

# 写像の大域的特異点論と多様体の諸構造

(課題番号 11440022)

平成11年度～平成12年度科学研究費補助金  
(基盤研究(B)(2)) 研究成果報告書

平成13年3月

研究代表者 佐伯 修

(広島大学大学院理学研究科)

助教授

## はしがき

多様体間の  $C^\infty$  級写像, 及びその特異点についての研究は, 古くは 1940 年代の Whitney や 1950 年代の Thom に始まり, その後大きな発展を遂げた. 特に, 局所的性質 (与えられた写像の, ある点のまわりでの芽としての性質) に関する研究が多くなされ, 現在では多くの理論・道具が確立されている.

一方多様体論に関しては, 1970 年代までに 5 次元以上の高次元多様体論がかなり発展し, その中で, 多様体の諸構造に関する大変興味深い事実が次々と発見されていった. 特に, 一つの位相多様体の上いくつもの異なった微分構造 (これを異種微分構造という) が入ることが, 多くの例とともに発見され, 微分位相幾何学の世界に衝撃を与えた. もともと一様な構造を持った数学的対象上で微分・積分を行うために考え出された概念が多様体であったわけで, その上にいくつもの微分構造が存在し得る, という事実は大変なことだったわけである. さらに, 最近になって 4 次元多様体に関する研究が進み, 上のような異種微分構造が 5 次元以上に比べるとさらに豊富に存在し, むしろそういったものがある方が自然である, という状況が明らかにされるまでになってきている.

このように, 多様体の構造の研究はかなり盛んに研究されてきたし, 現在でも研究されているわけであるが, こうしたことの, 写像の大域的特異点論の立場からの研究は, 重要であるにもかかわらず, ほとんどなされてきていなかった. その大きな理由の一つとして, たとえば Morse 関数 (本質的には多様体のハンドル分解といっても同じである) を使っても, 多様体の微分構造に関する情報は失われてしまい, 多様体の構造の究明にはあまり役に立たない, ということが挙げられよう. また, 値域多様体の次元を一般にしてみると, 現れる特異点の型が複雑になりすぎてしまって, 手に追えない状況になることがある, という理由もある. ところが最近, 実数に値を取る関数ではなく, 多様体に値を取る写像とその特異点を本質的に用いることにより, 多様体の微分構造に関する情報が取り出せることがあるという例が発見され始めた. この結果により, 多様体の構造の究明に, 多様体間の写像とその特異点の研究が大変重要であることがあらためて浮き彫りになったといえよう.

そこで本研究では, 多様体間の微分可能写像とその特異点を用いて, 多様体の構造, 特にその微分構造を解明することを目的とした. その結果, その完全解明はもちろんできなかったが, いくつかの足がかりとなる結果がかなり多く得られたのではないかと思う. これにより, こうしたアプローチの妥当性が再び正当化されたと言って良いであろう. 今後こうした手法をさらに精密化することにより, 多様体の諸構造を解明してゆくことが大いに期待されるところである.

平成 13 年 3 月

研究代表者 佐伯 修

(広島大学大学院理学研究科)

## 研究組織

- 研究代表者： 佐伯 修 (広島大学大学院理学研究科助教授)  
研究分担者： 佐久間 一浩 (近畿大学理工学部講師)  
研究分担者： 菅野 浩明 (広島大学大学院理学研究科助教授)  
研究分担者： 寺垣内 政一 (広島大学教育学部助教授)  
研究分担者： 高田 功 (大島商船高等専門学校一般科目助教授)  
研究分担者： 河本 裕介 (防衛大学校総合教育学群助手)

## 研究経費

平成11年度	2,200千円
平成12年度	1,900千円
計	4,100千円

## 研究発表

### (1) 学会誌等

1. O. Saeki and K. Sakuma, Special generic maps of 4-manifolds and compact complex analytic surfaces, *Math. Ann.* **313** (1999), 617–633.
2. O. Saeki, On punctured 3-manifolds in 5-sphere, *Hiroshima Math. J.* **29** (1999), 255–272.
3. A. Katanaga, O. Saeki, M. Teragaito, and Y. Yamada, Gluck surgery along a 2-sphere in a 4-manifold is realized by surgery along a projective plane, *Michigan Math. J.* **46** (1999), 555–571.
4. W. Motta and O. Saeki, A two colour theorem and the fundamental class of a polyhedron, in “Real and complex singularities”, ed. J.W. Bruce and F. Tari, Proceedings of the 5th Workshop on Real and Complex Singularities, Brazil, CHAPMAN & HALL/CRC Research notes in Math. **412**, 2000, pp.94–109.
5. O. Saeki, Real Seifert form determines the spectrum for semiquasihomogeneous hypersurface singularities in  $\mathbb{C}^3$ , *J. Math. Soc. Japan* **52** (2000), 409–431.
6. W. Motta, M. Rachidi, and O. Saeki, Convergent  $\infty$ -generalized Fibonacci sequences, *Fibonacci Quarterly* **38** (2000), 326–333.
7. O. Saeki, Theory of fibered 3-knots in  $S^5$  and its applications, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **6** (1999), 691–756.
8. C. Biasi, J. Daccach and O. Saeki, On  $R$ -bordism of maps and obstruction to topological embeddings, *Osaka J. Math.* **37** (2000), 527–535.

