に対する解答を紹介する。また、それに対する生物学者からの反応も紹介する。

(b) ２次元ロトカ・ヴォルテラモデルの解の分類; ２次元のロトカ・ヴォルテラモデル（競争系、共生系、捕食者・被食者系）のダイナミックスを示し、孤立した周期解を持たないことを示す。

(c) ３次元ロトカ・ヴォルテラモデルの例 (周期解、カオス)；３次元になるとロトカ・ヴォルテラ系は複雑な動的挙動を持つことを、３種競争系（ヘテロクリニック・サイクル）と２被食者・１捕食者系（リミットサイクル、カオス）で示す。

(d)n 次元ロトカ・ヴォルテラモデル（大域的に安定な系の構造、パーマネンス条件)。一般的な n 次元ロトカ・ヴォルテラモデルについて、モデルが大域的に安定な非負の平衡点を持つための十分条件とその条件を満たす系の構造を与える。また、パーマネンスについては必要条件、十分条件を紹介し、$n \leq 3$ については必要十分条件を与える。

囚人のジレンマゲームのメタ個体群動態

泰中啓一（静岡大・工・システム工学）

これまで囚人のジレンマゲームの生態学的理論はたくさん報告されている。私の講演では、はじめに囚人のジレンマゲームの Introduction の話をする。Axelrod によって開かれたコンピュータトーナメントにおいて Tit-For-Tat (TFT) という戦略が２回とも優勝した話や [1]、ノイズ（エラー）の起きる場合に TFT よりも強力な PAVROV といった興味深い戦略などを紹介する。PAVROV は今の状態が環境に合致しているときには手を変えないが、合致していないときは手を変えるという戦略で、生物の本能的戦略ともいえる。

囚人のジレンマゲームは生物進化の自然選択の理論の上で重要な地位を占める。今から２０－３０年前、進化史上大きな論争があった：すなわち自然選択が個体（遺伝子）に働くか、それとも集団に働くか？この論争では、進化的に安定な戦略（ＥＳＳ）という理論が登場し、個体選択がほぼ勝利した。自然選択が個体に働くということを前提として、ダーウィン適応度（各個体が次世代に残す子孫の平均数）の低いものが絶滅し、そうでないものが生き残ると考える。しかし、このような利己主義万能論では説明が難しい問題が数多くある。たとえば、「なぜ利他性は進化したのか？」とか「なぜ有性生殖は進化したのか？」などである。

前者の問いに対して、囚人のジレンマゲームは個体選択（利己主義）の立場から解答を与えた。ダーウィン適応度は囚人のジレンマゲームでは総利得である。TFT や PAVROV などの戦略は高い得点をあげたが、このことは利己的な環境でも協調が進化できることが示されたと言える。なぜならこれらの戦略はだいたい（常に）協調行動を取り、自分からは裏切らないからである。

しかし、私が個人的に思うことであるが、TFT や PAVROV などの戦略は人間のモラルの基準からすれば、あまり好ましい戦略とはいえない。これらの戦略は「目には目を」という報復主義、利己主義（近視眼的）を基礎にしているからである。世界の伝統的宗教は報復主義を基礎にしていない。たとえばキリスト教ではモラルの基準として黄金律（相手がしてもらいたいと思うことをしてあげなさい）がある。仏教でも般若（広い意味の知識）に至るためには、この世でいいことしなさい。そうすれば来世でも報われると説いている。黄金律は囚人のジレンマゲームでいえば ALL C （AC）戦略である。相手がしてもらいたいと思うオプションは協調だけである。人間のモラルの基準からすれば、AC 戦略が勝つべきであろう。

しかし、これまで AC は他の戦略, たとえば ALL D （AD）よりは弱いと考えられてきた。にもかかわらず AC は進化的に持続可能な戦略 (EMS) [2] である。ここで EMS というのは、私達が導入した最適戦略の１つで、次のように定義される：もし集団が単独戦略で構成されているとき、最高得点をマークするような戦略が EMS である。ある条件さえ整えばノイズの入った系で AC が最強になる可能性がある。本講演ではパッチ環境下で、 AC が AD を完全に打ち負かすことを

示す。またACが最強になる可能性を述べる。

私の講演では、島モデルと格子モデルを使って、メタ個体群動態を取り扱う。各パッチ内では比較的短い時間で単一の戦略が勝利するであろう。これまでの囚人のジレンマゲームによればAC, AD共存下ではADが勝利することが知られている（もちろん例外もあるが）。1つのパッチのスケール (local scale) ではADが勝利するが、多くのパッチのスケール (regional scale) では必ずしもADが勝利するとはかぎらない。各々のパッチはACかADの集団になっているとして、島モデルではロトカボルテラ方程式、格子モデルではでは格子ロトカボルテラ法を適応した。

結果は、両者のモデルでACがADを完全に打ち負かすという「相転移」が起きた。この原因は各パッチ内では単一の戦略が占めていると仮定したためである。このようにＥＭＳという戦略は、たとえ当初は不利であっても、長期的なスケールで最大利得を得る戦略である。とくに格子モデルでは

（１） ADのパッチの絶滅率が高いとき、

（２） ACのパッチの増殖率が低いとき、

相転移がおきた。島モデルでは（２）のような相転移は無かった。格子モデルで（２）が起こった理由としては、ADの密集化が影響している。定常状態でACの密集化は直感的にあたりまえであるが、regional scaleではADも密集化を起こすことが分かった。むしろADは強制的に密集化へと追い込まれて、絶滅したのである。

これらの結果は人間の社会でも成り立つかも知れない。本講演ではパッチ環境という仮定を用いているが、人間社会でもこの仮定が言えるかも知れない。たとえば、ある人が別の人にだまされた（裏切られた）としよう、その後これらの２人は異なった行動に出る。裏切られた人は裏切った人を避けるようになる。結果として、お互いに助け合って生きている人たちはそのような人を集める（パッチ形成）。また一方、人を裏切る人々も互いに集まる傾向がある（たとえばヤクザのように）。ヤクザは発砲事件などを起こしやすく、ヤクザ同士の集団は長期的なスケールで利得が高いとはいえない。シミュレーションでの事実（ADは強制的に密集化へと追い込まれて絶滅した）は、恰もヤクザの結末のようである。

[1] R. Axelrod, The Evolution of Cooperation. (Princeton, Princeton, Univ. Press, 1984).

[2] K. Tainaka and N. Araki: Press perturbation in lattice ecosystems: parity law and optimum strategy. J. Theor. Biol. 197 (1999) 1-13.

Explicit sufficient invariants for an interacting particle system II

Yoshiaki Itoh (Inst. Statist. Math.)
Colin Mallows (AT&T Shannon Labs)
Larry Shepp (Rutgers University)

1. A class of multiparticle systems

We associate with any graph G a stochastic process $\mathbf{N}(t) = N_i(t)$, $t > 0$, $i \in G$, where $N_i(t)$ is the number of particles at vertex i of G at time $t \geq 0$.

We start from given integers $N_{i0} = N_i(0)$, $i \in G$. The total number of particles in the system remains $N = \sum N_i(t) = \sum N_{i0}$ for all $t > 0$.

At each instant of time, two of the N particles are chosen at random, and if these two happen to be at adjacent vertices, then one of the two particles jumps to the other one's vertex, each w.p. 1/2.

Eventually the number of particles at some vertex becomes zero, and thereafter that vertex remains empty and the process lives on the subgraph of G with this vertex removed.

The process continues until all vertices are removed except those of an *independent* subset I of G. (A nonempty subset $I \subset G$ is called independent if there are no edges between points of I.) As soon as all the particles lie in some I, the process stops and no further interaction occurs.

For the complete graph, the model is that of Moran (1958) for the Fisher-Wright random sampling effect in population genetics. In the more general case the model might be applied to study speciation in biology as well as political positionings. For example consider a genetic system for m alleles $A_i, i = 1, 2, \cdots, m$, in which zygotes A_iA_j are fertile for $j = i-1, i, i+1$ and infertile for the other j. This problem was studied numerically by Nei, Maruyama and Wu (1982), considering the Fisher-Wright random sampling effect with some selection structure. Our present model has a random sampling effect depending on the structure of a graph, which could be a natural simplified model of the genetic problem. The graph R_{2k}, which is a regular polygon with $2k$ vertices and all edges present except those joining opposite vertices, is a special case of our model. Our result can be applied to this case.

2. The problem

The problem is to find the probability distribution of the death state as a function of the initial state $N_i(0)$. Let τ = 1st time to reach some independent set $I(\tau)$, and denote by $N_i(\tau)$ the number of particles in i at time τ.

We would like to determine $P(N(\tau)|N(0))$ and
$P(I(\tau)|N(0))$. It is easy to see that $N_i(t)$ is a martingale for each i so that $EN_i(\tau) = EN_i(0)$, i.e.

(2.1) $$EN_i(\tau) = EN_i(0) = N_i(0) \ .$$

3. The stochastic differential equation

Let G be any graph, and let $\sum_{i \in G} \xi_i = 1$, $\xi_i \geq 0$, $i \in G$, be given. We will define $X_i(t)$, $i \in G$, $t \geq 0$, with $X_i(0) = \xi_i$, as the solution to the stochastic differential equation for $t \geq 0$,

(3.1) $$dX_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sqrt{X_iX_j}\, dB_{ij}, \quad i \in G$$

where $\mathcal{N}_i$ is the set of neighbors of i in G, and B_{ij} are independent standard Wiener processes for *distinct* pairs $\{i, j\}$ and with the skew-symmetry property,

$$B_{ji}(t) = -B_{ij}(t), \quad t \geq 0 . \tag{3.2}$$

Thus, it is clear from (3.1) and (3.2) that $\sum dX_i = 0$, so that $\sum X_i(t) = 1$ for all $t \geq 0$, and that there exists a first time $\tau \geq 0$, for which $\{i : X_i(\tau) > 0\} = I(\tau)$ is an independent subset of G and $P(\tau < \infty) = 1$, i.e. the situation is the same for X as for N.

It is clear from (3.1) that for each $i \in G$, $X_i(t)$ is a martingale, since there is no dt term on the right in (2.1). The multiplication table for Ito calculus, gives

$$(dX_i)^2 = X_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} X_j dt \tag{1.6a}$$

$$(dX_i)(dX_j) = \begin{cases} -X_i X_j dt & j \in \mathcal{N}_i \\ 0 & j \notin \mathcal{N}_i . \end{cases} \tag{1.6b}$$

It follows from (1.6) that if $n \geq 2$ and $Y(t)$ is a homogeneous polynomial of degree n in $X_i(t)$, $i \in G$, i.e. a sum of terms of the form $\prod_{i \in G} X_i^{a(i)}$, where $a(i)$ are nonnegative integer exponents with $\sum a(i) = n$, then $dY(t) = QdB + Rdt$, where R is again a homogeneous polynomial of the same degree n, and Q is the Brownian term.

4. Infinite conserved quantities (martingales)

The following is a set of homogeneous polynomial martingales for the star graph, S_2, with 2 nodes, where there are 2 leaves each connected to a central root, 0. In this case there is one martingale for each $n \geq 2$, given by

$$Y_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-2}{i-1} (-1)^i X_1^i(t) X_2^{n-i}(t) . \tag{4.1}$$

We will use the martingale property:

$$EY_n(\tau) = EY_n(0) \tag{4.2}$$

to obtain the laws of $I(\tau)$ and $X(\tau)$ as a function of $\xi = X(0)$.

5. The death states

We now determine the law of $X(\tau)$ for the graph S_2. From (4.2), for $n \geq 2$

(5.1)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\binom{n-2}{i-1}(-1)^i EX_1^i(\tau)X_2^{n-i}(\tau)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\binom{n-2}{i-1}(-1)^i X_1^i(0)X_2^{n-i}(0) \ .$$

Since $i \geq 1$ in (5.1), we have

(5.2)

$$X_1^i(\tau)X_2^{n-i}(\tau) = X_1^i(\tau)(1 - X_1(\tau))^{n-i}$$

because if $X_1(\tau) = 0$, which happens in the death state $(X_1, X_0, X_2) = (0,1,0)$, then (5.2) clearly holds (since $i \geq 1$). In any other death state, $X_1(\tau) + X_2(\tau) = 1$, since none of the mass is at 0, i.e. $X_0(\tau) = 0$ and $X_1(\tau) + X_0(\tau) + X_2(\tau) = 1$. Thus for $n \geq 2$

(5.3)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\binom{n-2}{i-1}(-1)^i \int_0^1 x^i(1-x)^{n-i}\mu(dx)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\binom{n-2}{i-1}(-1)^i \xi_1^i \xi_2^{n-i}$$

where $\xi_i = X_i(0)$ and μ is the distribution of $X_1(\tau)$. Note that if $\xi_1 + \xi_2 = 1$, $X(0)$ is already a death state. We want to obtain $\mu(dx) = P\{X_1(\tau) \in dx\}$, and note that $\mu(dx) = \mu(dx; \xi_1, \xi_2)$ and $\mu(dx) = \delta(\xi_1, 0, \xi_2)$ if $\xi_1 + \xi_2 = 1$. Also we see that

(5.4)

$$P\{X_1(\tau) = X_2(\tau) = 0\} = P\{X_0(\tau) = 1\}$$
$$= \xi_0 = 1 - \xi_1 - \xi_2$$

and since $X_1(t)$ is a martingale

(5.5) $$E(X_1(\tau)) = \xi_1 = \int_0^1 x d\mu(x) \ .$$

It is clear that for $j \geq 2$ the moments $\int_0^1 x^j \mu(dx)$ can be obtained successively from (5.3), and that these moments determine μ since the moment problem on $[0,1]$ is determinate. How to actually do it?

6. An identity

With Y_n as in (4.1), define for any u the process

$$Z_u(t) = \sum_{n \geq 2} \frac{u^n}{n} Y_n(t), \quad t \geq 0 . \tag{6.1}$$

The following identity is valid for $|v| < 1/4$, $0 \leq x \leq 1$,

(6.2)

$$\sum_{n \geq 2} \frac{v^n}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-2}{i-1} (-1)^i x^i (1-x)^{n-i}$$
$$= xv + \frac{1-v}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4xv}{(1-v)^2}} \right)$$

and may be seen by expanding $(1-x)^{n-i}$ and interchanging sums. Multiplying in (5.3) by u^n/n and summing over $n \geq 2$, we find using (6.2) with $v = u$, that for $|u| < 1/4$,

(6.3)

$$EZ_u(\tau)$$
$$= \int_0^1 \left(xu + \frac{1-u}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4xu}{(1-u)^2}} \right) \right) \mu(dx) .$$

If we use (6.2) now with $v = u(\xi_1 + \xi_2)$ and $x = \xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$, we find

(6.4)

$$Z_u(0) = \xi_1 u + \frac{1 - u(\xi_1 + \xi_2)}{2}$$
$$\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4u\xi_1}{(1 - u(\xi_1 + \xi_2))^2}} \right) .$$

Since for $|u| < 1/4$, Z_u is also a bounded martingale, $Z_u(0) = EZ_u(\tau)$, and so after some rearranging using $\int \mu(dx) = 1$, $\int x\mu(dx) = \xi_1$, we arrive at the following equation for $\mu(dx) = P(X_1(\tau) \in dx)$, valid for $|u| < 1/4$.

(6.5)

$$\int_0^1 \sqrt{(1-u)^2 + 4ux}\, \mu(dx) = u(\xi_1 + \xi_2 - 1)$$
$$+ \sqrt{1 + 2u(\xi_1 - \xi_2) + u^2(\xi_1 + \xi_2)^2} .$$

The probabilities for the death states are calculated by using this equation in our previous paper.

7. Number of trees

A leaf of a tree is a node without descendents. The number $G_{n,i}$ of trees with n nodes and i leaves is determined by

$$G(u,w) = wu + \frac{wG(u,w)}{1-G(u,w)} \tag{7.1}$$

for

$$G(u,w) = \sum_{n\geq 2} \frac{w^n}{n} \sum_{i=1}^{n-1} G_{n,i} u^i. \tag{7.2}$$

The quadratic equation can be solved explicitly as

$$G(u,w) = \frac{1}{2}\left(1 + (u-1)w - \sqrt{1-2(u+1)w+(u-1)^2w^2}\right). \tag{7.3}$$

Let $[u^i][z^n]G(z,u)$ be the coefficient of $u^i z^n$ for $G(z,u)$. The Lagrange inversion theorem provides

$$\begin{aligned} G_{n,i} &= [u^i]\frac{1}{n}[y^{n-1}](u + \frac{y}{1-y})^n \\ &= \frac{1}{n}\binom{n}{i}[y^{n-1}]\frac{y^{n-i}}{(1-y)^{n-i}} \\ &= \frac{1}{n}\binom{n}{i}\binom{n-2}{i-1}. \end{aligned}$$

(Lagrange Inversion) *Let $\phi(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j u^j$ be a formal power series with $\phi_0 \neq 0$, and let $Y(z)$ be the unique formal power series solution of the equation $Y = z\phi(Y)$. The coefficients of Y, Y^k, and $\psi(Y)$ (for an arbitrary series ψ) are given by*

$$\begin{aligned} [z^n]Y(z) &= \frac{1}{n}[u^{n-1}](\phi(u))^n \\ [z^n]Y^k(z) &= \frac{k}{n}[u^{n-k}](\phi(u))^n \\ [z^n]\psi(Y(z)) &= \frac{1}{n}[u^{n-1}](\phi(u))^n\psi'(u) \end{aligned}$$

(cf. The average case analysis of algorithms, by Philippe Flajolet and Robert Sedgewick, INRIA, Rocquencourt No. 1888, April 1993) Taking $w = v(1-x)$ and $u = \frac{-x}{1-x}$ for the above (7.2) and (7.3), we have

$$(7.4) \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{w^n}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-2}{i-1} u^i = \sum_{n\geq 2} \frac{v^n}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-2}{i-1} (-1)^i x^i (1-x)^{n-i}$$

Hence we have the identity from the above eq.(2) and eq.(3).

$$(7.5) \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{v^n}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-2}{i-1} (-1)^i x^i (1-x)^{n-i} = xv + \frac{1-v}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4xv}{(1-v)^2}}\right)$$

References

Itoh, Y., Mallows, C. and Shepp, L. (1998): Explicit sufficient invariants for an interacting particle system, Journal of Applied Probability. Vol.35, 633-641 (1998).

非線形境界条件に対する人口動態モデルの正値解の挙動

梅津健一郎（前橋工科大学）

本講演では, ユークリッド空間の滑らかな境界を持つ有界領域において, 人口動態モデルに現れる半線形楕円型方程式を非線形境界条件のもとで考える. ここでの主目的は正値解の**漸近安定性**と**挙動**について調べることである.

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$, $N \geq 2$, の有界領域 D は滑らかな境界 ∂D を持つとするとき, 次の半線形楕円型境界値問題を考える.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(m(x)u - au^2) & \text{in } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + g(u)u = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases} \tag{$*$}_\lambda$$

ここで, (1) $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \partial^2/\partial x_j^2$, (2) λ は正のパラメータ, (3) $m(x)$ は $\overline{D}$ 上ヘルダー連続な関数で, ある点で正値をとる, (4) a は正の定数, (5) $g(t)$ は $[0,\infty)$ 上滑らかな**非正値**関数で条件 $g(0) = 0$ を満たす, (6) $\mathbf{n}$ は ∂D 上の外向き単位法線ベクトル場.

問題 $(*)_\lambda$ は次の初期値-境界値問題の定常状態を記述する.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \dfrac{1}{\lambda}\Delta v + (m(x)v - av^2) & \text{in } (0,\infty) \times D, \\ v(0,x) = u_0(x) & \text{in } D, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + g(v)v = 0 & \text{on } (0,\infty) \times \partial D. \end{cases} \tag{$\dagger$}_\lambda$$

問題 $(\dagger)_\lambda$ は人口動態問題のあるモデルである ([3, 4, 7] を参照). ただし, パラメータ λ は 対象の種の動態に関する**拡散**係数の逆数を表し, 関数 $m(x)$ は種の**繁殖**の度合いを表す, すなわち, エサが比較的豊富にある場所で $m(x)$ は正値をとり, 豊富にない場所で負値をとる. そして, 定数 a は種の**競合**の度合いを表す. 境界条件は, 領域内部への人口の**流入**が境界での人口密度 u に応じて非線形性を持つことを意味する.

関数 $u \in C^2(\overline{D})$ が $(*)_\lambda$ を満たし D 上正値であるとき, u を $(*)_\lambda$ の**正値解**という. もし $\int_D m\,dx < 0$ ならば, 定数 $\lambda_1(m)$ を次の線形固有値問題の正の最小固有値とする.

$$\begin{cases} -\Delta \phi = \lambda m(x)\phi & \text{in } D, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

Brown and Lin [2] により, $\lambda_1(m)$ は単純かつ D 上正値の固有関数を持つことが知られている.

問題 $(*)_\lambda$ の正値解の存在と一意性, そして安定性について, 線形境界条件のもとでは良く研究されている. ノイマン条件のもとで得られた次の結果は我々の研究の出発点である ([6] を見よ).

定理 1. 関数 g が $g \equiv 0$ の場合, 次の結果が成立する.

(1) もし $\int_D m\,dx < 0$ ならば, 任意の $\lambda > \lambda_1(m)$ に対して問題 $(*)_\lambda$ はただ一つ正値解 $u(\lambda)$ を持ち, 一方, どんな $0 < \lambda \leq \lambda_1(m)$ についても正値解を持たない. さらに, 自明解 $u \equiv 0$ は $0 < \lambda < \lambda_1(m)$ において**大域的漸近安定**であり, $\lambda > \lambda_1(m)$ に対しては $u(\lambda)$ が大域的漸近安定である.

(2) もし $\int_D m\,dx \geq 0$ ならば, 任意の $\lambda > 0$ に対して $(*)_\lambda$ の正値解 $u(\lambda)$ が一意的に存在し, $u(\lambda)$ は大域的漸近安定である. さらに, $u(\lambda)$ は $\lambda \downarrow 0$ のときに次の挙動を示す.

$$\left\| u(\lambda) - \frac{\int_D m\,dx}{a|D|} \right\|_{C^2(\overline{D})} \longrightarrow 0 \quad \text{as } \lambda \downarrow 0.$$

ただし, $|D|$ は D の体積を表す.

さて, 定理 1 で見られるように, 線形境界条件のもとでは D 内部の非線形性により常に一意性が成立する. 一方, 境界条件が非線形の場合にはその影響により一般には一意性が成り立たない (一意性に関する結果については [1, Theorem 2.6], [8, Theorem 5.6.3] を見よ). そこで我々は

目的. 非負, 非自明な十分に小さい初期値 $u_0(x)$ に対して, $(\dagger)_\lambda$ のその定常解が, 拡散係数を十分大きくしたとき, どのような挙動をするかについて考察する.

最初の主結果は次の定理である. これは自明解の安定性について述べている.

定理 2. もし $\int_D m\,dx < 0$ ならば, 自明解は $0 < \lambda < \lambda_1(m)$ のとき**漸近安定**であり, $\lambda > \lambda_1(m)$ のとき**不安定**である. 一方, もし $\int_D m\,dx \geq 0$ ならば, 自明解はどんな $\lambda > 0$ に対しても不安定である.

我々の目的のためには, 自明解が不安定な場合の**最小正値解**の安定性と挙動を調べることが十分である. このとき, 次の結果を得る.

定理 3. $\int_D m\,dx \geq 0$ とする. 関数 g は $[0,\infty)$ 上滑らかな非正値関数で条件 $g(0)=0$ を満たし, さらに条件

$$tg(t) \geq -M_0 \quad \text{for } t > 0$$

を満足する定数 $M_0 > 0$ が存在するとする. このとき, $(*)_\lambda$ に対し, 最小正値解 $u(\lambda)$ が任意の $\lambda > 0$ について存在し, **片側漸近安定**である. さらに, $u(\lambda)$ の挙動に関して次の主張を得る.

(1) もし関数 g が零点を $t > 0$ において持たなければ

$$\|u(\lambda)\|_\infty \longrightarrow \infty \quad \text{as } \lambda \downarrow 0.$$

(2) もし関数 g が高々可算個の零点 $0 < t_1 < t_2 < \cdots$ を持つならば

$$\begin{cases} \|u(\lambda)\|_{C(\overline{D})} \longrightarrow \infty & \text{as } \lambda \downarrow 0 \quad \text{if } t_j < \dfrac{\int_D m dx}{a|D|} \text{ for any } j \geq 1, \\ \|u(\lambda) - t_j\|_{C^2(\overline{D})} \longrightarrow 0 & \text{as } \lambda \downarrow 0 \quad \text{if } t_{j-1} < \dfrac{\int_D m dx}{a|D|} < t_j \text{ and } g''(t_j) < 0. \end{cases}$$

証明では, Amann [1] による優解と劣解を構成して解を求める方法, Crandall and Rabinowitz [5] による局所分岐理論, そしてある変分法的考察を必要とする. 定理 3 において, $\int_D m dx = 0$ の場合の証明には $\int_D m dx > 0$ の場合にはない困難がある. 詳しくは講演の時に述べる.

参考文献

[1] H. Amann, *Nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions*, In : New Developments in differential equations (Eckhaus, W. ed.), Math. Studies, Vol. 21, North–Holland, Amsterdam, pp. 43–63, 1976.

[2] K. J. Brown and S. S. Lin, On the existence of positive eigenfunctions for an eigenvalue problem with indefinite weight function, *J. Math. Anal. Appl.*, **75** (1980), 112–120.

[3] R. S. Cantrell and C. Cosner, Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **112A** (1989), 293–318.

[4] R. S. Cantrell and C. Cosner, Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments II, *SIAM J. Math. Anal.*, **22** (1991), 1043–1064.

[5] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **52** (1973), 161–180.

[6] P. Hess, *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity*, Pitman Research Notes in Math. Series, vol. 247, Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, 1991.

[7] 垣田高夫, 大町比佐栄 訳, 微分方程式で数学モデルを作ろう, 日本評論社, 1990.

[8] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum, New York London, 1992.

Mutation による Heteroclinic カオスの摂動

東京大学 広域システム科学 池上研
橋本 康
hasimoto@sacral.c.u-tokyo.ac.jp

1999 年 11 月 12 日

概 要

高次の力学系では軌道が平衡点の近傍間を遷移していく現象が見られる.

よく知られている代表的な例に,1975 年に Robert May らが発表したヘテロクリニックサイクルがある. それを 7 次に拡張したある系では, 軌道が 7 つの平衡点間を結ぶヘテロクリニックネットワーク上を chaotic に遷移する現象が起こる.

今回の発表では, その系に mutation を導入することによって, 別の chaotic な遷移現象が生じ, また mutation rate の大きさに応じて, その性質が変化する様を紹介する.

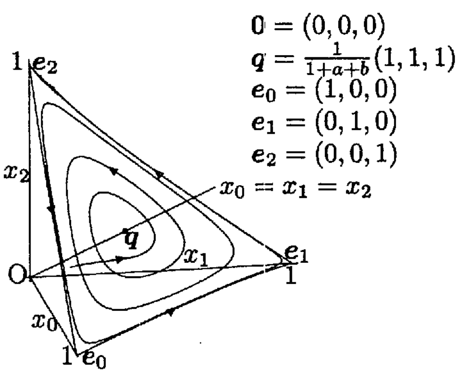
1 ヘテロクリニックサイクル

次のような 3 次の対称なロトカ・ボルテラ方程式を考える.

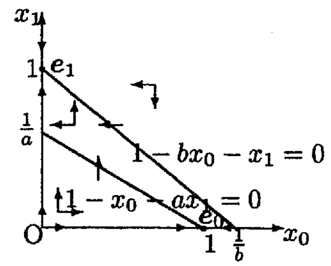
$$\dot{x_i} = x_i\left(1 - x_i - ax_{i+1} - bx_{i-1}\right),\ x_i \geq 0,\ (i = 0, 1, 2)$$

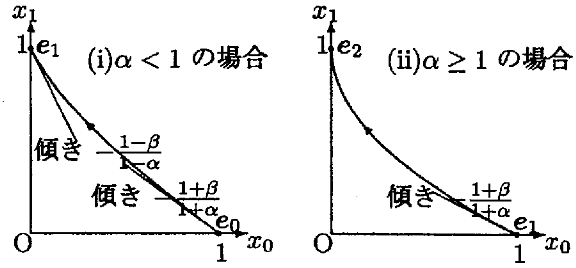
$$a > 1 > b, \quad a + b > 2$$

$$\alpha = a - 1, \quad \beta = 1 - b \quad (\alpha > \beta > 0)$$



ほとんど全ての軌道は $\mathrm{bd}\mathbf{R}^3_+$ に漸近する.





$\mathrm{bd}\mathbf{R}^3_+$ 上に $\boldsymbol{e}_0 \to \boldsymbol{e}_1 \to \boldsymbol{e}_2 \to \boldsymbol{e}_0$ というヘテロクリニックサイクルが存在し, ほとんど全ての軌道はこれに漸近して,$\boldsymbol{e}_i$ 間を順番に遷移し続ける.

平衡点近傍に滞在する時間はほぼ $\frac{\alpha}{\beta}$ 倍に長くなっていく.

2 7 次ヘテロクリニックネットワーク

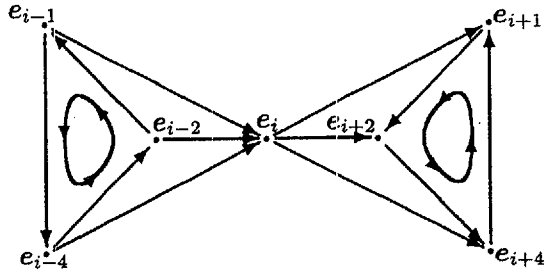
次のような 7 次の対称なロトカ・ボルテラ系を考える.

$$\begin{aligned}\dot{x_i} &= x_i\{1 - x_i - a(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+4}) \\ &\quad -b(x_{i-1} + x_{i-2} + x_{i-4})\},\ x_i \geq 0,\ (i = 0, \ldots, 6)\end{aligned}$$

$$a > 1 > b, \quad a + b > 2$$

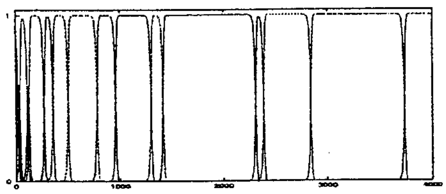
$$\alpha = a - 1, \quad \beta = 1 - b \quad (\alpha > \beta > 0)$$

- $\mathbf{R}^+ = \{\boldsymbol{x} | x_i > 0\ (i = 0, \ldots, 6)\}$ が不変.
- 初期値が $x_i = 0$ なら, 軌道上の全ての点で $x_i = 0$.
- x_i 軸上に平衡点 $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)$ が存在.
- 直線 $x_0 = x_1 = \cdots = x_6$ 上に
  平衡点 $\boldsymbol{q} = \frac{1}{7+3\alpha-3\beta}(1, 1, \cdots, 1)$ が存在.
- $\boldsymbol{e}_i \to \boldsymbol{e}_{i+j}$ $(j = 1, 2, 4)$ の hetero-clinic 軌道が存在.

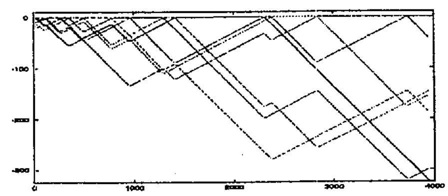


- 直線 $x_0 = x_1 = \cdots = x_6$ 上の点以外の点を初期値に持つ軌道は $e_i \to e_{i+j}$ $(j = 1, 2, 4)$ から作られる heteroclinic network に漸近し, 各 e_i 近傍に滞在する時間がほぼ指数的に増加する.

- ほとんど全ての軌道は e_i の近傍を chaotic に遷移する. (遷移する順番が非周期的＆初期値に鋭敏に依存)



t-x_i



t-$\log x_i$

3 mutationの導入

この系に次のように mutation の項を加える.

$$
\begin{aligned}
\dot{x_i} &= x_i\{1 - x_i - a(x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+4}) \\
&\qquad -b(x_{i-1} + x_{i-2} + x_{i-4})\} \\
&\quad -6\mu x_i + \mu \sum_{j \neq i} x_j \qquad (i = 0, \ldots, 6)
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{R}^+ = \{\boldsymbol{x} | x_i > 0\ (i = 0, \ldots, 6)\}$ が不変.

- 初期値が $x_i \leq 0$ である軌道でも $\mathbf{R}^+$ に入ることがある.

- $\mu = 0$ で各 x_i 軸上に存在した平衡点は $\mathbf{R}^+$ の外に出る.

- 直線 $x_0 = x_1 = \cdots = x_6$ 上に平衡点 $\boldsymbol{q} = \frac{1}{7+3\alpha-3\beta}(1, 1, \cdots, 1)$ が存在.

- i が dominant となる時間は指数的増加をしない.

3.1 非chaotic領域

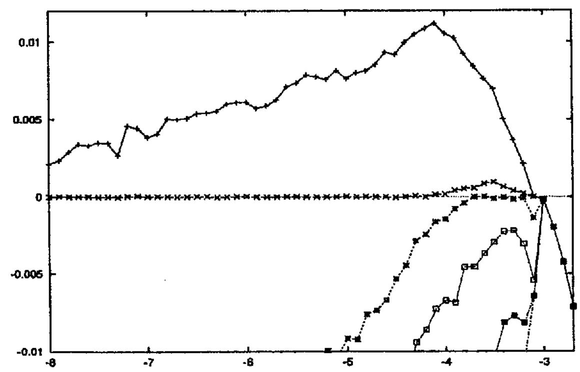
$\mu > \frac{\alpha-\beta}{14(7+3\alpha-3\beta)}$ では系の相空間の中心に存在する平衡点 $\boldsymbol{q} = \frac{1}{7+3\alpha-3\beta}(1, 1, \cdots, 1)$ が安定となり, 全ての軌道はこの点に引き込まれる.

μ を $\frac{\alpha-\beta}{14(7+3\alpha-3\beta)}$ より小さくすると, まず $\boldsymbol{q}$ が不安定となり,3 つの limit cycle が現れる. これらの limit cycle では dominant の順番がそれぞれ,+1,+2,+4 となる. 軌道は初期値に応じて, それら 3 つの limit cycle のいずれかに引き込まれる.

さらに μ を小さくすると 3 つの limit cycle がそれぞれ周期倍分岐を起こす.

さらに μ を小さくすると周期倍分岐を繰り返し, 準周期軌道へ至る.

3.2 Lyapunov 指数

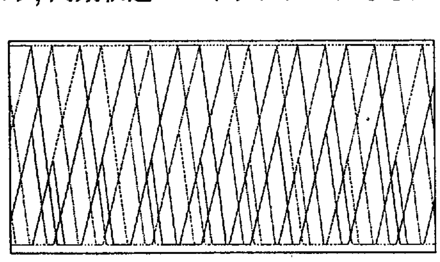


$\log_{10} \mu - \lambda_i$

最大 Lyapunov 指数に注目すると,chaotic な領域は大きく分けて, $\mu = 10^{-4}$ 付近を境に 2 相に分けられるようである.

3.3 $\mu \to +0$

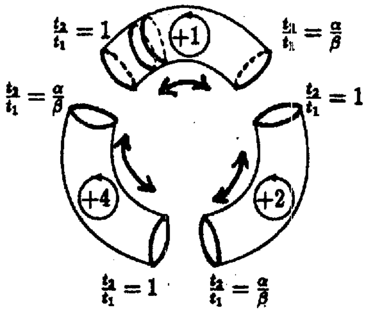
$\mu \to +0$ の極限では, 周期的遷移軌道が安定 (1 次元のみ中立) になり, 周期軌道がアトラクターになる.



t-$\log x_i$

1 周期の間に各種 i は 2 回 dominant になるが, その時間を $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ とおくと, $t_1 + t_2$ は一定だが,$\frac{t_2}{t_1}$ が異なる方向には中立となる.

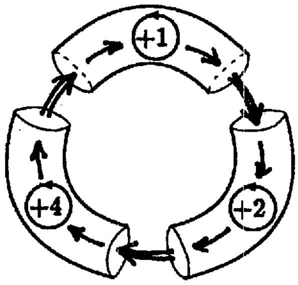
また, $1 < \frac{t_2}{t_1} < \frac{\alpha}{\beta}$ となるので,dominant の順番が +1,+2,+4 となる 3 つのアトラクターは不連続になる.

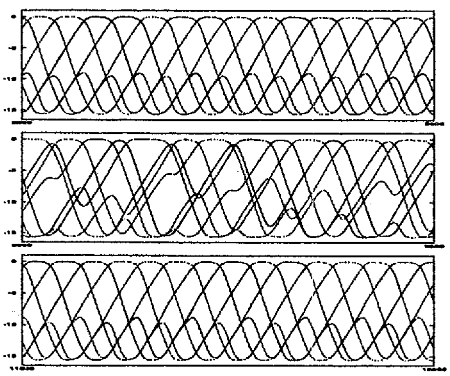


3.4 $\mu > 0$

μ を +0 から大きくしていくと中立安定だった方向が不安定になり, $\boxed{+1}$のアトラクター → $\boxed{+2}$のアトラクター → $\boxed{+4}$のアトラクター → $\boxed{+1}$のアトラクターの path が生まれ, 軌道はこれら 3 つのアトラクター (の残骸) 間を遷移していく.

μ を大きくしていくとこの不安定性が強くなっていく.





t-log x_i

3.5 $\mu \gg 0$

3 つの準周期軌道がアトラクターとなる値より μ を小さくしていくと, 第 2Lyapunov 指数が正となり,3 つの準周期軌道が strange attractor 化する. 同時にこれら 3 つのアトラクター間をつなぐ path が生まれ, 軌道はこれら 3 つのアトラクター (の残骸) 間を遷移していく.

いったん strange attractor 化した 3 つのアトラクターの残骸はさらに μ を小さくすると再び non strange 化する. しかし,3 つのアトラクターの残骸をつなぐ方向の不安定性は増していく.

4 まとめ

chaotic なヘテロクリニックネットワークを attracting set に持つような Lotka-Volterra 系に mutation を導入することによって,mutation 無しの時とは異なる遷移現象が見られる.

- まず,$\mu \to +0$ では,$\mu = 0$ で見られた chaos が姿を消し,3 つの周期的 attractor が現れる.
- μ を導入するとそれら 3 つをつなぐ path が現れ,3 つの周期的 attractor 間を遷移していく軌道が attractor となる.μ を大きくしていくとその path 方向の不安定性が増していく.
- そして μ を大きくしていくと, ベースの 3 つの attractor が strange 化し, attractor 間の path 方向の不安定性は減っていく.
- さらに μ を大きくしていくと, ベースの 3 つの attractor が non strange 化するのと同時に attractor 間の path は消滅し,3 つの準周期軌道が attractor となる.

5 展望

- 対称性を崩したより generic な系において mutation が果たし得る役割
- より高次元な系での解析

参考文献

[1] R.M.May and W.J.Leonard, *Nonlinear aspects of competition between three species*, SIAM J.Appl.Math., **29**,243-253,(1975)

[2] A.J.Lotka, *Undamped oscillations derived from the law of mass action*, J.Am.Chem.Soc., **42**,1595-1598,(1920)

[3] J.Hofbauer and K.Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems* (Cambridge Univ.Press,1988)

[4] T.Chawanya, *A new type of irregular motion in a class of game dynamics systems*, Progress of Theoretical Physics, **94**,163-179,(1995)

[5] T.Chawanya, *Infinitely many attractors in game dynamics system*, Progress of Theoretical Physics, **95**,679-684,(1996)

14.

無限次元解析と量子確率論

平成 11 年 11 月 29 日（月）～ 30 日（火）

（名古屋大学・ベンチャービジネス・ラボラトリー）

世話人：尾畑 伸明

近年, 無限次元解析と量子確率論の融合的かつ学際的な研究が高まりを見せている。確率モデルの基礎となるゆらぎや場の理論などにおける無限自由度の取り扱いは, 数学的には無限次元解析（無限変数の微積分学）の一環として捉えられるようになってきた。一方で, 波動関数の確率解釈など量子力学における統計の問題に遡る量子確率論は, より一般には代数的確率論として発展し, 確率論における基礎概念の再考を促すようになってきた。本研究会は, これらに関わる研究の裾野を広げ, 実質的な研究を深めることを目的として企画したものである。

わずか 2 日間の研究会であったが, 工学系・物理系・情報系を含む多様な研究動機を持つ人たち 30 名余が参加し, 多くの興味ある研究発表とともに活発な議論がなされた。特に, 応用系の人たちからはこの種の研究会を引き続き企画して欲しいという要望が強く出され, 境界領域を開拓してゆくという点で研究交流を活発化してゆく気運が高まった。

無限次元解析と量子確率論

Nagoya Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability

平成 11 年度科研費基盤 (A) 課題「平衡確率現象の総合的研究」(研究代表者：久保 泉) 及び同基盤 (B) 課題「量子ホワイトノイズと無限次元調和解析」(研究代表者：尾畑伸明) の一環として上記の研究会を開催いたします。関心のある方はどなたでもご参加ください。

期間 1999 年 11 月 29 日 (月)–11 月 30 日 (火)

場所 名古屋市千種区不老町 (地下鉄東山線本山駅下車徒歩 15 分)
名古屋大学・ベンチャービジネス・ラボラトリー (工学部新 1 号館横)
3F ベンチャーホール
(Nagoya University Venture Business Laboratory 3F)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
尾　畑　伸　明
Nobuaki OBATA
Tel & Fax 052-789-2820
obata@math.nagoya-u.ac.jp

プログラム

11 月 29 日 (月)　November 29 (Mon)

09:20–09:40	尾畑伸明 Nobuaki Obata (名古屋大学・多元数理科学研究科 Nagoya University) Recent progress in white noise analysis — Nonlinear extension and complex white noise
09:40–10:10	齊藤公明 Kimiaki Saitô (名城大学・理工学部 Meijo University) The Levy Laplacian and stable processes
10:10–10:40	道工 勇 Isamu Doku (埼玉大学・教育学部 Saitama University) On stochastic analysis related to a reaction-diffusion system
10:40–10:50	休憩
10:50–11:35	Habib Ouerdiane (Universite de Tunis) Bochner–Minlos theorem with integrability condition and application to Gaussian analysis
11:35–12:05	Si Si (愛知県立大学・情報科学部 Aichi Prefectural University) Reversibility of random fields
12:05–13:30	昼休み
13:30–14:15	Igor V. Volovich (Steklov Math. Institute) The ABC-formula, quantum computing and complexity

14:15–14:45	廣川真男 Masao Hirokawa (岡山大学・理学部 Okayama University) Superradiant (?) ground state of the Wigner-Weisskopf model
14:45–15:15	Un Cig Ji (名古屋大学・多元数理科学研究科 Nagoya University) Analytic characterization of operators on Boson Fock space
15:15–15:30	休憩
15:30–16:00	櫃田倍之 Masuyuki Hitsuda (熊本大学・理学部 Kumamoto University) Topics in Gaussian innovation
16:00–16:30	松井 卓 Taku Matsui (九州大学・数理学研究科 Kyushu University) Ruelle Perron Frobenius operators on UHF algebras
16:30–17:00	坂口文則 Fuminori Sakaguchi (福井大学・工学部 Fukui University) Cauchy wavelets in terms of $su(1,1)$-coherent states (with Masahito Hayashi)
17:00–17:45	鈴木増雄 Masuo Suzuki (東京理科大学・理学部 Tokyo Science University) Quantum analysis of stochastic-operator-valued functions and Hida calculus
18:00–19:30	懇親会 (ベンチャーホールにて) Party

11 月 30 日 (火)　November 30 (Tue)

09:30–10:00	長谷川 洋 Hiroshi Hasegawa (日本大学・原子力研究所 Nihon University) 物理側が期待するランダム行列基礎理論
10:00–10:30	平塚 剛 Tsuyoshi Hiratsuka (筑波大学・数学系 Tsukuba University) Derivation of Wigner semi-circle law for GOE, GUE, and GSE in random matrix theory via Brownian motion
10:30–11:00	伊東由文 Yoshifumi Ito (徳島大学・総合科学部 Tokushima University) The mathematical principles of new quantum theory
11:00–11:10	休憩
11:10–11:40	粟屋かよ子 Kayoko Awaya (四日市大学・環境情報学部 Yokkaichi University) The measurement problem and quantum probability
11:40–12:10	林 正人 Masahito Hayashi (京都大学・理学研究科 Kyoto University) Information spectrum in quantum hypothesis testing
12:10–13:30	昼休み
13:30–14:15	田崎秀一 Shuichi Tasaki (奈良女子大学・理学部 Nara Women's University) Nonequilibrium stationary states in a quantum 1-d conductor
14:15–15:00	Kalyan B. Sinha (Indian Statistical Institute) Stochastic processes on "non-commutative" spaces
15:00–15:15	休憩
15:15–15:45	今福健太郎 Kentaro Imafuku (早稲田大学・理工学部 Waseda University) Quantum stochastic resonance in driven spin-boson system with stochastic limit approximation (with K. Yuasa and I. Ohba)
15:45–16:15	河上 哲 Satoshi Kawakami (奈良教育大学 Nara University of Education) On the character hypergroup associated with the discrete Mautner group

16:15–16:45 橋本行洋 Yukihiro Hashimoto
(名古屋大学・多元数理科学研究科 Nagoya University)
Interacting Fock space and free product of $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

16:45–17:15 洞 彰人 Akihito Hora (岡山大学・環境理工学部 Okayama University)
Scaling limit for discrete Laplacian and its quantization

講演概要

(アブストラクト集からの抄録)

1. **Recent progress in white noise analysis — Nonlinear extension and complex white noise (尾畑伸明・名古屋大学・多元数理科学研究科)**

確率解析の非線形拡張と複素ホワイトノイズは量子ホワイトノイズ解析における最近の発展を支えている。非線形拡張については, ホワイトノイズの高次巾の研究がひとつの出発点になっている。量子確率微分方程式は, 正規積ホワイトノイズ方程式として一般化され, 解の一意存在・正則性が荷重付フォック空間によって議論され, より一般化された状況への拡張が目下の課題である。複素ホワイトノイズについては, コヒーレントベクトルによる単位の分解公式から始めて, 多くの有用な公式が導かれろことを示した。微分方程式への応用が見込まれ興味深いと思われる。

2. **The Levy Laplacian and stable processes (齊藤公明・名城大学・理工学部)**

レヴィラプラシアンは, 無限変数のラプラシアンとして, 2 階微分係数の無限遠方での挙動を取り出すという点で, 従来の有限次元近似の議論とは趣を異にする位置にある。ホワイトノイズ超関数論を用いて定義域を定め, 新たな内積を導入することで, レヴィラプラシアンを自己共役作用素として定式化することができる。さらに, レヴィラプラシアンの巾乗を生成作用素とする確率過程が構成される。[K. Saitô and A. H. Tsoi: The Lévy Laplacian acting on Poisson white noise functionals, Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **2** (1999), 503–510.]

