リーマン多様体の等長埋め込み

(研究課題番号　１０６４００７９)

平成10年度～平成12年度科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)）
研究成果報告書

平成１３年３月

研究代表者　阿　賀　岡　　芳　夫
広島大学 総合科学部 助教授

リーマン多様体の等長埋め込み

(研究課題番号　１０６４００７９)

平成10年度～平成12年度科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)）
研究成果報告書

平成１３年３月

研究代表者　阿　賀　岡　　芳　夫
広島大学 総合科学部 助教授

はしがき

平成10年度から平成12年度の間、科学研究費の補助金を得てリーマン多様体の等長埋め込みについての研究を行った．この報告書ではこの研究課題に関して、この期間中に得られた結果・知見・今後の展開の可能性について報告する．

リーマン多様体の等長埋め込みの問題は微分幾何学における古典的な問題の 1 つであり、現在までに様々な研究が行われてきている．その中でも特に重要なのはナッシュによる埋め込み定理であり、この結果はその後多くの数学者によって改良され今日に至っている．
しかし、このような一般論から離れて具体的なリーマン多様体の等長埋め込みに目を向けると、多くの未解決の問題が残されていることに気付く．上記のナッシュの埋め込み定理により、すべてのリーマン多様体は十分に高い次元のユークリッド空間に等長に埋め込めるのであるが、一旦そのことが示されれば、次の自然な問題として埋め込み可能な最小次元を求めよ、ということが考えられる．しかし具体的な空間に対するこの種の問題の解答はほとんど得られていなかったといってよい．例えば対称空間というリーマン多様体の中でも特にきわだった性質を持つ空間に対してすら、最小次元が確定していたのは定曲率空間の場合だけであったという事実は、この問題の自然さ・歴史の長さに比して意外なことだといってもよい．
本研究ではこの穴を埋めるべく、微分幾何学・代数学・表現論の様々な手法を駆使して問題解決に取り組み、多くの成果をあげることができた．その成果のあらましを簡単ではあるが、本報告の研究成果の欄にまとめておいた．また、特に重要な論文・報告書を本報告書の末尾に添付した．
本研究の期間中には問題の完全解決には至れなかったとはいうものの、いくつかの空間については最小次元を新たに確定することができ、また残された空間に対しても有効であると思われるいくつかの方法・手法を開発し、今後への見通しをたてることができた．また一方、その結果として解決されるべき問題を新たに提出することにもなった．これら未解決の問題については、本研究終了後もここで得られた知見をもとに、更に研究を展開してゆく予定でいる．

最後になったが、本研究期間中ご協力いただいた研究者の方々にこの場を借りて深く感謝する．

阿賀岡 芳夫

研究組織

研究代表者	阿賀岡　芳夫	(広島大学総合科学部助教授)
研究分担者	吉田　敏男	(広島大学総合科学部教授)
	中山　裕道	(広島大学総合科学部助教授)

研究経費

平成１０年度	５００千円
平成１１年度	５００千円
平成１２年度	５００千円
計	1,５００千円

研究発表

(1) 学会誌等

1. Y. Agaoka and E. Kaneda, *Local isometric imbeddings of symplectic groups*, Geometriae Dedicata **71** (1998), 75–82.

2. Y. Agaoka, *A new example of higher order almost flat affine connections on the three-dimensional sphere*, Houston J. Math. **24** (1998), 387–396. Errata, **24** (1998), 759.

3. Y. Agaoka, I.-B. Kim, B. H. Kim and D. J. Yeom, *On doubly warped product manifolds*, Mem. Fac. Integrated Arts and Sci., Hiroshima Univ., Ser.IV, Science Report, **24** (1998), 1–10.

4. 阿賀岡芳夫, 概平坦なアファイン構造について (*On almost flat affine structures*),「シンプレクティック幾何学とその周辺」(於秋田大学) アブストラクト, (1998), pp.1–4.

5. 阿賀岡芳夫, 3 次元 Brieskorn 多様体上の概平坦アファイン構造, 「群作用と幾何学」, 筑波大学微分幾何学研究集会 予稿集, (1998), 9–15.

6. Y. Agaoka, *Combinatorial conjectures on the range of Young diagrams appearing in plethysms*, Technical Report No.**59**, The Division of Math. Inform. Sci., Fac. Integrated Arts and Sci., Hiroshima Univ., (1998), pp.1–184.

7. 阿賀岡芳夫, 3 次元球面上の概平坦アファイン構造, 「測地線の微分幾何学」(於京都工芸繊維大学) アブストラクト, (1998), pp.1–8.

