

# 定曲率空間の曲面の幾何

課題番号 11640080

平成11年度～平成12年度科学研究費補助金 基盤研究 (C)(2) 研究成果報告書

平成13年3月

研究代表者 梅原雅顕  
(広島大学大学院理学研究科教授)

## 定曲率空間の曲面の幾何

課題番号 11640080

### はしがき

平成11年度～平成12年度において、上記研究課題の研究を行った。以下その研究成果の報告である。

### 研究組織

研究代表者	:	梅原雅顕	(広島大学大学院理学研究科教授)
研究分担者	:	菅野浩明	(広島大学大学院理学研究科助教授)
研究分担者	:	土井英雄	(広島大学大学院理学研究科講師)
研究分担者	:	木幡篤孝	(広島大学大学院理学研究科助手)
研究分担者	:	本多宣博	(広島大学大学院理学研究科助手)
研究分担者	:	國分雅敏	(東京電機大学工学部講師)
研究分担者	:	井ノ口順一	(福岡大学理学部助手)
研究分担者(平成12年度)	:	松本堯生	(広島大学大学院理学研究科教授)

### 研究経費

平成11年度	1,800千円
平成12年度	1,800千円

計 3,600千円

## 研究発表

### (1) 学会誌等 (公表または公表予定論文)

- [1] M. Umehara, A unified approach to the four vertex theorem I, II, Differential and symplectic topology of knots and curves, (ed. S.Tabachnikov) American Mathematical Society Translations Series 2, 190 (1999) 185–228.
- [2] G. Thorbergsson and M. Umehara, A unified approach to the four vertex theorem II, Differential and symplectic topology of knots and curves, (ed. S.Tabachnikov) American Mathematical Society Translations Series 2, 190 (1999) 229–252.
- [3] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, Flux for mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space, and applications, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999) 2147–2154.
- [4] S. Kato, M. Umehara and K. Yamada, General existence of minimal surfaces of genus zero with catenoidal ends and prescribed flux, Communications in Analysis and Geometry 8 (2000) 83–114.
- [5] R. Aiyama, K. Akutagawa, R. Miyaoka, M. Umehara, A global correspondence between CMC-surfaces in  $S^3$  and pairs of non-conformal harmonic maps into  $S^2$ . Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 939-941.
- [6] M. Umehara and K. Yamada, Metrics of constant curvature 1 with three conical singularities on the 2-sphere, Illinois Journal of Mathematics, 44 (2000), 72-94.
- [7] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature I, Preprint.
- [8] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature II, Preprint.
- [9] A. I. Bobenko and M. Umehara, Monodromy of isometric deformations of CMC surfaces, to appear in Hiroshima Journal of Math..
- [10] M. Kokubu, M. Takahashi, M. Umehara and K. Yamada, An analogue of minimal surface theory in  $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$ , Preprint.
- [11] H. Kanno, A Note on Higher Dimensional Instantons and Supersymmetric Cycles, *Prog. Theor. Phys. Supple.* 135 (1999) 18-28.

- [12] H. Kanno and Y. Yasui, Octonionic Yang-Mills Instanton on Quaternionic Line Bundle of  $Spin(7)$  Holonomy, *J. Geom. Phys.* **34** (2000) 302-320.
- [13] T. Eguchi and H. Kanno, Five-Dimensional Gauge Theories and Local Mirror Symmetry, *Nucl. Phys.* **B586** (2000) 331-345.
- [14] N. Honda, Donaldson-Friedman construction and deformations of a triple of compact complex spaces, *Osaka J. Math.*, **36** (1999), 641-672.
- [15] N. Honda and M. Itoh, A Kummer type construction of self-dual metrics on the connected sum of four complex projective planes, *J. Math. Soc. Japan*, **52** (2000), 139-160.
- [16] N. Honda, On some twistor spaces over  $4CP^2$ , *Compositio Math.* **122** (2000), 323-336.
- [17] N. Honda, Equivariant deformations of meromorphic actions on compact complex manifolds, to appear in *Math. Ann.*
- [18] M. Kokubu, Hamiltonian systems derived from constant mean curvature surfaces in hyperbolic three-space, *Geometriae Dedicata*, (1999), 253-269
- [19] Masatoshi Kokubu, On isotropic minimal surfaces in Euclidean space, to appear in *Advanced Studies in Pure Mathematics*
- [20] J. Inoguchi, Darboux transformations on timelike constant mean curvature surfaces, *J. Geometry and Physics.* **37** (1999), 57-78
- [21] A. Fujioka and J. Inoguchi, On some generalisations of constant mean curvature surfaces, *Lobachevskii J. Math.* **3** (1999), 73-95.
- [22] A. Fujioka and J. Inoguchi, Spacelike surfaces with harmonic inverse mean curvature, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **7** (2000), 657-698.
- [24] T. Matsumoto and N. Nakagawa, Explicit description of Hopf surfaces and their automorphism groups, *Osaka J. Math.* **37** (2000) 417-424.
- [25] T. Matsumoto and T. Ohkawa, On epimorphisms and monomorphisms in the homotopy category of CW complexes, *Japan J. Math.* **26** (2000) 153-156.