3. **On stochastic analysis related to a reaction-diffusion system (道工 勇・埼玉大学・教育学部)**

触媒作用を含む反応拡散過程は幅広い応用をもつ。$\rho^\gamma = \{\rho_t^\gamma\,;\, t \geq s\}$ を触媒過程 (catalyst process) としたとき, 次の非線形反応拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\kappa}{2}\Delta u + \psi - \rho_s^\gamma u^2 = 0, \qquad u|_{s=t} = \varphi,$$

を考える。分岐を含む測度値過程に対するディンキンの方法を応用することで, 測度値マルコフ過程を構成し, 解 u の確率的な表示が得られる。さらに, その測度値マルコフ過程は大偏差原理をみたす。[I. Dôku: Weak large deviation principle for superprocesses related to nonlinear differntial equations with catalytic noise, J. SU Math. Nat. Sci. **48** (1999), 11–22]

4. **Bochner–Minlos theorem with integrability condition and application to Gaussian analysis (Habib Ouerdiane・Universite de Tunis)**

ノルムの増大列 $\{\|\cdot\|_p \,;\, p \in \mathbf{N}\}$ で定まる可算ヒルベルト核型空間 X 上の特性関数 C と X' 上の確率測度 μ との対応関係を無限次元正則関数の立場から論じる。C は複素解析的に $N = X + iX$ に拡張され,

$$C(u) \leq K \exp \theta(m\|u\|_p)$$

の形の評価を持つとする。ただし, θ は $[0, \infty)$ は, $\theta(0) = 0$ かつ $\lim_{x\to\infty} \theta(x)/x = \infty$ をみたす連続な凸増加関数とする。その共役関数を $\theta^*(x) = \sup\{xt - \theta(t) \,;\, t \geq 0\}$ とする。このとき, C に対応する X' 上の確率測度 μ は

$$\int_{X'} \exp \theta^*(\alpha\|u\|_{-q})\mu(dx) < \infty$$

をみたす。この主張の逆も正しい。[R. Gannoun, R. Hachaichi, H. Ouerdiane, A. Rezgui: Un Théorème de dualité entre espaces de fonctions holomorphes à croissance exponentielle, J. Funct. Anal. 171 (2000), 1–14. H. Ouerdiane, A. Rezgui: Un Théorème de Bochner–Minlos avec une condition d'intégrabilité, Infinite Dimen. Anal. Quantum Prob. 3 (2000), 297–302.]

5. **Reversibility of random fields (Si Si・愛知県立大学・情報科学部)**

ホワイトノイズによって表現されるガウス型確率場の因果的性質に興味がある。$\{X(C)\}$ をユークリッド平面内の単純閉曲線 C によってパラメトライズされたガウス型確率変数の族とし, 標準表現と単純マルコフ性を仮定する。包含関係のある 2 つの C_0 と C_1 の間を C が変化するときの様子を, Brownian bridge の類似を構成することで観察し, 可逆性の定式化が与えられる。なお, 多くの問題が残されている。

6. **The ABC-formula, quantum computing and complexity (Igor V. Volovich・Steklov Mathematical Institute)**

量子計算機を実現するにあたって難点の一つは, 環境との相互作用から生じる量子的重ね合わせのデコヒーレンスにある。システムのパラメータを制御してデコヒーレンスを減らす問題は多くの人々によって論じられてきたが, [I. V. Volovich: Models of quantum computers and decoherence problem, http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9902055]

において一つの提案がなされた。これは, ホワイトノイズによる確率極限の理論に基礎をおいているが, この近似の補正を評価するためには, 確率極限の議論をより深化させる必要がある。ABC-公式とは, ユニタリ発展作用素 $U(t)$ の期待値が, 2つの定数 A, B と減少関数 $C(t)$ によって, $\langle U(t)\rangle = \exp(At + B + C(t))$ のように厳密な等式として表されることを主張するものである。この公式は, 統計物理や場の理論で使われている多くのハミルトン模型に対して正しく, Weisskopf–Wigner 近似や van Hove 極限に対する高次の補正を含む。$C(t)$ は摂動展開によって求められるが, 量子カオスを記述する自己相関関数の類似とみなすこともできる。[I. Ya. Arefeva and I. V. Volovich: Quantum decoherence and higher order corrections to the large time exponential behaviour, http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9906022. I. Ya. Arefeva and I. V. Volovich: The large time behaviour in quantum field theory and quantum chaos, http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9910109.]

7. **Superradiant (?) ground state of the Wigner-Weisskopf model (廣川真男・岡山大学・理学部)**

Wigner–Weisskopf (WW) 模型はスピン・ボゾン模型の回転波近似と捉えることができる。WW 模型のあるパラメータ領域において, 通常の摂動論においては見出すことができない非摂動的な基底状態 (superradiant ground state とでも呼ぶべきもの) が存在する。これは, Hepp–Lieb が Dick 模型に対して発見した基底状態に対応するものと考えられる。[M. Hirokawa: J. Math. Soc. Japan **51** (1999), 337–369. M. Hirokawa: J. Funct. Anal. **162** (1999), 178–218.]

8. **Analytic characterization of operators on Boson Fock space (Un Cig Ji・名古屋大学・多元数理科学研究科)**

ホワイトノイズ解析において, S-変換や作用素シンボルの特徴付け定理は極めて重要である。有限次元における類似の問題は, フーリエ変換の像空間の特徴付けである。特に, 量子確率微分方程式への応用を念頭に, 作用素シンボルの特徴付け定理をホワイトノイズ作用素の様々なクラスに対して確立する必要がある。これまで, 超関数核をもつ作用素については, 多くの結果が得られているが, $L^2(E^*, \mu) \cong \Gamma(L^2(\mathbf{R})$ を像空間とする作用素については結果が知られていなかった。複素ホワイトノイズを導入することで, そのような作用素の特徴付けを得るとともに, ヒルベルト・シュミット型作用素やトレース型作用素の特徴付けも得られる。部分的には [D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata: Normal-ordered white noise differential equations II: Regularity properties of solutions, in "Probability Theory and Mathematical Statistics (B. Grigolionis et al. Eds.)," pp. 157–174, VSP BV and TEV Ltd., 1999.]

9. **Topics in Gaussian innovation (樋田倍之・熊本大学・理学部)**

ガウス過程の各時点毎に加わる新生過程の記述において標準表現理論は極めて基本的である。この概念は P. Lévy によって導入され, 飛田によって発展してきた。標準表現と新生過程の構造は未だ十分に明らかにされていない。新しい観点として, ブラウン運動の非標準表現を組織的に構成し, 研究することを提案する。[Hibino, Hitsuda and Muraoka: Hiroshima Math. J. **27** (1997), 439–448.]

10. **Ruelle Perron Frobenius operators on UHF algebras (松井 卓・九州大学・数理学研究科)**

1 次元量子系の純粋状態における相関関数の指数関数的減衰を証明するための新しい方法を提案する。これは, 古典系における Ruelle–Perron–Frobenius 作用素の量子的拡張に基づくものである。**Z** 上の量子スピン系を考えよう。平行移動不変な状態 φ で

$$\varphi(Q) = \varphi_{(-\infty,-1]} \otimes \varphi_{[0,\infty)}(E(Q))$$

をみたすようなものに Ruelle–Perron–Frobenius 作用素を作用させる。上記の方程式をみたす完全正写像 E の存在を仮定する。ある種の基底状態や量子マルコフ状態はこの性質をもつ。τ_{-1} を平行移動作用素として, Ruelle–Perron–Frobenius 作用素 L は

$$L(Q) = \varphi_{(-\infty,-1]}(E(\tau_{-1}(Q)))$$

で定義される。E に対するある種の正則性の条件を仮定すると, L に関する不変状態の一意性が示され, 固有値 1 と残りのスペクトルにギャップがあることが示される。このことから φ の 2 点相関関数の指数関数的減衰が示される。

11. **Cauchy wavelets in terms of $su(1,1)$-coherent states (坂口文則・福井大学・工学部, 林 正人・京都大学・理学研究科)**

ひとつの関数 $h(q)$ に平行移動とスケール変換を施してできる関数族

$$h^{(a,b)}(q) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, h\left(\frac{q-b}{a}\right), \qquad a > 0, \quad b \in \mathbf{R},$$

がウエーブレットである。平行移動の生成作用素はモーメント作用素 P である。位置作用素を Q とすれば, スケール変換の生成作用素は $(PQ+QP)/2$ で与えられる。この観点から, ウエーブレットは $(ax+b)$-群に付随する「一般化されたコヒーレント状態」とみなすことができる。特に,

$$h_k(t) = \frac{G_k}{(t+i)^{k+1}}, \qquad k > 0, \quad G_k : \text{規格化定数},$$

に付随するウエーブレット (コーシー・ウエーブレット) は $-Q + ikP^{-1}$ の固有関数であることが知られている。上記の 2 つの生成作用素に $QPQ + k^2P^{-1}$ を付け加えると

$su(1,1)$ を生成することがわかる。このことからコーシー・ウェーブレットは $su(1,1)$ に付随する「一般化されたコヒーレント状態」と考えることができる。関連する生成・消滅作用素は相互作用フォック空間上に構成される。

12. **Quantum analysis of stochastic-operator-valued functions and Hida calculus (鈴木増雄・東京理科大学・理学部)**

非可換変数をもつ作用素値関数の量子微分を基礎において量子解析が定式化され，幅広く応用されてきた。これを量子確率作用素と量子確率的 Liouville 作用素の関数に拡張することができる。[M. Suzuki: Commun. Math. Phys. **183** (1997), 339. J. Math. Phys. **38** (1997), 1183. Phys. Lett. A**224** (1997), 337. Int. J. Mod. Phys. B**10** (1996), 1637. Rev. Math. Phys. **11** (1999), 243. Prog. Theor. Phys. **100** (1998), 475.]

13. **物理側が期待するランダム行列基礎理論 (長谷川 洋・日本大学・原子力研究所)**

ランダム行列理論は元来 (1960 年頃から) 物理の中から始まった。原子核や原子・分子の複雑なスペクトルの統計的理解と記述の必要性に端を発しているが，1980 年以後の研究の広がりを眺めると次の２大分野が見えてくる。(i) 量子カオス (ii) 金属・非金属の電子構造。筆者はこれまで量子化カオスにおけるランダム行列理論の役割を見てきた [長谷川洋：物理学最前線 28(1991)] のだが，この講演では固体物理における応用 (ii) のテーマを取り上げたい。興味深いことは「量子カオス」の言葉とともにリバイバルとなった Wigner–Dyson の足跡とほぼ同じ時期 (1980 年頃) に「アンダーソン局在のスケーリング論」がクローズアップされていることである。そして，この展開のきっかけを作った D. Thouless の一連の論文を省察するならば「量子拡散」「無次元コンダクタンス」などその核心ともいえるコンセプトが量子カオスの研究に登場してくる。すなわち，課題 (i) と課題 (ii) は「物理」として同根なのである。アンダーソン局在の問題は未だ完結しておらず，それを完結する方向をランダム行列理論の発展の中に求めたい。N-準位分布

$$P(x_1,\cdots,x_N) = C_{N,\beta}\exp\left[-\beta\left(\sum_{j<k}\phi(x_j-x_k)+\sum_j V(x_j)\right)\right], \qquad \beta=1,2,4,$$

の具体形にそれをとらえようとするのが目標である。

14. **Derivation of Wigner semi-circle law for GOE, GUE, and GSE in random matrix theory via Brownian motion (平塚 剛・筑波大学・数学系)**

ランダム行列 GOE, GUE, GSE の固有値分布はウィグナー半円則であるが，この分布を仮想時間のブラウン運動によって定まる確率過程を成分にもつ行列 $Q^n(t)$ から導出することは，Dyson (1962) に始まり，Chan (1992), Rogers–Shi (1993) によって数学的

に厳密化されてきた。その議論では, 固有値分布を記述する確率微分方程式の係数の特異性のために, 固有値の衝突の非存在証明に特別な注意が必要であった。経験分布を考えれば, この困難が回避される。経験分布を記述する確率微分方程式は $Q^{(n)}(t)$ のレゾルベントのトレースに伊藤公式を適用することで得られる。

15. **The mathematical principles of new quantum theory (伊東由文・徳島大学・総合科学部)**

量子論における問題は (i) 微視的粒子の量子状態を明らかにし, その時間発展を記述すること; (ii) 微視的粒子系の物理量の期待値とその統計を計算すること, である。量子系の特徴として (i) 粒子性と波動性; (ii) 物理量の離散性; (iii) 正準交換関係とハイゼンベルグの不確定性関係, があげられる。量子系を粒子の無限アンサンブルからなる確率空間と考えて, 量子論を公理論的に定式化することを提案する。[Y. Ito: New axioms of quantum mechanics – Hilbert's 6th problem, J. Math. Tokushima Univ. **32** (1998), 43–51]

16. **The measurement problem and quantum probability (栗屋かよ子・四日市大学・環境情報学部)**

量子力学の通常の定式化では, 物理的定義をあいまいにしたまま「観測」が使われている。これまでに多くの観測理論が提案されているが満足なものはまだ得られていない。そこで, あらたに次の定式化を考えてみる。

(I) 系のオブザーバブルは (観測されているかいないかによらず) 値をもつ
(I′) 統計公式は, オブザーバブルの観測器が持ち込まれたときにある値が観測される確率を計算するための一方法である。
(II) 系の状態関数は (観測されているかいないかによらず) シュレーディンガー方程式に従う。

この定式化によっても, 相対論と矛盾しないある種の非局在性が示される。これは, ペンローズの Z-mistery に対応するものである。この文脈で, アカルディの「量子確率」が必要かどうかも議論される。[栗屋かよ子 : ミクロの世界が明かす自然の姿, 四日市大学環境情報論集 **3** (1999).]

17. **Information spectrum in quantum hypothesis testing (林 正人・京都大学・理学研究科)**

量子系の観測は, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と 1 の分解 $1=\sum M_i$ によって定式化される。$\{M_i\}$ は正作用素 (POVM) または射影作用素 (PVM) である。状態 ρ が観測 $1=\sum M_i$ によって観測されるとき, 観測データの従う確率分布 P_ρ^M は $P_\rho^M(i)=\mathrm{Tr}\,(M_i\rho)$ で与えられる。

帰無仮説 ρ と対立仮説 σ の仮説検定問題, すなわち, 2値の量子観測 $\{T, 1-T\}$ によって ρ の採択, σ の採択を決定する問題は基本的である。ここでは, 観測 $\{T_n, 1-T_n\}$ が継続して行われる漸近的なケースを問題にする。第1種誤り確率を $\alpha(T_n) = 1 - \mathrm{Tr}\,(\rho_n T_n)$ 第2種誤り確率を $\beta(T_n) = \mathrm{Tr}\,(\sigma_n T_n)$ として $n \to \infty$ のときの漸近挙動に興味がある。そのために, 指数

$$B(\epsilon|\{\rho_n\}||\{\sigma_n\}) = \sup\left\{R; \exists\{T_n\}, \limsup_{n\to\infty} \alpha(T_n) \le \epsilon, \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \beta(T_n) \le -R\right\}$$

は重要である。観測の独立性に代えて, ρ_n, σ_n と可換な射影 E_n で $\log w(E_n)/n \to 0$ をみたすものが存在する場合に, B をエントロピー的な量で表すことができる。$\mathcal{H}$ が有限次元で, $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$ の場合には, さらに簡便な表式が得られる。

18. **Nonequilibrium stationary states in a quantum 1-d conductor (田崎秀一・奈良女子大学・理学部)**

ハミルトニアンが

$$H = -\hbar\gamma \sum_{\sigma=\pm} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (c_{j,\sigma}^* c_{j+1,\sigma} + c_{j+1,\sigma}^* c_{j,\sigma}) + \sum_{\sigma=\pm} \sum_{j=1}^{L} \hbar\epsilon_j c_{j,\sigma}^* c_{j,\sigma}$$

で与えられる1次元量子系を考える。不純物が閉じこめられている中間部分と環境に対応する両側の半無限部分とからなる。初期条件として, 左右の境界は異なる温度と化学ポテンシャルをもつ平衡状態にあるとする。任意の初期状態は $t \to \infty$ で quasifree な定常状態に弱収束し, 電流が消えないことが示される。その電流は Landauer 型の公式によって与えられ, 非平衡熱力学の結果に一致する。一方, $t \to -\infty$ においては, 別の定常状態に収束し, 非平衡熱力学の結果とは逆向きの電流をもつ。これは, 熱力学的な輸送という観点から $t \to -\infty$ においては不安定状態, $t \to \infty$ においては安定状態にあることを示す。[S. Tasaki: Nonequilibrium stationary states of noninteraction electrons in a one-dimensional lattice, Chaos, Solitons and Fractals (1999). S. Tasaki: Nonequilibrium stationary states for a quantum 1-d conductor, in "Proc. 3rd Tohwa University Conference on Statistical Physics," 1999.]

19. **Stochastic processes on "non-commutative" spaces (Kalyan B. Sinha・Indian Statistical Institute)**

量子力学においては, 任意の2つの物理量は同時観測可能とは限らない。このことは, オブザーバブルの作る代数の非可換性と理解され, 古典力学との決定的な違いとなっている。古典確率論の非可換拡張の背後には同様の考えがある。非可換な確率変数の対に対しては同時確率分布が期待されるようには定式化できないことが知られているなど, 古典確率論の概念を直接的に拡張ができないことが多々ある。一方, 古典確率論では得られない好都合な点もある。例えば, ブラウン運動とポワソン過程は, 量子的な表

現によって同一の非可換確率空間上で定義される。そこでは，量子的な増分 $dA^\dagger$, dA, $d\Lambda$ に対して伊藤公式が拡張され，量子確率微分方程式が統一的に議論される。その線上で，マルコフ過程の量子的拡張は重要な課題であるが，マルコフ半群の生成作用素の特徴付けなど未解決問題が多い。

20. **Quantum stochastic resonance in driven spin-boson system with stochastic limit approximation (with K. Yuasa and I. Ohba) (今福健太郎・早稲田大学・理工学部)**

氷河期の周期に関する研究を発端として，信号が雑音によって増幅されるという確率共鳴現象が様々な領域で興味をもたれている。このような現象は量子系にも存在するか，を議論する。Accardi らによるスピン・ボゾン系の確率極限の議論を拡張して，通常の確率共鳴に加えて反共鳴現象・二重共鳴現象とでもいうべき新しい現象を見出した。この議論では環境との相互作用から生ずる周波数のずれ (ラム・シフト) が重要な役割を演ずる。[K. Imafuku, K. Yuasa and I. Ohba: quant-ph/9910025]

21. **On the character hypergroup associated with the discrete Mautner group (河上 哲・奈良教育大学)**

有限群に対しては，超群としての双対定理 $K(\hat{G}) \cong \widehat{K(G)}$, $\widehat{K(\hat{G})} \cong K(G)$ が知られている。この双対定理を非I型局所コンパクト群に拡張することが目標である。具体例として，離散 Mautner 群 G に対しては，因子表現の準同値類の中に超群構造を導入して双対定理が成り立つことが示される。しかしながら，非I型局所コンパクト群 G の指標超群 $K(\hat{G})$ に対しては，自然な位相でハウスドルフ性が壊れたり，測度の合成積がコンパクト台をもたなくなるなど困難な問題が生ずるため，なお問題が多い。

22. **Interacting Fock space and free product of Z/2Z (橋本行洋・名古屋大学・多元数理科学研究科)**

$F_i = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \langle \sigma_i \rangle$ の無限自由積 $G = *F_i$ は代数的中心極限定理の様々な例を供給してくれる。G の左正則表現の生成する $*$-代数 $\mathcal{A}$ と単位元に付随するデルタ関数に対応するベクトル状態 ϕ の組の作る代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ を考える。その状態の下で，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N(N-1)}} \sum_{1\le i,j\le N}{}' \sigma_i \sigma_j = A^\dagger + A + P$$

が示される。ただし，$A, A^\dagger$ は1モードフォック空間上の消滅作用素，生成作用素であり，P は真空ベクトルの直交補空間への正射影である。$\sum'$ は相異なる i, j をわたる和

を表す。同様に，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N(N-1)(N-2)}}\sum_{1\le i,j,k\le N}{}' \sigma_i\sigma_j\sigma_k = A^\dagger + A + B^\dagger + B$$

が成り立つ。ただし，$B, B^\dagger$ は条件付消滅・生成作用素とでも呼ぶべきものであって，$B^3 = A$, $(B^\dagger)^3 = A^\dagger$ をみたす。これは，相互作用フォック空間の新しいクラスを与えることになり興味深い。[Y. Hashimoto: Samples of algebraic central limit theorem based on $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, in "Infinite Dimensional Harmonic Analysis (H. Heyer, T. Hirai and N. Obata, Eds.)," pp. 115–126, 1999]

23. **Scaling limit for discrete Laplacian and its quantization (洞 彰人・岡山大学・環境理工学部)**

G を離散群，Ω をその生成系，$\{\Omega_n\}$ を Ω の部分集合の増大列で $\Omega = \bigcup \Omega_n$ をみたすものとする。色つきケーリーグラフ (G, Ω, c) に付随する隣接作用素を $A = \sum_{\sigma\in\Omega} c(\sigma)\sigma$ とする。ボゾンフォック空間 $\Gamma(\ell^2(G))$ 上の G の各点 x における消滅・生成作用素を a_x, a_x^* として，A の第2量子化作用素

$$d\Gamma(A) = \sum_{\sigma\in\Omega} c(\sigma) \sum_{x\in G} a_{x\sigma^{-1}}^* a_x$$

を考える。適当なスケーリング極限の意味で $d\Gamma(A)$ のコヒーレント状態の下でのスペクトルを求める問題を論じる。色つきのヤング束 (ブラッテリ図形に付随したある種の分岐束法則) を導入して，A と $d\Gamma(A)$ のスペクトルの関係を記述することが基礎になる。[A. Hora: Central limit theorem for the adjacency operators on the infinite symmetric group, Commun. Math. Phys. **195** (1998), 405–416. A. Hora: Gibbs state on a distance-regular graph and its application to a scaling limit of the spectral distributions of discrete Laplacians, preprint.]

15.

エルゴード理論の展望

世話人　：　濱地敏弘（九大）、仲田均（慶大）
　　　　　　盛田健彦（東工大）、中村宗敬（山梨大）
日　時　：　２０００年１月１１日（火）－１月１３日（木）
場　所　：　慶應義塾大学三田キャンパス北新館

本研究会はエルゴード理論に関連する種々の分野の研究者間の情報交換と交流を図る目的で慶応大学で開催したものである．参加者は約60名であった．

講演についてはテーマを絞らずに広く募集した結果，以下に掲げるプログラムの通り，多彩な話題について講演が行われ，意義深い研究会を行うことができた．

プログラムと講演の概要を以下に掲載する．

プ　ロ　グ　ラ　ム

1月１１日（火）

９：５０－１０：４０　釜江 哲朗（大阪市立大）
Stochastic analysis based on deterministic Brownian motion

１０：５０－１１：４０　由利 美智子（札幌大）
On the speed of convergence to weak Gibbs measures

１３：１０－１４：００　藤田 岳彦（一橋大）
Generalized number system, generalized van-der Corput sequence and its application to numerical integration

１４：１０－１４：４０　中石 健太郎（東大）
Another proof to almost everywhere exponential convergence of 2-dim Jacobi-Perron algorithm

１５：１０－１６：００　楯 辰哉（慶應大）
Off-diagonal asymptotics in quantum ergodicity

１６：１０－１７：００　高橋 陽一郎（京大数理研），白井 朋之（東工大）
Fermion shift and its ergodic properties

1月１２日（水）

９：３０－１０：２０　濱地 敏弘（九大）
Classification of suborbits of nonsingular transformations

１０：３０－１１：２０　杉崎 文亮　（慶應大，日本学術振興会特別研究員）
On free Z^d action of Cantor minimal systems and orbit equivalence

１１：３０－１２：００
ショート・コミュニケーション

１３：３０－１４：２０　Klaus Schmidt (Vienna)

Isomorphism rigidity of commuting toral automorphisms and other algebraic Z^d-action

１４：３０－１５：２０　松本 健吾（上越教育大）

Presentations of symbolic dynamics and their topological conjugacy invariants

１５：５０－１６：４０　井上 心，高野 訓至，濱地 敏弘（九大）

Periodic points of the Dyck shift

１６：５０－

ショート・コミュニケーション

<u>１月１３日（木）</u>

９：３０－１０：２０　伊藤 俊次（津田塾大）

Periodic points of Number theoretic transformations and their reduction theorems

１０：３０－１１：２０　中嶋 真澄（鹿児島経済大）

An ergodic property of the Riemann zeta function

１３：００－１３：３０　仲田 均（慶應大）

On the law of large numbers associated to continued fraction expansions

１３：４０－１４：１０　伊藤 雄二（慶應大）

Dissipative Sequences について

Off-diagonal asymptotics in quantum ergodicity

Tatsuya TATE, Keio University

Faculty of Science and Technology, Keio University
3–14–1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223–8522, Japan
E-mail address: tate@math.keio.ac.jp

Our purpose of this talk is to estimate the rate of the decay of the off-diagonal asymptotics in case where the Hamilton flow is of Anosov type. Also it is shown that if the Hamilton flow has homogeneous Lebesgue spectrum, then the measure associated with a pseudodifferential operator A, which introduced by Zelditch, is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure.

Let M be a compact Riemannian manifold and let $\hat{H}$ be a first order positive elliptic pseudodifferential operator with principal symbol $H \in C^{\infty}(T^*M \setminus 0)$. Let $\{\varphi_j\}$ denote a fixed orthonormal basis of eigenfunctions of $\hat{H}$: $\hat{H}\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \uparrow \infty$. We set $N(\lambda) = \sharp\{j \in \mathbf{N}\,;\, \lambda_j \leq \lambda\}$. Then our results are the following.

Theorem 1 *Assume that the Hamilton flow φ_t on $\Sigma = H^{-1}(1)$ is transitive Anosov. Then for every pseudo-differential operator A of order zero, we have*

$$\limsup_{\lambda \to \infty} N(\lambda)^{-1} \sum_{\substack{j \\ \lambda_j \leq \lambda}} \sum_{\substack{k \\ 0<|\lambda_j - \lambda_k|<\delta}} |\langle A\varphi_j, \varphi_k \rangle|^2 = O(\delta),$$

where $\langle\, , \rangle$ denotes the inner product on $L^2(M)$.

Theorem 2 *Assume that the dynamical system $(\Sigma, \varphi_t, \omega)$ (ω is the Liouville measure on Σ) has homogeneous Lebesgue spectrum. Then, for every pseudo-differential operator A of order zero with $\langle \sigma_0(A) \rangle = 0$, there exists an integrable function p_A on $\mathbf{R}$ such that for any $a < b$ the following holds:*

$$\lim_{\lambda \to \infty} N(\lambda)^{-1} \sum_{\lambda_j \leq \lambda} \sum_{\substack{k \\ a<\lambda_k - \lambda_j<b}} |\langle A\varphi_j, \varphi_k \rangle|^2 = \int_a^b p_A(\lambda)\, d\lambda.$$

Here, $\langle \sigma_0(A) \rangle$ is the space average of the principal symbol $\sigma_0(A)$ with respect to ω on Σ.

A flow of Anosov type is said to be transitive if every leaf of the expanding or contracting foliation is dense. Note that the geodesic flow on a compact Riemannian manifold with negative curvature is transitive Anosov, K-flow, and hence has countably multiple Lebesgue spectrum.

We also note that, Theorem 2 has proved by Zelditch for compact hyperbolic manifolds. He has proved that, on a compact hyperbolic manifold, one can take the function p_A to be smooth. He has used the fact that the correlation functions have exponential decay. However the assumption of our theorems are somewhat general. Indeed, there is a metric on the two-dimensional sphere whose geodesic flow has homogeneous Lebesgue spectrum, and hence, in this case, we can apply Theorem 2.

Classification of subrelations in ergodic theory

濱地　敏弘
九大数理

フォンノイマン環の部分因子環の分類に対応したエルゴード理論からのアプローチは、部分軌道の分類である。軌道同値を対象とするので、measured discrete equivalence relation（簡単に relation と呼ぶ）を考えればよい。そこで $\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ を ergodic relation とその subrelation（$\mathcal{R} \supset \mathcal{S}$ と表す）としよう。Jones 指数に対応して、$\mathcal{S}$ の部分軌道が、$\mathcal{R}$ の軌道の中に何個（その個数を orbit index と言い、$[\mathcal{R}:\mathcal{S}]$ で表す）含まれているかに着目する。

それが有限個の場合に次の課題を考える。その為、$\mathcal{R} \supset \mathcal{S}$ と $\mathcal{R}' \supset \mathcal{S}'$ が軌道同値であることを、$\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}'$ が軌道同値で、しかも、同じ軌道同値写像のもとで $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ とが軌道同値になることをもって定義しておく。

1. $[\mathcal{R},\mathcal{S}] < \infty$ とした時、inclusion $\mathcal{R} \supset \mathcal{S}$ の標準形を求める
2. $[\mathcal{R},\mathcal{S}] < \infty$ のもとで、$\mathcal{R} \supset \mathcal{S}$ の軌道同値分類を行う

(1) について
$\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ の共通の subrelation$\mathcal{P}$ と、その normalizer からなる有限群 G 作用と部分群 H 作用とが取れ、$\mathcal{S}$-軌道が $\mathcal{R}$-軌道にどのように収まっているかを、$\mathcal{P}$ と、その群 G 作用と部分群 H 作用とによるクロス積で示される。この結果は C.Sutherland (Subfactors, World Scientific, 1994、及び、Current topics in operatr algebra,World Scientific, 1991) による。

更に、共通 relation と群作用、群と部分群の取り方とが一意である（つまり軌道同値不変である）ことが分かった。(T.Hamachi, J. Operator Theory, 43(2000))

(2) について
amenable な場合に、relation$\mathcal{R}$ 単独の軌道同値分類は既に完成している。II 型の場合は Dye、III 型の場合は Krieger による。$\mathcal{R} \supset \mathcal{S}$ の分類は、彼等の結果を拡張することになる。実際、1. の結果の一意性を用いて、完全分類が出来た。II 型の場合は T.Hamachi, J. Operator Theory, 43(2000)、III 型の場合は T.Hamachi, Israel J.Math.100(1997)。

Isomorphism rigidity of commuting toral automorphism and other algebraic $\mathbf{Z}^d$-action

Klaus Schmidt (仲田 均記)

コンパクト可換群 $\mathbf{X}$ 上で定義された既約な代数的 $\mathbf{Z}^d$-action α はすべての α-不変な $\mathbf{X}$ の閉部分群が有限となるような $\mathbf{X}$ の自己同型よりなる action である。このことをもとにして、この講演では次のような結果とその周辺の話題を紹介している。

$d \geq 2$ として、コンパクト可換群上の既約で混合的な代数的 $\mathbf{Z}^d$-actions （群は異なって良い）に対する任意の可測な conjugacy は affine 変換に限る。

このことは次のような意味を持つ。トーラス上の双曲型自己同型は代数的に conjugate でなくとも測度論的には conjugate になりうる。しかし、二つの可換な自己同型の組を考えると 測度論的 conjugacy は代数的 conjugacy を意味してしまう。この問題のエルゴード理論における背景の一つに 1 次元トーラス（$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$）上で $Tx = 2x$ と $Sx = 3x$ に共通する不変測度が Haar measure 以外にあるかどうかという Furstenberg conjecture がある。この問題自体まだ最終的な結果は得られていないが、エントロピーが正になる不変測度の範囲では正しいことが証明されている。可換なマルコフ変換に共通する不変測度が最大エントロピーを与える測度に限るかどうかは、その一般化としてきわめて自然な問題である。しかし、この問題を取り扱うには多くの困難が伴うため、これまでのところはっきりした形では部分的な結果すらも得られていないようである。上の結果は、マルコフ変換の定義されている空間に群構造を付け加え、変換も群自己同型と制限することにより困難さを解釈できる。

Dyck shiftの周期点

井上　心、高野　訓至、濱地　敏弘
九州大学大学院数理学研究科

括弧の記号 (,),[,] の4文字で作る両側無限列から成る shift C が、文字の並び方の条件として「括弧は内側から外側に読む」としたとき、C を Dyck shift という。例えば、ブロック $[\cdot(\cdot)\cdot[\cdot]\cdot]$ は許されるが、 $[\cdot(\cdot)\cdot[\cdot]\cdot)$ は許されない。Dyck shift C の周期 n の周期点の個数 $\sharp Per_n(C)$ が次のように exact に書き下されることが分かった。

$$\sharp Per_n(C) = \begin{cases} 2\{3^n - \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i} 2^i\} & n : odd \\ 2\{3^n - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{i} 2^i\} + \binom{n}{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}} & n : even (\geq 2) \end{cases}$$

C の topological entropy は Krieger[3] により、$h(C) = \log 3$ と計算され、ζ-関数は、Keller[2] に $\zeta_C(t) = \frac{3-8t+\sqrt{1-8t^2}}{4(1-3t)^2}, |t| < \frac{1}{3}$ と既に計算されている。彼等とは異なる方法で、上の exact な公式を用いて直接的にも entropy と ζ-関数を求めることが出来る。

次に subshift の埋め込み問題を考える。shift X が shift Y に真に埋め込まれるとは、X が Y の proper な subshift と conjugate なことを言う。これは encoder-decoder の設計から生まれた概念で、X が keybord から打たれた full shift を指し、Y がハードディスク等の記録媒体を指す。shift X は基本的には SFT であると仮定してよい。埋め込み先の Y が規約な SFT のときには埋め込みの必十条件が Krieger により求められており、それは $h(X) < h(Y)$, $\sharp Per_n(X) \leq \sharp Per_n(Y)$ $for\ each\ n \geq 1$ である。この判定条件は、埋め込み先を SFT から sofic shift に拡張すると不十分であることが分かっており、その改良が Boyle[1] によって既になされている。

ところで、sofic でない Dyck shift を埋め込み先に持ってくると、やはり Krieger の判定条件が壊れる例を、Dyck shift の周期点の exact な公式を使って与えることが出来た。今後、sofic ではない方向の shift として、Dyck shift 等の shift、広くは $property(A)$ と呼んで Krieger が最近研究している shift[4][5] を埋め込み先とした時の埋め込みの判定条件を新たに求める必要がある。

Dyck shift に戻って、その subshift として、SFT と Dyck shift との共通集合である shift の研究の重要性がある。例えば、Dyck shift C と 3-shift $\{(,),]\}^Z$ の共通集合について、周期点の個数、entropy、ζ-関数を計算した。

参考文献

[1] M. Boyle. *Lower entropy factors of sofic systems.* Ergod.Th. & Dynam.Sys.4(1984),541-557.

[2] G. Keller. *Circular codes, loop counting, and zeta-functions.* J.Combin.Theory Ser.A 56(1991),75-83.

[3] W. Krieger. *On the subsystems of topological Markov chains.* Ergod.Th. & Dynam.Sys.2(1982),195-202.

[4] W. Krieger. *On a Syntactically Defined Invariant of Symbolic Dynamics.* to appear in Ergod.Th. & Dynam.Sys.

[5] W. Krieger. *On Subshifts and Monoid.* preprint.

On the law of large numbers associated to continued fraction expansions

Hitoshi Nakada
Keio University

x を $(0,1)$ の中の無理数とし、次のような負の連分数展開を持つとする。

$$x = \frac{1|}{|b_1} - \frac{1|}{|b_2} - \frac{1|}{|b_3} - \cdots, \quad b_i \geq 2.$$

この展開を導く $(0,1)$ 上の変換は絶対連続な不変測度をもつことが知られているが、それは任意の $(1-\epsilon, 1)$ で測度無限大となる。したがってその変換に対して通常の個別エルゴード定理は適用できない。さらに特に展開係数 $b_1(x)$ はいかなる定数関数との差も可積分とならないので、$\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ に大数の法則が成り立つかどうかは自明ではない。J. Aaronson ('86) は Lebesgue 測度に関しては弱法則が成立していることを証明した：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i = 3 \quad \text{in Lebesgue measure}$$

最近、T. INoue ('98) は無限大の不変測度を持つ 1 次元の力学系に対して、二つの無限大の測度を持つ区間への訪問回数に関して ratio limit の存在が a.e. で成り立つことを（ある条件のもとで）示した。いま問題にしている連分数の場合、中間近似に対応する変換がちょうど T. Inoue の扱った例である。そこでそのことの応用として大数の強法則の成立が証明される：

定理 ほとんどすべての $x \in (0,1)$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i = 3 \quad \text{Lebesgue measure- a.e.}$$

同じ方法で偶数のみを係数とする連分数展開（Index ∞ の Hecke 群に対応する連分数展開）の係数に対しても大数の強法則が成り立つことが証明される。

このアイデアをある条件を持つ無限大不変測度をもつエルゴード的変換に適用することにより、適当な関数の族に対して個別エルゴード定理の成立を証明できると期待している。

16.

撞球問題百年

平成１２年4月２７日（木）～２８日（金）

広島大学大学院理学研究科数学教室 大講究室Ｂ７０７

責任者　盛田　健彦、久保　泉

当研究会は、撞球問題が数理物理学で取り上げられるようになって、百年を経過したことを記念して、問題の発生・研究の歴史・最近の動向・近い将来の状況を確認し、今後の研究に資することを目的として、計画された。

始めに歴史を少しばかり概観して於く。１９００年4月２７日に、Kervin 卿が大英帝国科学アカデミーで「熱と光りの力学理論を覆う１９世紀の双叢の雲」と言う演説を行い、来るべき相対論、量子論の幕開けへの警鐘としてから、丁度１００年を迎えようとしている。Kervin 卿はこの演説の中で、エルゴード仮説の検証を行うためには撞球系を調べることを提唱している。彼の提示した系の１つは、３角形内部の運動であり、実際に数値実験を行ってエルゴード的ではないことを論じている。もう一つの系は、今で言えば Bunimovich 系に類似した菊の紋章型の撞球系であるが、これも数値実験の結果としてはエルゴード的でないとしている。

１９１４年には、Weyl によって、トーラス上（あるいは長方形）の撞球系が数学的に厳密に論じられた。その後１９６３年には、Ya. G. Sinai が直方体の箱の中の球形の多粒子系がエルゴード的であることを主張し、１９７０年に Sinai の撞球系と呼ばれる系でのエルゴード性を証明した。研究代表者（久保）は、Sinai の証明の不備を補うとともに、ポテンシャル場での撞球系のエルゴード性やそのカオス的挙動について論じた。

分担者の盛田は散逸的撞球系の研究を行い、その閉軌道の数の性質、特にゼータ関数の詳細な研究を下。印南は測地線の幾何学的手法を用いて、撞球系を論じて来た。

一方、１９８６年の Katok の論文により、撞球系の研究は系統的に実行できる枠組みが与えられ、幾何学的な研究が盛んとなった。また、数理物理学者の研究参加が爆発的に増加している。それらのようすは、後で文献リストにより示す。このような背景の下で研究会を計画した。

撞球問題百年プログラム

4月27日

14:00 - 14:50	久保泉	（広島大）	ケルヴィンからシナイまでの７０年
15:00 - 15:50	印南信宏	（新潟大）	凸ビリヤード問題のための測地線の幾何学
16:00 - 16:50	原山卓久	（ＡＴＲ）	決定論的拡散とビリアード
17:00 - 17:30			討論

4月28日

9:30 - 10:20	盛田健彦	（東工大）	Dynamical zeta functions of dispersing billiards without eclipse
10:30 - 11:20	中村勝弘	（大阪市大）	量子カオスと量子輸送
12:30 - 13:20	首藤 啓	(都立大)	量子ビリアードにおける外側・内側問題と半古典論
13:30 - 14:20	井上友喜	（愛媛大）	ハンガリーにおける撞球問題の研究
14:30 - 15:00			討論

参加者リスト

印南信宏（新潟大）、中居功（お茶大）、沈維孝（東大）、首藤啓（都立大）、仲田均（慶大）、首藤啓（都立大）、仲田均（慶大）、中村勝弘（大阪市大）、原山卓久（ＡＴＲ）、渡辺毅（岡山理大）、竹中茂夫（岡山理大）、村田博（鳴門教育大）、山田さおり（鳴門教育大）、松岡隆（鳴門教育大）、宍倉光広（広島大）、鄭容武（広島大）、澤田哲（広島大）、酒井佑介（広島大）、植田好道（広島大）、島唯史（広島大）、岩田耕一郎（広島大）、笹井理恵（広島大）、出口英生（広島大）、森本晋介（広島大）、木本真理子（広島大）、久保泉（広島大）、平出耕一（愛媛大）、井上友喜（愛媛大）、高橋公也（九工大）、濱地敏弘（九大）、猿子幸弘（佐賀大）　計３１名

ケルヴィンからシナイまでの７０年

久保　泉（広島大学）

１９００年４月２７日、ケルヴィン卿が大英帝国王立研究所で、１９世紀最後の年に、１９世紀に発生し２０世紀に残された問題を指摘する講演を行い、それが論文として掲載されたものが

Lord Kervin ; *Nineteen century clouds over the dynamical theory of heat and light.* Philosophical Magagine S.6, Vol. **6** No.7 (1901), 1-40

です。

この論文の中で、「暗雲」としている問題の一つは、マイケルソンの「光速度一定の法則」のことです。この解決の道はフィッツジェラルドの研究に期待を掛けています。

もう一つの「暗雲」が、この研究会のテーマである、マックスウェル・ボルツマンによる「エルゴード仮説」のことです。ケルヴィン卿はものすごい調子で、この仮説を批判し、「物理学の基礎を破壊するものである」と主張しています。何故そのような主張をしたのかは、明確に書かれています。その前に、卿が言っている「エルゴード仮説」とは何かを説明しましょう。

マックスウェル・ボルツマンは、「放置された系は、遅かれ早かれ、同エネルギーの全ての状態の無限の近くを通過する」ことを主張し升。これから、粒子系の各速度成分の運動エネルギーの長時間平均は成分によらず一定値であることを導きました。それを根拠に原子（分子）の自由度と気体の定積・定圧比熱の関係を得、基本的な分子に対して実験値との適合性を示しました。

この頃、スペクトルの測定により、複雑な輝線スペクトルが見いだされ、それに応じた多くの自由度を原子（分子）が有していると理解されて今した。これをマックスウェル・ボルツマンの理論と組み合わせると、比熱の理論値が異常な値となります。このことが、卿をして先鋭的な批判に向かわせました。彼らの証明は、証明のようなものとも言えないとさえ言い切っています。

ケルヴィン卿は、自分の主張を証明するために、助手のアンダーソン氏の協力で世界初の数値実験を行いました。３角形内の撞球系において、２つの方向成分の運動エネルギーの長時間平均が食い違うことを作図と計測を用いて示しました。さらに、菊の紋章型の領域内での撞球系においても同様の数値実験をしています。それが、**撞球問題百年**と言う根拠になっています。

もっとも、もう少し前に、レイリー卿がマックスウェル・ボルツマンドクトリンの検証のためには、撞球系のようなものの研究が必要であると指摘はしていますが、具体的な研究を開始したわけではありません。

エルゴード仮説は、上の文章で下線を引いた「無限に近く」はが省かれたものが本来でしたが、数学の発展とともにそのままでは成立しないことが判明し、ケルヴィン卿が心優しく挿入したのでした。その後、エーレンフェストなどもこれを採用し、数学者の興味を引く問題として取り上げられるようになりました。

１９１４年、ワイルは正方形の撞球台上の１つの撞球の運動が、その位置のみに着目すれば、エルゴード仮説を満たすこと、さらに進んで、長時間平均が空間平均と一致することまで示し、マックスウェル・ボルツマンの望む形の定理を得たのでした。

１９３２年にはバーコフが個別エルゴード定理を証明し、非常に一般的な条件の下での長時間平均の存在と、それが空間平均に一致するための必要十分条件が測度的可遷性であることを示した。これ以後、エルゴード仮説とは、この古典的な力学系が測度可遷性をもつことと理解されるようになり、この性質をエルゴード性とも呼ばれるようになった。

それから、パン屋の変換など幾つかの力学系のエルゴード性が示されたが、もっとも本来の問題に近いのは、１９３８年のホップによる「定負曲率空間の測地的フロー」のエルゴード性の証明であった。これは、もっと一般的な負曲率空間の場合に彼自身によって拡張されることとなる。

１９６３年にシナイは、２次元トーラス上に置かれた凸形の障害物の外側での１質点の運動（シナイの撞球系と呼ばれる）のエルゴード性が成り立つと発表したが、実際の証明は１９７０年の論文をまつこととなった。その手法の本質てきな部分は、ホップが負曲率空間にたいして用いたアダマールの理論に基づいている。しかし、３０年の歳月を要したのは、さらに測度論的方法の開発が待たれたからとも言える。

凸ビリヤード問題のための測地線の幾何学

印南信宏　（新潟大学）

C^2-級の曲線 C で囲まれた凸領域内の撞球系を考える。C 上の点 x での入射角 θ に対して、$u = \cos\theta$ とおくと、状態空間 Ω は $\Omega = C \times (-1, 1)$ である。(x_0, u_0) から出発した軌道が次に C に衝突する点を (x_1, u_1) とし、その対応を $\varphi : (x_0, u_0) \mapsto (x_1, u_1)$ で与える。$(x_j, u_j) \equiv \varphi^j(x_0, u_0)$ とおき、$X = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ を **billiard trajectory** と言う。

C 上の点の点は、基点からの長さ s でパラメターが導入されており、C の長さを L とする。C 上の点列 $x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ の**状態** $s = (s_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ とは、$x_j = C(s_j)$, $s_j \geq s_{j+1} < s_j + L$ が成り立つことである。$s = (s_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ を状態とし、

$$H(s_i, \ldots, s_k) \equiv -\sum_{j=i}^{k-1} |C(s_{j+1}) - C(s_j)|$$

するとき、状態 s が billiard trajectory の状態であるためのには、$H(s_i, \ldots, s_k)$ が $(t_{i+1}, \ldots, t_{k-1}) \mapsto H(s_i, t_{i+1}, \ldots, t_{k-1}, s_k)$ の極値となることが必要十分である。

Ω 上で φ-不変な circle に分割されることは、$\Omega \times \mathbb{Z}$ 上で translation 不変な foliation の存在と対応している。

1920 代中頃：G. D. Birkohoff は、**積分可能な凸ビリヤードは円か楕円に限るか?**と言う問題を提起し、また **自由度２のすべての Lagrangian system は特性局面上の billiard ball problem と同等である** ことを示した。

1949 青木清（テンソル）がこのような問題を考察し、解説を行っている。

1950 Hillel Poritsky (Ann. of Math.) が **caustics は凸か？** を論じた。

1993 Bialy (Math. Z.) がΩ **が φ-不変、シンプル閉連続曲線で not null homotopic なもので層化されるならば、C は円である** ことを示した。

1994 Wojtkowski (J. D. G.) は C **によって囲まれた領域が smooth caustics で層化され、ほとんどすべての billiard trajectory がそれらのどれかに接するならば、C は円である**ことを示した。

1998 印南 (J.Math.Soc.Japan) M^n コンパクトリーマン多様体、$B \equiv \partial M \neq \emptyset$、sectional 曲率 $K < 0$、B の点は conjgate points で isolate されるならば、

$$\int_B \lambda_S dB \geq \frac{(\mathrm{vol}B)^2}{n\mathrm{vol\,M}}$$

が成立する。ここで等号が成立するのは、M が flat な計量をもつ球体である。ここで、$\lambda_S(p)$ は $p \in B$ における B の shape operator の固有値の最大値である。

決定論的拡散ビリアード

原山卓久 (ATR)

ローレンツ Gas すなわち、円盤が周期的に並べられたときの撞球系を考察する。

1. Diffusion and Perriodic Lorentz Gas

1980 Sinai–Bunimovich (CMP **78**) 拡散係数 D の存在を示した。(1986 CMP **107** も参照)

J. Mealton, R. Zon $D \sim v \dfrac{d^2}{\pi(a^2\sqrt{3} - 2\pi a)}(d-2a)$。ただし、円盤の半径 a 、円盤同士の中心間の距離 d である。

1998 Fujisaka and S. Grossman (Z. Phy. B48), $D(a) = \dfrac{1}{2\pi}(a-1)(a-2)$.

2. Escape Rate Formula

1990 Gaspord, Nicols ; Phys. Rev. Lett. **65**

$$D = \lim_{L\to\infty} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 [\lambda(F_L) - h_{KS}(F_L)],$$

where λ is Lyapunoff exponent and h_{KS} is Kolmogorov-Sinai entropy.