9. V.L. Carrara, M.A.S. Ruas, and O. Saeki, Maps of manifolds into the plane which lift to standard embeddings in codimension two, *Topology Appl.* **110** (2001), 265–287.
10. J.J. Nuño Ballesteros and O. Saeki, Euler characteristic formulas for simplicial maps, to appear in *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*
11. C. Biasi, J. Daccach and O. Saeki, A primary obstruction to topological embeddings for maps between generalized manifolds, to appear in *Pacific J. Math.*
12. T. Kobayashi and O. Saeki, Rubinstein-Scharlemann graphic of 3-manifold as the discriminant set of a stable map, *Pacific J. Math.* **195** (2000), 101–156.
13. B. Bernoussi, W. Motta, M. Rachidi and O. Saeki, Approximation of  $\infty$ -generalized Fibonacci sequences and their asymptotic Binet formula, to appear in *Fibonacci Quarterly*.
14. C. Biasi, J. Daccach and O. Saeki, A primary obstruction to topological embeddings and its applications, to appear in *Manuscripta Math.*
15. L.A. Lucas and O. Saeki, Diffeomorphisms of a product of spheres and embedded spheres, to appear in *Topology Appl.*
16. H. Kanno, A note on higher dimensional instantons and supersymmetric cycles, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **135** (1999), 18–28.
17. H. Kanno and Y. Yasui, Octonionic Yang-Mills instanton on quaternionic line bundle of *Spin*(7) holonomy, *J. Geom. Phys.* **34** (2000), 302–320.
18. T. Eguchi and H. Kanno, Five-dimensional gauge theories and local mirror symmetry, *Nucl. Phys.* **B586** (2000), 331–345.
19. S. Fukuhama, M. Ozawa and M. Teragaito, Genus one, three-bridge knots are pretzel, *J. Knot Theory Ramifications* **8** (1999), 879–885.
20. H. Goda and M. Teragaito, Dehn surgeries on knots which yield lens spaces and genera of knots, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **129** (2000), 501–515.
21. M. Teragaito, Creating Klein bottles by surgery on knots, to appear in *J. Knot Theory Ramifications*.
22. S. Lee, S. Oh and M. Teragaito, Dehn fillings creating essential spheres and tori, to appear in *J. Knot Theory Ramifications*.
23. Y. Kawamoto, Homotopy classification of three connected cover with modular cohomology, *J. Math. Kyoto Univ.* **39** (1999), 319–330.

24. Y. Kawamoto, Loop spaces of  $H$ -spaces with finitely generated cohomology, Pacific J. Math. **190** (1999), 311–328.
25. Y. Kawamoto, Homotopy classification of higher homotopy commutative loop spaces with finitely generated cohomology, Hiroshima Math. J. **30** (2000), 317–344.
26. Y. Kawamoto and J.P. Lin, Homotopy commutativity of  $H$ -spaces with finitely generated cohomology, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