(2) 口頭発表

- [1] 梅原雅顕. 「全曲率が  $8\pi$  以下の  $H^3$  の完備平均曲率 1 の曲面について」, 部分多様体論・湯沢 1999 (湯沢グランドホテル・会議場 1999 年 11 月 19 日)
- [2] 梅原雅顕. 「Surface of constant mean curvature 1 in hyperbolic 3-space」, 第 9 回日本数学会国際研究集会 (The 9th MSJ-IRI) (東京大学 2000 年 7 月 21 日)
- [3] 梅原雅顕. 「 $R^n$  の極小曲面論のある種の非コンパクト型対称空間における類似」, 2000 秋季数学会一般講演 (京都大学 2000 年 9 月 26 日)
- [4] 菅野浩明. 「Octonionic instantons on quaternionic line bundle」, Summer Institute 99 (日経連人材開発センター 1999 年 8 月)
- [5] 本多宣博. 「Meromorphicity of actions on compact twistor spaces」, Hayama Symposium 99 on several complex variables (葉山 1999 年 12 月)
- [6] 本多宣博. 「Equivariant deformations of LeBrun twistor spaces」, 6th Symposium on complex geometry (菅平(長野) 2000 年 11 月)
- [7] 國分雅敏. 「On a construction of higher codimensional minimal surfaces based on Enneper's surface and the catenoid」, 研究集会 極小曲面論とその周辺領域の総合的研究 (京都大学数理解析研究所 1999 年 6 月)
- [8] 國分雅敏. 「カテナイドの全曲率に注目した特徴づけ」, 研究会「部分多様体論・湯沢 1999 (新潟県越後湯沢 1999 年 11 月)
- [9] 國分雅敏. 「ある種の対称空間における正則な Gauss 写像をもつ曲面」, 筑波大学微分幾何学研究会 幾何学と変分問題 (筑波大学 2000 年 12 月)
- [10] 國分雅敏. 「On surfaces with holomorphic Gauss map in a certain symmetric space」, The First International Symposium on Differential Geometry (城西大学 2001 年 2 月)
- [11] 井ノ口順一. 「可積分な曲面-離散化された微分幾何へむけて-」, 京都大学数理解析研究所短期共同研究 離散可積分系に関する最近の話題 (1999 年 8 月 2 日)
- [12] 井ノ口順一. 「Soliton theoretic approach to surface geometry」, 日本数学会幾何学分科会 第 46 回幾何学シンポジウム (東京大学 1999 年 8 月 4 日)
- [13] 井ノ口順一. 「離散射影微分幾何学早分かり」, 京都大学数理解析研究所短期共同研究 離散可積分系の研究の進展-超離散化・量子化- (2000 年 8 月 3 日)