3. The Diffusion Coefficients in Terms of the Hausdorff Codimension

Young's formula

$$D = \lim_{L\to\infty} \left(\frac{L}{\chi_1}\right)^2 \lambda(F_L)C_I(F_L), \qquad C_I = 1 - d_I = 1 - \frac{h_{KS}}{\lambda}$$

4. Fractal Diffusion Coefficients

Harayama and Gaspard, Billiard in a graviation.

重力場で、床に放物上の凸障害物が並べられている系

M. P. Wojtkocos, CMP **126** (1990), 507

重力場で、床にエッジ上の障害物が置かれている系

Dynamical zeta functions of dispersing billiards without eclipse.

盛田健彦（東京工業大学）

Let $O_1, O_2, \ldots, O_J$ ($J \geq 3$) be a finite number of strictly convex bounded domains in $\mathbb{R}^2$ with C^3 boundaries $\partial O_1, \partial O_2, \ldots, \partial O_J$. Each of them is called a scatterer. We assume the following condition (H) .

For any triplet (j_1, j_2, j_3) of distinct indices, the convex hull of $\overline{O_{j_1}} \cup \overline{O_{j_2}}$ does not intersect $\overline{O_{j_3}}$.

Q denotes the exterior domain $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \overline{O_j}$ of scatterers. Let us consider the billiard flow S^t on $\overline{Q}$, that is, the Euclidean geodesic flow on the manifold $\overline{Q}$ obeying the law of reflections at the boundary.

Let $S\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times S^1$ denote the unit tangent bundle over $\mathbb{R}^2$ and $\pi : S\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $(q, v) \mapsto q$ the natural projection. The state space M of the billiard flow is given by

$$M = \pi^{-1}(Q) \cup (\pi^{-1}(\partial Q)/\sim),$$

where the equivalence relation $\sim$ on $\pi^{-1}(\partial Q)$ means that $(q, v) \sim (p, w)$ if and only if $q = p$ and $w = v - 2\langle v, n(q)\rangle n(q)$, where $n(q)$ is the unit normal at $q \in \partial Q$ directed toward the inside of the domain Q. Namely, the state of incidence and the state of reflection are identified. Therefore, by selecting the states of reflection as representatives, we can regard $\pi^{-1}(\partial Q)/\sim$ as

$$M^+ = \{x = (q, v) \,:\, q \in \partial Q,\ \langle v, n(q)\rangle \geq 0\}.$$

The nonwandering set $\Omega \subset M$ of the flow S^t coincides with the set of initial states x for which $\pi(S^t x) \in \partial Q$ for both infinitely many $t > 0$ and infinitely many $t < 0$. Moreover, it has a rich structure something like Axiom A attractors. Thus we can investigate the dynamical properties of S^t by constructing a suspension flow over an appropriate discrete dynamical system. Precisely, consider the set $\Omega^+ = M^+ \cap \Omega$. The first collision time

$t^+ : \Omega^+ \to \mathbb{R}$ and the first collision map $T : \Omega^+ \to \Omega^+$ are defined by

$$t^+(x) = \inf\{t > 0 : S^t x \in \Omega^+\}, \qquad Tx = S^{t^+(x)}x.$$

Then the billiard flow restricted to Ω can be represented by the suspension flow over the discrete dynamical system (Ω^+, T) with ceiling function t^+. Usually, the first collision map T is called the billiard map.

For a function $V : \Omega^+ \to \mathbb{C}$, we introduce a formal function $\zeta_V(s)$ with complex variable s as follows and call it the zeta function for T with potential function V.

$$\zeta_V(s) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{x\,:\,T^n x = x} \exp\left(-s\sum_{i=0}^{n-1} V(T^i x)\right)\right),$$

where $\sum_{x\,:\,T^n x=x}$ means the sum taken over all points $x \in \Omega^+$ such that $T^n x = x$. Clearly, if V is positive valued and bounded, the series in the right hand side of the above equality is absolutely convergent for s with Re s large enough. In [1] we obtained the following (see also [3]).

Theorem A (1) *There exists a positive number h such that the series in the right hand side of ζ_{t^+} is absolutely convergent in the half-plane Re $s > h$ and ζ_{t^+} expresses an analytic function without zero.*

(2) *There exists a positive number δ such that ζ_{t^+} can be extended to a meromorphic function without zero in the half-plane Re $s > h - \delta$.*

(3) *$s = h$ is the unique pole on the axis Re $s = h$ and it is simple.*

An interesting fact that follows from Theorem A is an analogue of the prime number theorem.

Corollary. *Put*

$$\pi(x) = \sharp\{\tau : \exp(h\ell(\tau)) \le x\},$$

where τ denotes a prime closed orbit of the billiard flow and $\ell(\tau)$ denotes its period. Then we have

$$\pi(x)\frac{\log x}{x} \to 1 \qquad (x \to \infty).$$

The aim of this article is to describe recent developments for the zeta function $\zeta(s) = \zeta_{t^+}(s)$ after Theorem A. Some of these are found in the paper [3] but the others are first announced in the present article and will be contained in the forthcoming papers [4] and [5].

Theorem B. *There exists $\beta > 0$ such that $\zeta(s)$ is extended to a meromorphic function without zero in the half-plane Re $s > -\beta$.*

Note that $s = 0$ is a regular point of ζ_{t^+}. In fact it is not hard to see from our proof that ζ_U has pole at $s = 0$ if and only if $L(0)$ has an eigenvalue 1 and $L(0)$ is the transfer operator corresponding to the zeta function of some directed graph. In fact we will prove the following in the forthcoming paper [9].

Theorem C. *$s = 0$ is a regular point of $\zeta(s)$. In particular, we see*

$$\zeta(0) = -\frac{1}{(J-2)2^{J-1}}$$

holds as far as the condition (H) is valid. Namely the zeta function knows how many scatterers there are.

Theorem D. *There exists $\alpha \in (0,1)$ such that $\zeta(s)$ is pole free in the region*

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ s > h - \frac{1}{|\mathrm{Im}\ s|^{\alpha}},\ |\mathrm{Im}\ s| > 2\}$$

This result is sufficient for the rapid mixing of the billiard flow but not for the exponential mixing. On the other hand, the billiard flow is expected to be exponentially mixing. Thus we arrive at the following conjecture.

Conjecture E. *There exists a positive constant ϵ such that $\zeta(s)$ is pole free in the region* $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ s > h - \epsilon\} \setminus \{h\}$

If we can show the validity of Conjecture E, we can obtain the remainder estimate of the error term of the analogue of the prime number theorem in the same way as [12]. Namely, we have the following.

Conjecture F. ıThere exists a constant $c \in (0,1)$ such that

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u}\, du + O(x^c) \qquad (x \to \infty).$$

REFERENCES

[1] Takehiko Morita ; *The symbolic representation of billiards without boundary conditions,* Trans. Amer. Math. Soc. **325** (1991), 819–828

[2] Takehiko Morita ; *Billiards without boundary and their zeta functions,* Advanced Studies of Pure. Math. **21** (1992), 173–179

[3] Takehiko Morita ; *Meromorphic extensions of a class of zeta functions for two dimensional billiards without eclipse,* Preprint Ser. Tokyo Institute of Technology 90, (1999)

[4] Takehiko Morita ; *Meromorphic extensions of a class of dynamical zeta functions and their special values at the origin*, Preprint Ser. Tokyo Institute of Technology 102, (2000)

[5] Takehiko Morita ; *Pole free regions for dynamical zeta functions of two-dimensional scattering billiards without eclipse,* (in preparation)

ハンガリーにおける撞球問題の研究

2000年4月28日
愛媛大学工学部
井上　友喜

下記のReferencesは，最近10年ぐらいに出版された Szász らハンガリーの数学者による撞球問題に関連した主な論文のリストである．（抜けているものもある．）

これらの文献について，Math.Rev.やいくつかの論文を部分的に読んでわかったことを紹介する．

References

[1] Bálint, Péter: Chaotic and ergodic properties of cylindric billiards. Ergodic Theory Dynam. Systems 19 (1999), no. 5, 1127–1156.

[2] Simányi, Nándor; Szász, Domokos: Hard ball systems are completely hyperbolic. Ann. of Math. (2) 149 (1999), no. 1, 35–96

[3] Simányi, Nándor: Ergodicity of hard spheres in a box. Ergodic Theory Dynam. Systems 19 (1999), no. 3, 741–766.

[4] Simányi, Nándor: Studying dynamical systems with algebraic tools. European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996), 200–210, Progr. Math., 169, Birkh?user, Basel, 1998.

[5] Szász, Domokos: Boltzmann's ergodic hypothesis, a conjecture for centuries? Studia Sci. Math. Hungar. 31 (1996), no. 1-3, 299–322.

[6] Simányi, Nándor; Szász, Domokos: The K-property of Hamiltonian systems with restricted hard ball interactions. Math. Res. Lett. 2 (1995), no. 6, 751–770.

[7] Simányi, Nándor; Szász, Domokos: The K-property of 4D billiards with nonorthogonal cylindric scatterers. J. Statist. Phys. 76 (1994), no. 1-2, 587–604.

[8] Szász, Domokos: The K-property of "orthogonal" cylindric billiards. Comm. Math. Phys. 160 (1994), no. 3, 581–597.

[9] Szász, Domokos: Ergodicity of classical billiard balls. Statistical physics (Berlin, 1992). Phys. A 194 (1993), no. 1-4, 86–92.

[10] Simányi, Nándor: The K-property of N billiard balls. II. Computation of neutral linear spaces. Invent. Math. 110 (1992), no. 1, 151–172. The K-property of N billiard balls. I. Invent. Math. 108 (1992), no. 3, 521–548.

[11] Szász, Domokos: On the K-property of some planar hyperbolic billiards. Comm. Math. Phys. 145 (1992), no. 3, 595–604.

[12] Szász, Domokos: Dispersion, focusing and the ergodicity of billiards. From phase transitions to chaos, 512–520, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992.

[13] Krámli, András; Simányi, Nándor; Szász, Domokos: The K-property of four billiard balls. Comm. Math. Phys. 144 (1992), no. 1, 107–148.

[14] Krámli, András; Simányi, Nándor; Szász, Domokos: The K-property of three billiard balls. Ann. of Math. (2) 133 (1991), no. 1, 37–72.

[15] Krámli, András; Simányi, Nándor; Szász, Domokos: A "transversal" fundamental theorem for semi-dispersing billiards. Comm. Math. Phys. 129 (1990), no. 3, 535–560. Erratum:Comm. Math. Phys. 138 (1991), no. 1, 207–208.

[16] Krámli, András; Simányi, Nándor; Szász, Domokos: Ergodic properties of semi-dispersing billiards. I. Two cylindric scatterers in the 3D torus. Nonlinearity 2 (1989), no. 2, 311–326.

[17] Krámli, András ;Wojtkowski, Maciej P: Two-particle billiard system with arbitrary mass ratio. Ergodic Theory Dynamical Systems 9 (1989), no. 1, 165–171.

17. 生物現象と非線形微分方程式

平成１２年９月７日(木)～９日(土)

於広島大学大学院理学研究科

責任者：平良和昭、岩田耕一郎

2000年

1. 岩村 覚三 (城西大学理)：Set Covering Problem, Genetic Algorithm and its Domain Specific Knowledge
2. 林 俊一 (横浜国立大学工)：伝染病モデルに対する粒子間ペア近似
3. 今野 紀雄 (横浜国立大学工)：確率偏差分方程式から確率増殖モデルへの超離散化とその性質
4. 伊藤 栄明 (統計数理研究所)：一次元ランダムパッキングの数理生物への応用
5. 守田 智 (静岡大工)：結合カオス写像系の集団運動
6. 大崎 浩一 (大阪大学工)：走化性方程式に対する指数アトラクターの構成
7. 堀江 亮太 (慶應義塾大学理工)：数理生物学の現象論的方程式と数理計画法の計算モデル
8. 佐藤 一憲 (静岡大学工)：生息地破壊を受ける個体群のダイナミクス
9. 中桐 斉之 (茨城大学理), 泰中 啓一 (静岡大学工)：生態系における生息地破壊の影響
10. 道工 勇 (埼玉大学教) ：ランダムな媒質中の非線型方程式と付随する確率過程
11. 梅津 健一郎 (前橋工科大学 工)：人口動態モデルに現れる分岐現象
12. 平良 和昭 (筑波大学数)：Semilinear elliptic and parabolic problems in population dynamics
13. 出口 英生 (広島大学理)：非線形拡散方程式の一般関数解

岩村氏はORの昔からの難問 Set Covering Problem に対し遺伝的アルゴリズムの有効性を確認したことを報告した。林氏は１次元コンタクト・プロセスをとりあげ不変測度に対するK-型相関関数の間に成り立つ相関等式のヒエラルキーを閉じさせる更新切断の考えを１パラメータ族に拡張して生存確率の評価を行うことについて報告した。今野氏は超離散化を行うと確率増殖モデルを表す方程式が得られるようないくつかの確率偏差分方程式を紹介しそれらの関係について報告した。伊藤氏は２種の車に関する car parking problem について報告した。守田氏には大域結合写像系で素子の更新が確率的に行われる場合で、同期的な更新から完全に非同期的な更新までを連続的に再現するモデルをとりあげノントリビアルな集団運動について報告していただいた。大崎氏は１次元 Keller-Segel 方程式に対する解の十分時間経過後のダイナミクスを指数アトラクターを構成することにより調べることについて報告した。堀江氏はロトカ-ボルテラ方程式、複製方程式、ホップフィールド型ニューラルネットワークなどの常微分方程式を、数理計画法における可変計量勾配法として再解釈し、それらの合目的構造を調べることについて報告した。佐藤氏には確率論的メタ個体群動態モデルについて全パッチサイズが十分に大きいときの個体群の絶滅待ち時間の評価と生息地破壊の導入による個体群絶滅への影響の考察を報告していただいた。中桐氏、泰中氏には生態系として餌と捕食者の２種の生物の存在する格子系に餌の生息地破壊を表すパーコレーションプロセスを導入したモデルによって生息地破壊の影響を考察することについて報告していただいた。道工氏はカタリチックな反応拡散方程式を触媒の空間密度が一般の測度値パスの場合での定式化と長時間漸近挙動を報告した。梅津氏は非線形境界条件を持つ半線形楕円型方程式について拡散係数無限大の極限における最小正値解の自明解からの分岐が存在する条件を報告した。平良氏は VMO 係数を持つ楕円型方程式に対する logistic Dirichlet 問題の正値解の分岐について報告した。出口氏は非線形拡散方程式の classical entropty solution は Colombeau の一般関数の理論における association という関係により一般関数解として解釈できることについて報告した。

プログラム

9月7日（木）

１３：１５～１３：５０　岩村覚三 (城西大学理)

Set Covering Problem, Genetic Algorithm and its Domain Specific Knowledge

１４：０５～１４：３５ 林俊一（横浜国立大学工）

伝染病モデルに対する粒子間ペア近似

１４：４５～１５：４５ 今野紀雄（横浜国立大学工）

確率偏差分方程式から確率増殖モデルへの超離散化とその性質

１６：００～１７：００ 伊藤　栄明（統計数理研究所）

一次元ランダムパッキングの数理生物への応用

9月8日（金）

９：３０～１０：３０ 守田智（静岡大学工）

結合カオス写像系の集団運動

１０：４５～１１：４５ 大崎 浩一 (大阪大学工)

走化性方程式に対する指数アトラクターの構成

１３：１５～１４：１０ 堀江 亮太 (慶應義塾大学理工)

数理生物学の現象論的方程式と数理計画法の計算モデル

１４：３０～１５：３０ 佐藤一憲（静岡大学工）

生息地破壊を受ける個体群のダイナミクス

１５：４０～１６：４０ 中桐斉之 (茨城大学理) 泰中啓一 (静岡大学工)

生態系における生息地破壊の影響

１６：５０～１７：３０ 道工 勇 (埼玉大学教)

ランダムな媒質中の非線型方程式と付随する確率過程

9月9日 (土)

９：１５～１０：１５　梅津健一郎（前橋工科大学工）

人口動態モデルに現れる分岐現象

１０：３０～１１：３０ 平良和昭（筑波大学数）

Semilinear elliptic and parabolic problems in population dynamics

１１：４０～１２：２０　出口英生 (広島大学理)

非線形拡散方程式の一般関数解

Set Covering Problem , Genetic Algorithm and Its Domain Specific Knowledge

by

Kakuzo Iwamura Tomoya Sibahara

Department of Mathematics, Josai University, Sakado, Saitama 350-0295, Japan

kiwamura@math.josai.ac.jp

and

Masanori Fushimi Hozumi Morohoshi

Graduate School of Engineering, University of Tokyo, Tokyo, Japan

fushimi@misojiro.t.u-tokyo.ac.jp

Abstract

In this paper,we propose a genetic algorithm to solve the Set Covering Problem.

Here, we make some improvements in getting some better feasible solutions, i.e. better chromosomes at the first starting population, taking full account of Domain Specific Knowledge. We have implemented our ideas to solve some medium sized Set Covering input data with computational experiments.

In addition to small sized input datas, we have carried out randomly generated Set Covering datas of size 200 X 500, 640 X 2000 and have got very good near optimal solutions to each of them. We have tried up to ten input parameters for each Set Covering data. Ten is a small one because 640 X 2000 input data uses just 20 seconds for one run of our genetic code with final generation number 1000. We show how the performance of our genetic algorithm improves as we take more care of creating first starting population. We have applied LINGO version 3 to the 200 X 500 Set Covering data using Celeron 400 to find that it was unable to to finish its computing in two weeks. We thought that it would take another two weeks or more. Considering the fact that there exist some Set Covering input datas for which Brannch and Bound type algorithm such as LINGO, LINDO and MPS/X cannot find even a feasible integer solution in a reasonable amount of time, we think our results would be useful for practitioners in our real world.

伝染病モデルに対する粒子間ペア近似

林　俊一（横浜国立大学）

コンタクト・プロセスは1974年数学者T.E.Harrisによって導入された．コンタクト・プロセスは「接触過程」（あるいは「接触感染過程」）と呼ばれ，伝染病や噂の伝播，森林火災など，方向性のある浸透のモデルとも考えられる．また，簡単な粒子の生成消滅モデルとの解釈もできる．

本論文では1次元のコンタクト・プロセスの生存確率の評価に対する結果について報告する．

1978年に，Holley-Liggettは1次元コンタクト・プロセスの臨界値の上限と生存確率の下限を求めるために更新測度を用いた．それに対して，1990年に香取・今野は，K-型相関関数を導入することにより見通しのよい議論ができると考えた．そして，その議論の中で，1次元コンタクト・プロセスの不変測度に対して，K-型相関関数の間に成り立つ，K-型相関等式のヒエラルキーの第1式を含めたいくつかの等式を，適切な切断を行うことにより閉じさせるような新しい測度を見つける工夫をした．

そこで，本研究では更新切断をさらに拡張した新しい切断として，1変数および2変数関数を導入してK-型相関関数にパラメータ $p \in [0,1]$ をいれて近似した．そのとき，$p=0$ のときは，Holley-Liggettの結果に一致し，$p=1/2$ のときは香取-今野の結果に一致している．この意味で，本研究で導入した拡張された近似はこれらの結果を含んでいることがわかる．

本研究の結果より，以下のことがわかった．

(1)　$0<p<1/3$ のとき：λ の値は上限の評価としては大きな値なのでよくない．

(2)　$p=0$ のとき　：$\lambda=2$ (Holley-Liggettの第1近似と一致している)

(3)　$1/3 \leq p \leq 1$　：$p=1$ のとき粒子間ペア近似になっている．

この $p=1$ の値，$\lambda=1.84765$ は，香取-今野の結果 $p=1/2$ ($\lambda=1.78989$) よりは悪いが，$p=0$ のHolley-Liggetが $p=0$ のHolley-Liggettが求めた $\lambda=2$ よりはよい値を与えている．

1次元コンタクト・プロセスの A から出発した生存確率 $\sigma(A)$ は以下で与えられていた：

$$\sigma(A)=1-\nu_\lambda\{\eta: \text{任意の } x \in A \text{ に対して，} \eta(x)=0\}.$$

特に，$A=\{0\}$ とすると，$\rho_\lambda=\sigma(\{0\})$.

ここで，基本的な考え方として，真の ρ_λ を求めることはできないので，ν_λ をどのように近似するかが大切な点である．この，ν_λ を更新測度で近似したのが1978年のHolley-Liggettの手法であり，1990年の香取-今野の手法であった．本研究では，更新測度の切断という香取-今野の考え方をさらに拡張して，ρ_λ の近似としての p 依存性を検討した．

今後の課題として，まず，$p=1$ の場合に，$\rho_\lambda^{(1)}$ が本当に ρ_λ の下限になっているのかを数学的に証明することである．その方法としては，1978年にHolley-Liggettが，行ったようにHarrisの補題を用いて $\Omega(h(A)) \geq 0$ を任意の $A \in Y$ に対して示すことが必要となる．

次に，任意の $p \in (0,1)$ に対して，上記と同様のことが証明することができるかどうか検討することである．

参考文献:[1] Holley,R.and Liggett,T.M.: The survival of contact process, Annals of Probability,Vol.6(1978), pp.198-206. [2] 香取眞理，今野紀雄: Contact Processの定常状態における相転移現象について，統計数理,Vol.38,No.2(1990),pp.243-256.

確率偏差分方程式から確率増殖モデルへの超離散化とその性質

今野紀雄　(横浜国立大学)

最近，超離散化の手法が盛んに研究されているが [1,2]，確率増殖モデルへの超離散化の構造はまだよく研究されていないので，その構造に関して検討を行う．特に本研究では，超離散化を行うと確率増殖モデル（Domany-Kinzel モデル [3] とも呼ばれる）を表す方程式が得られるような，いくつかの確率偏差分方程式を探しだし，確率増殖モデルと確率偏差分方程式の関係について考察する．以下，本研究で扱う超離散化について簡単に説明をする．

まず，$\mathbf{X}=\left\{X_j^t : t\in\{0,1,2,\cdots\},\ j\in\mathbb{Z}\right\}$，$\mathbf{Y}=\left\{Y_j^t : t\in\{0,1,2,\cdots\},\ j\in\mathbb{Z}\right\}$ はそれぞれ独立同分布で，かつ $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ も独立とする．但し，$P(X_j^t=1)=p$, $P(X_j^t=0)=1-p$, $P(Y_j^t=1)=q$, $P(Y_j^t=0)=1-q$，である．

このとき次の確率偏差分方程式を考える．

$$u_j^{t+1}=\left[\frac{\left(u_{j-1}^t\right)^2+\left(u_{j+1}^t\right)^2}{1+u_{j-1}^t u_{j+1}^t}\right]^{X_j^t}\left[\frac{1+u_{j-1}^t u_{j+1}^t}{u_{j-1}^t+u_{j+1}^t}\right]^{Y_j^t} \tag{1}$$

但し，$u_j^t\in[1,\infty)$，$t\in\{0,1,2,\cdots\}$，$j\in\mathbb{Z}$．(1) を $u_j^t=e^{U_j^t/\epsilon}$ と変数変換すると，

$$e^{U_j^{t+1}/\epsilon}=\left[\frac{e^{2U_{j-1}^t/\epsilon}+e^{2U_{j+1}^t/\epsilon}}{1+e^{\left(U_{j-1}^t+U_{j+1}^t\right)/\epsilon}}\right]^{X_j^t}\left[\frac{1+e^{\left(U_{j-1}^t+U_{j+1}^t\right)/\epsilon}}{e^{U_{j-1}^t/\epsilon}+e^{U_{j+1}^t/\epsilon}}\right]^{Y_j^t} \tag{2}$$

両辺の log をとって，

$$\begin{aligned}U_j^{t+1}=&\,X_j^t\left[\epsilon\left\{\log\left(e^{2U_{j-1}^t/\epsilon}+e^{2U_{j+1}^t/\epsilon}\right)-\log\left(1+e^{\left(U_{j-1}^t+U_{j+1}^t\right)/\epsilon}\right)\right\}\right]\\&+Y_j^t\left[\epsilon\left\{\log\left(1+e^{\left(U_{j-1}^t+U_{j+1}^t\right)/\epsilon}\right)-\log\left(e^{U_{j-1}^t/\epsilon}+e^{U_{j+1}^t/\epsilon}\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{3}$$

$\epsilon\to+0$ の極限を考えると，公式 $\lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\log\left(e^{A/\epsilon}+e^{B/\epsilon}+\cdots\right)=\max(A,B,\cdots)$ より，

$$\begin{aligned}U_j^{t+1}=&\,X_j^t\left[2\max\left(U_{j-1}^t\ ,\ U_{j+1}^t\right)-\max\left(0\ ,\ U_{j-1}^t+U_{j+1}^t\right)\right]\\&+Y_j^t\left[\max\left(0\ ,\ U_{j-1}^t+U_{j+1}^t\right)-\max\left(U_{j-1}^t\ ,\ U_{j+1}^t\right)\right]\end{aligned} \tag{4}$$

となり，確率増殖モデルを表す方程式が得られる．

また，以下の確率偏差分方程式に対しても，

$$\begin{aligned}u_j^{t+1}=&\left[\left\{\frac{\left(u_{j-1}^t\right)^m+u_{j+1}^t}{1+u_{j-1}^t\left(u_{j+1}^t\right)^{m-1}}\right\}\left\{\frac{u_{j-1}^t+\left(u_{j+1}^t\right)^m}{1+\left(u_{j-1}^t\right)^{m-1}u_{j+1}^t}\right\}\right]^{X_j^t}\\&\times\left[\left\{\frac{1+u_{j-1}^t\left(u_{j+1}^t\right)^n}{\left(u_{j-1}^t\right)^n+u_{j+1}^t}\right\}\left\{\frac{1+\left(u_{j-1}^t\right)^n u_{j+1}^t}{u_{j-1}^t+\left(u_{j+1}^t\right)^n}\right\}\right]^{\frac{Y_j^t}{2}}\end{aligned} \tag{5}$$

上と同様にして超離散化すると，次の確率増殖モデルを表す方程式が得られる (但し，$m\geq 2$, $n\geq 1$).

$$\begin{aligned}U_j^{t+1}=&\,X_j^t\left[\max\left(mU_{j-1}^t\ ,\ U_{j+1}^t\right)+\max\left(U_{j-1}^t\ ,\ mU_{j+1}^t\right)-m\left(U_{j-1}^t+U_{j+1}^t\right)\right]\\&+Y_j^t\left[(n+1)\left(U_{j-1}^t+U_{j+1}^t\right)-\max\left(nU_{j-1}^t\ ,\ U_{j+1}^t\right)-\max\left(U_{j-1}^t\ ,\ nU_{j+1}^t\right)\right]\end{aligned} \tag{6}$$

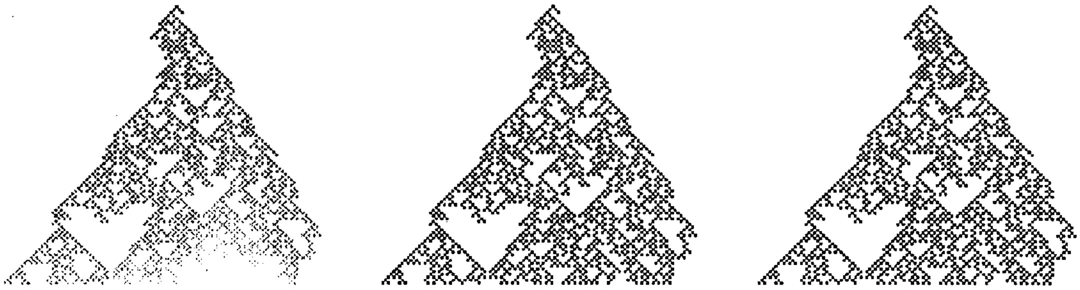
実際に，次のような対応関係がある（表 1 参照）．

表 1 時間発展のルール（但し，$v>1$, $w>1$）.

U_{j-1}^t	U_{j+1}^t	U_j^{t+1}	u_{j-1}^t	u_{j+1}^t	u_j^{t+1}	確率
0	0	1	1	1	w	0
0	1	0	1	v	1	$1-p$
0	1	1	1	v	w	p
1	1	0	v	v	1	$1-q$
1	1	1	v	v	w	q

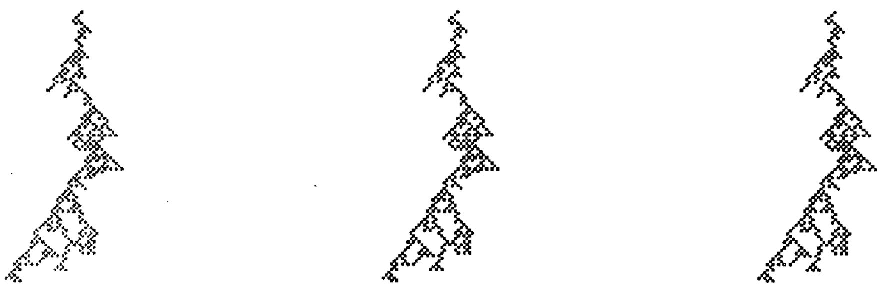
また，原点から出発した場合のモンテカルロシミュレーションによる時空間パターン（グレースケールで表示）をいくつか紹介する（図 1 参照）.

$m=n=2$, $p=0.85$, $q=0.5$ の場合



$u_0^0=200$ $u_0^0=10^{50}$ 確率増殖モデル

$m=n=2$, $p=0.70$, $q=0.5$ の場合



$u_0^0=200$ $u_0^0=10^{50}$ 確率増殖モデル

図 1 シミュレーションの結果.

本研究会では，確率増殖モデルに対して今まで知られている結果を整理するとともに，上記の確率偏差分方程式と確率増殖モデルの関係について報告したい．また，本研究の一部は国松俊彦君 (横浜国大) との共同研究である.

1) D.Takahashi and J.Matsukidaira: Phys. Lett. A **209** (1995) 184.
2) T.Tokihiro, D.Takahashi, J.Matsukidaira and J.Satsuma: Phys. Rev. Lett. **29** (1996) 3247.
3) 今野紀雄: "ある無限粒子系の局所性と大域性", 数理科学, No.**436**, サイエンス社 (1999) 37-43.

一次元ランダムパッキングと数理生物

Parking Cars with Spin but no Length

Yoshiaki Itoh † and Larry Shepp ‡
† The Institute of Statistical Mathematics
‡ Statistics Department, Rutgers University

The car parking problem is a one-dimensional model of random packing. The car parking problem has applications in biological or sociological problems. For example, the 2-dimensional model has been applied to explain the shape of the territory for a bird species "calidris melanotos" (Tanemura and Hasegawa (1980)). The broken stick model is often used in ecological study as well as in election data. Another model concerned here is a random sequential packing model for elections (Itoh and Ueda (1980)). The way of distributing organized votes to each candidates for political parties in Japan is modeled by using the random sequential packing. We genenralize our model to the parking problem with two species of cars.

Cars arrive to park on a block of length x, sequentially. Each car has, independently, spin up or spin down, w.p. $0 < p \leq 1$, for spin up, and $q = 1 - p$, for spin down, respectively. Each car tries to park at a uniformly distributed random point $t \in [0, x]$. If t is within distance 1 of the location of a previously parked car of the *same* spin, or within distance a of the location of a previously parked car of the opposite spin then the new car leaves without parking and the next car arrives, until saturation.

We study the problem analytically as well as numerically. The expected number of up spins $c(p, a)$ per unit length for sufficiently large x is neither monotonic in p for fixed a, nor is it monotone in a for fixed p, in general.

Let $f_{\uparrow\uparrow}(x)$ be the expected number of *up-cars* in saturation in a block of length x with two up-cars at the endpoints. Let $f_{\downarrow\downarrow}(x)$ and $f_{\uparrow\downarrow}(x)$ be defined similarly.

For $x > 2$, $f_{\uparrow\uparrow}(x) = p\int_1^{x-1}(f_{\uparrow\uparrow}(u) + f_{\uparrow\uparrow}(x-u) + 1)\frac{du}{x}$
$+ q\int_a^{x-a}(f_{\uparrow\downarrow}(u) + f_{\uparrow\downarrow}(x-u))\frac{du}{x} + (p\frac{2}{x} + q\frac{2a}{x})f_{\uparrow\uparrow}(x)$
where we have used $f_{\uparrow\downarrow}(x) = f_{\downarrow\uparrow}(x)$.

Similarly, for $x > 2$,

$f_{\downarrow\downarrow}(x) = p\int_a^{x-a}(f_{\uparrow\downarrow}(u) + f_{\uparrow\downarrow}(x-u) + 1)\frac{du}{x}$
$+ q\int_1^{x-1}(f_{\downarrow\downarrow}(u) + f_{\downarrow\downarrow}(x-u))\frac{du}{x} + (p\frac{2a}{x} + q\frac{2}{x})f_{\downarrow\downarrow}(x)$

$f_{\uparrow\downarrow}(x) = p\int_1^{x-a}(f_{\uparrow\uparrow}(u) + f_{\uparrow\downarrow}(x-u) + 1)\frac{du}{x}$
$+ q\int_a^{x-1}(f_{\uparrow\downarrow}(u) + f_{\downarrow\downarrow}(x-u))\frac{du}{x} + (p\frac{1+a}{x} + q\frac{1+a}{x})f_{\uparrow\downarrow}(x)$

Note that for $0 < x < 2$ we can write down $f_\sigma(x)$ explicitly for $1/2 < a < 1$.

For $x < 2$, and $1/2 \leq a \leq 1$,
$f_{\uparrow\uparrow}(x) = 0, 0 < x < 2$;
$f_{\downarrow\downarrow}(x) = 0, 0 < x < 2a$, $f_{\downarrow\downarrow}(x) = 1, 2a < x < 2$,
$f_{\uparrow\downarrow}(x) = 0, 0 < x < 1 + a$, $f_{\uparrow\downarrow}(x) = p, 1 + a < x < 2$.

Take Laplace transforms, and use the starting relations in $x < 2$, above to calculate

$\phi_\sigma(\lambda) = \int_2^\infty e^{-\lambda x} f_\sigma(x)dx$

where σ can be any one of the pairs, $\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow$. One obtains the column-vector equations.

$\phi'(\lambda) + A(\lambda)\phi(\lambda) + g(\lambda) = 0$ with $A(\lambda) = 1 + \frac{2e^{-\lambda}}{\lambda}$, $g(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}$ and one can use the differential equation trick of the *multiplicative factor* to solve for ϕ in closed form:

$\phi(\lambda) = \int_\lambda^\infty g(u)e^{\int_\lambda^u A(v)dv}du$

more explicitly,

$\phi(\lambda) = \int_\lambda^\infty \frac{e^{-\lambda}}{u^2}e^{\int_\lambda^u \frac{2e^{-v}}{v}dv}du$

The limiting fraction of the expected number of cars of length one in the Renyi case is,

$\lambda^2\phi(\lambda) = \int_\lambda^\infty e^{-\lambda}e^{-2\int_\lambda^u \frac{1-e^{-v}}{v}dv}du$

and by the Abelian theorem for Laplace transforms,

$c_R = \lim_{x\to\infty} f(x)/x = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^2\phi(\lambda)$
$= \int_0^\infty e^{-2\int_0^u \frac{1-e^{-v}}{v}dv}du$

This method is extend to the case where $\mathbf{A}(\lambda)$ is a matrix when the matrices, $\mathbf{A}(\lambda)$, all *commute*.

Reference

Itoh, Y. and Shepp, L. (1999) Parking cars with spin but no length, Journal of Statistical Physics, Vol. 97, 209-231.

結合カオス写像系の集団運動

静岡大学工学部　　守田 智

カオス的なダイナミクスを示す素子が相互作用している集団を考える。このような大自由度のカオス系は、様々な集団運動を持つ。そのなかで特に興味深いものとして、それぞれの素子の運動に強い相関がなく運動の自由度が相互作用のない場合と変わらないのに全体の平均量が規則的な振動をする現象が知られている。これは、大自由度のカオスの中に秩序的な運動が存在する例といえる。一方、相互作用が十分強い場合には共振が起き、その運動は低自由度に縮退する。この2つの集団運動は区別して考える必要があり、前者をノントリビアルな集団運動と呼ぶこともある。

ノントリビアルな集団運動はいろいろなモデルで見られる普遍的な現象であるが、ここでは素子同士の相互作用が一様で距離などによらない大域結合写像系をモデルを用いる。この系は、数理的な解析が可能であり、その集団運動のメカニズムの研究がもっとも行われてきた系である。それらの研究により大域結合写像系では相互作用がノンゼロであればノントリビアルな集団運動が生じることが理論的に導かれている。

さて、一般に用いられる大域結合写像系は

$$x_{t+1}(i) = f(x_t(i)) + \frac{K}{N}\sum_{i'=1}^{N} g(x_t(i')) \tag{1}$$

のような式で与えられ、その時間更新ルールは同期的である。ここで i は素子の番号、t は離散時間、K は相互作用の強さ、N は系に含まれる素子の個数である。しかしながら、このような更新ルールは場合によっては現実的ではない。例えば、神経回路系でのニューロン間のパルスのやり取りを考えた場合ニューロンの状態の更新は非同期的であるといえる。

本研究では、大域結合写像系で素子の値の更新が確率的に行われる場合を考えた。同期的な更新から完全に非同期なものまでを連続的に再現する以下のようなモデルを考える。系を構成するそれぞれの素子は、確率 p で普通の大域結合写像系と同じ式に従い新しいの値を取り 確率 $(1-p)$ でそのまま値を保つこととした。すなわち、(1) 式は次のように変形される。

$$x_{t+1}(i) = \begin{cases} f(x_t(i)) + \dfrac{K}{N}\displaystyle\sum_{i'=1}^{N} g(x_t(i')) & \text{with probability } p \\ x_t(i) & \text{with probability } (1-p) \end{cases} \tag{2}$$

更新する素子は、時間ステップごとに独立に選ぶものとする。$p=1$ では、synchronous updating となり、普通の大域結合写像系 (1) と一致する。一方、$p \to 0$ では更新が行われなくなるが、時間を $t \mapsto t/p$ と

変換することにより完全な asynchronous updating と考えることができる。ここでは、個々の要素としてテントマップを主に考える。すなわち、

$$f(x) \equiv a\left(\frac{1}{2}-|x|\right) \tag{3}$$

とおく。また、結合項も f(x) で与えることにする。ただし、定常解が 0 となるように以下のような補正項を加えてた。この項は、結果に本質的な影響は与えない。

$$g(x) \equiv f(x) - \int f(x)\rho_*(x)dx \tag{4}$$

ここで$\rho_*(x)$ は定常界での分布関数であり、写像 $x \mapsto f(x)$ の不変測度と一致する。平均場

$$h_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_t(i)) \tag{5}$$

の時間変化に着目して解析をおこなった。

数値計算の結果から p を小さくすると集団運動の振幅もまた小さくなり、さらに小さくすると集団運動が見られなくなる (図を参照)。そこで定常解の安定性を調べ、この結果の理論的な説明を与えることを試みている。

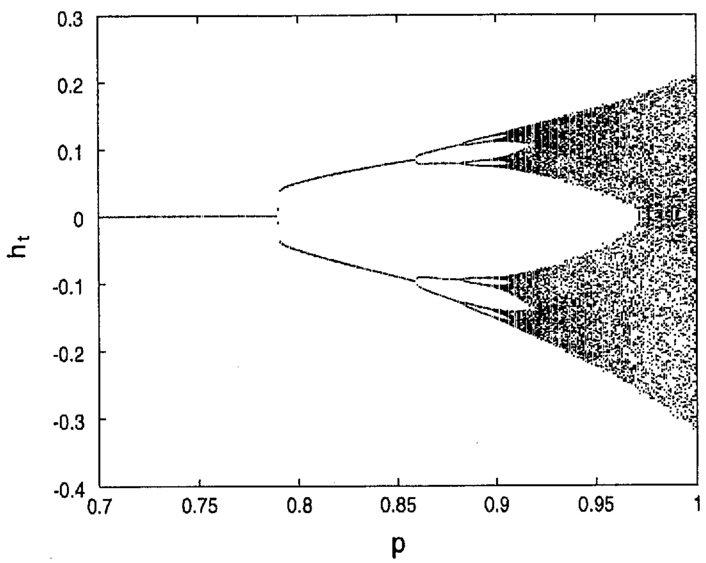


図 1: 確率 p の変化による分岐の例。この分岐図のパラメーター $a = 0.9$, $K = 0.7$ であり、同期的更新 $(p = 1)$ ではトリビアルな集団運動が生じる場合である。

走化性方程式に対する指数アトラクターの構成

大﨑浩一・八木厚志
大阪大学大学院工学研究科 応用物理学専攻
osaki@ap.eng.osaka-u.ac.jp, yagi@ap.eng.osaka-u.ac.jp

「生物現象と非線形微分方程式」於広島大学, 2000.9.7.-2000.9.9.