(2) 口頭発表

1. O. Saeki, Converse of the Jordan-Brouwer theorem for generic mappings, Colloquium in Peking University, 1999年4月2日.
2. O. Saeki, Theory of fibered 3-knots in  $S^5$  and its applications, 東京都立大学談話会, 1999年7月8日.
3. O. Saeki, Generic maps and characterizations of embeddings, Kagoshima Singularity Seminar – on the global theory of singularities of smooth mappings, 鹿児島大学理学部, 1999年7月19日.
4. 佐伯修, Generic maps into the plane which lift to standard embeddings in codimension two, いろいろなカテゴリーでの多様体のトポロジーと特異点, 和歌山市民会館, 1999年9月8日.
5. 佐伯修, Fibered knots and isotopy of 4-manifolds, 低次元トポロジーとラック (II), 東京大学数理科学研究科, 1999年10月22日.
6. 佐伯修, Topics from global theory of singularities of differentiable mappings I, II, 関西微分解析セミナー, 近畿大学, 1999年11月26日, 27日.
7. 佐伯修, 特異曲面のオイラー標数公式とその応用, 『曲面, 線叢, 偏微分方程式』, KKR鹿児島敬天閣, 2000年1月21日.
8. 佐伯修, Special generic maps of 4-manifolds and compact complex analytic surfaces, 広島大学トポロジーセミナー, 2000年1月25日.
9. 佐伯修, 安定写像と特異ファイバーのトポロジー, 山口大学談話会, 2000年5月16日.
10. O. Saeki, Topology of singular fibers of stable maps, 特異点論と力学系, 京都大学数理解析研究所, 2000年6月1日.
11. O. Saeki, Stable maps and their singular fibers, The 6th Workshop on Real and Complex Singularities, São Carlos, Brazil, 2000年7月17日.

12. O. Saeki, Open books and isotopy of 4-manifolds, XII Encontro Brasileiro de Topologia, Niteroi, Brazil, 2000年8月4日.
13. O. Saeki, Open books on 5-manifolds and stable mapping class groups of 4-manifolds (Structures open book sur les variétés de dimension 5 et mapping class groupes stables des variétés de dimension 4), Geometry and Topology Seminar, Strasbourg, 2000年9月13日.
14. 佐伯修, 球面3つの直積の余次元1埋め込みについて, 広島大学トポロジーセミナー, 2000年10月17日.
15. 佐伯修, スペシャル・ジェネリック写像のコボルディズム群について, 埼玉大学談話会, 2000年10月27日.
16. K. Sakuma, Several problems in global singularity theory, 特異点論とその応用, 京都大学数理解析研究所, 1999年6月.
17. 菅野浩明, Octonionic instantons on quaternionic line bundle, Summer Institute 99, 日経連人材開発センター, 1999年8月.
18. 菅野浩明, Seiberg-Witten theory and five dimensional SUSY gauge theory, 集中講義, 中央大学理工学部, 1999年9月.
19. 菅野浩明, BRST 変換と群のコホモロジー, 集中講義, 立命館大学理工学部, 2001年2月.
20. M. Teragaito, Dehn surgeries on knots which yield lens spaces and genera of knots, テキサス大学オースチン校トポロジーセミナー, 1999年9月27日.
21. M. Teragaito, Toroidal Dehn fillings and lens spaces, サウスアラバマ大学談話会, 2000年2月24日.
22. M. Teragaito, Toroidal Dehn fillings and lens spaces, テキサス大学オースチン校トポロジーセミナー, 2000年3月5日.
23. 寺垣内政一, Toroidal Dehn fillings and lens spaces, Dehn surgery による3次元多様体の研究, 京都大学数理解析研究所, 2000年5月10日.
24. 寺垣内政一, Osoinach の論文の紹介, Dehn surgery による3次元多様体の研究, 京都大学数理解析研究所, 2000年5月12日.
25. M. Teragaito, Dehn surgery on crosscap number two knots and projective planes, Knots 2000 and the 8th Korea-Japan School of Knots and Links, Yongpyong resort, 2000年8月2日.

26. 寺垣内政一, Toroidal Dehn fillings and lens spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 京都大学, 2000年9月26日.
27. 寺垣内政一, Toroidal Dehn fillings and lens spaces, 結び目の不変量と幾何構造, 大阪市立大学文化交流センター, 2000年10月16日.
28. 寺垣内政一, Toroidal Dehn surgery on hyperbolic knots, 東京女子大学トポロジーセミナー, 2000年12月2日.
29. I. Takata, On lowest dimensions for embeddings of orientable manifolds up to unoriented cobordism, XII Encontro Brasileiro de Topologia, Universidade Federal Fluminense Instituto de Matemática (Niterói, Brazil), 2000年8月.
30. I. Takata, On lowest dimensions for embeddings of orientable manifolds up to unoriented cobordism,パウリスタ大学談話会, Universidade Estadual Paulista (Rio Claro, Brazil), 2000年8月8日.
31. I. Takata, On symmetric characteristic classes for embeddings of orientable manifolds up to unoriented cobordism, サンカルロス州立大学談話会, Universidade Federal de São Carlos (São Carlos, Brazil), 2000年8月10日.
32. 河本裕介, ループ空間の高次ホモトピー可換性について, 第46回トポロジーシンポジウム, 北海道大学学術交流会館, 1999年7月.
33. 河本裕介, Homotopy associative  $H$ -spaces with  $A_3$ -power maps, 1999年度ホモトピー論シンポジウム, 信州大学理学部, 1999年10月.
34. Y. Kawamoto, Higher homotopy associativity and commutativity of  $H$ -spaces with finitely generated cohomology, JAMI (Japan-U.S. Mathematical Institute) conference on "Recent Progress in Homotopy Theory", Johns Hopkins University, 2000年3月.
35. 河本裕介, ホップ空間の高次ホモトピー可換性について, 日本数学会2000年度秋季総合分科会, 京都大学総合人間学部, 2000年9月.
36. 河本裕介, Higher homotopy commutativity of  $H$ -spaces with finitely generated cohomology, 福岡ホモトピー論セミナー, 福岡大学セミナーハウス, 2000年12月.