## 研究成果

平均曲率一定の曲面の幾何学は、近年の微分幾何の急激な発展と共に、極小曲面の3次元多様体のトポロジーへの応用、あるいは平均曲率一定のトーラスとソリトン方程式との関連を通して急激な発展を遂げている。筆者自身、過去の研究において熊本大の山田氏、神戸大の Rossman 氏の協力のもと、3次元双曲型空間  $H^3$  の平均曲率1の曲面について研究を行い、リーマン面上の円錐的特異点をもつ定曲率1の計量との対応を示した。また、曲面の存在・非存在を判定する上で重要な、フラックス・ベクトルとよばれる各エンドの向きと大きさを測るベクトルを、関数論的立場から具体的に計算する公式を導き、これらを用いて、多くの曲面の例を構成し、その性質を調べてきた。今回の研究では、これらの方法をさらに深めることで定曲率空間の平均曲率一定の曲面とそれに関連する分野において研究代表者、分担者間の交流の中で以下のような研究成果を得た。

1. 研究代表者 梅原雅顕は、Wayne Rossman 氏（神戸大）、山田光太郎氏（熊本大）との共同研究で、3次元双曲型空間  $H^3$  の平均曲率1の曲面について研究を行い、リーマン面上の円錐的特異点をもつ定曲率1の計量との対応を利用して、研究分担者と情報交換、研究連絡を行いながら、3次元双曲型空間の平均曲率1の完備な曲面について、全曲率が  $4\pi$  以下の場合の分類を完成させた。（文献番号 [7].）
2. 3次元双曲型空間  $H^3$  の平均曲率1の曲面には、その双対曲面が存在し、双対曲面の全曲率は、 $\mathbf{R}^3$  の極小曲面と同様に Osserman 型の不等式を満たし  $4\pi$  の整数倍の値をとるなど、もとの曲面の全曲率より幾何学的に顕著な性質をもつことが知られている。研究代表者 梅原雅顕は、Wayne Rossman 氏（神戸大）、山田光太郎氏（熊本大）との共同研究で、双対全曲率が  $4\pi$  以下の3次元双曲型空間の平均曲率1の完備な曲面についても分類を行い、さらに  $8\pi$  以下の曲面についても存在や非存在について多くの結果を得た。特に非存在を示す際に、上述のフラックス・ベクトルの性質を用いた。（文献番号 [8].）
3. 研究代表者 梅原雅顕は、研究分担者の國分雅敏氏、高橋正郎氏、山田光太郎氏（熊本大）との共同研究を行い上述の  $H^3$  の平均曲率1の曲面理論が、ある種の non-compact 型対称空間のガウス写像が正則になる曲面の理論に拡張できることを発見し、このような曲面を記述する新しい表現公式をつくり、新しい例をいくつか構成した（文献番号 [10]）。
4. 研究代表者 梅原雅顕は、最近、相山女史、芥川氏、宮岡氏との共同研究（文献番号 [5]）で3次元球面と3次元ユークリッド空間の平均曲率一定の閉曲面の等長はめ込みの数が有限であることを示したが、本研究では、ベルリン工科大学の Bobenko 氏と共同で3次元双曲型空間の曲面についても同様の結果を示した。（文献番号 [9]）
5. 研究分担者 菅野浩明は、数理物理的な見地からインスタントンについての研究を行った。（文献番号 [11], [12], [13].）

6. 研究分担者 本多宣博は、コンパクト4次元多様体の自己双対計量のモジュライについて、ツイスター空間の複素幾何学の立場から研究を行った。(文献番号 [14], [15], [16], [17]).
7. 研究分担者 國分雅俊は、ハミルトン系に着目し、3次元双曲型空間のと平均曲率一定の曲面の研究を行った。またユークリッド空間の isotropic な極小曲面の全曲率に関する研究を行い、新しい例を構成した。(文献番号 [18], [19]).
8. 研究分担者 井ノ口順一は、ハイゼンベルグ群や可解群、3次元 Minkowski 空間など、さまざまな空間の平均曲率一定曲面について可積分系の立場から研究を行った。(文献番号 [20], [21], [22]). また平成12年9月に京都大学数理解析研究所の短期共同研究「アファインはめ込みにおける可積分系」を主催した。
9. 研究分担者 松本堯生は 位相幾何学的な立場から Hopf 曲面の自己同型等についての研究を行った。(文献番号 [24], [25]).

上述の研究成果のうち、研究代表者と研究分担者の現在学会誌等への投稿準備中あるいは掲載予定の主要な論文(文献番号 [7], [8], [9], [10]) を以下に添付した。