1次元 Keller-Segel 方程式に対する解の十分時間経過後のダイナミクスを指数アトラクターを構成することにより調べる．指数アトラクターとは，相空間において大域アトラクターを含む正不変コンパクト集合であり，有限のフラクタル次元をもち，周囲の軌道を指数的に引き寄せる集合のことである．その存在が示されれば，解は急速に指数アトラクターに吸い寄せられていくこと，及びそこでのダイナミクスは有限個のパラメータで記述できる可能性があるということが分かる．

Keller-Segel 方程式は細胞性粘菌の走化性を記述する方程式として，E. F. Keller と L. A. Segel によって 1970 年に提唱された方程式である [1]．1次元 Keller-Segel 方程式は以下のように記述される：

$$
\text{(KS)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(u\dfrac{\partial \chi}{\partial x}(\rho)\Big), & (x,t) \in I \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = b\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + cu - d\rho, & (x,t) \in I \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\alpha,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\beta,t) = \dfrac{\partial \rho}{\partial x}(\alpha,t) = \dfrac{\partial \rho}{\partial x}(\beta,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \rho(x,0) = \rho_0(x), & x \in I. \end{cases}
$$

ここで $I = (\alpha, \beta)$ は有界区間，a，b，c，d は正定数である．未知関数 $u(x,t)$，$\rho(x,t)$ はそれぞれ細胞性粘菌の密度，化学物質の濃度を表している．u の時間変化についての方程式は，第1項が拡散項，第2項が走化性の項である．ρ の方程式は，拡散項，粘菌による分泌項，及び消滅項となっている．走化性の項は粘菌自ら分泌する化学物質に対し，その濃度勾配の高い方に粘菌が移動し集合するという効果を表す．関数 $\chi(\rho)$ は感応関数と呼ばれ，$\rho \in (0,\infty)$ の滑らかな関数である．感応関数は粘菌の化学物質に対する反応の度合を表しており，様々な関数が提案されている [2, 3]: ρ，ρ^2，$\log \rho$，$\rho/(1+\rho)$，$\rho^2/(1+\rho^2)$．これを考慮に入れ，χ については次を仮定する：

$\chi(\rho)$ は $\rho \in (0,\infty)$ の滑らかな関数で，正定数 C，及び指数 r に対して

$$
|\chi^{(i)}(\rho)| \le C\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big)^r, \quad 0 < \rho < \infty,\ i = 1,2,3
$$

を満たす．

基礎空間を $H = L^2(I) \times H^1(I)$ とし，指数アトラクターを構成する．解作用素を定義するため，Galerkin 法により構成した時間局所解を先験的評価により延長し，時間大域解を構成する．

Theorem 1. $0 \le u_0 \in L^2(I)$, $\rho_0 \in H^1(I)$, $\inf_{x\in I}\rho_0 > 0$ とする．そのとき，(KS) に対する次の時間大域解が存在する：

$$0 \le u \in \mathcal{C}([0,\infty);\, L^2(I)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty);\, L^2(I)) \cap \mathcal{C}((0,\infty);\, H^2_N(I)),$$
$$0 < \rho \in \mathcal{C}([0,\infty);\, H^1(I)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty);\, H^1(I)) \cap \mathcal{C}((0,\infty);\, H^3_N(I)).$$

u には L^1-ノルム保存則があることから，初期関数の集合を

$$K_\ell = \{(u,\rho) \in H;\, u \ge 0,\, \|u\|_{L^1} = \ell,\, \inf_{x\in I}\rho > 0\}$$

とし，Theorem 1 を用いて解作用素 $\{S(t) : K_\ell \to K_\ell\}_{t\ge 0}$ を定義する．

次の 2 つの定理の一様評価式 (1)，(2) を用いれば，コンパクトな吸収不変集合の存在が示される．

Theorem 2. u，ρ を Theorem 1 の時間大域解とし，ρ はある正定数 δ に対して次を満たすとする：

$$\rho(t) \ge \delta, \quad 0 \le t < \infty.$$

そのとき，次の一様評価式が成り立つ：

$$\|u(t)\|_{H^2} + \|\rho(t)\|_{H^3} \le p_\delta(\tfrac{1}{t} + \|u_0\|_{L^2} + \|\rho_0\|_{H^1}), \quad 0 < t < \infty. \tag{1}$$

ここで，$p_\delta(\cdot)$ は δ に依存し，u_0，ρ_0 には依存しない連続な増加関数とする．

Theorem 3. u，ρ を Theorem 1 の時間大域解とする．そのとき，u_0，ρ_0 に依存しないある時刻 t_0 と 正定数 δ が存在し，次の評価式を満たす：

$$\rho(t) \ge \delta, \quad t \ge t_0. \tag{2}$$

このことから，十分時間経過後のダイナミクスとしてコンパクトな吸収不変集合 $\mathcal{X}$ 上の解の挙動を考えることにする．Eden-Foias-Nicolaenko-Temam の存在定理 [4] を適用することにより，次が得られる．

Theorem 4. (KS) により定められるダイナミクス $(\{S(t)\}_{t\ge 0}, \mathcal{X})$ に対し，指数アトラクター $\mathcal{M} \subset K_\ell$ が存在する．

参考文献

[1] E. F. Keller and L. A. Segel, *J. Theor. Biol.* **26** (1970), 399–415.

[2] I. R. Lapidus and M. Levandowsky, *Lecture Notes in Biomath.* **38** (1979).

[3] R. M. Ford and D. A. Lauffenburger, *Bull. Math. Biol.* **53** (1991), 721–749.

[4] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam, *Research in Applied Mathematics, vol. 37*, John-Wiley and Sons, New York, 1994.

[5] K. Osaki and A. Yagi, to appear in *Funkcial. Ekvac.*

数理生物学の現象論的方程式と数理計画法の計算モデル

慶應義塾大学理工学部物理情報工学科

堀江 亮太 horie@sys.appi.keio.ac.jp

1 はじめに

数理計画法では，最適解を常微分方程式で記述された計算モデルの解軌道の収束先として求めるアルゴリズムは軌道法と称され，その最も基本的なものはベクトル場が目的関数の勾配系である無制約問題に対する最急降下法である．本稿では，不等式制約付き最適化問題を解く軌道法の計算モデルを3種類の異なる表現で導出し，また等式・不等式制約付き問題や大域的最適化問題へ拡張する．そして，非線形現象論的方程式であるLotka-Volterra方程式（以下L.V.方程式と略記），ニューラルネットワーク（以下N.N.と略記），複製方程式をこれらの計算モデルとして再解釈し，それらの合目的構造，即ち目的関数最小化や制約充足の構造を持つこと，を調べる．

2 変数変換最急降下法

不等式制約付き最適化問題

$$\min_{x} E(x) \tag{1a}$$

$$\text{subj.to} \quad x_i \in X, i = 1, \cdots, n \tag{1b}$$

を考える．ただし目的関数 $E : R^n - R^1$ は微分可能，制約領域 X は変数ごとに独立な閉区間または半閉区間とする．この問題（1）式に最急降下法を適用するために，決定変数xを成分ごとに関数

$$x = \Phi(y), \quad \Phi : R^1 - X \tag{2}$$

を用いて変数変換し，無制約最適化問題

$$\min_{\boldsymbol{y}} E(\Phi(y_1), \cdots, \Phi(y_n)) \tag{3}$$

に変換する．ただし関数Φは条件

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} \neq 0 \Leftrightarrow \Phi(y) \in \mathrm{Int}X \tag{4a}$$

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = 0 \Leftrightarrow \Phi(y) \in \mathrm{bd}X \tag{4b}$$

$$\left|\frac{d\Phi(y)}{dy}\right| < \infty \tag{4c}$$

を満たすC^1級関数とする．ここでInt$X$，bd$X$はそれぞれ制約領域の内点集合と境界点である．無制約問題（3）式を最急降下法

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -\frac{\partial E(\{\Phi(y_i(t))\})}{\partial x_i}\frac{d\Phi(y_i(t))}{dy_i}, i = 1, \cdots, n \tag{5}$$

で解き，その解軌道$y(t)$を再び関数（2）式で観測して元の制約付き問題（1）式の探索軌道$x(t)$を得る手法は，数理計画法では古典的な技法であり，ここでは変数変換最急降下法とよぶ．

3 可変計量勾配法

次に，関数Φの定義域を適当な閉区間Yの内点集合Int$Y$に制限し，あらためてϕとおくと，その値域はInt$X$となり，かつ

$$x = \phi(y), y \in \mathrm{Int}Y, \quad \phi : \mathrm{Int}Y - \mathrm{Int}X \tag{6}$$

は微分同相写像となることが，Φの条件（4）式から保証される．また，このときInt$Y$のn次元直積空間IntY^nは変数変換最急降下法モデル（5）式の不変集合であり，(5) 式の状態空間の代表として考えることができる．ここで，IntY^nとIntX^nをそれぞれ大域座標系$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$を持ち微分同相写像ϕによる座標変換$x_i = \phi(y_i), i = 1, \cdots, n$で対応付けられた多様体とみなすと，(5) 式が定めるIntY^n上のベクトル場と微分同相なIntX^n上のベクトル場が求められ，$\boldsymbol{x}$で閉じた常微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = -M(\boldsymbol{x}(t))^{-1}\nabla E(\boldsymbol{x}(t))^T \tag{7a}$$

$$M_{ij}(\boldsymbol{x}) = \delta_{ij}\frac{1}{\left(\frac{d\phi(\phi^{-1}(x_i))}{dy_i}\right)^2}, i, j = 1, \cdots, n \tag{7b}$$

で表現される．ここで$\boldsymbol{x}$に依存する$n \times n$行列$M(\boldsymbol{x})$は，第ij成分が（7b）で与えられるリーマン計量テンソルであり，(7) 式はリーマン多様体$(X, M(\boldsymbol{x}))$上の勾配系となる．探索軌道$\boldsymbol{x}(t)$は，微分同相写像ϕのもとで変数変換最急降下法（5）式の探索軌道$\boldsymbol{y}(t)$と共役であり，問題（1）式の局所的最適解へ収束する．(7) 式を可変計量勾配法とよぶ．

L.V. 方程式は，数理生態学では個体群密度がマルサス増殖することから，反応速度論では2次以上の反応をすることから記述されるが，その形を計算モデルとして再解釈すると，可変計量勾配法（7）式において，合目的構造である不等式制約（1b）式と任意性のあるリーマン計量テンソル（7b）式をそれぞれ

$$\text{subj.to} \quad x_i \in \boldsymbol{R}^1_+, i = 1, \cdots, n \tag{8}$$

$$M_{ij}(\boldsymbol{x}) = \delta_{ij}\frac{1}{x_i}, i, j = 1, \cdots, n \tag{9}$$

としたものである．このことは，L.V. 方程式の変数の生物個体や分子の数密度が非負であるという，現象記述の最低限の条件を構造として持つことを示す．なお一般的にL.V. 方程式の合目的構造は非負制約(8) 式の充足のみであるが，目的関数を最小化するときのリーマン多様体$(R^n_+, \mathrm{diag}(1/x_1, \cdots, 1/x_n))$上の勾配はShahshahani勾配として知られている．

4 ニューラルネットワーク

さらに，ある閉区間をUとし，n次元多様体$\mathrm{Int}U^n$とその大域座標系uを考え，$\mathrm{Int}U^n$と$\mathrm{Int}X^n$は，ある微分同相写像$f:\mathrm{Int}U$—$\mathrm{Int}X$による座標変換$x_i=f(u_i), i=1,\cdots,n$で対応付けられているとする．このとき，可変計量勾配法（7）式が定める$\mathrm{Int}X^n$上のベクトル場の微分同相写像fによる$\mathrm{Int}U^n$上への引き戻しが，目的関数（1a）式のユークリッド勾配の逆方向$-\nabla E(x)=-\nabla E(\{f(u_i)\})$となるように$f$を求めると

$$x=f(u)=F^{-1}(u), \tag{10a}$$

$$u=F(x)=\int\frac{1}{\left\{\frac{d\phi}{dy}\ (\phi^{-1}(x))\right\}^2}dx \tag{10b}$$

となる．このとき$\mathrm{Int}U^n$上のベクトル場は

$$\frac{du(t)}{dt}=-\nabla E(\{f(u_i(t))\})^T \tag{11}$$

で記述される．目的関数（1a）式が2次関数

$$E(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}\theta_ix_i \tag{12}$$

のとき，(11）式はu，f，$\{w_{ij}\}$，$\{\theta_i\}$をそれぞれニューロンの内部状態，入出力関数，結合係数，外部入力としたHopfield型N.N.となる．これより（11）式をN.N.とよぶ．(11）式の解軌道$u(t)$は，微分同相写像fのもとで可変計量勾配法（7）式の探索軌道$x(t)$と共役であり，$x(t)$はN.N.のニューロンの出力変数に相当する．なお目的関数（1a）式に障壁関数

$$H(x)=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}\int\int\frac{1}{\left\{\frac{d\phi}{dy_i}\ (\phi^{-1}(x_i))\right\}^2}dx_i^2 \tag{13}$$

を付加すると，N.N.のダイナミクス（11）式は時定数がTの1次遅れ項を持つ．不等式制約（1b）式と計量テンソル（7b）式がそれぞれ

$$\mathrm{subj.to}\quad x_i\in[0,1], i=1,\cdots,n \tag{14}$$

$$M_{ij}(x)=\delta_{ij}\frac{1}{x_i(1-x_i)}, i,j=1,\cdots,n \tag{15}$$

のとき，入出力関数fはシグモイド関数となる．

5 可変計量・畳み込み積分型勾配法と慣性系N.N.

上述した最急降下法に基づく計算モデルは局所的探索モデルであり，初期状態によって局所的最適解に停留する．大域的最適化問題を解く計算モデルとして，過去の軌道上の勾配情報を畳み込んで記憶する可変計量・畳み込み積分型勾配法

$$\frac{dx(t)}{dt}=-M(x(t))^{-1}\int_0^t e^{-a(t-\tau)}\nabla E(x(\tau))^T d\tau \tag{16}$$

が考えられる．実際に（16）式は，リーマン多様体$(X,M(x))$上でポテンシャル$E(x)/2$に支配される質量1/2の粒子のニュートン運動方程式

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x_i(t)}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{M_{ii}(x(t))}\frac{dM_{ii}(x(t))}{dx_i}\left(\frac{dx_i(t)}{dt}\right)^2 \tag{17}$$

$$=-\frac{a}{2}\frac{1}{M_{ii}(x(t))}\frac{dx_i(t)}{dt}-\frac{1}{M_{ii}(x(t))}\frac{\partial E(x(t))/2}{\partial x_i}$$

$$i=1,\cdots,n \tag{18}$$

と等価であり，可変計量勾配法（7）式の自然な慣性系への拡張になっている．ただし（18）式の右辺第二項は制動項に相当する．また（16）式は，微分同相写像（10）式のもとで，内部状態が慣性系のN.N.

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+a\frac{du(t)}{dt}=-\nabla E(\{f(u_i(t))\})^T \tag{19}$$

として表現され，これを慣性系N.N.とよぶ．fがシグモイド関数のモデルは，Hopfield型N.N.の内部状態を慣性系に拡張したモデルや，シナプスに伝達遅延があるニューロンモデルとして提案されている．

6 可変計量勾配射影法

不等式制約付き問題（1b）式に線形等式制約を付加した等式・不等式制約付き最適化問題

$$\min_{x} E(x) \tag{20a}$$

$$\mathrm{subj.to}\quad Ax=b \tag{20b}$$

$$x_i\in X, i=1,\cdots,n \tag{20c}$$

を考える．ただし$b\in R^l$，Aは$l\times n$行列で$\mathrm{rank}A=l$であり，$0<l<n$，$n\geq 2$とする．この問題を解く計算モデルとして，可変計量勾配法（7）式のベクトル場を等式制約(20b)式の制約領域上へ射影した可変計量勾配射影法

$$\frac{dx(t)}{dt}=-P_M(x(t))M^{-1}(x(t))\nabla E(x(t))^T \tag{21a}$$

$$P_M(x)=I-M^{-1}(x)A^T(AM^{-1}(x)A^T)^{-1}A \tag{21b}$$

が提案されている．ここでxに依存する$n\times n$行列$P_M(x)$は，可変計量$M(x)$のもとで行列Aの零空間へ射影する射影行列である．

複製方程式は可変計量勾配射影法（21）式において合目的構造（20）式と計量テンソル（7b）式をそれぞれ

$$\mathrm{subj.to}\quad \sum_{i=1}^{n}x_i=1,\quad x_i\in R_+^1, i=1,\cdots,n \tag{22}$$

$$M_{ij}(x)=\delta_{ij}\frac{1}{x_i}, i,j=1,\cdots,n \tag{23}$$

としたものである．このことは，木村の最大の原理の幾何学的説明として，Shahshahani，Sigmund，Akinらによって論じられているが，複製方程式が頻度動態を記述する最低限の構造を持つことを示し，他成分相分離ダイナミクスなどの現象論的方程式になり得ることを示唆する．

メタ個体群動態モデルに対する絶滅待ち時間の漸近的挙動

○佐藤一憲[1], 清水昭信[2]
[1]静岡大学工学部, [2]名古屋市立大学自然科学研究教育センター

近年，地球環境問題が社会的に大きく取り上げられるようになって，保全生態学が希少な生物種の保全に果たす役割は極めて重要である．たとえば，現状を維持する場合や環境を改善・改悪する場合について，個体群が絶滅するまでの待ち時間を理論的に示すことは，保全策を講じるときのひとつの拠り所となるだろう．

Levins (1969) は次に示すようなメタ個体群動態モデルを考えた．ここで「メタ個体群」とは，いくつかの小集団が集まったものをいう．各小集団内での動態は他の小集団とは独立に起こり，小集団間では移動分散によってお互いに影響を及ぼしあうものとする．ただし，Levins (1969) のモデルはこのような動態を単純化したモデルにすぎない．パッチ状に広がった生息地を考えよう．各パッチは生物で占有されているか，空きパッチのいずれかである．各々の占有パッチは，空きパッチへの繁殖によって新たな占有パッチを作るか，局所的に絶滅して空きパッチになってしまう：

$$\frac{dz}{dt} = a\,z\left(1-\frac{z}{n}\right) - c\,z.$$

ただし，z と n はそれぞれ占有パッチ数と全パッチ数を表わし，a と c はそれぞれ新生率と消失率を表わす．これはロジスティックモデルであるので，一般解は

$$z(t) = \frac{n\,z_0\,(a-c)\,e^{(a-c)\,t}}{n\,(a-c) - a\,z_0\left[1-e^{(a-c)t}\right]}$$

として与えられる．ただし，$z(0)=z_0$ とした．特に，平衡状態は

$$\hat{z} = \begin{cases} n\left(1-\dfrac{c}{a}\right) & \text{if } a > c, \\ 0 & \text{if } a \le c \end{cases}$$

となる．このことは，新生率が消失率よりも大きければ集団が存続することを示している．

本研究では，この Levins モデルに対して，全パッチサイズが十分に大きい場合について，個体群が絶滅するまでの待ち時間の期待値についての解析的な評価を与え，さらに，生息地破壊の導入による個体群の絶滅待ち時間への影響を考えたい．そこで，松田 (1998) や佐藤 (1999) によって提案された確率論的メタ個体群動態モデル

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t} &= a\,(j-1)\left(1-\dfrac{j-1}{n}\right)p_{i,j-1}(t)+c\,(j+1)\,p_{i,j+1}(t) \\
&\quad -\left\{c\,j+a\,j\left(1-\dfrac{j}{n}\right)\right\}p_{ij}(t) \qquad \text{for } i=1,2,\ldots,n-1, \\
\dfrac{d\,p_{i0}(t)}{d\,t} &= c\,p_{i1}(t), \\
\dfrac{d\,p_{in}(t)}{d\,t} &= a\,(n-1)\left(1-\dfrac{n-1}{n}\right)p_{i,n-1}(t)-c\,n\,p_{in}(t)
\end{cases}
$$

を考える．ここで，$p_{ij}(t)$ は初期時刻で占有パッチが i であるときに時刻 t で占有パッチが j となる確率を表わしている．このモデルは連続時間の有限マルコフ連鎖に他ならない．

初期パッチ数が 1，全パッチ数が n のときに，個体群の絶滅待ち時間の期待値 $E[T]$ は以下で与えられる：

定理　$r=a/c$ とする．

(i) $r>1$ の場合

$$E[T]\sim\frac{1}{c}\frac{\sqrt{2\pi}}{(r-1)\sqrt{n}}\left(\frac{r}{\exp(1-\frac{1}{r})}\right)^{n}, \qquad n\to\infty$$

(ii) $r=1$ の場合

$$E[T]\sim\frac{1}{c}\frac{1}{2}\log n, \qquad n\to\infty$$

(iii) $0<r<1$ の場合

$$\lim_{n\to\infty}E[T]=\frac{1}{c}\frac{1}{r}\log\frac{1}{r-1}.$$

生態系における生息地破壊の影響

中桐斉之（茨城大・理工・宇宙地球システム科学）
泰中啓一（静岡大・工・システム工学）

開発という名によって、人類は生態系に対し様々な影響を与えている。現在、生物の絶滅に影響すると思われる要因は、乱獲が原因で起こるといったものから、人間の自然への過剰開発へと比重が移っているとされるほどである。なかでも生息地の破壊は、生物が絶滅する原因として現在かなり大きな話題となっている。本講演では、生態系が生息地の破壊を受けたとき、どのような影響を受けるかと言うことについて、簡単なモデルを用いて考えてみる。

生態系として、餌 X と捕食者 Y の２種の生物の存在する格子系を考える。

$$X + Y \longrightarrow 2Y, \qquad (1a)$$

$$X + O \xrightarrow{r} 2X, \qquad (1b)$$

$$Y \xrightarrow{d} O. \qquad (1c)$$

ここで、O は空き地である。相互作用 (1a) は餌 X が捕食者 Y によって食べられ、それによって Y が増殖する。(1b) は出生率 r で生物が空き地に増殖することを表している。(1c) は死亡率 d で生物が死ぬ死亡プロセスである。相互作用 (1a) と (1b) は最近接格子間で起こるものとする。

これに、生息地の破壊の影響を調べるた

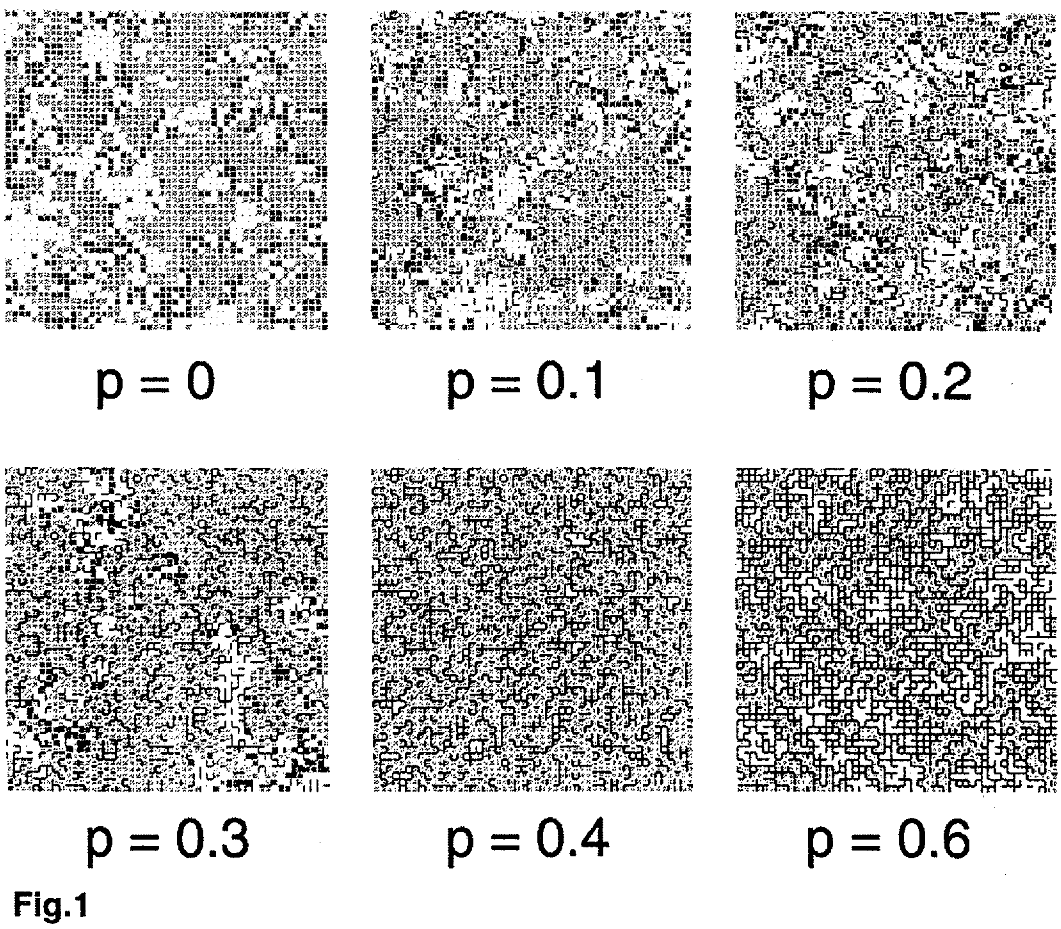


Fig.1

めに、次のようなパーコレーションプロセスを考える。近接する2つの格子サイトの間に壁（破壊地）を確率pでランダムに置く。生息地破壊の程度はパラメータpによって表される。本講演では、二種類の生物のうちXだけが、生息地破壊の影響を受ける物とする。つまり、Yは壁の影響を全く受けないとする。

上記のモデルに置いて、計算機シュミレーションを行った。それぞれのpにおける定常状態のパターンはFig.1の様になる。

これより、比較的生息地破壊の影響の低い（pの値が小さい）ところにおいて、生息地破壊とは直接関係ないはずの種Yが絶滅するという結果が解る。そこで、pの違いによるX,Yそれぞれの定常密度の値を求めた。結果をFig.2, Fig.3に示す。

これより、pの値が小さいところにおいては種Yが絶滅し、その一方でXの定常密度は増加することも解った。破壊地による妨害にも関わらずXは増大したのである。

平均場近似やペア近似では、このようなYの絶滅やXの増加は予測できない。さらに、pの値が大きくなると今度はXも減少していく事が解った。Yの減少は平均場近似やペア近似で予測できるが、pが大きいところにおけるXの減少は全く予想できなかった。パーコレーションの効果は、これらの近似では予測できないように思える。

このモデルにおいて、パーコレーションは、直接には種Xにのみ作用している。しかし、シミュレーションの結果は、種Yが絶滅し、その一方でXの定常密度は増加するという結果を得た。生息地を破壊するということは、直接破壊の影響を受ける種に対して複雑な影響を与えるだけでなく、その種の生息する場所での他の生物種に対しても深刻な影響を及ぼしているのではないだろうかと考えられる。

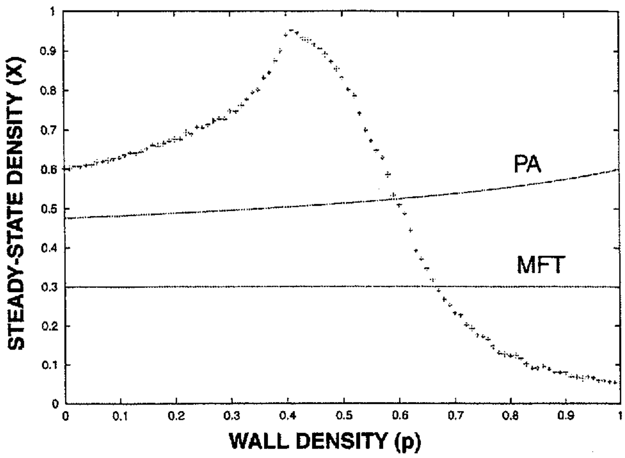


Fig.2

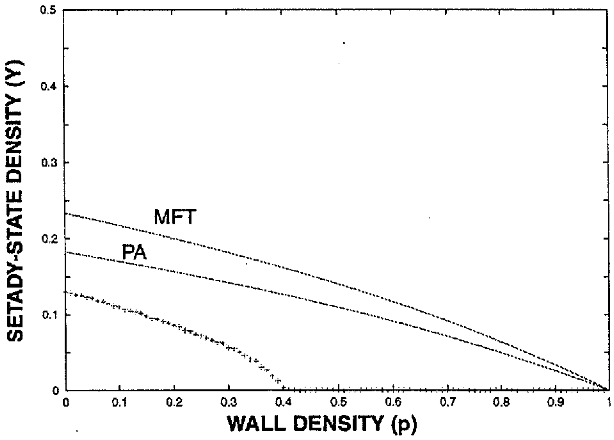


Fig.3

ランダムな媒質中の非線形方程式と付随する確率過程

道工　勇　（埼玉大学教育学部）

カタリチック分枝 (Catalytic Branching) は触媒化学系あるいは触媒生物系等における２つの異なる視点に基づいて導入される確率モデルで使用される用語である。その一つは化学反応における微視的描像で、触媒（Catalyst：カタリスト）が存在する場所においてのみ、ある分子が特定の化学反応を示す場合、いま一つは巨視的描像において、対象となる化学反応が反応拡散方程式によって記述され、カタリストが空間的に異種のレート関数として導入される場合などがそれである。また微細繊維の網状組織や微小粒子群の表面のような、局所的な領域でのみカタリストが存在する場合もありうる。

そのような系は、数学的には次の終点条件 $u|_{s=t}=\varphi$ を伴う R^d 上のカタリチックな反応拡散方程式によってモデル化される。すなわち、

$$-\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{1}{2}\Delta u+\rho_s\cdot R(u),\qquad 0\le s\le t. \tag{1}$$

ここで、R は反応項を、また ρ_s は時刻 s でのカタリストの空間密度 (Spatial Density) で、連続な測度値パス：$s\mapsto\rho_s\in\mathcal{M}_F(R^d)$ をもつものをそれぞれ表す。いま $p(r,b)$ を R^d 上の標準ブラウン運動過程の遷移密度 (Transition Density) とするとき、上の (1) のより正確な意味づけは次の発展方程式系によって与えられる。すなわち、

$$u(s,t,a)=\int dbp(t-s,b-a)\varphi(b)$$
$$+\int_s^t dr\int\rho_r(db)p(r-s,b-a)R(u(r,t,b)). \tag{2}$$

もし (1) での ρ_s がある開集合（もしくは超曲面）上に Mass をもつ、性質のよい測度である場合には、すでに Chadan-Yin (1994): Proc. Roy. Soc., Chan-Fung (1992): J. Math. Anal. Appl., Bramson-Neuhauser (1992): J. Comput. Appl. Math. & Durrett-Swindle (1994): PTRF により解析的手法により研究されている。

ここでは確率論的手法に基づいて、(a) 方程式 (2) が意味をもつ条件を出来るだけ一般の測度値パス ρ に対して定式化すること、(b)（さらに出来れば）その場合の長時間漸近挙動を調べること、を目的としている。

一方、準線形反応拡散方程式と分枝粒子系や超過程（測度値確率過程）との関係は、Dynkin-Kuznetsov (1995): Comm. Pure Appl. Math., LeGall

(1995): PTRF, & Gorostiza-Wakolbinger (1993): Random Comp. Dyn. により詳しく研究されている。このことは同様に、カタリチックな反応拡散方程式と対応する超過程との関連において、この種の方程式 (1) の解析に対する確率論的なアプローチの自然な導入を示唆するものである。

カタリチック分枝に関する研究はすでに 1991 年頃から始まっており、特に Delmas (1995), Dawson-Fleischmann (1991), (1994), (1995), (1997), Fleischmann-LeGall (1995), & Fleischmann (1994) らにより精力的に調べられている。

References

[1] I. Dôku, An overview of the studies on catalytic stochastic processes, *RIMS Kokyuroku (Kyoto Univ.)* **1089**(1999) 1–14.

[2] I. Dôku, Weak large deviation principle for superprocesses related to nonlinear differential equations with catalytic noise, *J. SU Math. Nat. Sci.* **48**(1999) 11–22.

[3] I. Dôku, Measure valued processes associated with nonlinear equations in a catalytic medium, Proc. RIMS Workshop on New Development of Infinite-Dimensional Analysis and Quantum Probability, Sep. 16–17, 1999, Vol.1139 (2000) 1–18.

[4] I. Dôku, A probabilistic representation for solutions of nonlinear equations with catalyst and large deviations for scaled catalytic processes, *RIMS Kokyuroku (Kyoto Univ.)* **1157**(2000) 39–58.

[5] I. Dôku, A probabilistic approach to long time asymptotic behaviors for solutions to nonlinear PDE systems, preprint.

[6] I. Dôku, Large deviations and scaled limits for catalytic processes, preprint.

人口動態モデルに現れる分岐現象

梅津健一郎　前橋工科大学工学部

In this talk we discuss in great detail a bifurcation problem for a semilinear elliptic boundary value problem with nonlinear boundary conditions arising in population, where bifurcation theory based on the Lyapunov and Schmidt procedure is used and the super-sub-solution method plays an auxiliary role.

Let D be a bounded domain of $\boldsymbol{R}^N$, $N \geq 2$, with smooth boundary ∂D. In this talk we consider the following nonlinear elliptic boundary value problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u) := \lambda(m(x)u - au^2) & \text{in } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = b(x)g(u) & \text{on } \partial D. \end{cases} \qquad (*)_\lambda$$

Here λ is a positive parameter, $m(x)$ is a real-valued Hölder continuous function with exponent $0 < \theta < 1$ on the closure $\overline{D}$ which satisfies that $m(x_0) > 0$ for some point $x_0 \in D$, a is a given positive constant, $b(x)$ is a real-valued function on ∂D which belongs to Hölder space $C^{1+\theta}(\partial D)$, $0 < \theta < 1$, $g(t)$ is a real-valued function on $\boldsymbol{R}$ belonging to Hölder class $C^{1+\theta}([-\tau_0, \tau_0])$ with some constant $\tau_0 > 0$ such that

$$g(0) = 0, \qquad (1)$$

and $\mathbf{n}$ is the unit exterior normal to ∂D.

It is well known (cf. [1, 2]) that the equation $-\Delta u = \lambda(m(x)u - au^2)$ in D, describes the steady state of a diffusive logistic equation giving the population density of some species, where $1/\lambda$ represents the diffusion rate, $m(x)$ its growth or decay rates at point $x \in D$, a the carrying capacity, and u the population density. The nonlinearity describing our boundary condition means that the rate of the drift of population into the region D depends *nonlinearly* on $b(x)g(u)$ according to point $x \in \partial D$ and population density u near the boundary ∂D.

In view of the application mentioned above, the existence of *positive solutions* is of our interest. A function $u \in C^2(\overline{D})$ satisfying $(*)_\lambda$ is called a *solution* of $(*)_\lambda$ and it is called *positive* if it is positive in D. It should be remarked that problem $(*)_\lambda$ has the line $(\lambda, 0)$ of trivial solutions $u \equiv 0$ under the condition (1).

In the previous work [4] the behavior of the minimal positive solution of $(*)_\lambda$ as $\lambda \downarrow 0$ has been studied where the discussion is mainly due to the super-sub-solution method. In other words, the behavior of the minimal positive steady state of the corresponding diffusive logistic equation with the nonlinear boundary condition has been investigated as the diffusion rate increases with no limitation. We recall that it is there essential to consider whether it vanishes as $\lambda \downarrow 0$ or not. This problem is replaced by the problem of bifurcation of positive solutions from the line of trivial solutions at the origin $(\lambda, u) = (0, 0)$ and, in this talk, we focus our attention on the study of such a bifurcation problem. More precisely, we discuss whether there exist positive solutions $u(\lambda)$ of $(*)_\lambda$, $\lambda > 0$, such that the uniform norm $\|u(\lambda)\|_\infty$ on $\overline{D}$ tends to *zero* as $\lambda \downarrow 0$ or not. If so, then point $(\lambda, u) = (0, 0)$ is called a *bifurcation point* of positive solutions for $(*)_\lambda$, see Figure 1. From an ecological point of view, the fact that $(\lambda, u) = (0, 0)$ is a bifurcation point implies that the rate of diffusion of a population increases *without limitation* and then all the members *must die.*

Figure 1

In this talk we concentrate our attention on the treatment of the functions $b(x)$ and $g(t)$, for which we assume that

$$\begin{aligned} &b(x) \geq 0 \quad \text{and} \quad b(x) \not\equiv 0 \quad \text{on } \partial D, \\ &g(t) \text{ is non-negative for } t \in [0, \tau_0]. \end{aligned} \tag{2}$$

It is true in the case where $g \equiv 0$ that point $(\lambda, u) = (0, 0)$ is a bifurcation point for $(*)_\lambda$ if and only if $\int_D m(x)dx = 0$, see Hess [3]. On the other hand, under the condition (2) and the restriction that $b(x) \equiv 1$, it has been verified that point $(\lambda, u) = (0, 0)$ is not a bifurcation point for $(*)_\lambda$ when $\int_D m(x)dx > 0$, see [4, Theorem 3]. In addition it can be shown by the same argument as in [4, Corollary 5] that point $(\lambda, u) = (0, 0)$ is not a bifurcation point when $\int_D m(x)dx = 0$ and $g(t)$ is of class C^2 near $t = 0$ such that $g'(0) = 0, g''(0) > 0$ and $g(t) \leq M$ with some constant $M > 0$. The purpose of this talk is to study in further detail the possibility of bifurcation at $(\lambda, u) = (0, 0)$ in each case of the functions $m(x)$, $b(x)$ and $g(t)$.

References

[1] R. S. Cantrell and C. Cosner, Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **112A** (1989), 293–318.

[2] R. S. Cantrell and C. Cosner, Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments II, SIAM J. Math. Anal., **22** (1991), 1043–1064.

[3] P. Hess, Periodic-parabolic boundary value problems and positivity, Pitman Research Notes in Math. Series, vol. 247, Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, 1991.

[4] K. Umezu, Behavior and stability of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems arising in population dynamics, Nonlinear Analysis, TM&A, to appear.

SEMILINEAR EIGENVALUE PROBLEMS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

Kazuaki Taira

Institute of Mathematics, University of Tsukuba, Tsukuba 305-8571, Japan

This paper is devoted to the study of the existence of positive solutions of semilinear eigenvalue value problems for diffusive logistic equations with *discontinuous* coefficients which model population dynamics in environments with spatial heterogeneity. More precisely the purpose of this paper is to generalize two main results, Theorems 1 and 2, of Hess–Kato [HK] to the *VMO* case (see [JN], [Sa]). The approach here is distinguished by the extensive use of the ideas and techniques characteristic of the recent developments in the theory of *singular integral operators*.

Let Ω be a bounded domain of $\mathbf{R}^N$, $N \geq 3$, with boundary $\partial\Omega$ of class $C^{1,1}$. In this paper we consider a second-order uniformly elliptic differential operator with *discontinous* coefficients of the form

$$\mathcal{L}u(x) := -\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x).$$

Here:

(1) $a^{ij} \in \mathrm{VMO} \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ for almost all $x \in D$, and there exists a constant $a_0 > 0$ such that

$$a_0^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a_0|\xi|^2 \quad \text{for almost all } x \in D \text{ and all } \xi \in \mathbf{R}^N.$$

(2) $b^i \in L^\infty(\Omega)$.

(3) $c \in L^\infty(\Omega)$ and $c(x) \geq 0$ for almost all $x \in \Omega$.

Our starting point is the following existence and uniqueness theorem for the Dirichlet problem with *VMO* coefficients (see [CFL]):

Theorem 1.1. *Let $N < p < \infty$. The nonhomogeneous Dirichlet problem*

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

has a unique solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ for any $f \in L^p(\Omega)$ and any $\varphi \in W^{2-1/p,p}(\Omega)$.

The next *a priori* estimate plays a fundamental role in the proof of the existence result in Theorem 1.1.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Theorem 1.2. *Let $1 < q < p < \infty$. If $u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ and $\mathcal{L}u = f \in L^p(\Omega)$, then it follows that $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Moreover there is a constant $C > 0$ such that*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right).$$

The proof of Theorem 1.2 is based on the following two facts:

(1) *explicit* representation formulas for the solutions of the Dirichlet problem;

(2) L^p *boundedness* of some singular integral operators appearing in those formulas (cf. [CZ]).

On the other hand, the uniqueness result in Theorem 1.1 follows from a variant of the Bakel'man–Aleksandrov maximum principle (see [Tr]):

Theorem 1.3. *Assume that*

$$\begin{cases} u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,N}_{\mathrm{loc}}(\Omega), \\ \mathcal{L}u(x) \geq 0 \quad \text{for almost all } x \in \Omega. \end{cases}$$

Then it follows that

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+,$$

where

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\}, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

This paper is devoted to the study of the existence of positive solutions of the following logistic Dirichlet problem:

$$(*) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda(m(x)u - h(x)u^2) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where:

(1) λ is a positive parameter.

(2) $m(x) \in C(\overline{\Omega})$.

(3) $h(x) \in C(\overline{\Omega})$ and $h(x) > 0$ on $\overline{\Omega}$.

The purpose of this paper is to discuss the changes that occur in the global structure of positive solutions as a parameter λ varies from the *principal eigenvalue* $\lambda_1(m)$ of the linearized Dirichlet problem (see Theorem 2 below):

$$(**) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda\, m(x)u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

The next theorem plays an essential role in the study of the homogeneous Dirichlet problem:

Theorem 1. *Let $N < p < \infty$. We define a linear operator*

$$L : C_0(\overline{\Omega}) \longrightarrow C_0(\overline{\Omega})$$

as follows:

(a) The domain $D(L)$ *is the set*

$$D(L) = \left\{u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) : \mathcal{L}u \in C_0(\overline{\Omega})\right\}.$$

(b) $Lu = \mathcal{L}u$ *for all* $u \in D(L)$.

Here

$$C_0(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

Then we have the following:

(i) The operator L *is densely defined and closed.*

(ii) The operator $L : D(L) \to C_0(\overline{\Omega})$ *is an algebraic and topological isomorphism.*

Remark 1. It is easy to verify that the domain $D(L)$ is independent of $N < p < \infty$.

Theorem 1 is proved in Taira [Ta] by using Theorems 1.1 through 1.3.

To study the logistic Dirichlet problem $(*)$, we introduce two ordered Banach spaces associated with the operator L. We let

$$\begin{aligned} Y &= C_0(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\ P_Y &= \{v \in C_0(\overline{\Omega}) : v \geq 0 \text{ in } \Omega\} \\ &= \{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ on } \partial\Omega,\ v \geq 0 \text{ in } \Omega\}, \end{aligned}$$

and also

$$\begin{aligned} X &= D(L) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) : \mathcal{L}u \in C_0(\overline{\Omega})\}, \\ P_X &= \{u \in D(L) : u \geq 0 \text{ in } \Omega\} \\ &= \{u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) : \mathcal{L}u \in C_0(\overline{\Omega}),\ u \geq 0 \text{ in } \Omega\}. \end{aligned}$$

The positivity of the resolvent L^{-1} for problem (D) is an easy consequence of a variant of the strong maximum principle and the boundary point lemma in the framework of Sobolev spaces (see [Tr], [GT]):

Theorem 1.4. *Assume that*

$$\begin{cases} u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,N}_{\mathrm{loc}}(\Omega), \\ \mathcal{L}u \leq 0 \quad \text{almost everywhere in } \Omega, \\ M = \sup_\Omega u \geq 0. \end{cases}$$

If there is a point $x_0 \in \Omega$ *such that* $u(x_0) = M$, *then it follows that*

$$u(x) \equiv M \text{ for all } x \in \Omega.$$

Theorem 1.5. *Assume that*

$$\begin{cases} u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{2,N}_{\mathrm{loc}}(\Omega), \\ \mathcal{L}u(x) \geq 0 \quad \text{for almost all } x \in \Omega, \end{cases}$$

and that there is a point $x_0' \in \partial\Omega$ *such that*

$$\begin{cases} u(x_0') \geq 0, \\ u(x_0') > u(y) \quad \text{for all } y \in \Omega, \end{cases}$$

Then it follows that

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0') < 0.$$

By combining Theorem 1 and Theorems 1.4 and 1.5, we can prove the following fundamental properties of the resolvent L^{-1} for problem (D):

Proposition 1.6. *(i) The resolvent*

$$R = L^{-1} : Y \longrightarrow X$$

is strongly positive; that is, $R(P_Y \setminus \{0\}) \subset \mathrm{Int}\,(P_X)$.

(ii) If

$$M : X \longrightarrow Y$$

is the compact multiplication operator by a function $m(x) \in C(\overline{\Omega})$*, then the operator*

$$RM = L^{-1} M : X \longrightarrow X$$

is compact and strongly positive; that is, $RM(P_X \setminus \{0\}) \subset \mathrm{Int}\,(P_X)$.

A pair $(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times X$ is called a *positive solution* of problem $(*)$ if $\lambda > 0$ and $u \in P_X \setminus \{0\}$ and they satisfy the operator equation

$$Lu = \lambda\, F(u),$$

where $F(u)$ is the Nemytskii operator associated with the term $m(x)u - h(x)u^2$:

$$F(u)(x) = m(x)u(x) - h(x)u(x)^2, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

By using the resolvent $R = L^{-1}$ for problem (D), we transform problem $(*)$ into a nonlinear operator equation in the ordered Banach space $X = D(L)$ in the following way:

$$(*) \qquad \begin{cases} Lu = \lambda(m(x)u - h(x)u^2) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Lu = \lambda\, F(u)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$u = \lambda\, L^{-1}\, F(u).$$

Our first main result is a generalization of Hess–Kato [HK, Theorem 1] to the *VMO* case:

Theorem 2. *The Dirichlet eigenvalue problem* $(**)$ *admits a positive eigenvalue with a positive eigenfunction if and only if* $m(x) \in C(\overline{\Omega})$ *is positive somewhere in* Ω.

(i) If $m(x) \in C(\overline{\Omega})$ *is positive somewhere in* Ω*, then there exists a unique positive eigenvalue* $\lambda_1(m)$ *having an eigenfunction* $\varphi_1(x) \in \mathrm{Int}\,(P_X)$.

(ii) $\mu_1(m) := 1/\lambda_1(m)$ *is an eigenvalue of the compact operator* $RM : X \to X$ *with algebraic multiplicity one.*

The proof of Theorem 2 is carried out just as in Hess–Kato [HK], by using Proposition 1.6 and the Kreĭn–Rutman theorem.

Our second main result is a generalization of Hess–Kato [HK, Theorem 2] to the *VMO* case:

Theorem 3. *Let $N < p < \infty$. Assume that $m(x) \in C(\overline{\Omega})$ is positive somewhere in Ω. Then we have the following:*

(i) If $(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times X$ is a positive solution of problem $(*)$, then it follows that $\lambda > \lambda_1(m)$.

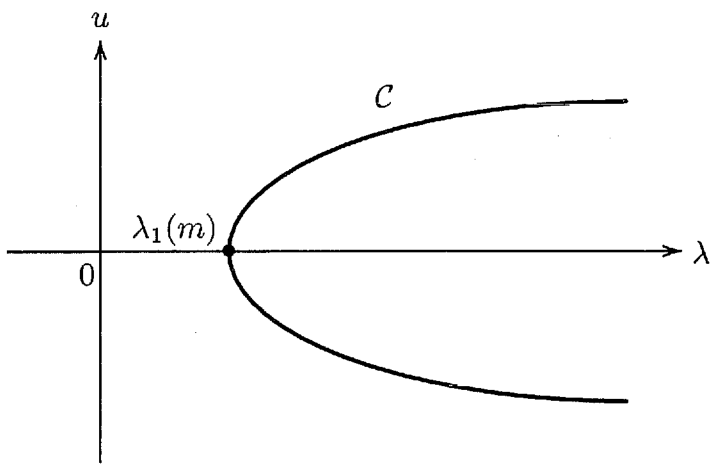
(ii) There is an unbounded arc C of positive solutions (λ, u) of problem $(*)$ emanating from $(\lambda_1(m), 0)$, and u is stable.