### (3) 出版物

1. 中原幹夫著 (佐久間一浩・中原幹夫共訳), 理論物理学のための幾何学とトポロジー I, ピアソンエデュケーション, 2000年4月.

## 研究成果

### (1) 安定写像と多様体の微分構造の研究

4次元 $C^\infty$ 級多様体から3次元空間へのジェネリックな $C^\infty$ 級写像について研究を行い、いくつかの新しい結果を得た。まず、もっとも簡単な特異点である定値折り目特異点しか持たない写像について考察し、そのような写像を許容する4次元多様体の微分構造について調べた。そしてそのような写像を許容する複素曲面を完全に決定することに成功した。さらに、4次元多様体から3次元空間への一般の $C^\infty$ 安定写像についても詳しく調べ、そのStein分解の多面体としての局所的構造を完全に決定した。さらにそういった安定写像の特異ファイバーの位相型を詳しく調べ、それらの個数に関する新しい結果を得た。いままで特異点の個数に関する公式はいくつか知られていたが、特異ファイバーの個数に関する公式はこれまでになく、この結果は大域的特異点論の今後の発展に大きく貢献するものと思われる。さらに、今まで知られていなかった特殊な性質をもつ安定写像を具体的に構成することにも成功した。また、単体写像に対する2色定理と、それに関連するオイラー標数公式を導き出し、それを安定写像に応用して、特異点の個数に関する新しい結果も得た。

今後は、複雑な特異点を消去できるかどうか、その障害について調べることが課題であるが、そのためには特異点のみでなく、特異ファイバーの挙動に注目することも必要であることが本研究で明らかとなった。これについて詳しく調べてゆくのが今後の研究課題の一つである。

### (2) 安定写像と結び目理論の研究

平面への安定写像が与えられたとき、その持ち上げとなる余次元2の埋め込みが常に自明なものになる十分条件について調べ、新しい結果を得た。

### (3) 安定写像と位相的埋め込みの研究

与えられた写像が位相的埋め込みにホモトピックとなるための障害類について、特異点理論の立場から調べ、そのはめ込み問題への応用などを得た。

### (4) インスタントン解に関する研究

特殊ホロノミー群をもつ高次元リーマン多様体上のインスタントン解に関する研究を行った。特に、4次元 $A_1$ 型ALE空間(Eguchi-Hanson空間)の自然な高次元化と考えられる8次元 $Spin(7)$ 多様体上で、8元数的インスタントン方程式の球対称解の構成を行った。しかし、この方程式のモジュライ空間の幾何学の理解はまだ不十分であり、今後の課題として残されている。

### (5) 超対称ゲージ理論の研究

局所ミラー対称性の視点から5次元超対称ゲージ理論の研究を行った。特に、Hirzebruch曲面 $F_2$ およびその $N(< 5)$ 点blow upに対して局所ミラー対称性を適用して得られる楕円曲線の族を考え、それに基づいて5次元超対称ゲージ理論のプレポテンシャルを計算し



た. この結果を  $S^1$  上にコンパクト化して 4 次元超対称ゲージ理論と関係づけることによって Seiberg-Witten 理論に対する新しい見方が得られた.

(6) 3 次元多様体内の双曲型結び目のデー手術の研究

3 次元多様体内の双曲型結び目のデー手術により, 非双曲的な多様体を生じる場合を例外的デー手術という. 双曲型結び目は, 3 次元多様体内において最も一般的な結び目の族であり, そのデー手術によって, 有限個の例外を除いて常に双曲的多様体を生じることが知られている. 従って, 現在のデー手術研究の中心課題は, 例外的デー手術における現象の分析とあってよい.