(iii) There is a continuous map $\tilde{u}(\cdot) : [\lambda_1(m), \infty) \to P_X$, with $\tilde{u}(\lambda_1(m)) = 0$, such that $C = \{(\lambda, \tilde{u}(\lambda)) : \lambda_1(m) \leq \lambda < \infty\}$. Moreover the map $\tilde{u}(\cdot)$ is continuously differentiable in $(\lambda_1(m), \infty)$.

(iv) The $\tilde{u}(\lambda)$ are uniformly bounded for all $\lambda > \lambda_1(m)$:

$$\max_{\overline{\Omega}} |\tilde{u}| \leq \frac{\max_{\overline{\Omega}} m}{\min_{\overline{\Omega}} h}.$$

Theorem 3 follows by combining Theorem 2 and the Rabinowitz global bifurcation theorem (see [CR], [Ra]) just as in Hess–Kato [HK]. The situation may be represented schematically by the following bifurcation diagram:



The logistic oblique derivative problem may be treated just as in Senn [Se] if we make use of the results of Senn–Hess [SH], Maugeri–Palagachev [MP] and Lieberman [Li].

References

[CZ] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139.

[CFL] F. Chiarenza, M. Frasca and P. Longo, *$W^{2,p}$-solvability of the Dirichlet problem for non divergnece elliptic equations with VMO coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **336** (1993), 841–853.

[CR] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Functional Analysis **8** (1971), 321–340.

[GT] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second edition, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

[HK] P. Hess and T. Kato, *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function*, Comm. Partial Differential Equations **5** (1980), 999–1030.

[JN] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure and Appl. Math. **14** (1961), 175–188.

[Li] G. Lieberman, *Local estimates for subsolutions and supersolutions of oblique derivative problems for general second order elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **304** (1987), 343–353.

[MP] A. Maugeri and D. K. Palagachev, *Boundary value problem with an oblique derivative for uniformly elliptic operators with discontinuous coefficients*, Forum Math. **10** (1998), 393-405.

[Ra] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Functional Analysis **7** (1971), 487–513.

[Sa] D. Sarason, *Functions of vanishing mean oscillation*, Trans. Amer. Math. Soc. **207** (1975), 391–405.

[Se] S. Senn, *On a nonlinear elliptic eigenvalue problem with Neumann boundary conditions, with an application to population genetics*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), 1199–1228.

[SH] S. Senn and P. Hess, *On positive solutions of a linear elliptic eigenvalue problem with Neumann boundary conditions*, Math. Ann. **258** (1982), 459–470.

[Ta] K. Taira, *Existence of Feller semigroups with discontinuous coefficients* (to appear).

[Tr] N. S. Trudinger, *Local estimates for subsolutions and supersolutions of general second order elliptic quasilinear equations*, Invent. Math. **61** (1980), 67–79.

非線形拡散方程式の一般関数解

出口 英生 (広島大・理)

強い特異性がある解をもつ Cauchy problem を扱いたい. そのための 1 つの方法として, J.F.Colombeau (1983) によって導入された一般関数の理論がある. 例えば, 下の (1) の $\tilde{\mu}=0$ のときの classical な解は強い特異性をもち, entropy 解の概念を用いて一意性等の議論が論じられている. この classical な解は, 一般関数の理論を用いれば, 下で説明する association と呼ばれる弱い等式 "$\approx$" を使って, $\tilde{\mu}\approx 0$ の場合の一般関数解として解釈できる. また, $\tilde{\mu}$ が定数の場合, この一般関数の理論を用いれば, 初期値として δ 関数よりも強い特異性のある関数を扱うこともできる.

ここでは, $\mathbf{R}\times(0,\infty)$ において, 非線形拡散方程式の generalized Cauchy problem

$$
(1)\qquad \begin{cases} \tilde{u}_t+f(x,t,\tilde{u})\tilde{u}_x+g(x,t,\tilde{u})\tilde{u}=\tilde{\mu}\tilde{u}_{xx} \\ \tilde{u}|_{t=0}=\tilde{u}_0 \end{cases}
$$

を考える, ただし, f,g は $C^\infty(\mathbf{R}^3)$ の元で

$$
{}^\forall\alpha\in\mathbf{N}^3,{}^\exists c,r>0;\ |D^\alpha f(x,t,u)|,\ |D^\alpha g(x,t,u)|\le c(1+|u|)^r
$$

をみたすとする. また, $g\ge 0$ で $\tilde{\mu}$ は一般化された正の定数であるとする.

ここで用いる一般関数の空間 $\mathscr{G}_s$ は, 開集合 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ に対して

$$
\mathscr{E}_s[\Omega]=\{R(\varepsilon,x)\ \text{s.t.}\ R:(0,\infty)\times\Omega\to\mathbf{C},R\in C^\infty(\Omega)\}
$$

のある subalgebra $\mathscr{E}_{M,s}[\Omega]$ とその ideal $\mathscr{N}_s[\Omega]$ の商空間として定義されるので, 空間 $\mathscr{G}_s$ は次のような性質を持つ:

(i) 一般関数の空間 $\mathscr{G}_s$ は超関数の空間 $\mathscr{D}'$ を含む. また, 空間 $\mathscr{D}'$ は一般に, 積に関して閉じていないが, 空間 $\mathscr{G}_s$ は, 積だけでなく, ある非線型変換に関しても閉じている.

(ii) 連続関数 u,v をそれぞれ一般関数と見たものを $\tilde{u},\tilde{v}$ で表わすとき, 一般に $\tilde{u}\cdot\tilde{v}\neq\widetilde{u\cdot v}$ となり, classical な意味での積と一般関数の意味での積は一致しない. しかし, このことは association と呼ばれる弱い等式 "$\approx$" によって解決される: 一般関数 $\tilde{u}$ が $R_{\tilde{u}}(\varepsilon,x)\longrightarrow w$ as $\varepsilon\to 0$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$ をみたす代表元 $R_{\tilde{u}}$ をもつとき, 一般関数 $\tilde{u}$ は超関数 w と associate するといい, $\tilde{u}\approx w$ で表わす.

具体的な空間 $\mathscr{G}_s$ の定義は以下のとおりである: 開集合 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_{M,s}[\Omega]=\{R\in\mathscr{E}_s[\Omega]\ \text{s.t.}\ &{}^\forall K\subset\subset\Omega,\alpha\in\mathbf{N}^n,{}^\exists N\in\mathbf{N},c,\eta>0;\\
&{}^\forall x\in K,0<\varepsilon<\eta,\ |(D^\alpha R)(\varepsilon,x)|\le c\varepsilon^{-N}\},\\
\mathscr{N}_s[\Omega]=\{R\in\mathscr{E}_{M,s}[\Omega]\ \text{s.t.}\ &{}^\forall K\subset\subset\Omega,\alpha\in\mathbf{N}^n,q\in\mathbf{N},{}^\exists c,\eta>0;\\
&{}^\forall x\in K,0<\varepsilon<\eta,\ |(D^\alpha R)(\varepsilon,x)|\le c\varepsilon^{q}\}
\end{aligned}
$$

とおく. このとき, 商空間 $\mathscr{G}_s(\Omega)=\mathscr{E}_{M,s}[\Omega]/\mathscr{N}_s[\Omega]$ によって一般関数の空間を定義し, 一般関数 $\tilde{u}\in\mathscr{G}_s$ に対して, その代表元を $R_{\tilde{u}}(\varepsilon,x)$ で表わす.

空間 $\mathscr{G}_s$ において problem (1) を考えると, 一意性が得られない場合がある ([2]) ので, global な有界性の条件を加えた空間 $\mathscr{G}_{s,g}$ を用いる.

u_0 を一般関数と見たものを $\tilde{u}_0$ で表わす. このとき, classical Cauchy problem

$$
(2)\qquad \begin{cases} u_t+(F(x,t,u))_x=0 \\ u|_{t=0}=u_0 \end{cases}
$$

は一般関数の空間 $\mathscr{G}_{s,g}$ において

$$(3) \qquad \begin{cases} \tilde{u}_t + (F(x,t,\tilde{u}))_x \approx 0 \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

で定式化される ([2]). また, $\tilde{\mu} \approx 0$ のとき

$$(4) \qquad \begin{cases} \tilde{u}_t + (F(x,t,\tilde{u}))_x = \tilde{\mu}\tilde{u}_{xx} \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

の一般関数解 $\tilde{u}$ が bounded type, つまり, 代表元 $R_{\tilde{u}}(\varepsilon, x, t)$ が $\varepsilon > 0$ に関して一様に有界ならば, $\tilde{\mu}\tilde{u}_{xx} \approx 0$ が成り立ち, $\tilde{u}$ は problem (3) の一般関数解になる. このようにして, problem (3) を解くための方法を得る.

Theorem 1. $\tilde{\mu}$ の代表元 $R_{\tilde{\mu}}(\varepsilon)$ が次の条件をみたすとき, それぞれの $T > 0$ に対して, problem (1) をみたす解 $\tilde{u} \in \mathscr{G}_{s,g}(\mathbf{R} \times [0,T])$ が存在する:

$$^{\exists}N \in \mathbf{N}, \eta > 0 \text{ s.t. } 0 < {}^{\forall}\varepsilon < \eta,\ R_{\tilde{\mu}}(\varepsilon) \geq \varepsilon^N.$$

Theorem 2. $\tilde{\mu}$ の代表元 $R_{\tilde{\mu}}(\varepsilon)$ が次の条件をみたすとき, それぞれの $T > 0$ に対して, problem (1) をみたす bounded type である解 $\tilde{u} \in \mathscr{G}_{s,g}(\mathbf{R} \times [0,T])$ は一意である:

$$^{\exists}\eta > 0 \text{ s.t. } 0 < {}^{\forall}\varepsilon < \eta,\ R_{\tilde{\mu}}(\varepsilon) \log \frac{1}{\varepsilon} \geq 1.$$

Theorem 3. $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R})$, u を problem

$$\begin{cases} u_t + (F(x,t,u))_x = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

の classical entropy solution とする, ただし, F はある増大度と正値性に関する条件をみたす関数であるとする. さらに, $\tilde{\mu}$ は Theorem 1 と同じ仮定をみたし, $\tilde{\mu} \approx 0$ とする. このとき $\tilde{v} \in \mathscr{G}_{s,g}(\mathbf{R} \times [0,\infty))$ が

$$\begin{cases} \tilde{v}_t + (F(x,t,\tilde{v}))_x = \tilde{\mu}\tilde{v}_{xx} \\ \tilde{v}|_{t=0} = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

の解ならば, $\tilde{v} \approx u$ が成り立つ, ただし, $\tilde{u}_0$ は u_0 を一般関数と見たものである.

References

[1] H.A.Biagioni, A nonlinear theory of generalized functions, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1421, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[2] H.A.Biagioni and M.Oberguggenberger, Generalized solutions to Burgers' equation, J. Differential Equations 97 (1992), 263–287.

[3] P.D.Lax, Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 159–193.

[4] O.A.Oleinik, Discontinuous solutions of non-linear differential equations, American Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol.26, pp.95–172, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.

[5] J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

18.

Infinite Dimensional Stochastic Analysis and Related Field

平成１２年９月２９日～１０月６日

（於　京都大学理学部，広島大学理学部，九州大学理学部）

世話人:重川一郎（京大・理），三苫　至（佐賀大・理工）

このシンポジュウムは、無限次元確率解析と位相的場の理論の接点の研究を目的として、ドイツのボン大学のアルベベリオ教授，院生のハーン氏，米国ルイジアナ州立大学のセングプタ助教授，フランスのナンシー大学のレアンドル教授の外国人招聘者４氏と日本人参加者３５名によって，９月２９日の京大を皮切りに広大，九大と８日間に渡って行われた．

レアンドル氏はループ空間という無限次元空間上のディラック作用素に対するＧ－指数定理, リーマン面から多様体への写像の空間上の共形場測度の構成，ヤン・ミルズ接続の平行移動による特徴づけ，に関する３つの講演をされた．

アルベベリオ氏は, 場の量子論の数学的側面の研究と無限次元確率解析がどのように関係しているのかについて時代を追って話された．現在セングプタ氏と共同で研究されておられる飛田超関数をもちいたチャーン・サイモンズ汎関数積分についても紹介された．

セングプタ氏はゲージ理論と確率解析について啓蒙的講演をされた．トピックの一部はレアンドル氏の講演と重なっていたがコンセビッチ積分など挑戦的であった．さらに量子変形や非可換確率論にまでふれられた．場の量子論に関連して，実２乗可積分関数のヒルベルト空間を複素解析関数のヒルベルト空間に写すバーグマン変換を使ったヤン・ミルズ場の特徴づけについて講演された．

ハーン氏は飛田超関数を使って軸ゲージ固定をしたチャーン・サイモンズ積分を数学的に正当化して，ホンフリー多項式の導出について講演された．

これらの講演に匹敵するような活発な日本人参加者の講演によって，無限次元確率解析の分野がますますその領域を広げ，位相的場の理論など将来への展望が大きく開けた．

プログラム

September 29(Friday): at Kyoto University, Semi.Room 352

10:00–11:30 R. Leandre (Nancy)
A stochastic approach to Witten's explanation of the rigidity theorem

13:30–15:00 R. Leandre (Nancy)
Random spheres

September 30(Saturday): at Kyoto University, Semi.Room 352

10:00–11:30 S. Albeverio (Bonn)
Some recent developments in functional integration
and connections with (topological) quantum fields I

13:30–15:00 S. Albeverio (Bonn)
Some recent developments in functional integration
and connections with (topological) quantum fields II

15:30–17:00 A. Hahn (Bonn)
Non-abelian Chern-Simons theory on R^3 in axial Gäuge I

October 2(Monday): at Hiroshima University

15:30–17:00 A. Sengupta (Louisiana)
Gäuge Theory on Surfaces

October 3(Tuesday): at Hiroshima University

10:00–11:30 A. Sengupta (Louisiana)
Stochastic Analysis in Geometric QFTs

October 4(Wednesday) at Kyushu Unversity

9:00–10:00 I. Mitoma (Saga)
Asymptotic expansion of a perturbative
su(2) Chern-Simons integral

10:10–11:10 A. Hahn (Bonn)
Non-abelian Chern-Simons theory on R^3 in axial Gäuge II

11:20–12:20 S. Albeverio (Bonn)
Geometry of configuration spaces, stochastic analysis and related topics

14:00–15:00 A. Inoue (T.I.T.)
A system version of Egorov's theorem using superanalysis

15:10–16:10 S. Taniguchi (Kyushu)
Asymptotic behavior of stochastic oscillatry integrals
with quadratic phase functions

16:20–17:20 S. Kusuoka (Tokyo)
Nonlinear transformation containing rotation
and Gauss measure

October 5(Thursday) at Kyushu Unversity

9:00–10:00 A. Arai (Hokkaido)
Spectral properties of infinite dimensional Dirac operators
on Boson-Fermion Fock spaces

10:10–11:10 K. Saito (Meijo)
A stochastic process generated by
the Lévy Laplacian

11:20–12:20 R. Leandre (Nancy)
Stochastic Levy Laplacian and Yang-Mills
equation on a manifold

14:00–15:00 H. Yoshida (Ochanomizu Wom.)
A q-deformation of Poisson random variable

15:10–16:10 K. Handa (Saga)
Random fields and formal Hamiltonians

16:20–17:20 S. Aida (Osaka)
Uniform positivity improving property of diffusion
semigroup on loop space

October 6(Friday) at Kyushu University

9:00–10:00 K. Kuwae (Yokohama)
Convergence of spectral structures(jointwork with T. Shioya)

10:10–11:10 H. Uemura (Aichi Ed.)
Substitution to parametrized generalized wiener
functionals and pinned Brownian local times

11:20–12:20　A. Sengupta (Louisiana)
From Segal-Bargmann to the S-transform

14:00–15:00　M. Yoshida (Tokyo Elec. Com.)
Applications of Ustunel-Zakai's monotone shift theorem
to non-linear SPDE on Nelson's Euclidean free field

15:10–16:10　T.Ichinose (Kanazawa) and H.Tamura (Okayama)
On the norm convergence of the Trotter-Kato
product formula with error bound

16:20–17:20　I. Shigekawa (Kyoto)
Intertwining property and generator domain

海外招聘教授等

このシンポジュウムに関連して、ルイジアナ州立大学セングプタ教授を海外招聘し、ボン大学のハーン研究員の国内旅費を支給した。この２名の講演内容等を記す。

氏名：Ambar N. SENGUPTA
所属：Department of Mathematics, Louisiana State University, Baton Rouge, U.S.A.
職：Associate Professor

講演報告

場所：広島大学理学部
日時：１０月２日
題名：Gäge Theory on Surfaceses
日時：１０月３日
題名：Stochastic Analysis in Geometric QFTs

講演内容： 最初の講演はセングプタ氏自身の仕事であるリーマン面上のヤン・ミルズ測度を構成する話であった．これは，リーマン面から多様体への写像の空間上のある種の測度の構成にかんするもので共形場理論とも関連するの重要な研究課題で興味深い物であった．

一番簡単な場合はループ空間値ブラウン運動を構成する事に帰着する．この意味で一連のマリアバンと彼の共同研究者によるループ空間上のブラウン運動の研究と関連する．

コンセビッチ積分との関連は挑戦的課題である． ランダム面の話は他の分野，たとえば界面の問題などとの新たな接触をへながら発展するかもしれない．

２番目の講演は，いわゆる位相的場の理論の数学的側面の研究と無限次元確率解析がどのように関係しているのかをアルベベリオ氏と共同で研究されておられる飛田超関数をもちいたチャーン・サイモンズ汎関数積分についての話を軸に講演された．

非可換チャーン・サイモンズ理論を３次元多様体上のリー環値１次微分形式の空間上の軸ゲージ固定をしたチャーン・サイモンズ測度のフーリエ変換を利用して対応する飛田

超関数として，チャーン・サイモンズ測度を捉え，さらに平行移動の積分の満たす方程式を導出し不変量を特徴付けようと言う物である．

今の事からも明らかなように，このような場の理論の数学的側面の研究においては非可換解析が避けて通れないことを量子変形や非可換確率論の話題を交えて話された．

場所：九州大学理学部４号館４２０１

日時：１０月６日

題名：From Segal-Bargmann to S-transform

講演内容： 場の量子論に関連して，実２乗可積分関数のヒルベルト空間を複素解析関数のヒルベルト空間に写すシーガル・バーグマン変換を使ったヤン・ミルズ場の特徴づけについて講演された．

２次元ヤン・ミルズ場は２次元リーマン多様体上のりー環値１次微分形式上のガウス測度による実２乗可積分関数のヒルベルト空間によって記述される．そこでホロノミーの L^2-関数のシーガル・バーグマン変換による像がラプラシアンによって特徴づけられる．

このことはセングプタ・アルベベリオの飛田超関数とＳ一変換を使ったチャーン・サイモンズ理論の研究と深く関わっている．

氏名：Atle HAHN

所属：Institute of Applied Mathematics, Universit"ate Bonn, Germany

職：Doctoral fellow

講演報告

場所：京都大学理学部

日時：９月３０日

題名：Non-abelian Chern-Simons Theory on R^3 in axial Gäge I

場所：九州大学理学部

日時：１０月４日

題名：Non-abelian Chern-Simons Theory on R^3 in axial Gäge II

講演内容： この２つの講演はハーン氏の同題の博士論文と同じ内容である．ハーン氏は１９９５年に始まるアルベベリオ・セングプタ氏達のチャーン・サイモンズ積分を飛田の超関数と捉える仕事を引き継いでいる．

軸ゲージを固定するとチャーン・サイモンズ汎関数は２次形式になりガウス測度を基礎にする飛田超関数のフーリエ変換を通してチャーン・サイモンズ積分は数学的に正当化される．

そこでウィルソン線の積の積分も同じように正当化される．この講演の主眼はその値が何になるかを求める事である．

ハーン氏はループが自己とは交わっていないことを仮定する事によってウィルソン線積分の値がホンフリー多項式に一致する事を積分を正当化する事によって世界で初めて示した．従来の結果は積分を形式的に計算した後の予想を証明するものであった．

招聘の成果報告

ウィッテンは1987年以降，その超対称的場の量子論における物理的洞察から3・4次元多様体の位相不変量について一連の21世紀に向けた仕事をしている．数学の世界の潮流から見ても，我々はその未来（超弦理論）からのメッセージの理解につとめねばならない．

ウィッテンの位相不変量の求め方はファインマン積分と呼ばれる無限次元空間上のルベーグ積分を用いて行われている．所がその結果のほとんどは共形場理論に関連した表現論を用いて数学的に正当化されている．積分という観点からは何一つ正当化されてはいないのである．

かって，確率論は，ファインマン積分から多くの事を学んだ．今の場合，ファインマン積分が無限次元空間上のファインマン測度による積分となっている点が経路積分との相違点である．

1995年にアルベベリオ氏達がJ.Math.Phys.に発表した可換なChern-Simons（チャーン・サイモンズ）理論に関する論文は無限次元空間上のルベーグ積分の数学である無限次元確率解析の手法（積分という観点から準備できる唯一の数学的手段である確率論的方法）が適用できること示唆していた．

世界でこの手の唯一の研究はドイツのボン大学のアルベベリオ教授のグループ（院生のハーン，米国ルイジアナ州立大学のセングプタ助教授）の研究である．無限次元確率解析の手法を用いるとアルベベリオ氏達とは違った物理サイドの常套手段であるスーパーフィールドの方法に沿ったChern-Simons理論の研究が可能となる．それは超関数としてではなく積分として捉える事である．

そうすることによって，積分の漸近展開理論が数学的に正当化され，その展開係数の計算から物理学者が導いている3次元多様体の位相不変量を求める事が出来るはずである．

アルベベリオとハーン氏達の講演に着目した．彼らはアルベベリオ・セングプタ両氏の方法を継承してウィルソン・ライン積分が与える位相不変量であるホンフリー多項式の導出に成功していた．このことは，長年の懸案であったChern-Simons積分に関するレベル無限大での漸近展開係数を求める事に対して十分な示唆を与えている．

この来日と研究会によって，得られた成果は，無限次元確率解析を基礎にすればウィルソン・ライン積分とChern-Simons積分の3次の項が複雑に絡み合っている位相不変量の導出の可能性が高まったことである．さらにもともと日本人による飛田超関数論が有効なことがアルベベリオ教授のグループによって発見されたばかりであり熟達した我が研究者達が彼らに先んじて更なる発展をもたらすかもしれない．

19.

「時系列解析と金融工学」
平成12年11月29日(水)~11月30日(木)
(東京大学工学部6号館 3階 セミナー室A)
世話人(岡部 靖憲(東京大学))

このシンポジウムは、確率解析と時系列解析に基づく金融工学に関して、データに触れた実証的な研究を目的として行われ、約２５名の出席者の下で、非線形時系列解析の理論と経済学・金融工学に現れる複雑系現象・時系列モデルの実証分析と確率解析の８つの講演が行われた。特に、KM_2O-ランジュヴァン方程式論に基づく因果解析、日米株価指数の因果解析、TVCMと販売の因果解析、金融工学に現れる時系列モデルとその実証分析・確率解析の成果の発表があった。経済学・金融工学・数学の境界領域の研究の重要性を確認し、さらに発展させる必要を感じさせるシンポジウムであった。プログラムおよび内容は次頁以降の通り。

プログラム

11 月 29 日 (水)

10:30—11:30　松浦 真也 (学振特別研究員:東大·計数工学)
KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論に基づく因果解析

14:00—15:00　中野 裕治（滋賀大·経済）
日米株価指数の因果解析について

15:30—16:30 日高 徹司, 吉田 弘 (博報堂), 岡部靖憲 (東大·計数)
広告でモノが売れるのか？—TVCM と販売の
因果関係とそのメカニズムを探る—

11 月 30 日 (木)

10:00—11:00　藤井 真理子 (東大·先端科学技術研究センター)
オプション価格理論と経済分析
——二項プロセスのモデルで考える

11:30—12:30　鄭謙、左士イ、岸本 一男（筑波大·社会工学)
マーケット・インパクトを考慮した
時系列モデルとその実証分析

14:00—15:00　国友 直人 (東大·経済)
Estimation of asymmetrical volatility for asset prices:
the simultaneous switching AR approach

15:30—16:30　胡 豊栄（阪大·数学)
On Markov chains induced from stock processes
having barriers in finance market

17:00—18:00　岡部 靖憲 (東大·計数工学)
離散型の Girsanov の定理とその金融工学への応用

(1) **松浦　真也 (学振特別研究員 : 東大・計数工学) KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論に基づく因果解析**

複数の時系列の間の因果関係について調べ, 因果のダイナミクスを求めることは, 金融工学の研究において, 大きな意味を持つものと思われる. 本講演では, KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論に基づく因果解析の基本的な事柄について, その概略を述べる. $X = (X(n); l \le n \le r)$ を 1 次元の確率過程, $Y = (Y(n); l \le n \le r)$ を d 次元の確率過程とする. Y から X への線形因果性が存在するとは, ある整数 M_0 $(l \le M_0 \le r)$ が存在して, 任意の n $(M_0 \le n \le r)$ に対して, $R^{(n-l+1)d}$ から R への線形関数 L_n で

$$X(n) = L_n(Y(n), Y(n-1), \ldots, Y(l)) \qquad a.s.$$

を満たすものが存在することを意味する. このことは, 任意の n $(M_0 \le n \le r)$ に対して, $P_{M_l^n(Y)}X(n) = X(n)$ が成り立つことと同値である. ただし, $M_l^n(Y)$ は確率変数 $Y_j(k)$ $(1 \le j \le d,\ l \le k \le n)$ の一次結合によって生成される線形空間である. 線形の因果性の有無を定量的に特徴付けるために, 因果関数 $C_n(X|Y)$ を $C_n(X|Y) \equiv ||P_{M_l^n(Y)}X(n)||$ で定義する. さらに, Y から X への非線形因果性が存在するとは, ある整数 M_0 $(l \le M_0 \le r)$ が存在して, 任意の n $(M_0 \le n \le r)$ に対して, $R^{(n-l+1)d}$ から R へのボレル関数 F_n で

$$X(n) = F_n(Y(n), Y(n-1), \ldots, Y(l)) \qquad a.s.$$

を満たすものが存在することを意味する. このことは, 任意の n $(M_0 \le n \le r)$ に対して, $P_{N_l^n(Y)}X(n) = X(n)$ が成り立つことと同値である. ただし, $N_l^n(Y)$ は $\mathcal{B}_l^n(Y)$ 可測な 2 乗可積分な確率変数からなる空間であり, $\mathcal{B}_l^n(Y)$ は確率変数 $Y_j(k)$ $(1 \le j \le d,\ l \le k \le n)$ によって生成されるσ-加法族である. 非線形の因果性の有無は, 空間 $N_l^n(Y)$ の基底を与える確率過程の列 $\tilde{Y}^{(q)}$ を構成することによって, 線形の議論に帰着され, 最終的に次の定理が得られる.

定理　Y から X への非線形因果性が存在するための必要十分条件は, ある整数 M_0 $(l \le M_0 \le r)$ が存在して, 任意の n $(M_0 \le n \le r)$ に対して,

$$\lim_{q \to \infty} C_n(X|\tilde{Y}^{(q)}) = ||X(n)||$$

が成り立つことである.

因果関数の値 $C_n(X|\tilde{Y}^{(q)})$ を具体的に計算するには, 退化した流れに対するKM$_2$O-ランジュヴァン方程式論を用いることができる. また, ここで定義した非線形因果性より広い概念として, 非線形弱因果性を定義し, 同様の議論を展開することができる. また, 確率過程の決定性についても, 因果性の理論の応用として議論することができる.

参考文献

[1] Y. Okabe and A. Inoue, The theory of KM$_2$O-Langevin equations and its applications to data analysis (II): Causal analysis (1), Nagoya Math. J., 134(1994), 1-28.

[2] Y. Okabe and A. Kaneko, On a non-linear prediction analysis for multi-dimensional stochastic processes with its applications to data analysis, Hokkaido Math. J., 29(2000), 601-657.

[3] M. Matsuura and Y. Okabe, On a non-linear prediction problem for one-dimensional stochastic processes, to appear in Japanese J. Math., 27(2001).

(2) 中野　裕治 (滋賀大・経済):日米株価指数の因果解析について

時系列間の因果性は、Granger によって定義されたものがよく知られている。Okabe は、KM$_2$O -Langevin 方程式の理論を構築し、Okabe-Inoue（Nagoya M.J.,1994）により新しい因果の定義を与え、Okabe-Yamane (Nagoya M.J.,1998) をはじめ、一連の研究によって、非線形因果解析を発展させた。

Nakano(Hokkaido M.J.,1995) は、KM$_2$O -Langevin 方程式の理論をもとに、局所因果性を定義し、その実証法を提案した。さらに、弱定常性をもつデ－タにたいして、局所因果値の概念を与え、因果関係の具体的な判定方法を与えている（Working Paper of Shiga Univ.,1999)。

本報告では、局所因果解析法をアメリカのダウ・ジョ－ンズ株価指数と日経株価指数との関係に適用し、互いの株価指数の影響関係を分析した。用いたデ-タは、daily のデ-タである。

主な結果は以下のとうりである。

1. ダウ・ジョ－ンズ株価指数 (Closed) が、1987 年、1988 年、1999 年後半、2000 年前半に, 日経株価指数 (Open) に影響を与えている。

2. 1985 年度以降の他の年度については、ダウ・ジョ－ンズ株価指数 (Closed) からダウ・ジョ－ンズ株価指 (Open) への因果値が高いケースが多いが、影響が認められるところまで達していない。

3. 日経株価指数 (Closed) から ダウ・ジョ－ンズ株価指数 (Open) への因果値は総じて低い。1987 年度については、因果関係が認められる。

4. シカゴにおける為替市場（1987 年度）では、ダウ・ジョ－ンズ株価指数は、ドル-円の為替レ－トに影響するが、日経株価指数は影響を与えていない。

報告では、既に導入した偏局所因果値の概念（ICIAM(1998) 等）について説明し、家計消費、消費者物価指数、家計収入について、この１０年間の月次データを分析した。次の結果を得ている。

I 家計消費、消費者物価指数、家計収入は互いに強い因果関係にある。

II 家計消費から家計収入の影響を除いた量は、消費者物価指数から家計収入の影響を除いた量の強い影響を受ける。その逆は認められない。

(3) 日高　徹司、吉田　弘 (博報堂), 岡部　靖憲 (東大・計数)：広告でモノが売れるか？ーTVCM と販売の因果関係とそのメカニズムを探る

広告業界での、広告と広告対象商品との関係に関する関心は高い。しかし、販売量のデータは複雑な挙動で、簡単な回帰分析などでは関係が見いだしにくい。今回、KM_2O-ランジュヴァン方程式論に基づく非線形時系列解析手法を導入し、広告と販売の間の因果関係の判定、さらには得られたダイナミクスによる予測計算、制御解析を試みた。発表の概要は以下の通り。

1. KM_2O-ランジュヴァン方程式論に基づく時系列解析の概要
   (a) 「決定性」「強因果性」「弱因果性」の定義
   (b) 解析のアルゴリズム

2. データ解析の概要
   (a) 使用データについて

- ビールの代表的な3商品の広告量
- 販売量の週別時系列データ

(b) 解析結果概要

- 3商品のうち、1商品について弱因果性あり、他1商品についてグランジャーの意味での因果性ありと判断された。

(c) ダイナミクスの推定

- 弱因果性ありと判断されたデータについては具体的に非線形のダイナミクスを求ることが可能なため、具体的にモデルを書き下した。

(d) 予測計算

- 「2-3」で求めたダイナミクスを用いて予測計算を行った。5時点先程度まで、予測結果と実データの間で一致が見られた。

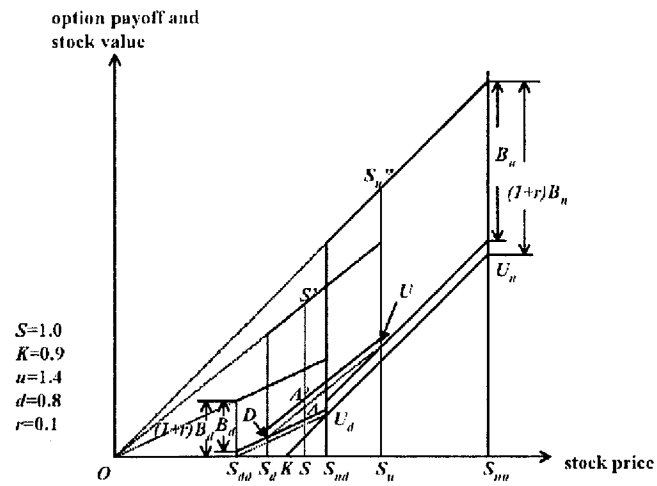
(e) 制御計算

- 同様に「2-3」のダイナミクスを用いて、広告量を変化させたときの販売量の変化を確認した。今回の商品の場合、広告を毎週出すよりは間をあけて出したほうが効果的であるという結果が得られた。

(4) 藤井　真理子 (東大・先端科学技術研究センター):オプション価格理論と経済分析―二項プロセスのモデルで考える

1　オプション価格理論の基本となっているユーロピアン・コールについてのBlack-Sholes価格式は、市場における裁定取引の概念を用いて導出されている。この原理は、株価について二項プロセスを仮定するCox-Ross-Rubinsteinのモデルにより明確に理解することができるが、これを図解によって明かにすることも可能である。これらの価格式の経済的な意味は、オプションの価値が複製資産のコストとして算出できることともいえるが、その直感的理解は図解によるアプローチによって与えられる。また、オプション・ミレミアムの価値は、リスク中立確率によるペイオフの加重平均であることやオプション・グリースを得る比較静学を容易に示すことができる。特に、金利変化の影響をその経済的意味と結びつけて理解することがきわめて容易になる。

Diagram 2 Call option premium : two-period example



2　二項モデルを多期間で解く方法を図によりバックワードに示すこともできる。経済分析との関係でいえば、こうしたアプローチが可能であるのは安全資産と株式で動学的にも市場が完備になっているからである

(5) 鄭謙(西友商事)、左示イ、岸本一男(筑波大・社会工学): マーケット・インパクトを考慮した時系列モデルとその実証分析

現実の終値データから，マーケット・インパクトを推定する試みとして，Roll(1984) は，スプレッドの存在を組み込んだ時系列モデルとその推定法を提案している．鄭・岸本(2000)，左・鄭・岸本(2000) は，同じモデルを Kalman Filter の枠組みで最尤推定することを提案し，その精度の検証と実証研究を行っている．本発表では，Roll のモデルを一般化して，本来価格とノイズとに系列相関がある場合についてのも，Kalman Filter によるアプローチが素直に適用できることを指摘し，東証160銘柄の日時終値データの系列に対して適用した．

時刻 t での金融資産の取引価格を P_t $(t=0,1,2,\ldots,T)$，その対数価格を $S_t=\log P_t$ と記す．対数取引価格 S_t を，対数本来価格 Y_t とマーケット・インパクトのノイズ Z_t の和であると考える：

$$S_t = Y_t + Z_t. \tag{1}$$

Roll のモデルを拡張し，Z_t が AR(1) に従うと仮定する：

$$Z_t = \gamma Z_{t-1} + \zeta_t, \tag{2}$$

$$\zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2), \qquad i.i.d. \tag{3}$$

本来対数価格 Y_tに対する（対数）収益率 X_t は AR(1) に従うとする：

$$Y_t = Y_{t-1} + X_{t-1}, \tag{4}$$

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \xi_t, \tag{5}$$

$$\xi_t \sim N(\mu_\xi, \sigma_\xi^2), \quad i.i.d. \tag{6}$$

以後は $\mu_\xi = 0$ と仮定する．実際のデータ処理では，S_t を計算する段階で，

$$S_t = \log P_t - \frac{t(\log P_T - \log P_0)}{T} \tag{7}$$

と前処理することで対処する．

推定結果によると，本来価格には相関はほとんど観察されないが，マーケット・インパクト項には強い正の系列相関が観測された．この事実は，単純に Roll のモデルを用いることが危険である可能性を示唆している．

(6) 国友　直人(東大･経済)、佐藤　整尚(統数研):Estimation of Asymmetrical Volatility for Asset Prices:The Simultaneous Switching AR Approach

The asymmetrical movements between the downward and upward phases of the sample paths of many financial time series have been commonly noted by economists.By incorporating the conditional hheteroskedasicity aspect into the nonstationary simultaneous switching autoregressive (SSAR)model,the asymmetrical volatility function of financial time series with daily effects can be estimated easily.We report a simple empirical result on stock price daily indices of the Nikkei-225 and SP-500 by this modelling.

(7) 胡　豊栄(阪大・数学):On Markov chains induced from stock processes having barriers in finance market

In this paper, we research Taiwan's market which possesses lower and upper bounds on every day's stock price. The lower bound of today's stock price is defined by 93 % of the final price of yesterday's stock. And the upper bound of today's stock price is defined by 107 % of the final price of yesterday's stock. Under this background, we are interested in the effect of the lower bound and upper bound that cause every day's stock price in a long term.

We use some kinds of difussion processes $\{S_t\}_{t\geq 0}$ to drive the price of the stock. And suppose that the stock price must be stopped at the bounds until the last of that day when the process hits the bounds. From this restriction to diffusions, we get a discrete Markov chain $\{X_n\}_{n\geq 0}$ in $(0,\infty)$. To see the influence of the bounds on every day's stock price, it is proper to compare $\{X_n\}_{n\geq 0}$ with $\{S_n\}_{n\geq 0}$.

Thus the purpose of this paper is to research the (positive) recurrence and transience of $\{X_n\}_{n\geq 0}$. Also if the invariant probability measure $\mu(\cdot)$ of $\{X_n\}_{n\geq 0}$ exists, we compare the tail of the invariant probability measure of $\{X_n\}_{n\geq 0}$ with $\{S_t\}_{t\geq 0}$.

In conclusion, we prove that if $\{S_t\}_{t\geq 0}$ is transient, then $\{X_n\}_{n\geq 0}$ is transient, too. This means that the barriers have no effect at all to help the default stock process not to default in the long term. Also if $\{S_t\}_{t\geq 0}$ is recurrent, then $\{X_n\}_{n\geq 0}$ is recurrent, provided that $\{\rho^{\pm}(x)\}$ satisfies some weak conditions, where $\rho^{+}(x)$ (resp. $\rho^{-}(x)$) denotes the upper (resp. lower) bound at the state x. Besides, we show that there exists $\{\rho^{\pm}(x)\}$ such that $\{X_n\}_{n\geq 0}$ is null recurrent even though $\{S_t\}_{t\geq 0}$ is positive recurrent. As for the fat tail, we obtain the following results. Here, for simplicity, we consider the diffusion process $\{S_t\}_{t\geq 0}$ in nature scale.

1. if $\int_R |x| m(dx) < \infty$ and $\{X_n\}_{n\geq 0}$ is positive recurrent, then the tail of $\mu(\cdot)$ is fatter than $m(\cdot)$, that is,

$$\int_0^\infty x\mu(dx) = \int_{-\infty}^0 |x|\mu(dx) = \infty.$$

2. assume that

$$c_1|x|^{-\alpha} \leq m(x) \leq c_2|x|^{-\alpha}, \quad \text{for any } |x| \geq M,$$

and $\{\rho^{\pm}(x)\}$ satisfies $\rho^{+}(x) \geq x + c^{+}|x|^{s}$, $\rho^{-}(x) \leq x - c^{-}|x|^{t}$ whenever $|x| \geq M$, where $\alpha, c_1, c_2, M, c^{\pm}, s, t$ are all positive constants. If $s \wedge t \in (0, 1 \wedge \frac{\alpha}{2})$, then the tail of $\mu(\cdot)$ is fatter than $m(\cdot)$, that is, for any $\gamma \in (2(s\wedge t) - 1, \alpha - 1)$,

$$\int_0^{\infty} x^{\gamma}\mu(dx) = \int_{-\infty}^{0} |x|^{\gamma}\mu(dx) = \infty, \quad \int_R |x|^{\gamma} m(dx) < \infty.$$

(8) 岡部　靖憲 (東大・計数工学) : 離散型の Girsanov の定理とその金融工学への応用

金融工学における「モデルリスク」の問題を正面から取り組むには, モデルを客観的・必然的に導く「始めにデータありき」・「データからモデル」の姿勢が大切である. さらに, 金融資産価格の変動は離散時間的現象であり, 連続的なモデルよりも離散的なモデルの理論的かつ実践的な解析を行う必要がある.

離散時間の確率過程のドウーブ・メイエ分解を離散時間の確率過程の時間発展を与えるダイナミクスの観点から見直す. イノベーションの問題を調べる事により, 離散時間の確率過程の時間発展を記述するモデルの一般形を求める.

金融の連続時間の数理モデルにおいて用いられているギルサーノフの定理を離散時間の場合に証明する. それを用いて, 上で導かれた一般の離散モデルに適用し, 無裁定機会と同値な問題であるマルチンゲールの問題に統一的な証明を与え, ヨーロッパ型コールオプションの価格の統一的な公式を求める. それを計算するアルゴリズムは KM_2O-ランジュヴァン方程式論に基づく非線形情報解析を用いて求められる。

参考文献

[1] (with Akihiko Kaneko) On a non-linear prediction analysis for multi-dimensional stochastic processes with its applications to data analysis, Hokkaido Math. J., **29**(2000), 601–657.

[2] (with Masaya Matsuura) On a non-linear prediction problem for one-dimensional stochastic processes, to appear in Journal of Math. Soc. of Japan, 2001.

20.

Ergodic Theory and Related Topics

世話人　：　濱地敏弘（九大）、高橋陽一郎（京大数理研）、森真（日大）、
　　　　：　仲田均（慶応大）、盛田健彦（東工大）、中村宗敬（山梨大）
日　時　：　２０００年１１月３０日（木）－１２月３日（日）
場　所　：　日本大学軽井沢研修所

本研究会はエルゴード理論に関連する種々の分野の研究者間の情報交換と交流を図る目的で日本大学軽井沢研修所において開催したものである．一部をのぞいて参加者は同研修所に宿泊し，研究会は合宿形式で遂行された．

講演についてはテーマを絞らずに広く募集したが，大別して Perron-Frobenius 作要素に関連したもの（石谷，由利，Liverani の各氏），および数論に関連した講演（小柳，江居，Wen, 安富真一，阿部，渡辺，Mandes-France の各氏）に分かれたが，講演者間のアプローチの仕方はそれぞれに異なる．他の今井，安富，吉田，大野氏の講演も参加者の関心を引き起こす興味深いものであった．

合宿形式ということで，時間的な制約が少なく，(執筆者が見る限りは）講演時間外にも，講演のテーマはもちろん，それにとらわえれず広く議論が参加者間で喚起され，意義深い研究会を行うことができた．

プログラムと講演の概要を以下に掲載する．

プ　ロ　グ　ラ　ム

１２月１日（金）

９：００－　９：５０　今井　淳（九大）
The difference between letters and a Martin Kernel of a modulo 5 Markov chain

１０：００－１０：５０　小柳　忠弘（大阪市立大学）
Automata, algebracity and distribution of sequences of powers

１１：００－１１：５０　平山　至大（九大）
エントロピーと周期点から構成される確率測度について

１３：２０－１４：１０　石谷　寛（三重大）
Perron-Frobenius operator for weakly dependent stationary seqences

１４：２０－１５：１０　釜江哲朗（大阪市立大学）
未定

１５：３０－１６：２０　吉田雅通（大阪市立大学）
（S^1 上の）Cantor 集合上に作用するある力学系の拡大について

１６：３０－１７：２０　安富 健児（神戸大学）
Weyl 変換に関する従属性消滅定理のエルゴード論的証明

１２月２日（土）

９：００－　９：５０　由利美智子（札幌大）

Weak Gibbs measures for certain nonhyperbolic systems

１０：００－１０：５０　江居宏美（津田塾大）

Tilings from characteristic polynomial of β-expansion

１１：００－１１：５０　Z. Y. Wen

Pisot numbers and substitutions

１３：２０－１４：１０　安富真一（鈴鹿工業高専）

Ramified Diophantine algorithm and its application

１４：２０－１５：１０　阿部隆次

On a model of diophantine approximation of complex numbers

１５：３０－１６：２０　渡邉敏弘（岐阜大学）

Jacobi symbols of quadratic residues based on the combinatorics of coefficient-sequences in continued fractions

１６：３０－１７：２０　C. Liverani

Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps

１２月３日（日）

９：００－　９：５０　M. Mandes-France

Geometric probability and real zeros of real polynomials

１０：００－１０：５０　大野真理子（日大）

R^1 上のフラクタルとその次元

１１：００－

ショート・コミュニケーション

Automata, algebraicity and distribution of sequences of powers

小柳　忠弘

K を指標が p の有限体とし、$K((x))$ を係数が K の元である形式的ローラン級数 $f(x)$ の体とする。つまり、$f(x)=\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n x^n$。ここで、$n_0 \in \mathbf{Z}$ かつ、$f_n \in K(n=n_0, n_0+1, \cdots)$ を満たすものとする。$f(x) \in K((x))$ の非負の部分を $\{f\} := \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \in K[[x]]$ という記号で表すことにする。この時、$f(x) \in K((x))$ に対して、列 $(\{f^m\})_{m=0,1,2,\cdots}$ の分布を調べる。Christol, Kamae, Mendès France, Rauzy によって、$f(x) \in K((x))$ が $K(x)$ 上で代数的であることと、列 (f_n) が p-オートマテイクであることとが同じであることが示された。この結果を *Salon* が、多次元の場合に一般化した。このことから、もし、$f(x) \in K((x))$ が $K(x)$ 上で代数的であれば、$F(x,y) := \sum_{m=0}^{\infty} f(x)^m y^m$ は、2 次元的に p-オートマテイクである。故に、$F(x,y)$ の係数列を認識するような有限オートマトンをつくり、$(\{f^m\})_{m\geq 0}$ の分布をしらべる。$f \in K[[x]]$ $(f_0 \neq 0, f \neq f_0)$ の時、f の分布は連続になり、さらに、f^{-1} の分布と $f_0^{-2} f$ の分布とは同じものであることが分かる。

Sequence entropy and the complexity through subsequences of infinite words

Teturo Kamae (Osaka City University)

For an infinite word $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots$ over a finite alphabet A, we define the *complexity $C_\alpha^*(k)$ on $k \in \{1,2,3,\cdots\}$ as

$$C_\alpha^*(k) = \sup_{\tau} \sharp\{\alpha_{n+\tau(0)}\alpha_{n+\tau(1)}\cdots\alpha_{n+\tau(k-1)};\ n=0,1,2,\cdots\}$$

where the "sup" is taken over all subsequences $0=\tau(0)<\tau(1)<\cdots<\tau(k-1)$ of integers.

We prove that α is ultimately periodic if $C_\alpha^*(k) \leq 2k-1$ for some k.

For a Sturmian word α, $C_\alpha^*(k)=2k$ holds for any k. Moreover, any infinite word of the labels given by a partition into 2 nonempty intervals of the circle along an orbit of an irrational rotation has this property. An infinite word α with $C_\alpha^*(k)=2k$ for any k is called a *Sturmian word. Another family of *Sturmian words which are not recurrent are discussed.

On the other hand, it follows from Kushnirenko (On metric invariants of entropy type, Russian Math. Surveys 22-5 (1967), pp.53-61) that an infinite word α which induces a dynamical system with a partially continuous spectrum satisfies that $\limsup_{k\to\infty}(1/k)\log C_\alpha^*(k) > 0$. In fact, Thue-Morse sequence α satisfies that $C_\alpha^*(k)=2^k$, while the usual complexity is known to be of linear order in k.

On a property of Pisot number

De-Jun FENG and Zhi-Ying WEN
Department of Mathematical Science, Tsinghua University,
e-mail address wenzy@tsinghua.edu.cn

ABSTRACT Let q be a Pisot number and m a positive integer. Consider the increasing sequence $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_k < \cdots$ of those real numbers y which have at least one representation of the form $y = \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i q^i$ with some integer $n \geq 0$ and coefficients $\epsilon_i \in \{0, 1, \cdots, m\}$. We prove by concrete construction that if $m \geq q - 1$, the difference sequence $\{y_{k+1} - y_k\}_{k \geq 0}$ is the image of a substitution sequence over a finite alphabet of symbols. This result characterizes completely the structure of the above sequence. We also give an algorithm to determine the exact value of $\inf_k(y_{k+1} - y_k)$ that answers in some sense a question posed by Komornik et al.

The Jacobi symbol of quadratic residues based on the combinatorics of coefficient-sequences in continued fractions

渡邉敏弘 (Watanabe Toshihiro)　岐阜大学工学部土木工学科 (Gifu Univ.)
e-address:wata@cc.gifu-u.ac.jp

平方剰余の Jacobi 記号を連分数の係数から決まる Clifford 代数の元を使い線形形式に直し、平方剰余、非剰余の分布に応用した。ここでＣｈｒ istoffel による特性列（または Sturumian 列，置換の上下列）の語の置換による特徴ずけを使って証明している。

Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps

Carlangelo Liverani

I reviewed the functional (quasi-compactness) approach to studying statistical properties of dynamical systems. I presented the approach in the abstract setting of operators acting on two different Banach spaces with the goal to show that such a setting does not only accommodate expanding maps (for which it was developed) but also Anosov maps. I then proceeded to construct two Banach spaces such that the Perron-Frobenius operator on such spaces satisfies all the requirements of the above theory.

As a consequence not only the usual statistical properties of Anosov maps are obtained but also very strong stability results. This work has been done in collaboration with M.Blank and G.Keller.

REAL ZEROS OF REAL POLYNOMIALS

C.Doche,M.Mendes France

M.KAC,P.ERDS,A.OFFORD,A.EDELMAN,E.KOSTLAN at different periods and in different contexts showed that a real N degree random polynomial has on average approximately $(2/\pi)\log N$ real zeros. Let $a = (a_n)$ be an infinite sequence of +1 and -1. We say that it is "mim-random" (mimics randomness) if for all N the N degree prefix polynomials of the power series

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n + \ldots$$

all have $Z(a, N) = (2/\pi)(1 + o(1))\log N$ real zeros as N increases to infinity. We do not know whether mim-random sequences exist even though we strongly suspect they do.We can actually prove that for almost all $a = (a_n)$ $2/\pi$ belongs to the interval ($\liminf Z(a,n)/\log n, \limsup Z(a,n)/\log n$). We can also produce a class of sequences (generalised Thue-Morse sequences) such that $\liminf Z(a,n)/\log n > 0$. If mim-random sequences do exist we conjecture that their Wiener spectral measure is the Lebesgue measure.If true then the Thue-Morse generalised sequences alluded to above cannot be mim-random.

The Difference Between Letters and a Martin Kernel of a Modulo 5 Markov Chain

A. IMAI[1] *Kyushu Univ.*

A few years ago, Denker/Sato have initiated the study of the relation between one of the best known examples for a fractal set, the Sierpiński gasket, and a Martin exit boundary; that is to say, the Sierpiński gasket is represented as the Martin boundary of a certain canonical random walk. This result may be considered as a new concept which provides another approach to harmonic analysis.

In this work shop, we discussed how to extend the results of Denker/Sato (for the Sierpiński gasket) to the *Modulo 5 Markov chain.* We show that the *Modulo 5 fractal* which is homeomorphic to the *Pentakun* (the self-similar pentagon) suggested by Kumagai agrees with the Martin boundary of an appropriately chosen Markov chain.

Superficially, the Pentakun is similar to the Sierpiński gasket as a geometric structure in $\mathbf{R}^2$, but in reality they are radically different in the behavior of their critical sets as p. c. f. self-similar sets, and in the graph structure (which is associated with a Markov chain) of the underlying discrete state space.

The purpose of this lecture was to describe an estimate of the Martin kernel (heuristically, the normalized Green function) of a Modulo 5 Markov chain and represent Pentakun as a Martin boundary.

Let $\mathcal{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ be the alphabet of five letters equipped with a module structure with the additive operation $\oplus$ modulo 5, $\mathcal{A}^n$ the collection of words consisting of n symbols and $\mathcal{A}^\infty$ the one-sided infinite sequences. For $\mathbf{w} \in \mathcal{W} \cup \mathcal{A}^\infty$, we define the *conjugate* $\mathbf{w}^\#$ of $\mathbf{w}$ by

$$\mathbf{w}^\# = \begin{cases} \mathbf{w}_0 \sigma_{d/2}(a) \sigma_{-d/2}(a)^k & \text{if } \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 a \sigma_d(a)^k, d \in \{-2, 2\}, k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\} \\ \mathbf{w} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

and an equivalence relation $\sim$ on $\mathcal{W} \cup \mathcal{A}^\infty$ by $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ or $\mathbf{x}^\# = \mathbf{y}$ where $\mathcal{W} = \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{A}^n, a \in \mathcal{A}, \mathbf{w}_0 \in \mathcal{W}$ and $\sigma_p(a) = a \oplus p$.

We denote by $\{X_n\}_{\mathbf{N} \cup \{0\}}$ the Markov chain with state space $\mathcal{W}$ and stationary transition probabilities

$$p(\mathbf{w}, \mathbf{w}a) = p(\mathbf{w}, \mathbf{w}^\# a) = \begin{cases} 1/10 & \text{if } \mathbf{w} \neq \mathbf{w}^\#, a \in \mathcal{A} \\ 1/5 & \text{if } \mathbf{w} = \mathbf{w}^\#, a \in \mathcal{A}. \end{cases} \tag{2}$$

The *Green function* $g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ on $\mathcal{W}$ is given by

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = p(l(\mathbf{w}) - l(\mathbf{v}); \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{W}} p(l(\mathbf{w}) - l(\mathbf{v}) - 1; \mathbf{v}, \mathbf{u}) p(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \tag{3}$$

where $l(\mathbf{w})$ denotes the length of $\mathbf{w}$ and where $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \delta_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ whenever $l(\mathbf{v}) = l(\mathbf{w})$.

As a consequence of the above definitions (1) throughout (3), we became aware that the key to the estimation of the Green function is the behavior of the difference, as an additive operator on the module, of the last two different letters in a word, in particular, whether they are 2 (or -2) or not. The investigation is based upon this interesting discovery.

[1] *E-mail*: aimai@math.kyushu-u.ac.jp

On Entropy and probability measures constructed by periodic points

Michihiro Hirayama (Kyushu University)

In this lecture, we will discuss a non-uniformly hyperbolic dynamical system in two-dimension.

Let f be a C^2-diffeomorphism of a bounded open set U in $\mathbb{R}^2$ and μ an ergodic f-invariant Borel probability measure.

Oseledec introduced the notion of characteristic exponents to the dynamical system. They are called the Lyapunov exponents and which give the growth rates of $D_x f^n$ (the derivative of f composed with itself n times).

A diffeomorphism preserving a Borel probability measure μ is sometimes called non-uniformly hyperbolic if μ-a.e. we have $\chi_i \neq 0$ for every i. Besides this, we call an ergodic measure μ a hyperbolic measure if none of the Lyapunov exponents χ_i for μ are zero(in our case $i = 1, 2$). We denote the set of hyperbolic measures by $\mathcal{H}(f)$.

We can introduce the notion of specification property by virtue of the Katok shadowing lemma for non-uniformly hyperbolic dynamical system.

Definition (K-specification property) We say that for Pesin set Λ, (f, μ) has K-specification property if for every $\alpha > 0, x_j \in \Lambda$ and $n_j \in \mathbb{N}$ $(1 \leq j \leq k)$, there exists $M(\alpha, \varphi(j)) > 0$ such that for every $N \geq \max_{0 \leq \varphi(j) \leq q-1} M(\alpha, \phi(j))$, there exists $z \in U$ satisfying

$$\begin{aligned} &f^{p_z}(z) = z, \\ &d(f^{qi}(z), f^{qi}(x_j)) < \alpha, \quad 0 \leq i \leq n_j - 1, \ 1 \leq j \leq k. \end{aligned}$$

where

$$p_z := \begin{cases} q \sum_{j=1}^{k} n_j + qkN, & \#\varphi(j) = 1, \\ q \sum_{j=1}^{k} n_j + qkN + q, & o.w.. \end{cases}$$

Perron-Frobenius operator for weakly dependent stationary sequences

三重大学教育学部　石谷寛

stationary random sequence $\{X_i : i = 0, 1, \ldots\}$ に対して，sub-σ field $\mathcal{B}_n^m$ を $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_m)$ で定め，係数 $\varphi(n)$ を $\varphi(n) := \sup_k \sup\{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|/P(A) : A \in \mathcal{B}_0^k, B \in \mathcal{B}_{k+n}^\infty\}$ と定める．$n \to \infty$ のとき，$\varphi(n) \to 0$ が成立するとき，stationary random sequence $\{X_i : i = 0, 1, \ldots\}$ は uniformly mixing であると呼ばれ，さまざまな条件の下でさまざまな極限定理が知られている．ここでは，$\{X_i : i = 0, 1, \ldots\}$ の上の functionals に対する中心極限定理と収束の速さを Perron-Frobenius 作用素のある摂動作用素を用いて議論する．

次のように設定する．$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間，T をその上の保測変換，$\mathcal{B}$ の sub-σ field で
(1) $\mathcal{B}_0^\infty = \mathcal{B}$,
(2) $T^{-1}\mathcal{B}_n^m = \mathcal{B}_{n+1}^{m+1}$,
(3) $n \le k \le m$ ならば $\mathcal{B}_0^k = \mathcal{B}_n^m$ を満たすものとする．また $\varphi(n)$ は上のように定める．このとき，次が成立する．

[定理] $0 < \rho < 1$ を満たす実数 ρ があって，$\varphi(n) = O(\rho^n)$ であり，$f \in L^\infty(\Omega)$ が $||f - E[f|\mathcal{B}_0^n]||_{L^\infty} = O(\rho^n)$ を満たすとする．このとき，$\sigma^2 \ge 0$ が存在し，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(f(T^k\omega) - E(f)) \le x\right) = \Phi_\sigma(x)$$

が右辺の連続点で成立する．ここで，$\Phi_\sigma(x)$ は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ の分布関数である．さらに $\sigma > 0$ ならば

$$\sup_x \left|P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(f(T^k\omega) - E(f)) \le x\right) - \Phi_\sigma(x)\right| = O(1/\sqrt{n}).$$

この定理は以下の方針で示される．$L^1(\Omega)$ 上の作用素 U^* を

$$U^*g := \frac{d\mu_g}{dP}, \quad \mu_g(A) := \int_{T^{-1}A} g dP$$

と定める．U^* は Perron-Frobenius 作用素と呼ばれ，

$$\int (U^*g)(\omega)h(\omega)dP = \int g(\omega)h(T\omega)dP \quad (h \in L^\infty(\Omega))$$

で特徴付けられる．U^* の摂動作用素 $U^*(\theta, f)$ を

$$U^*(\theta, f)(g) := U^*(g\exp(i\theta f)), \quad i = \sqrt{-1}$$

で定めると，U^* の持つ性質 $fU^*(g) = U^*(f(T\omega)g(\omega))$ を繰り返し用いて，

$$\int U^*(\theta, f)^n(g)dP = \int \exp[i\theta\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega)]g(\omega))dP$$

が成立し、$U^*(\theta, f)^n$ の漸近的挙動によって，測度 $g(\omega)dP$ による特性関数が記述される．U^* は自明な分解

$$U^*(g) = E(g) + \Psi(g), \quad \Psi(g) := U^*(g) - E(g)$$

を持つ．ところが，U^* を $L^1(\Omega)$ 上で考えると，Ψ の収束半径は 1 となる．そこで，集合

$$\cup_{k=0}^\infty (U^*)^k \left\{f \in L^1(\Omega) \ : \ ||f - E[f|\mathcal{B}_n^\infty]||_{L^1} = O(\rho^n)\right\}$$

をノルム

$$||g||_V := ||g||_{L^1} + \limsup_{n\to\infty} \frac{||E[g|\mathcal{B}_0^n] - E[g]||_{L^1}}{r^n}, \quad r^4 = \rho$$

で完備化した Banach 空間 $(V, ||\cdot||)$ を考え，その上に U^* を制限すれば，

$$||\Psi^n g||_{L^1} = ||E[g|\mathcal{B}_n^\infty] - E[g]||_{L^1}$$

を用いて，Ψ のスペクトル半径は r $(0 < r < 1)$ となる．f に対して，$U^*(\theta, f)$ は Banach 空間 $(V, ||\cdot||)$ 上の有界作用素となり，十分小さい $|\theta|$ に対しては U^* と同様な分解

$$U^*(\theta, f)^n = E(\theta, f) + \Psi(\theta, f)^n$$

ができ，$\Psi(\theta, f)$ のスペクトル半径も 1 より小とできる．このようにして，$U^*(\theta, f)^n(1)$ の漸近挙動が議論され，$\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega)$ の測度 dP による特性関数が直接記述される．

回転領域をもつ位相的な多項式の構成について

大阪市立大・理・吉田雅通

任意の無理数 $0 < \rho < 1$ に対して、ρ を回転角とする安定成分（位相的な Fatou 成分）をもつ位相的２次多項式を、kneading sequence という組合せ的なデータと invariant lamination とよばれる単位円板内の弦の族の構成を用いて、できるだけ幾何的に構成する。まず、無理数 ρ に対し

$$\mu_\rho = \begin{cases} \left(\rho^{-1}-1\right)^{-1}, & \text{if } \rho < \frac{1}{2} \\ \rho^{-1}-1 \quad , & \text{if } \rho > \frac{1}{2} \end{cases}$$

として、$\mu_\rho = [0; a_1, a_2, \cdots]$ と連分数展開し、0-1 word 列を

$$w_n = (w_{n-1})^{a_n} w_{n-2} \in \{0,1\}^* \text{ for each } n \in \mathbf{N} \qquad (\text{ただし、初期値は } w_{-1} = 1,\ w_0 = 0 \text{ とする})$$

と定義すると、その極限となる $\xi_\rho = \lim_{n\to\infty} w_n \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ は Sturmian sequence になる。この片側無限列 ξ_ρ から幾何的なデータをひきだすために、以下、区間 $[0,1)$ と単位円周 S^1 を自然に対応させておく。重要な役割を果たす写像として、$h(z) = z^2$ を S^1 上に作用させる。ξ_ρ から S^1 上の点 α_ρ を

$$\alpha_\rho = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in\mathbf{N}} \xi_\rho(k) 2^{-k} \quad , & \text{if } \rho < \frac{1}{2} \\ \displaystyle\sum_{k\in\mathbf{N}} \Big(1-\xi_\rho(k)\Big) 2^{-k}, & \text{if } \rho > \frac{1}{2} \end{cases}$$

として定義する。更に、$[0,1)$ の部分集合 $\left[0, \frac{\alpha_\rho}{2}\right] \cup \left[\frac{\alpha_\rho+1}{2}, 1\right)$ に対応する S^1 の closed semi-circle を I^ρ_{-1} とする。ここで、kneading sequence の理論より、α_ρ の h の下での前方軌道が I^ρ_{-1} と互いに素であることが示される。以下、ρ を任意に固定して考えるので、ρ の添字を落として書く。上のことから更に、I_{-1} の h の下での後方軌道の中で、${}^\rho_{-1}$ と交わらない closed arc の系列 $I_0, I_1, \cdots$ が

$$h(I_k) = I_{k-1} \text{ for each integer } k \geq 0$$

をみたし、かつ互いに素であるように存在することがわかる。従って、その残留集合 $C := S^1 \setminus \bigcup_{k\geq -1} I^\circ_k$ が Cantor 集合となり、しかも $h(C) = C$ となる。更に、これまでの方法から、この部分力学系 (C,h) の factor として回転角 ρ の無理数回転が自然な方法で現れる。次に、C にもとづいて、単位開円板 $\mathbf{D}$ のある tiling を構成することになるが、複雑なので端的にいうと、この Cantor 集合 C を h の特定の local inverse branches（これは、α に依存して選ぶ）を作用させることによって、S^1 上にまきちらすことをする。そして、それぞれの像の凸包を $\mathbf{D}$ へ制限したもの全体が求める $\mathbf{D}$ の tiling となる。この tiling は、もともと h の逆像にもとづいてつくられたので、ある種の「h の下での不変性」があることがわかり、この性質から、S^1 上の写像であった h を $\mathbf{D}$ 上へ拡張することができる（勿論、$h(z) = z^2$ は $\mathbf{D}$ 上でも定義できるが、これではここの目的である位相的多項式の構成はできない）。$\hat{\mathbf{C}} \setminus \overline{\mathbf{D}}$ 上では、単に $h(z) = z^2$ として拡張する、これで h の Riemann 球面上への拡張 $\overline{h}$ を構成できた（もとをたどると、この $\overline{h}$ は与えられた ρ によって一意的に定まる）。最後に、前述した部分力学系 (C,h) の回転角 ρ の無理数回転への factor map φ によって得られる C 上の同値関係 (つまり、$z \sim w$ を $\varphi(z) = \varphi(w)$ として定義、この関係は h の下で不変であることに注意する）を Riemann 球面上へ自然な方法で、$\overline{h}$ の下で不変な同値関係に拡張することができる（実際、各同値類は１点集合か、あるいは C の凸包の境界を構成する弦たちの $\overline{h}$ の下での逆像のいずれかになっている)。この拡張した同値関係による商空間は２次元球面であることがわかり、$\overline{h}$ の factor（を１部修正したもの）が求める位相的２次多項式となることが示せる。特に、ρ が Brujno 数でないときは、C. Yoccoz の定理から、ρ に対応する位相的２次多項式は、複素多項式と位相共役にならないことになる。

参考文献

M. Yoshida, "On a topological polynomial which is not conjugate to any complex polynoimial", submitted

Weyl 変換に関する従属性消滅定理のエルゴード論的証明

安富 健児 (神戸大学自然科学研究科数学専攻)

杉田 [1] は Weyl 変換による擬似乱数生成を提案している. 即ち, $d_i(x)$ を実数 $x \geq 0$ の 2 進小数展開の小数部分第 i 桁目の数を表すものとし, $[0,1)^2$ 上の $\{0,1\}$-値関数 $X_n^{(m)}$ を

$$X_n^{(m)}(x,\alpha) = \sum_{i=1}^{m} d_i(x+n\alpha) \pmod 2$$

で定めると, $\{X_n^{(m)}(\,\cdot\,,\alpha)\}_{n=0}^{\infty}$ は a.e. α に対し m が十分大きいとき random であるというものである. 杉田 [1] は次の定理を示し, これについての数学的基礎を与えた. $|\cdot|$ は $[0,1)$ 上の Lebesgue 確率測度を表す.

定理 1. $|\cdot|$-a.e.α に対し $([0,1), |\cdot|)$ 上で

$$\{X_n^{(m)}(\,\cdot\,,\alpha)\}_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{D} \{0,1\}\text{-valued fair i.i.d.} \qquad (m \to \infty).$$

この定理の証明は非常に技巧的であったため, 杉田 [2] はエルゴード論的手法による証明を試み, やや弱い以下の定理を独立に証明することに成功している.

定理 2. $([0,1)^2, |\cdot|^2)$ 上で

$$\{X_n^{(m)}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\}_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{D} \{0,1\}\text{-valued fair i.i.d.} \qquad (m \to \infty).$$

ここではその考察を押し進め, 定理 1 の別証を与える. 我々の証明はエルゴード論的考察に基づくため, 見通しが良く, 定理 1 よりも広い条件の下での証明に成功している.[1]

我々の定理を述べる為に記号等をあらたに定義し直す. b を 2 以上の自然数とする. $d_i(x)$ は実数 $x \geq 0$ の b 進小数展開の小数部分第 i 桁目の数を表すとし, $[0,1)^2$ からの $\{0,\ldots,b-1\}$-値関数 $X_n^{(m)}$ を先と同様に

$$X_n^{(m)}(x,\alpha) = \sum_{i=1}^{m} d_i(x+n\alpha) \pmod b$$

で定める.

μ, ν は $[0,1)$ 上の Bernoulli 測度とする. ここでは Bernoulli 測度とは $\{d_i\}_i$ を $\mu\bigl(d_i = l\bigr) \neq 0$, $l \in \{0,\ldots,b-1\}$ なる i.i.d. にする確率測度とする.

定理 3. μ-a.e.α に対し $([0,1), \nu)$ 上で

$$\{X_n^{(m)}(\,\cdot\,,\alpha)\}_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{D} \{0,\ldots,b-1\}\text{-valued fair i.i.d.} \qquad (m \to \infty).$$

定理 1 , 即ち杉田 [1] の Weyl 変換に関する従属性消滅定理は定理 3 で特に μ, ν を Lebesgue 測度, $b=2$ とおいて得られるものである.

[1] 杉田 [1] による証明は従属性の消滅が成立するような α について具体的な十分条件を与えるので, 我々の定理はそれを完全に含むわけではない.

証明の概要 ($b=2$ のとき)
$\mathbf{X}^{(m)} := (X_0^{(m)}, \dots, X_{n-1}^{(m)})$ とおけば定理 3 の証明には $\forall \mathbf{s} \in \{0,1\}^n$

$$\left\{\nu\left(\mathbf{X}^{(m)}(\,\cdot\,,\alpha)=\mathbf{s}\right)-\frac{1}{2^n}\right\}^2 \longrightarrow 0 \qquad (m\to\infty) \quad \mu\text{-a.e.}\alpha \tag{1}$$

を示せば十分である.
$\Omega := [0,1)^3$, $P=\nu\times\nu\times\mu$ とし, (Ω, P) 上の r.v. $\mathbf{X}_j^{(m)} (j=1,2)$ を

$$\mathbf{X}_j^{(m)}(x_1,x_2,\alpha) := \mathbf{X}^{(m)}(x_j,\alpha)$$

で与えると

$$\int\left\{\nu\left(\mathbf{X}^{(m)}(\,\cdot\,,\alpha)=\mathbf{s}\right)-\frac{1}{2^n}\right\}^2\mu(d\alpha) = P\left(\mathbf{X}_1^{(m)}=\mathbf{s},\mathbf{X}_2^{(m)}=\mathbf{s}\right)-\frac{1}{2^{2n}}-\frac{2}{2^n}(P\left(\mathbf{X}_1^{(m)}=\mathbf{s}\right)-\frac{1}{2^n}).$$

同じく (Ω, P) 上の r.v. $\widetilde{\mathbf{Z}}^{(m)}$ をうまく定義する事によって確率過程 $\{(\widetilde{\mathbf{Z}}^{(m)}, \mathbf{X}_1^{(m)}, \mathbf{X}_2^{(m)})\}_m$ が既約非周期的 Markov 過程となり, $\mathbf{u}\in \mathrm{Im}(\widetilde{\mathbf{Z}})$, $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \{0,1\}^n$ の極限分布が $P\left(\widetilde{\mathbf{Z}}=\mathbf{u}\right)\dfrac{1}{2^{2n}}$ で与えられる事を利用して上式右辺が指数オーダーで 0 に収束する事を示し,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int\left\{\nu\left(\mathbf{X}^{(m)}(\,\cdot\,,\alpha)=\mathbf{s}\right)-\frac{1}{2^n}\right\}^2\mu(d\alpha)<\infty$$

を得る. Beppo-Levi の定理より

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\nu\left(\mathbf{X}^{(m)}(\,\cdot\,,\alpha)=\mathbf{s}\right)-\frac{1}{2^n}\right\}^2<\infty \qquad \mu\text{-a.e.}\alpha.$$

よって (1) が得られる.

参考文献

[1] Sugita, Hiroshi, Pseudo-random number generator by means of irrational rotation. Monte Carlo Methods Appl. 1 (1995), no. 1, 35–57.

[2] Sugita, Hiroshi, Lectures at Kobe university (2000)

[3] Takanobu, Satoshi, On the strong-mixing of skew product of binary transformation on 2-dimensional torus by irrational rotation. (preprint)

[4] Billingsley, Patrick, Probability and measure. Third edition. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc. (1995)

[5] Billingsley, Patrick, Convergence of probability measures. Second edition. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc. (1999)

Weak Gibbs measures for certain nonhyperbolic systems

Michiko Yuri
Department of Business Administration, Sapporo University

small In this talk, first we present a new method for the construction of conformal measures ν for infinite to one piecewise C^0-invertible Markov systems associated to potentials ϕ which may fail both summable variation and bounded distortion, but satisfy the weak bounded variaiton (see below). Next we show the existence of equilibrium states μ for potentials ϕ of weak bounded variation which is equivalent to the conformal measures ν. The equilibrium states may fail the Gibbs property in the sense of Bowen but satisfy a version of Gibbs property (so-called *weak Gibbs*) under certain condition. In particular, we can observe the weak Gibbs property of equilibrium states for typical mathematical models of intermittency which is a common phenomenon in the transition to turbulence, i.e., piecewise C^1-invertible maps with indifferent periodic points (Manneville-Pomeau maps, Brun's map, Inhomogeneous Diophantine algorithm, a complex continued fraction algorithm etc).

Definition We say that a triple $(T, X, Q = \{X_a\}_{a\in I})$ is a *piecewise C^0-invertible system* if X is a compact metric space, $T : X \to X$ is a noninvertible map which is not necessarily continuous, and $Q = \{X_a\}_{a\in I}$ is a countable disjoint partition $Q = \{X_a\}_{a\in I}$ of X such that $\bigcup_{a\in I} intX_a$ is dense in X and satisfy the following properties.

(01) For each $a \in I$ with $intX_a \neq \emptyset, T|_{intX_a} : intX_a \to T(intX_a)$ is a homeomorphism and $(T|_{intX_a})^{-1}$ extends to a homeomorphism ψ_a on $cl(T(intX_a))$.

(02) $T(\bigcup_{intX_a=\emptyset} X_a) \subset \bigcup_{intX_a=\emptyset} X_a$.

(03) $\{X_a\}_{a\in I}$ generates $\mathcal{F}$, the sigma algebra of Borel subsets of X.

Definition We say that ϕ is a potential of *weak bounded variation*(WBV) if there exists a sequence of positive numbers $\{C_n\}_{n\geq 1}$ satisfying $\lim_{n\to\infty}(1/n)$
$\log C_n = 0$ and $\forall n \geq 1, \forall X_{a_1\ldots a_n} \in \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}Q$,

$$\frac{\sup_{x\in X_{a_1\ldots a_n}} \exp(\sum_{i=0}^{n-1} \phi(T^i x))}{\inf_{x\in X_{a_1\ldots a_n}} \exp(\sum_{i=0}^{n-1} \phi(T^i x))} \leq C_n.$$

Definition. A Borel probability measure ν is called a weak Gibbs measure for ϕ with a constant $-P$ if there exists a sequence $\{K_n\}_{n>0}$ of positive numbers with $\lim_{n\to\infty}(1/n)\log K_n = 0$ such that ν-a.e.x,

$$K_n^{-1} \leq \frac{\nu(X_{a_1\ldots a_n}(x))}{\exp(\sum_{i=0}^{n-1}\phi T^i(x) - nP)} \leq K_n,$$

where $X_{a_1\ldots a_n}(x)$ denotes the cylinder containing x.

Our method is based on the existence of a derived map T^* (Schweiger's jump transformation) which is uniformly expanding and guarantees a weak Hölder-type property of the potential ϕ^* associated to ϕ. For the construction of conformal measures ν, we observe a good relation between the topological pressure for ϕ and the topological pressure associated to ϕ^* with respect to T^*. The key to the proof of the weak Gibbs property of equilibrium states μ for ϕ is to clarify the order of divergence of the invairnat density $d\mu/d\nu$ near indifferent periodic points. Lastly, we establish a version of the local product structure (*weak local product structure*) for ergodic measures $\overline{\mu}$ which are the invertible extention of the ergodic weak Gibbs measures μ. As a special case, $\overline{\mu}$ possesses asymptotically " almost "local product structure in the sense of Barreira-Pesin-Schmeling ([1]).

References

[1] L.Barreira, Y.Pesin, & J.Schmeling. Dimension and product structure of hyperbolic measures. *Annals of Math*, **143** (1999), 755 - 783.

[2] M.Denker & M.Yuri. A note on the construction of nonsingular Gibbs measures. *Colloquium Mathematicium*, **84/85** (2000), 377-383.

[3] M.Yuri. Weak Gibbs measures for certain nonhyperbolic systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **20** (2000), 1495-1518.

[4] M.Yuri. Equilibrium states for piecewise invertible systems associated to potentials of weak bounded variations. Preprint.

[5] M.Yuri. Weak Gibbs measures and the local product structure. Preprint.

Tiling from some β-cubic Pisot numbers

Shunji ITO and Hiromi EI

It is known by Thurston[4] and Akiyama[2] that for the Pisot number β we obtain the T-A tile $\mathcal{T}$ and T-A tiling $\boldsymbol{T}$ by finite protiles from Pisot numeration system. In this paper[3], we introduce the following substitution σ and a matrix ${}^0\sigma$ of σ:

$$\sigma : \begin{cases} 1 \to \overbrace{11\cdots1}^{K+1\ times}\ 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 4 \\ 4 \to \overbrace{1\cdots1}^{K\ times}\ 5 \\ 5 \to 1 \end{cases}, \qquad {}^0\sigma = \begin{pmatrix} K+1 & 0 & 0 & K & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Using the substitution we have the following theorem first.

Theorem 1. *Let X be the atomic surface from the fixed point of the substitution, X coincides wiht T-A tile $\mathcal{T}$. Here, the atomic surface of fixed point ω of σ, $\omega = \lim_{n\to\infty} \sigma^n(1) = s_1 s_2 \cdots s_n \cdots$ is defined by*

$$\begin{aligned} X &= closure\{\pi \mathbf{f}(s_1 s_2 \cdots s_k) \mid k = 1, 2, \cdots\} \subset \boldsymbol{P} \\ X_i &= closure\{\pi \mathbf{f}(s_1 s_2 \cdots s_{k-1}) \mid s_k = i, k = 1, 2, \cdots\}\ (i = 1, \cdots, 5) \end{aligned}$$

where $\boldsymbol{P}$ is the invariant contractive two dimensional plane with respect to the linear transformation ${}^0\sigma$, the map $\pi : \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{P}$ is the projection and a canonical homomorphism $\mathbf{f}$: free monoid of alphabet $\{1, \cdots, 5\} \to \boldsymbol{Z}^5$ is given by $\mathbf{f}(i) = e_i$, $i = 1, \cdots, 5$ with a canonical basis of $\boldsymbol{R}^5$.

For the sets $\{X_i\}$ we see the following set equation holds:

Proposition 1. 1. $X = \bigcup_{i=1}^{5} X_i$

$$2.\ {}^0\sigma^{-1} X_1 = \begin{cases} X_1 \cup X_5 & if\ K = 0 \\ \bigcup_{n=0}^{K} (X_1 + n\,{}^0\sigma^{-1}\pi e_1) \cup \bigcup_{n=0}^{K-1} (X_4 + n\,{}^0\sigma^{-1}\pi e_1) \cup X_5 & if\ K \geq 1 \end{cases}$$

$${}^0\sigma^{-1} X_2 = X_1 + (K+1)\,{}^0\sigma^{-1}\pi e_1,\ {}^0\sigma^{-1} X_3 = X_2,\ {}^0\sigma^{-1} X_4 = X_3,$$
$${}^0\sigma^{-1} X_5 = X_4 + K\,{}^0\sigma^{-1}\pi e_1$$

On the other hand, using the substitution σ we introduce a tiling substitution τ^*. Then we obtain the following theorem.

Theorem 2. *Using the tiling substitution τ^*, the not periodic but quasi periodic tiling $\boldsymbol{T}$ with five protiles is obtained.*

Moreover we see the following theorems. Details can be found in [3].

Theorem 3. *(Renormalization) Patch $\mathcal{U}$ and protile $\mathcal{U}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ are given and*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} {}^0\sigma^n \tau^{*\,n}(\mathcal{U}) &= -X \\ \lim_{n\to\infty} {}^0\sigma^n \tau^{*\,n}(\mathcal{U}_)) &= -X_i. \end{aligned}$$

Theorem 4. 1. *A domain exchange D on X is well defined.*

2. *the induced transformation $D|_{{}^0\sigma X}$ of D on the set ${}^0\sigma X$ is isomorphic to D, and it has σ-structure.*

References

[1] P. ARNOUX and S. ITO: *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Inst. Math. Luminy, Pretirage n^0 98-18 (preprint)

[2] S. AKIYAMA: *Self affine tiling and Pisot numeration system*, 'Number Theory and its Applications', ed. by K. Györy and S. Kanemitsu, Kluwer (1999), 7-17

[3] S. ITO and H. EI: *Tiling from some β-cubic pisot numbers*(preprint)

[4] W. P. THURSTON: *Groups, Tilings and Finite state automata*, AMS Colloquium lectures, 1989

Ramified Diophantine Algorithm and its application

安冨真一 (YASUTOMI Shin-ichi)

鈴鹿高専一般科目 (Suzuka National College of Technology)

We introduce an inhomogeneous Diophantione Algorithm with ramification which is a generalization of Ito-Yasutomi's inhomogeneous Diophantione Algorithm([1]). As an application of it we give an result which is a relation of substitutes Sturmian sequences and certain interval coding sequences. Let us define our algorithm. Let us define t_0, t_1, t_2 by $t_0(x,y) = (\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+x})$, $t_1(x,y) = (\frac{1}{2-x}, \frac{y}{2-x})$, $t_2(x,y) = (1-x, 1-y)$. Let

$$X = \{(x,y)|0 \leq x, y \leq 1 \text{ and } y \neq mx+n \text{ for any integers } m,n\}.$$

which is diveided into appropriate domains S_i^0 $(i = 0, \ldots, 5)$ and define transformation T_0 on X using the above t_j, S_0^i. We also define domains S_i^1 $(i = 0, \ldots, 5)$ and define transformation T_1 on X. For $(x,y) \in X$ we consider a tree and define a sequence $S(u,(x,y)) = \{j_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{0,1,2,3,4,5\}^{\mathbb{N}}$ which is called the name of (x,y) related to $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. $u = \{i_1, i_2, \ldots\} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ is called the good path related to (x,y) if some conditions are satisfied.

Theorem 1 *Let $(x,y) \in X$. Let $u = \{i_1, i_2, \ldots\} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ be a good path in the previous tree related to (x,y). Let $\{j_1, j_2, \ldots\}$ be the name related to (x,y) and u. Let q_n, p_n by*

$$^t(q_n\ p_n\ 1) = M_{(i_1,j_1)} \cdots M_{(i_n,j_n)}\ ^t(1\ 0\ 1).$$

Then, $\lim_{n\to\infty} |q_n x + y - p_n| = 0$.

As an application of this algorithm, we get the following Theorem.

Theorem 2. *Let S be a Sturmian sequence. Let F be a substitution with $GCD(|F(0)|, |F(1)|) = 1$. Then, there exist $x, y \in \mathbb{R}$ and integers $m_1, \ldots, m_k$ and $n_1, \ldots, n_k$ such that x is irrational and $0 < x < 1$ and $\chi(I,x) = F(S)$, where*

$$I = \bigcup_{i=1}^{k} [\langle m_i x - y\rangle, \langle n_i x - y\rangle)^{\sim}, \quad or \quad \bigcup_{i=1}^{k} (\langle m_i x - y\rangle, \langle n_i x - y\rangle]^{\sim}.$$

The converse is also true.

Recently, we know that above therem 2 is independently obtainbed by Alex Heinis.

Referenes

[1] S.Ito and S.Yasutomi, On continued fraction, substitution and characteristic sequences $[nx+y] - [(n-1)x+y]$,Japan. J. Math.16(1990),287-306.

[2] S.Yasutomi, Certain representations of substituted Sturmian sequences , preprint(2000)

[3] T.C. Brown, Descriptions of the characteristic sequence of an irrational. Can. Math. Bull. 36, No.1(1993), 15-21.

On a model of diophantine approximation of complex numbers

Ryuji ABE

2 December 2000

We begin by recalling a classical problem of number theory. Consider the space of binary indefinite quadratic forms:

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \gamma^2 \neq 0, D(f) = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \right\},$$

and define a minimum of a form f:

$$M(f) = \inf_{\substack{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{D(f)}}.$$

With the above definitions the problem is characterizing the set of values $\{M(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$. A well-known answer for this problem is as follows:

Theorem 1 (Markoff) *There exits a discrete sequence of values $\{M_i\}$ decreasing to $1/3$ such that $M(f) > 1/3$ for some $f \in \mathcal{F}$ if and only if $M(f) = M_j$ for some positive integer j.*

We call a form f with $M(f) > 1/3$ a *Markoff form.*

Let f be a binary indefinite quadratic form, then there is a unique geodesic whose endpoints are roots of the equation $f(x,1) = 0$. A geodesic determined by a Markoff form is called a *Markoff geodesic.*

We consider actions of the modular group $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ on the upper half-plane $\mathbb{H}$ as Möbius transformations. Define the form $f_A(x,y) = cx^2 + (d-a)xy - by^2$ for $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, then an element of the modular group is associated to a quadratic form and to a geodesic on the upper half-plane. Now we take a subgroup G of $PSL(2,\mathbb{Z})$:

$$G = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

It is well-known that the quotient space $\mathbb{H}/G$ can be identified with a once punctured torus. By using this model Markoff's theorem can be interpreted as follows:

Theorem 2 *A geodesic γ on the upper half-plane is a Markoff geodesic if and only if the projection of the γ on the once punctured torus $\mathbb{H}/G$ is simple closed.*

The fact mentioned above is known as the geometry of Markoff numbers. Our final aim is to obtain an extension of this fact by considering the upper half-space $\mathbb{H}^3$ instead of the upper half-plane $\mathbb{H}$ and Picard group $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}[i])$ instead of the modular group $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. In this talk we will discuss an extension of Farey tessellation with respect to the modular group to the case of Picard group and show some models of polyhedron which are candidates of extensions of once punctured torus.

$\mathbf{R}^1$ 上でのカントール集合の Hausdorff Dimension

日本大学大学院総合基礎科学研究科
地球情報数理科学専攻
大野真理子

一次元力学系のエルゴード的性質は、その変換に関する Perron–Frobenius operater のスペクトルによって定まる事が知られている ([1],[2])。Mori は symbolic dynamics 上の再生方程式 (reneual equation) を構成することによって Fredholm matrices $\Phi(z)$ を定義し、この行列式 $\det(I-\Phi(z))$ が、nuclear operators の Frdholm determinant と類似した役割をすることを証明した ([3],[4])。すなわち、$\det(I-\Phi(z))$ の零点は、Perron-Frobenius operater の固有値の逆数になる。そこで、我々も $\det(I-\Phi(z))$ を Fredholm determinant と呼ぶことにする。Mori はまた、Fredholm determinant の逆数が力学的ゼータ関数と等しいことも証明した。

このアイデアを使って、Mori は α Fredholm matrix を構成し、区間の上の piecewise linear transformations によって生成されるカントール集合のハウスドルフ次元を計算し、そのカントール集合上の力学系のエルゴード的性質について研究した ([6])。

必ずしも piecewise linear ではない変換についても、それによって生成されたカントール集合に対しては、$\log|F'|$ をポテンシャルとして考え、変換 F を piecewise linear transformation によって近似すると、piecewise linear transformation に対応するゼータ関数は、F のゼータ関数に収束する。この事実を使って、Mori は、piecewise C^2 で Markov である変換によって生成されるカントール集合のハウスドルフ次元の評価した ([5])。Jenkinson and Pollicot も同じような方法で連分数展開によって生成されたカントール集合のハウスドルフ次元を評価した ([7])。

我々は、$\mathbf{R}^1$ 上の piecewise linear で Markov な transformation によって生成されるカントール集合について考察し、α-Fredholm matrix を使ってこのカントール集合のハウスドルフ次元を計算する。

$p,q>0$ かつ $2p+2q=1$ とする。F は、$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ の写像として、

$$F(x)=\begin{cases} F^{+}(x) & (\text{if } x\geq 0) \\ -F^{+}(-x) & (\text{if } x<0) \end{cases}$$

について考える。ここで F^{+} を次の様に定義する。

$$F^{+}(x)=\begin{cases} \frac{1}{p}(x-k)+k \quad (\text{if } x\in<2k>) \\ \frac{1}{q}(x-k-1)+k+1 \quad (\text{if } x\in<2k+1>) \end{cases}$$

$A=\{\pm0,\pm1,\cdots\}$, $A_N=\{\pm0,\pm1,\cdots,\pm(2N-1)\}$ と定義する。
$<N>$ はをシンボルに対応する区間を表し、

$k = +0, 1, 2, \cdots$ の時

$[k, k+1] =< 2k > \cup, < 2k+1 >$, $< 2k >= [k, k+2p]$ $< 2k >= [k+2p, k+1]$,

$k = -0, -1, -2, \cdots$ の時

$[k-1, k] =< 2k > \cup < 2k-1 >$, $< 2k >= [k, k-2p]$, $< 2k+1 >= [k-2p, k-1]$

である。ここで C を F から生成されるカントール集合を α-Fredholm matrix $\Phi(\alpha)$ を用いて，ハウスドルフ次元を求める.

参考文献

[1] F.Hofbauer,G.Keller:Zeta function and transfer–operators for piecewise linear transformations.$Trans.Amer.Math.Soc.$352, 100 − 113(1984).

[2] A.Lasota and J.A.Yorke:On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations.$Trans.Amer.Math.Soc.bf$186, 481 − 488(1973).

[3] M.Mori:Fredhoim demerminant for piecewise linear transformations, Osaka,J.Math.27(1990),81-116.

[4] M.Mori:Fredhoim demerminant for piecewise monotonic transformations, Osaka,J.Math.29(1992),497-529.

[5] M.Mori:Daynamical system on Cantor set, Tokyo,J.Math.vol.21,217-232(1998).

[6] M.Mori: Cantor sets generated by Piecewise Linear Map, Proc. of the institute of natural siences, Nihon University, No.35,(2000).

[7] O.Jenkinson and M.Pollicot: Computing the dimension of dynamically defined sets:E_2 and bounded continued fraction, to appear in Ergod.Dynam.Systems.

21. 統計力学、漸近挙動

平成１２年１２月１９日（火）～２１日（木）

於東京工業大学大学院理工学研究科

責任者：高橋陽一郎

本研究会は、2000年12月19日午前10時から21日午後5時まで東京工業大学理学部本館第セミナー室において開催された。参加者は34名であった。講演者を5名に限定し、ほぼ半日ずつを割り振り、討論に多くの時間を割き、内容の深化に努めた。結果として、たいへん有意義な研究会となった。５つの連続講演および関連した話題提供の概要は以下の通りである（文責：高橋）。

[1] 永尾太郎（阪大・理）：
異なる対称性クラスに属するランダム行列の相互関係について

ユニタリアンサンブルの場合に相関関数は、直交多項式を用いて定義される積分核 $K(x,y)$ により、$\det[K(x_i,x_j)]$ の形に書けることから始めて、シンプレクティックアンサンブルの場合、四元数を成分とする行列に対する跡行列式 (Tdet) を用いれば同様に表示できること (Brezin & Neuberger 1991, Nagao &Wadati 1992) を述べ、この跡行列式表示は、少なくとも形式的には、通常の直交多項式で書けるという最近の結果 (Widom 1998) が紹介された。さらに、直交アンサンブルの場合にも、同様の書き換えが可能である.