この 2 年間に於いて取り組んだ例外的デー手術は, 次の 4 種類である:

- (ア) クラインボトルを生成する場合
- (イ) レンズ空間を生成する場合
- (ウ) 射影平面を生成する場合
- (エ) 本質的トーラスを生成する場合

(ア), (イ) に関しては, 結び目の種数を用いてデー手術に対する制限を与えた. 特に, 結び目の種数が 1 の場合においては, 完全な結果を得た. (ウ) については, 結び目の向き付け不可能種数が 2 ならば, 射影平面の生成は不可能であることを示すことができた. (エ) については, 任意の整数が, ある双曲型結び目の例外的デー手術のスロープとして実現可能であることを証明した.

(7) コボルディズムを法とするはめ込みの研究

以前, 任意の  $n$  次元向き付け可能閉多様体がコボルディズムを法としてどれほど低い次元のユークリッド空間にはめ込むことができるかを考察し, すべての次元について最良の結果を得ることができた. 今回は, 埋め込みについて考察し次の結果を得ることができた. ここで, 自然数  $n$  に対して  $\alpha(n)$  は  $n$  を 2 進数で表したときの 1 の数を,  $\nu(n)$  は  $n = (2m+1)2^{\nu(n)}$  で定義される自然数を表すとき,

$$\beta(n) = 2n - \alpha(n) - \min\{\alpha(n), \nu(n)\}$$

である.

**定理.**  $n \geq 4$  のとき, 任意の向き付け可能閉多様体  $M^n$  はコボルディズムを法として  $\mathbb{R}^{\gamma(n)}$  に埋め込むことができる.

- (a)  $\alpha(n) \leq \nu(n)$  のとき  $\gamma(n) = \beta(n) + 1$ .
- (b)  $\alpha(n) > \nu(n)$ ,  $\alpha(n) + \nu(n)$  が偶数で  $n \equiv 1$  または  $2 \pmod{4}$  のとき  $\gamma(n) = \beta(n) + 1$ .
- (c)  $n = 13$  のとき  $\gamma(n) = \beta(n) + 1$ .
- (c)  $\alpha(n) > \nu(n)$ ,  $\alpha(n) + \nu(n)$  が奇数 ( $n \neq 13$ ) のとき  $\gamma(n) = \beta(n)$ .
- (e)  $\alpha(n) > \nu(n)$ ,  $\alpha(n) + \nu(n)$  が偶数で  $n \equiv 0$  または  $3 \pmod{4}$  のとき  $\gamma(n) = \beta(n) - 1$ .

この定理において、 $n$  が 13 のときを除いたすべての次元で最良の結果であることも証明できた。

(8) 多元環のコホモロジー環による実現可能性についての研究

空間  $X$  に対して、その  $\mathbf{Z}/p$  係数のコホモロジー環  $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$  は  $\mathbf{Z}/p$  上の多元環であり、さらに Steenrod 代数上の加群となることが知られている。逆に、この性質をもった多元環が、ある空間のコホモロジー環として実現可能であるかを調べることは、ホモトピー論の代数的側面を研究する上で重要な問題と言える。今回、Mimura-Toda, Harper, Cooke-Smith 等によって構成された空間のコホモロジー環を一般化したある種の多元環を考え、その実現可能性と実現の一意性に関して様々な結果を得た。

(9) ホップ空間上のループ空間のホモトピー型に関する研究

Aguadé-Smith は、 $X$  が単連結なホップ空間でそのループ空間  $\Omega X$  が有限次元ならば、 $X$  はトーラス ( $S^1$  の直積) にホモトピー同値であることを示している。今回、 $X$  が単連結なホップ空間でそのループ空間のコホモロジー環  $H^*(\Omega X; \mathbf{Z}/p)$  が有限生成環であるならば、 $X$  は Eilenberg-MacLane 空間の直積にホモトピー同値であることを証明した。この結果は Aguadé-Smith の結果を有限次元でないループ空間の場合に一般化している。

(10) ループ空間の高次ホモトピー可換性についての研究

(9) で扱った問題をさらに精密に調べるために、ループ空間の高次ホモトピー可換性についての研究を行った。今回、Sugawara, Williams 等によって導入された高次ホモトピー可換性を備えたループ空間 ( $C_n$ -空間) を扱い、コホモロジー環が有限生成環であるという仮定のもとで、それらのホモトピー型をほぼ完全に分類する結果を得た。特に、 $C_p$ -空間を  $p$ -完備化すると、Eilenberg-MacLane 空間の直積にホモトピー同値であることを証明しており、(9) の結果を一般化、精密化している。