詳しくは以下の通りである。

§1　ユニタリアンサンブルの解法

よく知られているように、（重み付き）ユニタリアンサンブル

$$p(x_1,\ldots,x_N) \propto \prod_{j=1}^{N} \sqrt{w(x_j)} \prod_{1\le j\le \ell \le N} |x_j - x_\ell|^2$$

は、重み $w(x)$ の直交多項式系を $c_n(x) = x^n + \cdots$ として、積分核

$$K(x,y) = \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{n=1}^{N} c_n(x)c_n(y)/h_n$$

(h_n は規格化定数) を導入すれば、

$$p(x_1,\ldots,x_N) \propto \prod_{j=1}^{N} h_j \det(K(x_j,x_\ell)_{j,\ell=1,\ldots,N})$$

と書ける. したがって、相関関数

$$\rho(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{(N-n)!}\int dx_{n+1}\ldots dx_N p(x_1,\ldots,x_N)$$

は、次の関係式により、具体的に求まる.

$$\int dx_n \det(K(x_j,x_\ell)_{j,\ell=1,\ldots,n}) = (N-n+1)\det(K(x_j,x_\ell)_{j,\ell=1,\ldots,n-1}).$$

§2　四元数行列式

四元数を成分とする行列式 $Q=[Q_{jk}]$ に対して、自己双対 ($Q^\dagger := [q^\dagger_{kj}] = Q$) の場合、その trace determinant は

$$\mathrm{Tdet}\, Q = \sum_{permutations} (-1)^{N-\ell} \prod_{1}^{\ell} \mathrm{tr}(q_{ab}q_{bc}\cdots q_{da})$$

で定義される. ただし、ℓ はサイクルの数、tr は実数部分である.
このとき、

$$Z = I_N \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると、この行列式は Pfaffian で書ける：

$$\mathrm{Tdet}\, Q = \mathrm{Pf}(ZC(Q)).$$

ただし、$C(Q)$ は Q の 2×2 行列表示.

§3 シンプレクティックアンサンブルの解法

シンプレクティックアンサンブルの場合、歪直交多項式系 (反対称な内積 $< f, g >= \frac{1}{2}\int w(x)(f(x)g'(x) - f'(x)g(x))dx$ に関するもの)$Q_n(x)$ を用いると、

$$p(x_1, \ldots, x_N) = \prod^{N/2} w(x_j) \det \begin{bmatrix} Q_0'(x_1) & Q_1'(x_1) & \cdots \\ Q_0(x_1) & Q_1(x_1) & \cdots \\ Q_0'(x_2) & Q_1'(x_2) & \cdots \\ Q_0(x_2) & Q_1(x_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

となる. これを Pfaffian に書き換え、§2 の結果を用いると、

$$p(x_1, \ldots, x_N) = \prod^{N/2}(2q_j)\, \mathrm{Tdet}[f(x_j, x_\ell)]_{j,\ell=1,\ldots,N/2}$$

の形に書ける. ここで、q_n は規格化定数、

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} S(x,y) & I(x,y) \\ D(x,y) & S(y,x) \end{bmatrix},$$

$$S(x,y) = \sum_{n=0}^{N/2} \frac{1}{2q_n}\{\psi_{2n}(y)\psi_{2n+1}'(x) - \psi_{2n+1}(y)\psi_{2n}'(x)\},$$

また、$I(x,y)$ は S で微分 ' を取り除いたもの、$D(x,y)$ は残りも微分したもの.
ただし、$\psi_n(x) = \sqrt{w(x)}Q_n(x)$. この場合も

$$\int f(x,y)g(y,z)dy = f(x,z)$$

が成り立ち、§1 と同様に、相関関数が

$$\rho(x_1, \ldots a, x_n) = (\prod q_j)\, \mathrm{Tdet}[f(x_j, x_\ell)]_{j,\ell-1,\ldots,n}$$

の形になる.

歴史的には、Brezin & Neuberger が 1991 年 $w(x) = \exp[-(x^2 + gx^4 + \cdots)]$ の場合に、Nagao & Wadati が 1992 年にかけて $w(x) = (1-x)^a(1+x)^b$ の場合を示した。

§3a　最近の発展

前節の結果は、少なくとも形式的には、通常の直交多項式を用いても書けることが、Widom により最近わかった (1998, solv-net/9804005)。そのためには $S(x,y)$ の表示を見つければ十分である.

$$\psi_n(x)=\sqrt{w(x)}Q_n(x)=\sqrt{w(x)}\sum_{j=0}^{N-1}c_{nj}p_j(x)=\sum_{j=0}^{N-1}c_{nj}\phi_j(x)$$

により、 $C=[c_{nj}]$ を定め、

$$J=\begin{bmatrix} 0 & -1/q_0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1/q_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1/q_1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1/q_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

とすれば、

$$S(x,y)=\frac{1}{2}[\phi_0'(x),\phi_1'(x),\ldots,\phi_{N-1}'(x)]C^TJC\begin{bmatrix}\phi_0(y)\\ \phi_1(y)\\ \vdots \\ \phi_{N-1}(y)\end{bmatrix}.$$

ここで、

$$m_{jk}:=\frac{1}{2}\int(\phi_j(x)\phi_k'(x)-\phi_j'(x)\phi_k(x))dx=((C^TJC)^{-1})_{jk}$$

となるから、

$$\mu=m^{-1},$$

$$S^{(4)}(x,y)=\sum_{j,k=0}^{N-1}\phi_j'(x)\mu_{jk}\phi_k(y)$$

とおけば、

$$S(x,y)=\frac{1}{2}S^{(4)}(x,y)$$

が成り立つ.ϕ_j を正規直交多項式に選んで計算すれば、

$$S^{(4)}KD\phi_j(x)=\phi_k'(x)=D\phi_k(x).$$

補題. $\mathcal{H}=span\{\phi_0,\ldots,\phi_{N-1}\}$ とすれば、

$$S^{(4)}|_{\mathcal{H}}=D(KD|_{\mathcal{H}})^{-1},$$

$$S^{(4)}|_{\mathcal{H}^\perp}=0.$$

後は作用素としての計算を実行すれば、次の表示が得られる：

定理. $\mathcal{E}=\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(x-y)$ とすれば、

$$S^{(4)}=(I_{\mathcal{H}+D\mathcal{H}}-(I-K)DK\mathcal{E})^{-1}.$$

§4　直交アンサンブルの解法

N を偶数として、

$$F(x,y)=\mathrm{sgn}(x-y),$$

$$D(x,y)=\sqrt{w(x)w(y)}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{r_j}[R_{2j}(x)R_{2j+1}(y)-R_{2j+1}(x)R_{2j}(y)]$$

とすれば、直交アンサンブルでは、

$$p(x_1,\dots,x_N)\propto\prod_{j=1}^{N}\sqrt{w(x_j)}\prod_{j<k}^{N}|x_j-x_k|$$

$$=\prod_{j=0}^{N/2-1}(2r_j)\cdot(-1)^{N/2}\,\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} D(x_j,x_k) & O \\ O & F(x_j,x_k)\end{bmatrix}$$

と書ける. ここで、

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{2}\int\mathrm{sgn}(x-y)\sqrt{w(x)}R_n(y)dy,$$

$$S(x,y)=\sqrt{w(y)}\sum\frac{1}{r_j}(\Phi_{2j}(x)R_{2j+1}(y)-\Phi_{2j+1}(x)R_{2j}(y)),$$

$$I(x,y)=-\sum\frac{1}{r_j}(\Phi_{2j}(x)\Phi_{2j+1}(y)-\Phi_{2j+1}(x)\Phi_{2j}(y))$$

とおき、$\alpha=[\alpha_{ij}]$ を

$$\Phi_k(x_j)=-\sum\alpha_{ji}R_k(x_i)$$

で定めれば、

$$\alpha D=S,\alpha D\alpha^\dagger=-I,$$

$$p(x_1,\dots,x_N)\propto\prod_{j=0}^{N/2-1}(2r_j)\cdot(-1)^{N/2}\,\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} D & S^T \\ -S & -I-F\end{bmatrix}$$

となる. よって、

$$f(x,y)=\begin{bmatrix} S(x,y) & I(x,y)+F(x,y) \\ D(x,y) & S(y,x)\end{bmatrix}$$

とおくと、

$$p(x_1,\dots,x_N)\propto\prod_{j=0}^{N/2-1}(2r_j)\,\mathrm{Tdet}[f(x_i,x_j)].$$

この場合は、

$$m_{jk}=\frac{1}{2}\int(\phi_j(x)\mathcal{E}\phi_k(x)-\mathcal{E}\phi_j(x)\phi_k(x))dx$$

とおくと、$S(x,y)=\sum_{j,k=0}^{N-1}\mathcal{E}\phi_j(x)\mu_{jk}\phi_k(y), \mu=m-1$ と表示でき、前節の結果で、D と $\mathcal{E}$ を交換したものが成立する：

補題. $S^{(1)}|_{\mathcal{H}}=\mathcal{E}(K\mathcal{E}_{\mathcal{H}})^{-1}\ S\ (1)|_{\mathcal{H}^\perp}=O.$

定理. $S^{(1)}=(I_{\mathcal{H}+\mathcal{E}\mathcal{H}}-(I-K)\mathcal{E}KD)^{-1}K.$

[2] 吉田伸生（京大・理）: (I)Gibbs & relaxation
(II)Localization transition for a random walk above an attractive wall (with Y.Isozaki)
(I)' 相互作用する N 粒子系' に関して、spectral gap(SG), logarithmic Sobolev inequality(LS), fast relaxation(FR), (DC) 等の相互関係についての手際よいサーベイ.
(II) " 正に条件付けられた酔歩 " $S_N\geq 0$ において、" 強さ β で壁への吸着 " もある場合の相転移現象に関する最近の結果の証明.

[3] 濱名裕治（九大・数理学）: 酔歩の訪問点の個数に関する大偏差原理　最近の Hamana and Kesten による酔歩の値域に関する一般的でめざましい結果およびその背景（大数の法則、中心極限定理、大偏差原理、概不変原理）のサーベイ. なお、濱名自身による別証明が詳しく紹介され、その手法（おそらく Kesten は熟知しているはずであるが）興味深いものであった.

[4] 松本裕行（名大・情報文化）: ブラウン運動の指数的汎関数　一連の M.Yor たちとの共同研究の成果およびその背景に関するサーベイ. ドリフト付ブラウン運動 $B_t^{(\mu)}=B_t+\mu t$ の指数的汎関数 $A_t=\int_0^t \exp(2B_s^{(\mu)})ds$ の分布とモーメント、Pitman の定理の類似等をすべて具体的な計算に基づいて示し、示唆的であった.

[5] 白井朋之（東工大・理工）: Fermion process に関する話題　Shirai-Takahashi の結果を交えながら、G.Olshanski たちによる $U(\infty)$ での不変測度に関する最近の研究を紹介した. とくに、エルミート行列の空間 $H(N)$ 上の GUE から Cayley 変換を用いて、$U(N)$ 上の測度を構成し、$N\to\infty$ の極限として $U(\infty)$ 上の確率測度を求めるというアイデアは興味深いものであった.

[6] 討論の中で矢野、谷口、松本、白井、高橋などいくつかの話題提供があったが、志賀徳造（東工大・理工）による次の結果についてのみ記す. $\dot{W}(x)$ をガウス白色雑音として、

$$u^W(t,x)=E_x^B[\exp\kappa\int_0^t \dot{W}(B_s)ds]$$

を考えると、そのモーメントの期待値 $<u^W(t,x)^p>$ の漸近挙動（増大率）は顕わに計算でき、次のようになる：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^3}\log E_x^{\otimes p}[\exp c\|\sum_{i=1}^p L_t^i\|_2^2]=c^2p^3/6.$$

ただし、L^i はブラウン運動の第 i 成分の局所時間.

22.

安定過程, 自己相似過程, ファイナンス

平成13年1月11日(木) — 1月13日(土)

慶應大学理工学部

世話人

前島　信 （慶應大学理工学部）
竹中 茂夫 （岡山理科大学理学部）
井上 和行 （信州大学理学部）

このシンポジウムは、安定過程、自己相似過程の最近の成果と、それらのファイナンス理論における役割を明らかにすることを目的に開催された。講演には、安定過程の拡張である無限分解可能過程の問題、ファイナンスに現れる確率微分方程式の近似問題に関することも含まれた。述べ３日間（正味２日間）の間に１３の講演が報告された。特に慶應大学に滞在中のスイス連邦工科大学の Cheridito 氏が参加、fractional Brownian motion に関する２つの講演を行った。これにより国外でのこの分野での研究の最近の進展に触れることができたことは、参加者にとって大変有意義であった。

総参加人数は３０名であり、参加者は以下の通り。
山里真（琉球大・理)、渡部俊朗（会津大・総合数理)、磯貝英一（新潟大・理)、三沢哲也（名古屋市大・経済)、藤原司（兵庫教育大)、井上和行（信州大・理)、佐藤健一、佐藤由身子（愛知工大)、宮原孝夫（名古屋市大・経済)、前島信（慶應大・理工)、秋田幸二（慶應大・理工)、川口英之（慶應大・理工)、西郷達彦（慶應大・理工)、斉藤昭彦（慶應大・理工)、新井拓児（慶應大・理工)、竹中茂夫（岡山理大・理)、小川重義（金沢大・工)、山室孝司（愛知江南短大・教養)、高嶋恵三（岡山理大・理)、後藤和雄（鳥取大・教育地域)、河野敬雄（京都大・総合人間)、厚地淳（大阪大・理)、後藤慎治（慶應大・理工)、中島誠（慶應大・理工)、鈴木由紀（慶應大・医)、谷口礼偉（三重大・教育)、田村要造（慶應大・理工)、金川秀也（金沢大・工）棚橋隆彦（慶應大・理工)、Patrick Cheridito （ETH, Zürich)

プログラム及び内容は次頁以降の通りである。

プ ロ グ ラ ム

1 月 11 日 (木)

13:00–14:00　Patrick Cheridito (ETH, Zürich)
Regularised fractional Brownian motion and option pricing

14:15–15:15　藤原　司 (兵庫教育大学自然系数学)
宮原 孝夫 (名古屋市立大学経済学部)
Geometric Lévy process に対する minimal entropy martingale measure について

15:30–16:30　小川 重義 (金沢大学工学部)
非因果的確率解析とその応用

16:45–17:45　山里　真 (琉球大学理学部)
On moments of storage processes

1 月 12 日 (金)

9:30–10:30　Patrick Cheridito (ETH, Zürich)
Mixed fractional Brownian motion

10:45–11:15　川口 英之 (慶應大学理工学部)
Long-memory Ornstein-Uhlenbeck process について

11:20–11:50　前島　信 (慶應大学理工学部)
On the variation of some selfsimilar stable processes

13:00–14:00　佐藤 健一
Subordination and selfdecomposability

14:15–15:15　佐藤 健一
渡部 俊朗 (会津大学総合科学センター)
Transience level set for Lévy processes

15:30–16:30　竹中 茂夫 (岡山理科大学理学部)
Set-indexed process に関連する話題

16:45–17:45　井上 和行 (信州大学理学部)
The law equivalence of multiparameter Lévy processes

1 月 13 日 (土)

9:30–10:30　金川 秀也 (金沢大学工学部)
税所 康正 (広島大学工学部)
Strong approximation of reflecting Brownian motion and its application to computer simulation

10:45–11:45　高嶋 恵三 (岡山理科大学理学部)
平面確率場の擬似乱数の検定への応用

講演の内容概略は以下の通りである。

Regularized fractional Brownian motions and option pricing

Patrick Cheridito (ETH Zürich)

There have been several attempts to remedy some shortcomings of the Samuelson model with the help of fractional Brownian motion. Fractional Brownian motion exhibits long-range dependence beteween the increments, but it is not a semimartingale. Moreover the fractional Samuelson model allows arbitrage. To exclude it we change the convolution kernel in the Mandelbrot-Van Ness representation of fractional of fractional Brownian motion. This yields a Gaussian semimartingale with a distribution similar to the one of fractional Brownian motion. The regularised fractional Brownian motion can be used to construct an arbitrage-free complete stock price model. We discuss the price of a European call option in this model.

Geometric Lévy process に対する minimal entropy martingale measure について

藤原 司（兵庫教育大学自然系数学）
宮原 孝夫（名古屋市立大学経済学部）

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上の 1 次元 Lévy process $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$, $T > 0$, に基づき, $S_t := S_0 e^{X_t}$ によって定義された確率過程 $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ を geometric Lévy process と呼ぶ. 但し, $S_0 > 0$ とする.

本講演において藤原は, 上記の geometric Lévy process について, P と同値な局所マルチンゲール測度の中で P に関する相対エントロピーを最小にする確率測度 (minimal entropy martingale measure) の存在とその具体的な表現を与えた. その結果は Y. Miyahara 及び T. Chan による既出の結果を一般化 かつ 強化するもので ほぼ最良の結果といえる. また, geometric Lévy process に対する minimal martingale measure との関連にも触れ, それが minimal entropy martingale measure と一致するための必要十分条件についても報告を行った.

更に, 上記の結果の数理ファイナンスのへ応用や今後の課題について宮原が報告を行った.

On moments of storage processes

Makoto Yamazato (Faculty of Scinence, University of the Ryukyus)

Storage process is a stochastic process $\{X(t)\}$ defined through a stochastic differential equation of the type

$$X(t) = x - \int_0^t r(X(s))ds + A(s).$$

Here, $r(x)$ is a nonnegative function defined on $[0,\infty)$ such that $r(0) = 0$, $r(x) > 0$ $(x > 0)$, left continuous and has positive right limits and $\{A(t)\}$ is an increasing Lévy process such that $A(0) = 0$.

We obtained sufficient conditions for existence and non-existence of (generalized) moments of $\{X(t)\}$ by means of integrability conditions of submultiplicative functions with respect to Lévy measure of $A(t)$. We found that there is a remarkable difference between two cases $\int^\infty \frac{1}{r(y)}dy < \infty$ and $\int^\infty \frac{1}{r(y)}dy = \infty$.

Mixed fractional Brownian motion

Patrick Cherodito (ETH, Zürich)

We show that the sum of a Brownian motion and an independent fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (0,1]$ is not a semimartingale if $H \in (0,1/2) \cup (1/2,3/4]$ and that it is equivalent to Brownian motion if $H \in \{1/2\} \cup (3/4,1]$.

On a long-memory Ornstein-Uhlenbeck process

川口英之（慶應大学理工学部）

$B_H = \{B_H(t), t \in \mathbf{R}\}$ が指数 $H \in (0,1)$ の (standard) fractional Brownian motion であるとは、平均 $E[B_H(t)] = 0$, $B_H(0) = 0$ のガウス過程で共分散が

$$E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

を満たすことを言う。特に $H = 1/2$ のとき、B_H はブラウン運動になる。

$1/2 < H < 1$ のとき、fractional Brownian motion は $\sum_{n\geq 0} E[(B_H(n+1) - B_H(n))B_H(1)] = \infty$ と言う意味で長期間従属性をもつ。fractional Brownian motion は長期間従属性をもつ現象のモデルを数式化する際によく使われる。

確率過程

$$X_1(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-u)} dB_{1/2}(u)$$

は定常 Ornstein-Uhlenbeck 過程と呼ばれ、平均 $E[X_1(t)] = 0$, 共分散 $E[X_1(t)X_1(s)] = 1/(2\lambda)e^{-\lambda|t-s|}$ のガウス過程である。

一方、定常 Ornstein-Uhlenbeck 過程は $X_2(t) = e^{-\lambda t}B_{1/2}(1/(2\lambda)e^{2\lambda t})$ なる標準ブラウン運動の非線形な時間変更からも得ることができる。

$1/2 < H < 1$ とするとき、X_1 の定義における $B_{1/2}$ を B_H で置き換えた確率過程と、X_2 の定義における $B_{1/2}$, $e^{2\lambda t}$ をそれぞれ B_H, $e^{\lambda t/H}$ で置き換えた確率過程は同じ確率過程になるのか。本講演ではこの問に答を与えた。

ブラウン運動の場合と異なり、$1/2 < H < 1$ のとき、二つの確率過程は全く異なる確率過程であることがわかった。そのことを、それぞれの共分散に対する厳密な評価式を与えることで示した。その結果、一方は長期記憶性をもち、他方は長期記憶性をもたないことがわかった。ここで $\{X(t)\}$ が長期記憶性をもつとは $\sum_{n\geq 0} E[X(n)X(0)] = \infty$ を満たすことをいう。そこで新たに得られた確率過程

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-u)}dB_H(u)$$

のことを長期記憶性をもつ Ornstein-Uhlenbeck 過程と呼ぶことにした。

On the variation of some selfsimilar stable processes

Makoto Maejima (Department of Mathematics, Keio University)

Stochastic calculus for non-semimartingales is needed in mathematical finance, especially for fractional Brownian motion. Many new ideas for defining stochastic integrals with respect to fractional Brownian motion have been proposed recently. However, most approaches do not work for non-semimaritigales other than fractional Brownian motion or more generally certain Gaussian processes. One exception, as far as the author knows, is an approach by Mikosch and Norvaiša [MN00]. Their approach is a pathwise one. In their theory, boundedness of the p-variation of sample paths of stochastic processes for some $p \in (0, 2)$ is the only condition. So, we need to investigate the variation of sample paths of stochastic processes. However, besides some Lévy processes, only fractional Brownian motion $B_H = \{B_H(t)\}$ with $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ is known example of the processes satisfying the requirements in their setting. In this talk, some other examples, having required property of the variation, among the class of selfsimilar stable processesi are discussed. One example is a real harmonizable fractional stable motion.

Subordination and selfdecomposability

Ken-iti Sato

The following fact is proved. Let $\{Y_t\}$ be a Lévy process on R obtained from Brownian motion with drift, $\{X_t\}$, through subordination by a selfdecomposable subordinator

$\{Z_t\}$. That is, $\{X_t\}$ and $\{Z_t\}$ are independent and $Y_t = X_{Z_t}$. Then, $\{Y_t\}$ is selfdecomposable. This gives an affirmative answer to the reformulated question of Halgreen (1979). He considered variance-mean mixtures of Gaussian distributions and gave an affirmative answer in a special case, which is, essentially, the case where the distribution of $\{Z_t\}$ is a generalized Γ convolution. This special case was treated also by Shanbhag and Sreehari (1979). If $\{X_t\}$ and $\{Y_t\}$ are considered on R^d, $d \geq 2$, then the same question was negatively answered by Takano (1989/90) even in this special case. An open problem is proposed whether or not the same is true for an α-stable but not strictly α-stable process $\{X_t\}$ on R for $0 < \alpha < 2$. When $\{X_t\}$ is strictly α-stable, this problem is answered affirmatively on R^d (Halgreen (1979) and Ismail and Kelker (1979)) for $\alpha = 2$ and $d = 1$, Barndorff-Nielsen, Pedersen, and Sato (2000) for general α and d).

A second fact given in the talk is that there is a random variable Y of type G (that is, Y has the same distribution as $Z^{1/2}X$ with independent X and Z, where X is standard Gaussian and Z is nonnegative, infinitely divisible) such that Y is selfdecomposable but Z cannot be selfdecomposable.

Transience level sets for Lévy processes

Ken-iti SATO
Toshiro WATANABE (The Univ. of Aizu)

Let L_{B_a} be the last exit time from the open ball B_a with center 0 and radius a for a transient Lévy process on R^d. It is proved that, for each $\eta \geq 0$, either $E[{L_{B_a}}^{\eta}] < \infty$ for all $a > 0$ or $E[{L_{B_a}}^{\eta}] = \infty$ for all $a > 0$. The set of $\eta \geq 0$ having the former property is called the transience level set T of $\{X_t\}$. A criterion for $\eta \in T$ in terms of the logarithmic characteristic function is given. The set T is determined when $d = 1$ and $E[|X_t|^{1+\delta}] < \infty$ for some $\delta > 0$. As basic examples, stable processes on R and some symmetric processes on R^d are studied.

Set-Indexed Process に関連する話題

竹中 茂夫 (岡山理科大)

佐藤健一さん達の多次元パラメータの従属性の研究に、使われ始めた、時間軸が多次元の場合の安定過程に対応する確率過程（多径数レヴィ過程）にチェンソフ型の安定過程が関連してきたので、整理しておく。Chentsov-Mori 測度の台が $R_-{}^n$ に含まれ、平行移動の双対作用で不変なものは、多径数レヴィ過程となる。　さらに、これらは有限次元分布で全体が決まるという決定性を持つことがわかる。　この決定性に関連する漸化式を得た。

論理の展開には射影幾何学の知識を使うと見通しが良いのでそれを用いた。
統数研レポート　無限分解可能過程に関連する諸問題　2001年刊行予定を参照。

The law equivalence of multiparameter Lévy processes

井上和行　（信州大学　理学部）

最近，佐藤健一氏は $\mathbb{R}^d$ 上の N 径数 Lévy 過程 $\{X(\mathrm{s}) : \mathrm{s} \in \mathbb{R}_+^N\}$ に対する従属操作の下での分布の自己分解可能性の遺伝の問題を扱っている [Research Report (2000), MaPhySto, Univ. Aarhus]。ここで N 径数 Lévy 過程は，確率連続で，$\mathbb{R}_+^N$ における半順序に関して定常独立増分をもち，さらに確率1で見本関数が右連続かつ左極限をもつ確率過程として定義される。特に，見本関数の条件を外したものを，法則の意味の N 径数 Lévy 過程という。すべての N 径数 Lévy 過程の構造を決定する問題は未解決である。

本報告では，法則の意味の N 径数 Lévy 過程の或るクラスを導入し，それらに対する経路空間上の測度の間の同等問題を考察する。いま $S_+^{N-1} = \{\mathrm{s} \in \mathbb{R}_+^N : |\mathrm{s}| = 1\}$, $\mathbb{R}_0^d = \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ として，次の条件をみたす $S_+^{N-1} \times \mathbb{R}_0^d$ 上の Borel 測度 N が与えられている：

$$\iint_{S_+^{N-1} \times \mathbb{R}_0^d} (1 \wedge |x|^2) N(d\theta dx) < \infty.$$

このとき，次の分布を持つ法則の意味の N 径数 Lévy 過程 $\{X(\mathrm{s}) : \mathrm{s} \in \mathbb{R}_+^N\}$ が構成される。

$$E[\exp(i < z, X(\mathrm{s}) >)] = \exp[\iint_{S_+^{N-1} \times \mathbb{R}_0^d} < \theta, \mathrm{s} > g(z,x) N(d\theta dx)] \quad (z \in \mathbb{R}^d),$$

$$g(z,x) = e^{i<z,x>} - 1 - i < z, x > \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

この $\{X(\mathrm{s})\}$ は径数 s を任意の直線上に制限して動かすとき独立増分性を持ち，森俊夫氏 [Probab. Theory Relat. Fields, 1992] の意味で線形加法的でもある。

Strong Approximation of Reflecting Brownian Motion Using Penalty Method

S.Kanagawa (Kanazawa University)
Y.Saisho (Hiroshima University)

One of important problems in stochastic analysis is to consider stochastic differential equations with boudary conditions on multi-dimensional domains (so-called Skorohod SDE). There are two approaches to define approximate solutions of such stochastic differential equations. Tanaka (1979), Lions and Sznitman (1981), and Saisho (1987) constructed Skorohod equations using the projection on the boundary. A second one is the *penalty* *method* type, that is, we approximate Skorohod equations by equations with coefficients of gradient type. For the purpose of obtaining numerical data by computer simulation of Skorohod SDE's we need discretized approximate solutions of them. We focus our attention on reflecting Brownian motion on multi-dimensional domains and give a new penalty method type approximation.

平面確率場の擬似乱数の検定への応用

高嶋恵三　（岡山理科大学　理学部）

2次元平面をパラメーターとする、平面確率場の中でも、もっとも簡単なモデルのシミュレーションを試み、擬似乱数の統計的検定に対する応用への可能性を探った。具体的には、平面上の各格子点上に、独立な確率変数を置き、それらを、ディジタル画像の各画素における濃度を表すとみなし、ディジタルフィルターを施すことにより、画像を鮮鋭化し、理論値との比較をした。

23.

Fractals and Dynamical Systems

平成 13 年 1 月 23 日（火）～1 月 26 日（金）
於 九州大学箱崎キャンパス, VBL (Venture Business Laboratory)
3 階ゼミナール室

世話人：佐藤坦（九大・数理), 青木統夫（中央大・商), 濱地敏弘（九大・数理）

このシンポジウムは, フラクタルと力学系に関連する話題について, 招聘外国人教授の講演, 並びに, わが国の研究者の最近の成果の研究発表, 討論, 及び, 研究交流を目的として開催した.

参可者人数は 58 人と多く, 活気があった. この内, 海外からの参加者は招聘教授 2 人を含む 5 人であった.

研究成果の概要は次の通りである.

1. 1 次元写像, ギッブス測度の研究成果. 保測力学系の再帰時間分布の漸近的挙動の解析, ならびに, 非一様な双曲 1 次元写像への応用の研究 ([1]). 2 次元非一様双曲写像の双曲型測度ならびに不変測度と, 周期点, エントロピーとの関係の研究 ([4]). Markov 的 1 次元写像についての相転移, 相関関数の減衰と weak Gibbs 測度の関連の研究 ([9]). 中立的不動点をもち, 絶対連続な不変測度が無限大測度であるような 1 次元写像の比のエルゴード定理についての研究 ([10]). 1 次元写像列による自己参照モデルについて, 従来知られている漸近挙動の数値実験の理論的検証の研究 ([23]).
2. 複素力学系, ジュリア集合の研究成果. 有理写像の摂動に対応するジュリア集合上の力学系の, 同型写像による連続変形が可能な条件の研究 ([15]). 複素力学系の hyper function, microfunction の概念の導入 ([14]). 複素エノン写像族のジュリア集合の双曲性の十分条件の研究 ([17]). リーマン球面上の非定数有理写像で生成される有限生成半群のジュリア集合の大きさの研究 ([18]). 超越整関数のジュリア集合と itinerary の研究 ([19]). Iterated function systems の自己相似測度のマルチフラクタル構造について, 従来の開集合条件より弱い条件のもとにおける特異性の研究 ([25]).
3. フラクタル, カオス, ペシン集合, ハウスドルフ次元の研究成果. 2 変数関数の零点と Newton 法における不安定点の研究 ([3]). Weak Besicovich property の導入とルベーグ密度定理との関連, ならびに, ハウスドルフ次元の計算への応用の研究成果 ([5]). シェルピンスキーガスケット上の Self-repelling Walk の連続極限としての確率過程の研究 ([6]). 微分同相写像のペシン集合についてのハウスドルフ次元の研究 ([12]). Iterated functions systems の極限集合のハウスドルフ次元の研究 ([16]). 自己相似 5 角形の Martin 境界表現の研究 ([20]). シェルピンスキーガスケットの Martin 境界表現ならびにディイクレ問題の研究 ([21]).
4. リアプノフ指数の研究成果. 双曲型微分同相写像の非一様双曲型への摂

動と, 非零のリアプノフ指数をもつ微分同相写像を許容する多様体の研究 ([13]). Schelling の導入による Segregation model を, 力学系から見たリアプノフ関数による極限状態の解析の研究 ([22]).

5. 数論との境界領域研究の成果. 同時近似問題における Jacobi-Perron アルゴリズムの改良の研究 ([2]).
   無限大保測変換の拡大における Furstenberg の多重再帰定理の成立・非成立の研究 ([7]).
6. サブシフトの応用研究成果. マルコシフトの空間に作用するリプシッツ連続な力学系のゼータ関数の解析と 2 次元散乱撞球問題への応用の研究 ([8]). 一方のサブシフトから他方のサブシフトへの埋め込みが存在するための判定条件の研究 ([24]).
7. その他. 放物型半線形発展方程式の解の漸近挙動の研究 ([11]).

以上のような成果があった.

プログラムと内容は次頁以降の通り.

プログラム

1月23日（火）

13.30 - 14.20 平田　雅樹（東京都立大学大学院理学研究科）

Retun times of intermittent maps（間欠型写像の再帰時間）

14.40 - 15.00 中石　健太郎 (東大数理科学)

The expoent of cinvergence for 2-dimensional multiplicative algorithms

15.20 - 15.40 山岸義和（竜谷大学・理工）

Quadratically convergent initial values to a multiple root in Newton's method

16.00 - 16.20 平山至大（九州大学大学院数理学府）

Entropy and periodic dyanamical system

16.40 - 17.30 Francois Ledrappier (CNRS, l'Ecole Polytechnique and Northwestern University)

A weak Besicovich property and applications

1月24日（水）

9.30 - 10.20 服部久美子（信州大学）

Self-repelling Walk on the Sierpińsky Gasket

10.40 - 11.00 井上心（九州大学大学院数理学府）

Group extensions and multiple recurrence of infinite measure preserving transformations

11.20 - 12.10 盛田健彦（東工大・理工）

Meromorphic extensions of zeta functions for a class of dynamical systems and their specific values.

13.30 - 14.20 由利美智子（札幌大学・経営）

Weks Gibbs measures and sub exponential instability

14.40 - 15.00 井上友喜（愛媛大・工）

Ergodic sums for one-dimensional maps with indifferent fixed points.

15.20 - 15.40 高木悟（早稲田大・理工）

Existence of local center unstable manifolds 局所中心不安定多様体の存在について

16.00 - 16.20 岡正俊（東京理科大・理工）

Entropy and fractal

16.40 - 17.30 Y. Pesin (Pennsylvania State U., USA)

Does any manifold admit a diffemorphism with non-zero Lyapunov exponents ?

1月25日（木）

9.30 - 10.20 宇敷重広（京大・人環）

Microfunctions and conformal measures on Julia set

10.40 - 11.00 川平友規（東大・数理）

Semiconjugacy between the Julia sets of geometrically finite rational maps

11.20 - 12.10 S.-M.Heinemann (Claustal TU., Germany)

Remarks iterated function systems

13.30 - 14.20 石井豊（九州大学大学院数理学研究院）

On the hyperbolicity of some compelx Henon maps

14.40 - 15.00 角大輝（東工大・理）

Dynamics of rational semigroups and fibered rational maps

15.20 - 15.40 木坂正史（京大・人環）

Some dynamical properties of structurelly finite entire functions

16.00 - 16.20 今井淳（九大数理 D3）

Pentakun as a Martin boundary

16.40 - 17.30 Manfred Denker (GÖtingen U., Germany)

On a Dirichelt probelem for boundaries of Markov chains

1月26日（金）

9.30 - 10.20 Howard Weiss (The Pennsylvania State University)

The Dynamics of Segregation Models

10.40 - 11.00 行木孝夫（北大・大学院理学研究科）

Function Dynamics

11.20 - 11.40 濱地敏弘-井上心（九大数理）

Embeddings in symbolic dyanmics

12.00 - 12.50 Ka-Sing Lau (Chinese University, Hongkong)

Multifractal Structure of IFS with the Weak Separation Condition

1. 平田　雅樹（東京都立大学大学院理学研究科） Retun times of intermittent maps（間欠型写像の再帰時間）
確率空間の上の保測変換によって得られる力学系において，可測集合列 $\{U_n\}$（ただし，U_n の測度 $\to 0, (n \to \infty)$）と U_n から出発した軌道の再帰時間 T_{U_n} を考え，それを U_n の測度で規格化した再帰時間の列の $n \to \infty$ での極限分布を問題とする．系が十分強い混合性を持つときは，極限分布が指数分布になることが知られているが，ここでは一般の系において規格化した規格化した再帰時間の分布と指数分布との差の評価を与え，それを用いて非一様な双曲性を持つ１次元間欠型写像の力学系系について同様の結果を示した．さらに規格化した k 回再帰時間の極限分布がポアソン分布になること示した．
2. 中石　健太郎 (東大数理科学) The expoent of cinvergence for 2-dimensional

multiplicative algorithms
与えられた複数の実数を近似する有理数の列を与えるアルゴリズムを同時近似アルゴリズムという．背後にある力学系が高次元であることから，同時近似のアルゴリズムの性質は十分には解明されていない．近似の効率を測る概念として収束指数があるが，数値計算によれば「良い」アルゴリズムは 1 以上の収束指数を持つと推定されている．2 次元の Jacobi-Perron アルゴリズムに対しては Schweiger が，Modified Jacobi-Perron アルゴリズムに対しては Ito-Keane-Ohtsuki-Fujita, Meester 等によって収束指数が 1 より大であることが最近証明された．彼らの結果は個々のアルゴリズムに対してのみ有効で他のアルゴリズムに適用することは難しい．筆者は上記 2 つのアルゴリズムを含むクラスのアルゴリズムに対して有効な証明方法を見つけることができた．

3. 山岸義和（竜谷大学・理工）Quadratically convergent initial values to a multiple root in Newton's method
二変数関数の零点を求める Newton 法において，一定の形の重根のまわりの局所的な力学系を幾何学的に調べた．一変数の場合との違いは，重根が不安定点になることであり，Newton 法の分母が消えるような初期値は，重根を通過する曲線をなしている．次のような結果を得た．重根の近傍は A, B, C の三つの部分集合に分割される．A は安定集合，重根にゆっくり収束する．B は爆裂集合，非有界な像を持つ．C はカオス集合，一点穴空き円板とカントール集合の直積集合であり，単根なみの速い収束をする．

4. 平山至大（九州大学大学院数理学府）Entropy and periodic dyanamical system
2 次元の非一様双曲型力学系に対し，エントロピーと周期点から構成される確率測度との関係について報告した．このクラスの力学系に対して示される非一様追跡性補題（Katok），Pesin 集合のベルヌーイ性をもつ部分集合への有限分解 (Pesin, Ledraper) を用いて，明記性に似た概念の導入を試みた．それにより (1) 双曲型測度は周期点から dirac 測度で構成される確率測度で近似されること (2)f-不変確率測度はエントロピー零なる f-不変確率測度で近似されることが示された．ただし (1) は Katok により別の方法で示されていたことが，これをまとめた後にわかった．

5. Francois Ledrappier (CNRS, l'Ecole Polytechnique and Northwestern University) A weak Besicovich property and applications
A family of sets has the Besicovich property if any partial subcover from this family admits a further subcover with bounded multiplicity. Balls in Euclidean spaces have this property, and it is a very powerful tool in Geometric Measure Theory.
Sometimes, much weaker covering properties are sufficient, in particule

for the estimations of Hausdorff dimensions of analogous quantities. In this talk, we consider a subexponential covering property. We prove the corresponding 'weak' Lebesgue Density Theorem. We give some example from dynamics.

6. 服部久美子（信州大学）Self-repelling Walk on the Sierpińsky Gasket
pre-Sierpińsky Gasket 上でパラメタ u を含む self-repelling walk の族を考える. ($u=1$ で simple random walk に, $u=0$ で self avoiding walk, $0<u<1$ で self repelling になるように構成する） この walk の連続極限（適当に時間を scale して格子間隔 $\to 0$ とする）の存在と極限の確率過程が Gasket 上のブラウン運動と non-trivial な self-avoiding process を u に関して連続につなぐものであることを示した（プロセスの法則収束の意味でもまた平均 2 乗距離や path の性質を決定する exponent の意味でも連続になっている.）

7. 井上心（九州大学大学院数理学府） Group extensions and multiple recurrence of infinite measure preserving transformations
Furstenberg は有限不変測度をもつ任意の変換に対して, 多重再帰定理「測度正の任意の可測集合への再帰時間集合は, 任意の長さの等差数列を含む」を示したが, 無限大不変測度をもつ変換では一般にはこの定理は成り立たないことが知られている (Eigen-Hajian-Halverson, 及び, Aaronson-Nakada). ところで Furstenberg の多重再帰定理では, あるタイプの extension が多重再帰性を保つことが定理の証明の鍵である. そこで無限大保測変換に対して, どのような extension に対して多重再帰性が保たれ, または保たれないのかが当然問題となる. 今回, 任意の compact group extension は多重再帰性を保たれること, そして, ある non-compact group extension に対して多重再帰性が壊れることを Random walk との skew product を構成することにより明らかにした.

8. 盛田健彦（東工大・理工） Meromorphic extensions of zeta functions for a class of dynamical systems and their specific values.
0, 1 を成分とするペロン-フロベニウス行列 A を構造行列とするマルコフシフトによって構成された 数直線上のカントール集合と, その上のリプシッツ連続な力学系で, 拡大条件, 有限ねじれ条件等をみたすものを考える. この力学系の正値リプシッツ連続関数をポテンシャルとする力学系ゼータ関数は, 実部が 0 以上となる半平面を含む領域に, 零点をもたない有理型関数として解析接続できることを示した. また, 原点での特殊値が I-A の行列式の逆数で与えられることを示した. さらに, この事実が, 日食不在条件をみたす 2 次元散乱撞球のゼータ関数に適用できることを報告した.

9. 由利美智子（札幌大学・経営） Weks Gibbs measures and sub exponential instability

Piecewise C^0-invertible Markov system を対象に, pressure function に関する相転移, subexponential, そして low decay of corrrelation を引き起こすと考えられる周期軌道の性質を明らかにし, またこれらの問題を総括して議論できるポテンシャル関数のクラスを定式化する. 具体的には weak bounded variaion とう性質をもつ関数のクラスを導入し, このクラスに属する関数に対する RPF operator の dual operator の正の最大固有値に対する固有ベクトルとして決まる conformal measure を介在し weak Gibbs property と呼ばれる性質を持つ不変測度の統計的性質を議論する.

10. 井上友喜（愛媛大・工） Ergodic sums for one-dimensional maps with indifferent fixed points.
中立的不動点をもつ一次元写像の多くは, ルベーグ測度に関して絶対連続なエルゴード的 σ-有限不変測度をもつ. 関数 f, g をその不変測度に関する積分が無限大となるものとす. 中立的不動点を持つ一次元写像に対して巻数 f のエルゴード和と関数 g のエルゴードの非の極限につい述べた.

11. 高木悟（早稲田大・理工）Existence of local center unstable manifolds
局所中心不安定多様体の存在について
バナッハ空間の非有界領域における時間に依存する放物型半線形発展方程式の解の漸近挙動を調べるのに有益な抽象理論を作り紹介した.

12. 岡正俊（東京理科大・理工）Entropy and fractal
2 次元多様体上の C^2-微分同相写像とその不変エルゴード的ボレル確率測度について次のことがわかる. このエルゴード的測度に関するエントロピーが正であるとき, (この測度に関する) ペシン集合は, 異なるハウスドルフ次元をもつ不変集合（エルゴード的全体）に分解される.

13. Y. Pesin (Pennsylvania State U., USA) Does any manifold admit a diffemorphism with non-zero Lyapunov exponents ?

It is believed that dynamical systems with non-zero Lyapunov exponents are typical in a sence. Although just few examples of such systems preserving a smooth measure on a compact manifold have been known it was conjectures that any manifold admits a diffemorphism with non-zero Lyapunov exponents. I will provide a recent affirmative solution to this conjecture.

14. 宇敷重広（京大・人環） Microfunctions and conformal measures on Julia set
超関数や微関数を複素力学系の不変集合に適合するように定義し, リュエルのトランスファー作用素の固有値問題を考察した. ポストクリティカリーに有限の場合には, 微関数の空間は比較的簡単に定義することができる. 微関数空間での差作用素とその逆作用素であるクザン積分作用

素を考え, 関数空間の直和分解を具体的に計算することができる. 超関数空間とその双対空間上のコーシー変換作用素を使ってリェル作用素の積分核作用素の形での表示が得られる. 上記の諸関数空間を併用することで, 非整数次元のウエイトに対応する不変測度と等角測度, ギッブス測度などを与える関数方程式を定式化することができた.

15. 川平友規(東大・数理) Semiconjugacy between the Julia sets of geometrically finite rational maps
Riemann 球面上の有理写像 $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ に対しその摂動 $f_\epsilon \to f$ を考える. このとき $\hat{\mathbb{C}}$ 上の f_ϵ による力学系の不安定部分, Jullia 集合 $J(f_\epsilon)$ 上の力学系は, $J(f)$ 上のそれへと連続的に変化するのだろうか? この問題は「J-安定性」(「$J-stability$」) として扱われ, たとえば双曲的力学系など構造安定な力学系やそれに準ずる力学系については Mañé-Sad-Sullivan, McMullen らによって肯定的な結果が得られていた. しかし例えば f が放物型周期点をもつ場合は, 方物分岐と呼ばれる現象が知られており, 一般に J-安定性は無い. 但し, 摂動の仕方にいくつかの条件を与えることで Julia 集合上の力学系の連続摂動が可能となることが近年の研究で明らかにされ始めた. 今回次のことを明らかにした. f が幾何学的有限と呼ばれる, 放物的分岐の起き得る比較的広いクラスに属するとき, 摂動が間接的, かつ分岐関係を保存するならば Julia 集合のトポロジーが変化したとしても, その上の力学系が連続的に変化している.

16. S.-M.Heinemann (Claustal TU., Germany) Remarks iterated function systems

(a) Selfsimilar Setting We recall some well-known facts about self-similar iterated functions systems, which are to be found e.g. in the text book of K.Falconer's.

Theorem 1.1 *Given a set of linear contractions $\{\psi_j\}_1^m$ on $\mathbf{R}^n$ with contractions rates $r_j < 1$ there exists a non-empty compct set E such that*

$$E = \psi(E) = \bigcup_1^m \psi_j(E).(1)$$

Further, if F is any non-empty compact subset of R^n then the iterates $\psi^k(F)$ converges to E in the Hausdorff metric as $k \to \infty$.

An important question concerning the limit set E of the iterated function system inuced by $\{\psi_j\}_1^m$ is to ask for its Hausdorff dimension $s(E)$. This question was completely answered by Hutchinson (1981) in the above setting (assuming the open set condition).

Theorem 1.2 *Suppose the open set condition holds for the similitudes ψ_j with ratios r_j. Then the associated compact invarinat set E*

is an s-set, where s is defined by

$$\sum_{i}^{m} r_j^s = 1, (2)$$

in particular, one has that $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$.

(b) Programme We are going to extend the discussion of the above paragraph in two directions, partialy answering the following two questions. If one considers the $\{\psi_j\}_1^m$ only as locally defined selfmaps of a compact set $K \subset \mathbf{R}^n$ then one still obtains a well-defined compact limit set E as in (1).

Question 2.1 *If one allows countably many contractions then the situation changes (the limit set might not even be compact). What can one say about* $s(E)$ *if one knows the* r_i *?*

Clearly, the existence of E does not depend on the fact that the $\{\psi_j\}_1^m$ are linear and hence conformal. The proof that the resulting Hausdorff dimension is the s given in (2) does as it is making use of the existence of conformal measures.

Question 2.2 *Are there substitutes for conformal measures in the setting of conformal iterated function systems which might be used to calculate* $s(E)$ *?*

References *[1] K.J.Falconer. The Geometry of Fractal sets in Mathemeatics. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambrdige University press. .*

17. 石井豊（九州大学大学院数理学研究院） On the hyperbolicity of some compelx Henon maps

$\mathbf{C}^2$ の多項式同型の最も重要なクラスとして複素エノン写像族 $h_{c,b} :\to (x^2+c-by, x)$ がある．この力学系に対してジュリア集合と呼ばれる不変集合が定義されるが，いつこのジュリア集合が双曲的になるかは（その必要十分条件は）今のところ知られていない． 今回ジュリア集合の双曲性に対するいくつかの十分条件が得られた．これらの条件は位相的な仮定，あるいは具体的にチェック可能な条件であり，たとえば $C=0, |b|<0.2071$ のとき $h_{c,b}$ は双曲的であることが示されるなど，パラメタに関する明示的な評価を与えることが可能である．これは J.Smillie(コーネル大学) との共同研究である．

18. 角大輝（東工大・理） Dynamics of rational semigroups and fibered rational maps

有理半群，つまりリーマン球面 $\overline{\mathbf{C}}$ 上の非定数有理写像で生成された写像の合成を積とする半群 G の力学系を考える．従来の複素力学系と $\mathbf{R}^2$ での相似系縮小写像の組で作られる自己相似集合の研究の一般化になって

いる. 有限生成有理半群について, そのジュリア集合上, 「半双曲性を持たない点が有限個」の場合に, 次の結果を得た. 1. 生成元の語の列に対してそのジュリア集合を与える写像は連続, 2. 生成元の語の各列のジュリア集合は, ルベーグ測度は 0, 3. 半群のジュリア集合のハウスドルフ次元は, 上から δ-劣等角測度を作れるような δ の下限で置き換えられる. その量は G のポアンカレ級数の極でおさえられる. 4. さらに G が開集合条件を満たせば G のジュリア集合のルベーグ測度は 0 になる.

19. 木坂正史 (京大・人環) Some dynamical properties of structurelly finite entire functions
構造有限な超越整関数の力学系について以下の結果を証明した. ある領域を指定し, そこに軌道がとどまり続ける点の集合を考え, それらの点に対して itinerary を定義する. そこで増大度にある種の bound をもつ itinerary に対して, ∞ に延びる曲線が存在し, その曲線上の任意の点は, 与えられた itinerary をもち, その軌道は力学系の反復により ∞ に行く. 更にこの曲線は力学系のジュリア集合に含まれる.

20. 今井淳 (九大数理 D3) Pentakun as a Martin boundary
1996 年に, Denkaer/Sato によって, シェルピンスキーガスケットは, その上に定義されたある Markov 連鎖の Martin 境界として表現された. 我々はこの, Fractal の Martin 境界表現を, 一般化されたそれに拡張することを目標に, さしあたってペンタクンと呼ばれる自己相似五角形について適用できることを報告した.
$\mathcal{A}=\{-2,-1,0,1,2\}$ を 5 つのアルファベットといい, 今, $\mathcal{A}$ を加法 $\oplus$ が入った 5 を法とするか群とする. $\mathcal{A}^n$ を $\mathcal{A}$ の文字として並べたものから成る集合, $\mathcal{A}^\infty$ を $\mathcal{A}$ の文字の無限直積からなる集合, 更に $W=\cup_{n=0}^\infty \mathcal{A}^n$ とそれぞれ定義する. 次に $\mathbf{w}\in W\cup\mathcal{A}^\infty$ に対して, 共役 $\mathbf{w}^\#$ を

$$\mathbf{w}^\# := \begin{cases} \mathbf{w}_0(a\oplus d/2)(a\oplus -d/2)^k\ldots & \text{if } \ \mathbf{w}=\mathbf{w}_0 a(a\oplus d)^k \\ \mathbf{w}\ldots & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する, 但し, $d\in\{-2,2\}$, $k\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}$ とする. 同値関係を $\mathbf{x}\sim\mathbf{y}\Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{y}$ or $\mathbf{x}^\#=\mathbf{y}$ で定義する. さて W 上の Markov 連鎖 $\{X_n\}_n^\infty$ と推移確率

$$p(\mathbf{w},\mathbf{w}a)=p(\mathbf{w},\mathbf{w}^\# a)=\begin{cases} 1/10 & \text{if } \mathbf{w}\neq\mathbf{w}^\# \\ 1/5 & \text{if } \mathbf{w}=\mathbf{w}^\# \end{cases}$$

によって定義する. このとき, W 上の Green 関数 g は,

$$\begin{aligned} & g(\mathbf{v},\mathbf{w}) = p(l(\mathbf{w})-l(\mathbf{v}),\mathbf{v},\mathbf{w}) \\ := & \begin{cases} \sum_{\mathbf{u}\in W} p(l(\mathbf{w})-l(\mathbf{v})-1,\mathbf{v},\mathbf{u})p(\mathbf{u},\mathbf{w}) & \text{if } l(\mathbf{w})>l(\mathbf{v}) \\ \delta_{\mathbf{v},\mathbf{w}} & \text{if } l(\mathbf{w})=l(\mathbf{v}) \end{cases} \end{aligned}$$

で与えられる. Green 関数を計算するにあたり, これらの設定の元で考察した結果, アルファベット同志の差の挙動が密接に結びついていることが分かった. この発見でペンタクンの Green 関数の評価が得られ実際にそれを Martin 境界として表現できた.

21. Manfred Denker (GÖtingen U., Germany) On a Dirichelt probelem for boundaries of Markov chains
We consider the state space $\mathcal{W}$ of all fiite words $\mathbf{w} = w_1 \dots w_n$ over a finite alphabet $\mathcal{A}$ of cardinality N, and a Markov chain $(X_n)_{n\geq 1}$ with state space $\mathcal{W}$ and transition probabilities $p(a^k, a^k c) = N^{-1}$ and $p(\mathbf{w}ab^k, \mathbf{w}ab^k c) = p(\mathbf{w}ab^k, \mathbf{w}ba^k c) = (2N)^{-1}$, $(a, b, c \in \mathcal{A}; a \neq b, \mathbf{w} \in \mathcal{W})$. The Martin boundary of X_n is the space of all infinite sequences over the alphabet $\mathcal{A}$ modulo the identifications of $\mathbf{w}ab^\infty$ with $\mathbf{w}ba^\infty$ for all $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ and $a \neq b \in \mathcal{A}$, and the continuous functions on Σ are isomorphic to the space $\mathcal{H}_C$ of all uniformly continuous harmonic functions on $\mathcal{W}$.
In this talk we analyze $\mathcal{H}_C$ in more detail by introducing another averaging property based on the Markov kernel. This leads to a generalized Laplace operation on $\mathcal{H}_C$ and the solutions of the associated Dirichelet and Neumann problems, and it is related to Kigami's work o the harmonic analysis on fractal sets.Y

22. Howard Weiss (The Pennsylvania State University) The Dynamics of Segregation Models

We analyze a variant of the famous Schelling segregation model as a dynamical system. This system exhibits a new clustering mechanism. In particule, we explain why the elimiting behavior of the non-locally determined lattice system exhibits a number of pronounced geometric characteristics.

Part of our anlysis uses a geometrically defined Lyapunov function which we show is essentially the total Laplacian for the associtaed graph Laplacian. The limit states are minmizers of a natutral non-linear, non-homogneous variational problem for the Laplacian, which can also be interpreted as ground state configurations for the lattice gas whose Hamiltonian essentially conincides with our Lyapunov function. Thus we use dynamics to explicitely solve this problem for which there is no known analytic solution. We prove an isoperimetric characterization of the global minimizers on the torus which enables us to explicitly obtain the global minimizers for the graph variational problem. We also provide a geometric characterization of the plethora of local minimizers.

If time permits, we will discuss recent progress towards understanding the actual Schelling model, where one is natutrally lead to study the ergodic theory of a 'new Z^2 subshift of finite type.

23. 行木孝夫（北大・大学院理学研究科） Function Dynamics

片岡・金子は次の形の関数列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ を自己参照のモデルとして提案した.

$$\begin{cases} f_n : \mathrm{I} \to \mathrm{I}, \quad \mathrm{I} = [0,1] \\ f_{n+1}(x) = (1-\epsilon)f_n(x) + \epsilon f_n(f_n(x)), \quad (0 \leq \epsilon \leq 1) \end{cases}$$

数値計算による漸近挙動を主に $f_0(x) = ax(1-x)$ について [1], [2] の中で調べており, 分岐図, $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ （存在するとして）のグラフの形状等について興味深い現象を観察している. 上記の関数系について, 高橋・片岡・金子・行木 [3] では.

- $f_n(x)$ の存在する集合 Ω の性質
- $f_n(x)$ の不動点の安定性の変化
- $g_n(x) = (1-\epsilon)x + \epsilon f_n(x)$ によって記述される $f_n(x)$ の挙動

等について数学的な結果を得た. 本講演では [3] に従い, 得られた結果を紹介した.

[1] N. Kataoka, K. Kaneko, "Functional Dyanamics I" Physica D 138 (2000) 225-250

[2] N. Kataoka, K.Kaneko, "Functional Dyanamics II" To appear in Physica D

[3] Y. Takahashi, N.Kataoka, K.Kaneko, T.Namiki "Functi Dyanamics I" to appear in JJIAM

24. 濱地敏弘-井上心（九大数理） Embeddings in symbolic dyanmics

いつ, 一方のシフトが他方のシフトの部分シフトに位相的同型になるか? これは埋め込み問題と知られ, 一方のシフトがいつ他方のシフトの準同型像になるかの問題も, 実は埋め込み問題と密接に関係していることが知られている. 従来, 埋め込み先が SFT, あるいは, sofic シフトの時には, 埋め込みの判定条件が W.Krieger, M.Boyle により知られている.

ところで, sofic shift と異なり, そのサンプルパスが過去から将来にわたりずーっと長く互いに影響しあうようなシフトとして, 最近 W.Krieger の導入した代数構造をもつシフト（性質 A を持つシフト）が注目されている. このシフトで実現されるサンプルパス間には, 積が定義され, その積はまたサンプルパスになる. このようなシフトを埋め込み先として持ってくると, その代数構造が埋め込みの障害になることが予想される. こうしたことについて, 性質 A をもつ基本的なシフトとして知られる Dyck シフトに限って, 埋め込みの判定条件を明らかにした.

25. Ka-Sing Lau (Chinese University, Hongkong) Multifractal Structure of IFS with the Weak Separation Condition

We will discuss a separation condition on the iterated function systems that allow overlaps and is weaker than the open set condition. The multifractal structure of the associated self-similar measure will be considered. Beside the general theorems, we will examine 3-fold convolution of the standard Cantor measure. There are some unexpected phenomena.

24.

ホワイトノイズ解析25年

平成13年2月6日（火）～ 7日（水）

（ＫＫＲホテル金沢）

世話人：尾畑 伸明, 齊藤公明

飛田武幸著「Analysis of Brownian Functionals」がカナダのカールトン大学から講義録13巻として発行されたのは1975年のことであった。この講義録において, 各時点毎の独立性からホワイトノイズを無限次元空間上における直交座標のように取り扱う微積分学, すなわち「ホワイトノイズ解析」が提唱されたのである。以来, 久保・竹中の一連の論文(1980–82)をはじめ, さらに多くの人々の寄与を経て, 最新のMathematical Subjects Classification 2000において, 新しい項目「60H40 White Noise Theory」が付け加わるに至った。この節目に, これまでの研究を振り返り, 今後の方向を議論するための小研究会ということで企画した。年度末の忙しい時期にも関わらず20名を越える研究者が参加し, 熱っぽい議論が交わされたことは有意義であった。

議論された話題は, ホワイトノイズ解析の最近の発展から確率変分の問題・ガウス過程の標準表現と非標準表現・ホワイトノイズ超関数の構成・作用素論とその応用。構成的場の理論からの話題提供として, ネルソン模型など相互作用モデルの厳密な数学解析の成果などである。通常の無限次元近似ができないレヴィ・ラプラシアンは, 自己共役作用素としての定式化と付随する確率過程の構成がなされ, 量子ホワイトノイズの2乗と関連するなど, 新しい結果が見出された。このような無限次元解析の具体的な問題は, ホワイトノイズ解析に対して示唆に富むものである。

シンポジウム「ホワイトノイズ解析25年」

文部省科研費基盤 (A)「平衡確率現象の総合的研究」(研究代表者：久保 泉) と同基盤 (B)「量子ホワイトノイズと非線形無限次元解析」(研究代表者：尾畑伸明) による上記シンポジウムを開催いたします。関心のある方はどなたでもご参加ください。

世話人：尾畑伸明 (名大多元数理)・齋藤公明 (名城大理工)

会場 KKR Hotel 金沢・小会議室
(金沢駅からタクシー１０分, ホームページ参照)
TEL 076-264-3261　FAX 076-264-2244
http://www.kkr.or.jp/hotel/hotels/kanazawa.htm

日程 2001年2月6日〜2月7日

プログラム

2月6日 (火)

13:10–13:20	尾畑伸明 (名古屋大学・多元数理科学研究科) 開会挨拶
13:20–14:20	飛田武幸 (名古屋大学・名誉教授) ホワイトノイズ解析で残された話題
14:30–15:10	櫃田倍之 (熊本大学・理学部) Gauss 過程の標準表現と非標準表現
15:20–16:00	廣川真男 (岡山大学・理学部) Introductory remarks on mathematical relations between energy for the mode with wave vectors and zero-point fluctuation
16:10–16:50	Si Si (愛知県立大学・情報科学部) Analysis of random fields in white noise theory
19:00–19:40	道工 勇 (埼玉大学・教育学部) ランダム媒質中の確率過程の確率解析
19:40–20:20	浅井暢宏 (国際高等研究所) Some relationships between white noise test functions and holomorphic functions
20:20–21:00	渡邉壽夫 (岡山理科大学・理学部) ホワイトノイズ解析の展望

2月7日（水）

09:00–09:50	新井朝雄 (北海道大学・理学研究科) The massless Nelson model without infrared cutoff
09:50–10:40	斉藤公明 (名城大学・理工学部) Fock spaces related to the Lévy Laplacian
11:00–11:40	廣島文生 (摂南大学・数学物理学系) Localization of the massless Nelson model: Gibbs measure approach
11:40–12:20	尾畑伸明 (名古屋大学・多元数理科学研究科) ホワイトノイズ作用素論, 最近の動向
12:20–12:25	閉会

講演概要

(尾畑伸明 記)

1. **ホワイトノイズ解析で残された話題 (飛田武幸・名古屋大学・名誉教授)**

ホワイトノイズ解析は, 伝統的な関数解析や確率解析をもとに, 他分野との活発な交流によって発展してきた。四半世紀を経て原点に立ち帰りつつ将来の展望を述べる。J. Bernoulli 著 Ars Conjectandi において確率過程の原型が論じられているが, 各時点毎にランダムネスが増えてゆくという描象が基本的であろう。マルコフ性を仮定しない一般の確率過程を確率変分方程式の解として特徴づける問題が重要な研究課題となっている。それに向けて, いくつかの例と関連する課題として, 非線形予測・一般化されたガウス場・新生過程に付随する問題がある。一方, 無限次元調和解析の立場から, 無限次元回転群の部分群の階層構造・ホワイトノイズ空間の部分多様体の幾何学などが興味深い課題となっている。

2. **Gauss 過程の標準表現と非標準表現 (櫃田倍之・熊本大学・理学部)**

ブラウン運動による確率積分

$$X(t)=\int_0^t F(t,u)dB(u)$$

が標準表現か否かは, 情報理論などを含めて基本的な問題である。非標準表現の例は P. Lévy によるものが良く知られているが, 組織的な研究は少ない。状況を見通しよく一般化するために

$$X(t)=B(t)-\int_0^t\int_0^s k(s,u)dB(u)ds$$

と変形し, Volterra 型積分作用素の問題に帰着することで非標準表現の例が N 次元拡張も見通しよく構成される [Y. Hibino, M. Hitsuda, H.Muraoka: Construction of noncanonical representations of a Brownian motion, Hiroshima Math. J. **27** (1997), 439–448]。これに関連して, 1 径数族 $\dot{X} = (I - \lambda K_g)\dot{B}$ を考えると, $\lambda < 1/2$ のとき標準, $\lambda > 1/2$ のとき非標準である ($\lambda = 1/2$ ではまだはっきりしない)。さらに, $X_{1-\lambda}$ と X_λ の分布は同じである。関連して $H_t(X) \neq H_t(B)$ だが $H_\infty(X) = H_\infty(B)$ となる現象も積分核に帰着させて議論できる。このことは, $B = (I - K_g)\dot{X}$ の解 X が適合過程でないことに密接に関連する。

3. **Introductory remarks on mathematical relations between energy for the mode with wave vectors and zero-point fluctuation (廣川真男・岡山大学・理学部)**

零点振動 (真空ゆらぎ) の結果として, 真空中に平行におかれた完全導体板に働く引力が Casimir (1948) によって予想された。その後, 様々な場合について考察されてきたが, ついに, 1997 年に Lamoreaux が実験によって観測に成功した。したがって, 数学的な基礎付けの重要性が増している。直方体 $[0, L] \times [0, L] \times [0, d]$ における零点エネルギーは, ρ をカットオフ関数として,

$$E_\epsilon^L(d) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \hbar\omega\left(\frac{\pi n_1}{L}, \frac{\pi n_2}{L}, \frac{\pi n_3}{L}\right) \rho_\epsilon^M\left(\hbar\omega\left(\frac{\pi n_1}{L}, \frac{\pi n_2}{L}, \frac{\pi n_3}{L}\right)\right)$$

で与えられる。$\hbar\omega(k_1, k_2, k_3)$ は波数ベクトル (k_1, k_2, k_3) のエネルギーであり, 考える系 (ここでは, massless photon, ある種の massive photon, normal method, 3-d cristal など) によって特定の表式が与えられている。カシミール・エネルギーは

$$E(a) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{L \to \infty} \lim_{L_3 \to \infty} \frac{E_\epsilon^L(a) + E_\epsilon(b_{L_3}) - E_\epsilon^L(L_3)}{L^2}$$

で与えられ, 上記の系に対して具体的に計算される。Casimir の結果に 4 次のベルヌイ数が現れる状況も, オイラー・マクローリン展開の結果として一般的な枠組みで理解される。

4. **Analysis of random fields in white noise theory (Si Si・愛知県立大学・情報科学部)**

$\mathbf{R}^2$ 内の C^2-級で凸な単純閉曲線 C でパラメトライズされたガウス場 $\{X(C)\}$ に対して, Lévy–Hida の標準表現理論を拡張することを考える。マルコフ性・多重マルコフ・マルチンゲール性等を定式化し, 積分核の性質で論ずることができる。非ガウス拡張に向けて 2 次のウィナーカオスによる例を計算し, 伊藤公式の一般化を求めることができる。さらに興味深い例として, Tomonaga–Schwinger 方程式をこの枠でとらえることを研究している。

5. **ランダム媒質中の確率過程の確率解析 (道工 勇・埼玉大学・教育学部)**

ランダム媒質中の非線形反応拡散方程式

$$-\frac{\partial v}{\partial s} = Lv - Yv^2, \qquad v|_{s=t} = \phi$$

を考える。L は 2 階の偏微分作用素, Y は時刻 s における触媒の密度を表し, 典型的には $\phi(w_t)$ のようなホワイトノイズの汎関数を念頭においている。L に対する一様楕円性とヘルダー連続性, Y に対するある種の漸近的性質の仮定の下で, 与えられた方程式の正值解の漸近的非退化性が示される。[I. Dôku: Asymptotic non-degeneracy of positive solutions to nonlinear parabolic equations in the superdiffusive random mediun, preprint]

6. **Some relationships between white noise test functions and holomorphic functions (浅井暢宏・国際高等研究所)**

ホワイトノイズ超関数論は, $L^2(E^*, \mu)$ に核型 rigging を構成することから始まる。これまで Kubo–Takenaka (1980) をはじめ多くの人たちによって多様な空間が構成されてきた。それらを貫く一般的な要請は, S-変換の特徴付け定理とテスト関数空間の代数的・位相的性質である。無限変数の正則関数の増大度を 1 つの実関数 u とそのルジャンドル変換で制御することで, これまでの議論を統一し, より一般的な枠組みが提供される。[N. Asai, I. Kubo and H.-H. Kuo: Log-concavity, log-convexity and growth order in white noise analysis, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. in press]

7. **ホワイトノイズ解析の展望 (渡邉壽夫・岡山理科大学・理学部)**

生物学における大澤方程式とブラウン運動の交差局所時間を例にホワイトノイズ解析を応用の観点から論ずるのは興味深い。無限次元解析は基本的に L^2-理論であり, 見本関数の性質などの詳細を議論するための道具立ての整備が必要である。Clark 公式をマリアヴァン微分あるいは飛田微分を用いて, なめらかでない汎関数に対して拡張することは以前から知られていることではある。しかし, 近年, 数理ファイナンスとの関連において再発見されより多くの応用を生み出している。これは, ホワイトノイズ解析の応用のあり方に対して示唆に富んだものである。

8. **The massless Nelson model without infrared cutoff (新井朝雄・北海道大学・理学研究科)**

量子場の具体的なモデルを数学的に厳密に議論し, スペクトルの性質, 特に基底状態の存在・非存在を明らかにすることが目標である。特に, N 個の非相対論的粒子とボーズ場の相互作用を記述する Nelson 模型に対して, これまでは Schrödinger 表現に基づくスペクトル解析が議論されており, infrared regular と infrared singular に関連させて

基底状態の存在・非存在がかなり解明されてきたが, 未だ完全な分類はできていない。さらに, 基底状態が存在しない場合も, CCR 表現を非フォック表現に取り替えることで基底状態が存在する例がある。[新井朝雄: フォック空間と量子場 (下), 朝倉書店, 2000]

9. **Fock spaces related to the Lévy Laplacian (斉藤公明・名城大学・理工学部)**

レヴィ・ラプラシアンの確率論的役割を明らかにすることを目標としている。ホワイトノイズ $\{x(t)\}$ はホワイトノイズ空間の座標系と考えられるが, 指数関数による座標変換 $x(t) \mapsto e^{ix(t)}$ をレヴィの正則汎関数に作用させて

$$\Phi(x) = \int_{T^n} f(u_1, \cdots, u_n) : e^{ix(u_1)} \cdots e^{ix(u_n)} : du_1 \cdots du_n$$

が得られる。この Φ はレヴィラプラシアンの固有関数になる。このような固有関数を集めて新たにヒルベルト空間を導入することでレヴィ・ラプラシアンを自己共役作用素として定義することができる。これによって, 半群やその確率過程による表現が得られる。[K. Saitô and A. H. Tsoi: The Lévy Laplacian as a selfadjoint operator, in "Quantum Information II," pp. 159–171, World Scientific, 1999. H.-H. Kuo, N. Obata and K. Saitô: Diagonalization of the Lévy Laplacian and related stable processes, 2001]

10. **Localization of the massless Nelson model: Gibbs measure approach (廣島文生・摂南大学・数学物理学系)**

場と相互作用する量子系は現実の物理模型として極めて重要であるが, その数学解析も近年格段に発展してきている。例えば, 光子を吸収・放出しながらエネルギーの遷移を起こす電子系はハミルトニアン $H = H_{\text{ele}} + H_{\text{rad}} + \lambda H_{\text{int}}$ で表され, そのスペクトルの性質, 特に, 基底状態の存在・非存在, 存在すればその重複度, 共鳴, 散乱理論などが極めて重要である。ネルソン模型に対する基底状態の存在・非存在に関してはSpohn の結果が基本的であるが, Betz–Hiroshima–Löriczi–Minlos–Spohn の共同研究によって, その条件と光子数の統計との関係 (例えば, $\langle N \rangle$ や $\langle e^{\beta N} \rangle$ が有限か発散か) について明らかになってきた。さらに, 運動量 k の光子数の個数の平均値 $\langle a^+(k)a(k) \rangle$ などを超関数として定式化することができた。[F. Hiroshima: Rev. Mod. Phys. B (2001), in press. 現代物理学の歴史と展望, 第 3 章, 朝倉 2001.]

11. **ホワイトノイズ作用素論, 最近の動向 (尾畑伸明・名古屋大学・多元数理科学研究科)**

1992 年頃から展開してきたホワイトノイズ作用素論は, U. C. Ji, D. M. Chung らとの共同研究などを通して少しずつ充実してきた。ホワイトノイズ作用素論は, 量子ホワイトノイズに基礎をおいた理論であるが, そのことによって従来の確率解析がいかに拡張されうるかについて, (i) 代数的確率論からの示唆; (ii) 高次ホワイトノイズと量子確率微分方程式の一般化; (iii) レヴィラプラシアンとの関連; の 3 つの観点から例示す

る。古典確率変数 X は, その分布 μ に付随する相互作用フォック空間上の作用素として $X = B^+ + B^- + \alpha_N$ ($B^\pm$ は生成・消滅作用素, α_N は個数作用素 $N = B^+B^-$ の関数) のように表現される。ブラウン運動やホワイトノイズをフォック空間上で議論することによって, ポワソン過程も同一の量子確率空間上に構成される。また, グラフの隣接作用素の漸近的スペクトル分布は, 隣接作用素を生成・消滅作用素の類似物の和に分解 (量子分解) することで, 量子的な中心極限定理の結果としてとらえることができる。このように, 古典確率変数を (一般には相互作用) フォック空間で考えることで, 古典論の公式をとらえ直すことができ, 従来の議論を越える研究対象として, 例えば (量子) ホワイトノイズの高次巾や非線形関数が登場してくる。特に, (量子) ホワイトノイズの 2 乗はレヴィ・ラプラシアンを含む熱方程式や Schrödinger 方程式の解を与えるなど予期せぬ関係が明らかになってきた。[Y. Hashimoto, N. Obata and N. Tabei: A quantum aspect of asymptotic spectral analysis of large Hamming graphs, to appear in "Quantum Information III," World Scientific, 2001. N. Obata: Quadratic quantum white noises and Lévy laplacian, to appear in Nonlinear Analysis, 2001]

25.

分担者業績リスト

[1] 会田茂樹; ループ空間上の確率解析, "数学" , (1998), 265–281.

[2] Shigeki Aida; *Uniform Positivity Improving Property, Sobolev Inequalities and Spectral Gaps,* Journal of Functional Analysis, **158**, No. 1, (1998), 152–185.

[3] Shigeki Aida; *Logarithmic derivatives of heat kernels and logarithmic Sobolev inequalities with unbounded diffusion coefficients on loop spaces,* J. Funct. Anal. **174**, (2000), 430–477.

[4] Shigeki Aida and Bruce Driver; *Equivalence of heat kernel measure and pinned Wiener measure on loop groups,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. **331**, Serie I, (2000), 709–712.

[5] Shigeki Aida; *Stochastic analysis on loop spaces,* Sugaku expositions, **13**, Number 2, (2000), 197–214.

[6] Shigeki Aida; *Precise Gaussian lower bounds on heat kernels,* in "Stochastics in Finite and Infinite Dimensions, In honor of Gopinath Kallianpur,", Birkhauser. (2000), 1–28.

[7] Shigeki Aida; *On the irreducibility of the Dirichlet forms in infinite dimensional spaces,* Osaka J. Math. (to appear)

[8] Shigeki Aida and Hiroshi Kawabi; *Short time asymptotics of certain infinite dimensional diffusion processes,* in "the Proceedings of 7th Workshop on stochastic analysis and related topics, Progress in Probability, Birkhauser (to appear)

[9] Shigeki Aida and T-S. Zhang; *On the short time asymptotics of transition probability of diffusion on path groups,* in "Potential Analysis" (to appear).

[10] Shigeki Aida; *An estimate of the gap of spectrum of Schrödinger operators which generate hyperbounded semigroups,* J. Funct. Anal. (to appear).

[10] P. Biler, Tadahisa Funaki and W.A. Woyczynski; *Fractal Burgers equations,* J. Differential Equations, **148** (1998), 9–46.

[11] 舟木直久, 相分離の確率モデルと界面の運動方程式 (Stochastic models for phase separation and evolution equations of interfaces). 数学 (Sûgaku), **50** (1998), 68–85.

[12] Tadahisa Funaki and W.A. Woyczynski; *Interacting particle approximation for fractal Burgers equation,* Stochastic Processes and Related Topics, In Memory of Stamatis Cambanis 1943-1995, edited by I. Karatzas, B.S. Rajput, M.S. Taqqu, Birkhauser, Boston (1998), 141–166.

[13] Tadahisa Funaki; *SPDE approach and log-Sobolev inequalities for continuum field with two-body intearctions,* to appear in "Proc. Japan-Germany seminar" (Hiroshima).

[14] Tadahisa Funaki; *Free boundary problem from stochastic lattice gas model. Ann. Inst. Henri Poincaré,* **35** (1999), 573–603.

[15] Tadahisa Funaki; *Singular limit for stochastic reaction-diffusion equation and generation of random interfaces,* Acta Mathematica Sinica, English Series, **15** (1999), 407–438.

[16] P. Biler, Tadahisa Funaki and W.A. Woyczynski; *Interacting paticle approximation for nonlocal quadratic evolution problems,* Probability and Mathematical Statistics, **19** (1999), 267–286.

[17] Tadahisa Funaki, *Recent results on the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model,* Hydrodynamic Limits and Related Topics, edited by S. Feng, A.T. Lawniczak and S.R.S. Varadhan, Fields Institute Communications and Monograph Series, (2000), 71–81.

[18] Tadahisa Funaki and T. Nishikawa; *Large deviations for the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model,* to appear in Probab. Theory Relat. Fields, (2001).

[19] Tadahisa Funaki and S. Olla; *Fluctuations for $\nabla\phi$ interface model on a wall,* to appear in Stoch. Proc. Appl., (2001).

[20] A. Danilenko and Toshihiro Hamachi, *On measure theoretical analogue of the Takesaki structure theorem for type III factors,* Colloquim Mathematicum vol 84/85 (2000), 485–493

[21] Toshihiro Hamachi and C.Silva, *On nonsingular Chacon transformations,* Illinois Journal Math. **44** (2000) 1–16

[22] Toshihiro Hamachi, *Canonical subrelations of ergodic equivalence relation- subrelations,* Journal of Operator Theory **43** (2000), 3–34

[23] Shunsuke Ihara, *Information transmission over continuous-time Gaussian channels with feedback,* Problems of Inform. Transmission, 35 (1999), 10–24.

[24] Shunsuke Ihara and Masashi Kubo, *Error exponent for coding of memoryless Gaussian sources with a fidelity criterion,* IEICE Trans. Fundamentals, E83-A (2000), 1891–1897.

[25] Shunsuke Ihara, *Large deviation theorems for Gaussian processes and their applications in information theory,* Acta Applicande Math., (to appear).

[26] Izumi Kubo; *Entire functionals and generalized functionals in white noise analysis,* in "Analysis on infinite-dimensional Lie groups and algebra", World Sientific (1998), 207–215

[27] Izumi Kubo, H.-H. Kuo and Ambar Sengupta; *White noise analysis on a new space of Hida distributions,* Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, **2**, No.3 (1999), 315–336

[28] Nobuhiro Asai, Izumi Kubo and H.-H. Kuo: *Bell numbers, log-concavity, and log-convexity,* in "Classical and Quantum White Noise", L. Accardi et al. (eds.) Kluwer Academic Publishers (2000)

[29] Nobuhiro Asai, Izumi Kubo and H.-H. Kuo; *Characterization of test functions in CKS-space,* in "Proc. International Conference on Mathematical Physics and Stochastic Processes", A. Albeverio et al. (eds.) World Scientific (2000)

[30] Nobuhiro Asai, Izumi Kubo and H.-H. Kuo; *CKS-space in terms of growth functions,* in "Quantum Information II", World Sci. Publishing (2000), 17–27

[31] Nobuhiro Asai, Izumi Kubo and H.-H. Kuo; *Characterization of Hida measures in white noise analysis,* in "Infinite Dimensional Harmonic Analysis" (2000), 70–83

[32] Nobuhiro Asai, Izumi Kubo and H.-H. Kuo; *Feynman integrals associated with Albeverio-Hoegh-Krohn and Laplace trasform potentials,* in "Stochastics in finite and infinite dimensions, Trends Math., Birkhäuser (2000), 29–48

[33] Nobuhiro Asai, Izumi Kubo and H.-H. Kuo; *General characterization theorems and intrinsic topologies in white noise analysis,* (2001), (to appear in Hiroshima Math. J.)

[34] Takehiko Morita; *Meromorphic extensions of a class of zeta functions for two dimensional billiards without eclipse,* Preprint Ser. Tokyo Institute of Technology 90, (1999)

[35] Takehiko Morita; *Meromorphic extensions of a class of zeta functions for two dimensional billiards without eclipse II,* Preprint Ser. Tokyo Institute of Technology 101, (2000)

[36] Takehiko Morita; *Meromorphic extensions of a class of dynamical zeta functions and their special values at s=0,* Preprint Ser. Tokyo Institute of Technology 102, (2000)

[37] Takehiko Morita; *Piecewise C^2-perturbation of Lasota-Yorke maps and their ergodic properties,* Preprint Ser. Tokyo Institute of Technology 95, (2000)

[38] 盛田健彦; 測度論と実解析の基礎，培風館 (数学レクチャーノート)， 出版予定

[39] D. M. Chung, U. C. Ji and Nobuaki Obata; *Transformations on white noise functions associated with second order differential operators of diagonal type,* Nagoya Math. J. **149** (1998), 173–192.

[40] L. Accardi, Y. Hashimoto and Nobuaki Obata; *Notions of independence related to the free group,* Infinite Dim. Anal. Quantum Prob. **1** (1998), 201–220.

[41] L. Accardi, Y. Hashimoto and Nobuaki Obata; *Singleton independence,* Banach Center Publications **43** (1998), 9–24.

[42] L. Accardi, Y. Hashimoto and Nobuaki Obata; *A role of singletons in quantum central limit theorems,* J. Korean Math. Soc. **35** (1998), 675–690.

[43] Nobuaki Obata; *A note on Hida's whiskers and complex white noise,* in "Analysis on Infinite-Dimensional Lie Groups and Algebras" (H. Heyer and J. Marion, Eds.), World Scientific, (1998), 321–336.

[44] D. M. Chung, U. C. Ji and Nobuaki Obata; *Higher powers of quantum white noises in terms of integral kernel operators,* Infinite Dim. Anal. Quantum Prob. **1** (1998), 533–559.

[45] Nobuaki Obata; *A note on normal-ordered white noise equations,* in "Invited Lectures at the VIII-th Internat. " Colloq. Differential Equations **II** (D. Kolev, Ed.), Academic Publications, Bulgaria, (1999), 109–118.

[46] Nobuaki Obata; *Wick product of white noise operators and quantum stochastic differential equations,* J. Math. Soc. Japan **51** (1999), 613–641.

[47] Nobuaki Obata, K. Oosawa and T. Yoshida; *A method for information analysis of sequences by two-dimensional pattern formation with coloration,* in "Quantum Information" (T. Hida and K. Saito, Eds.), World Scientific, (1999), 27–58.

[48] D. M. Chung, U. C. Ji and Nobuaki Obata; *Normal-ordered white noise differential equations II: Regularity properties of solutions,* in "Probability Theory and Mathematical Statistics" (B. Grigolionis et al. Eds.), VSP BV and TEV Ltd.,(1999), 157–174.

[49] K. Oosawa, Nobuaki Obata and T. Yoshida; *Colour-coding reveals tandem repeats in the Escherichia coli genome,* J. Mol. Biology **298**, (2000), 343–349.

[50] D. M. Chung, U. C. Ji and Nobuaki Obata; *Normal-ordered white noise differential equations I: Existence of solutions as Fock space operators,* in "Trends in Contemporary Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, (L. Accardi, H.-H. Kuo, Nobuaki Obata, K. Saito, Si Si, L. Streit (Eds.), Istituto Italiano di Cultura, Kyoto, (2000), 115–135,

[51] U. C. Ji and Nobuaki Obata; *Initial value problem for white noise operators and quantum stochastic processes,* in "Infinite Dimensional Harmonic Analysis", (H. Heyer, T. Hirai and Nobuaki Obata, Eds.), D.+M. Grabner, Tübingen, (2000), 203–216.

[52] Nobuaki Obata; *A note on coherent state representations of white noise operators,* in "Quantum Information II" (T. Hida and K. Saito, Eds.), World Scientific, (2000) 135–147.

[53] Nobuaki Obata; *Complex white noise and coherent state representation,* Acta Appl. Math. in press.

[54] Nobuaki Obata; *Coherent state representations in white noise calculus,* Can. Math. Soc. Proceedings Series, in press.

[55] Nobuaki Obata; *Coherent state representation and unitarity condition in white noise calculus,* J. Korean Math. Soc. **38**, (2001), in press.

[56] Nobuaki Obata; *White noise operator theory: Fundamental concepts and developing applications,* to appear in Proceedings of Volterra International School, World Scientific.

[57] Y. Hashimoto, Nobuaki Obata and N. Tabei; *A quantum aspect of asymptotic spectral analysis of large Hamming graphs,* to appear in "Quantum Information III" (T. Hida and K. Saito, Eds.), World Scientific, (2001)

[58] Nobuaki Obata; *Unitarity criterion in white noise calculus and nonexistence of unitary evolutions driven by higher powers of quantum white noises,* to appear in Proc. Mexico Guanajuato Conference Proceedings, (2001).

[59] Nobuaki Obata; *Quadratic quantum white noises and Lévy Laplacian,* to appear in Nonliner Analysis, (2001).

[60] H. Mizumachi, Hiroshi. Sato and Y. Shinowaki : *Absolute continuity of symmetric three-valued random translation of a Gaussian sequence,* in "Trends in Probability and Related Analysis" (Proceedings of the Symposium on Analysis and Probability, Taipei, 1998) World Scientific (1999), 263–272.

[61] M. Denker and Hiroshi Sato : *Sierpiński gasket as a Martin boundary I (The Martin Kernels)* , (to appear in *Potential Analysis*)

[62] M. Denker and Hiroshi Sato : *Sierpiński gasket as a Martin boundary II*

[63] Kazuaki Taira; *Brownian motion and index formulas for the de Rham complex,* Mathematical Research, No. 106, WILEY-VCH, (1998).

[64] Kazuaki Taira; *Feller semigroups with boundary conditions,* in "the Proceedings of the Third International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory" (F. Altomare et al, eds.), Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **52** (1998), 157–173.

[65] Kazuaki Taira and K. Umezu; *Semilinear elliptic boundary value problems in chemical reactor theory,* Journal of Differential Equations, **142**, No. 2 (1998), 434–454.

[66] Kazuaki Taira; *Introduction to semilinear elliptic boundary value problems,* Taiwanese Journal of Mathematics, **2**, No. 2 (1998), 127–172.

[67] Kazuaki Taira; *Boundary value problems of nonlinear elastostatics,* in "the Proceedings of the Conference on Generalized Analytic Functions – Theory and Applications" (H. Florian et al., eds.), Kluwer Academic Publishers, (1998), 183–195.

[68] Kazuaki Taira; *Bifurcation theory for semilinear elliptic boundary value problems,* Hiroshima Mathematical Journal, **28**, No. 2 (1998), 261–308.

[69] P. Palagachev, P. Popivanov and Kazuaki Taira; *A degenerate Neumann problem for quasilinear elliptic integro-differential operators,* Mathematische Zeitschrift, **230**, No. 4 (1999), 679–694.

[70] Kazuaki Taira; *Feller Semigroups and degenerate elliptic operators I,* Conferenze del Seminario di Matematica dell'Universia di Bari, No. 274, (1999).

[71] Kazuaki Taira; *Feller Semigroups and degenerate elliptic operators II,* Conferenze del Seminario di Matematica dell'Universia di Bari, No. 275, 1999.

[72] K. Umezu and Kazuaki Taira; *Growing-up positive solutions of semilinear elliptic boundary value problems,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, **238**, No. 1 (1999), 196–215.

[73] Kazuaki Taira; *Brownian motion, de Rham complex and index formulas,* in "the Proceedings of the Symposium on Analysis and Probability 1998: Trends in Probability and Related Analysis" (N. Kono and N.-R. Shieh eds.), World Scientific Publishing, (1999), 159–176.

[74] K. Umezu and Kazuaki Taira; *Positive solutions of semilinear elliptic boundary value problems in chemical reactor theory,* in "the Proceedings of the International Society for Analysis, Applications and Computation '97 Congress " (R. P. Gilbert, ed.), Kluwer Academic Publishers, (2000), 415–422.

[75] Kazuaki Taira and A. Favini and S. Romanelli; *Feller semigroups generated by degenerate elliptic operators,* Semigroup Forum, **60**, No. 2 (2000), 296–309.

[76] Kazuaki Taira and K. Umezu; *Stability in chemical reactor theory,* in "the Proceedings of the Sixth International Conference on Evolution Equations and their Applications in Physical and Life Sciences" (G. Lumer and L. Weis, eds.), Marcel Dekker, 2000, 421–433.

[77] Kazuaki Taira, P. Palagachev and P. Popivanov; *A degenerate Neumann problem for quasilinear elliptic equations,* Tokyo Journal of Mathematics, **23**, No. 1 (2000), 227–234.

[78] Kazuaki Taira; *Feller semigroups generated by degenerate elliptic operators II,* in "the Proceedings of the First International Conference on Semigroups of Operators, Theory and Applications", **42**, Birkhäuser, (2000), 304–319.

[79] Kazuaki Taira; *Positive solutions of diffusive logistic equations,* Taiwanese Journal of Mathematics, **5**, No. 1 (2001), 1–24.

[80] Kazuaki Taira, A. Favini and S. Romanelli; *Feller semigroups and degenerate elliptic operators with Ventcel' boundary conditions,* Studia Matematica, **144** (2001).

[81] Keizo Takashima *Random walk tests and Feedback Polynomials of m-sequences,* in "Proceedings of Fifth International Conference on Pattern Recognition and Information Processing" **1** (1999), 267–271.

[82] H. Sugimura and Keizo Takashima *On a Fractal Approarch to Actual Plant Images,* in "Proceedings of Fifth International Conference on Pattern Recognition and Information Processing" **2** , (1999), 134–138,

[83] Shigeo Takenaka ; *On determinism of set-indexed $S\alpha S$-processes,* in "Trends in probability and related analysis 1999" , World Scientific (1999), 285–290

[84] Makoto Maejima and Y. Naito, *Semi-selfdecomposable distributions and a new class of limit theorems,* Probab. Th. Rel. Fields, **112** (1998), 13–31.

[85] Makoto Maejima and K. Sato, *Semi-selfsimilar processes,* J. Theoret. Probab. **12** (1999), 347–383.

[86] Makoto Maejima and G. Samorodnitsky, *Certain probabilistic aspects on semistable laws,* Ann. Inst. Statist. Math. **51** (1999), 449–462.

[87] Makoto Maejima, K. Sato and T. Watanabe, *Exponents of semi-selfsimilar processes,* Yokohama Math. J. **47** (1999), 93–102.

[88] Makoto Maejima, K. Sato and T. Watanabe, *Operator semi-selfdecomposability, (C,Q)-decomposability and related nested classes,* Tokyo J. Math. **22** (1999), 473–509.

[89] Makoto Maejima, K. Suzuki and Y. Tamura, *Some multivariate infinitely divisible distributions and their projections,* Probab. Math. Statist. **19** (1999), 421–428.

[90] Makoto Maejima, K. Sato and T. Watanabe, *Distributions of selfsimilar and semi-selfsimilar processes with independent increments,* Statist. Probab. Lett. **47** (2000), 395–401.

[91] Makoto Maejima, K. Sato and T. Watanabe, *Completely operator semi-selfdecomposable distribuitons,* Tokyo J. Math. (2000), 235–253.

[92] Yasunori Okabe and Takashi Yamane; *The theory of KM_2O-Langevin equations and its applicationsto data analysis* (III): deterministic analysis, Nagoya Math. J.,**152** (1998), 175 – 201.

[93] 岡部靖憲・関本勝也・緒方純俊) 隣接する地域間における大気汚染物質濃度の相互因果解析, 計測自動制御学会論文集, **35-12** (1999), 1524 – 1529.

[94] Yasunori Okabe; *On the theory of KM_2O-Langevin equations for stationary flows (I): characterization theorem,* J. Math. Soc. Japan, **51-4** (1999), 817 – 841.

[95] Yasunori Okabe; *On the theory of KM_2O-Langevin equations for stationary flows (II): construction theorem,* to appear in the special volume in honor of the 70th birthday of Professor Takeyuki Hida, 2000.

[96] Yasunori Okabe and Masaya Matsuura; *On the theory of KM_2O-Langevin equations for stationary flows (III): extension theorem,* Hokkaido Math. J., **29**(2000), 369–382.

[97] Yasunori Okabe and Akihiko Kaneko; *On a non-linear prediction analysis for multi-dimensional stochastic processes with its applications to data analysis,* Hokkaido Math. J., **29**(2000), 601–657.

[98] Yasunori Okabe and Naoki Masuda; *Time series analysis with wavelet coefficients,* to appear in Jounal of Indust. Appl. Math., **18**(2001), 129–158.

[99] Yasunori Okabe and Masaya Matsuura; *On a non-linear prediction problem for one-dimensional stochastic processes*, to appear in Journal of Math. Soc. of Japan, 2001.

[100] Koichiro Iwata and J. Schafer; *Markov Property and cokernels of Local Operators.* London Math. Soc. (2) **56**, (1998), 657–672.