8. Y. Agaoka, *On the variety of* 3*-dimensional Lie algebras*, Lobachevskii J. Math. **3** (1999), 5–17. (Online journal, http://ljm.ksu.ru/)

9. Y. Agaoka, *Solutions and almost solutions of the Gauss equation of* $SU(3)/SO(3)$, Mem. Fac. Integrated Arts and Sci., Hiroshima Univ., Ser.IV, Science Report, **25** (1999), 1–10.

10. Y. Agaoka, B. H. Kim and H. J. Lee, *Conharmonic transformations of twisted product manifolds*, Mem. Fac. Integrated Arts and Sci., Hiroshima Univ., Ser.IV, Science Report, **25** (1999), 11–20.

11. 阿賀岡芳夫, 4 次元 Lie 環の variety について, 「Symplectic Geometry とその周辺」(於岐阜経済大学) アブストラクト, (1999), 41–57.

12. Y. Agaoka, *Left invariant Poisson structures on classical non-compact simple Lie groups*, Israel J. Math. **116** (2000), 189–222.

13. Y. Agaoka, *On the Gauss equation in the exterior algebra*, Mem. Fac. Integrated Arts and Sci., Hiroshima Univ., Ser.IV, Science Report, **26** (2000), 95–108.

14. Y. Agaoka, B. H. Kim and S. D. Lee, *Conharmonically flat fibred Riemannian space*, Mem. Fac. Integrated Arts and Sci., Hiroshima Univ., Ser.IV, Science Report, **26** (2000), 109–115.

15. Y. Agaoka, *Uniqueness of left invariant symplectic structures on the affine Lie group*, Proc. Amer. Math. Soc., (2001), pp.1–10, (published online).

16. 阿賀岡芳夫, 対称空間の局所等長埋め込み — Gauss 方程式の現在と展望 —, 日本数学会 (於慶応義塾大学) 幾何学分科会特別講演原稿 (2001), pp.1–16.

17. Y. Agaoka and E. Kaneda, *Strongly orthogonal subsets in root systems*, to appear in Hokkaido Math. J.

18. T. Kobayashi, H. Maki and T. Yoshida, *Stably extendible vector bundles over the real projective spaces and the lens spaces*, Hiroshima Math. J., **29** (1999), 631–638.

19. T. Kobayashi, H. Maki and T. Yoshida, *Extendibility and stable extendibility of the power of the normal bundle associated to an immersion of the lens space* mod 4, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (Math.), **22** (2001), 45–57.

(2) 口頭発表

1. 阿賀岡芳夫, 合同な直角 3 角形による球面のタイリング, 京都教育大学 談話会, 1998 年 5 月.
2. 阿賀岡芳夫, 3 次元 Brieskorn 多様体上の概平坦アファイン構造, 日本数学会 (於大阪大学), 1998 年 10 月.
3. 阿賀岡芳夫, 概平坦なアファイン構造について, シンプレクティック幾何学とその周辺 (於秋田大学), 1998 年 11 月.
4. 阿賀岡芳夫, 3 次元 Brieskorn 多様体上の概平坦アファイン構造, 群作用と幾何学, (於筑波大学), 1998 年 12 月.
5. 阿賀岡芳夫, 3 次元球面上の概平坦アファイン構造, 測地線の微分幾何学 (於京都工芸繊維大学), 1998 年 12 月.
6. 阿賀岡芳夫, *On plethysms of Schur functions*, 名古屋大学 表現論セミナー, 1999 年 9 月.
7. 阿賀岡芳夫, 4 次元 Lie 環の variety について, Symplectic Geometry とその周辺, (於岐阜経済大学), 1999 年 10 月.
8. 阿賀岡芳夫, 4 次元 Lie 環の同型類を定めるアルゴリズムについて, 日本数学会 (於早稲田大学), 2000 年 3 月.
9. 阿賀岡芳夫, 4 次元 Lie 群上の左不変シンプレクティック構造について, 日本数学会 (於早稲田大学), 2000 年 3 月.
10. 阿賀岡芳夫, 4 次元複素 Lie 群上の左不変なシンプレクティック構造, Symplectic 幾何とその周辺, (於秋田大学), 2000 年 11 月.
11. 阿賀岡芳夫, plethysm の分解公式について, 組合せ論・表現論とその周辺 (於岡山大学), 2001 年 1 月.
12. 上野裕佳子, 阿賀岡芳夫, 合同な 3 角形による球面のタイリングについて, 日本数学会 (於慶応義塾大学), 2001 年 3 月.
13. 上野裕佳子, 阿賀岡芳夫, 特殊な 5 価の頂点をもつ 2 次元正定曲率空間のタイリングについて, 日本数学会 (於慶応義塾大学), 2001 年 3 月.
14. 阿賀岡芳夫, 対称空間の局所等長埋め込み — Gauss 方程式の現在と展望 —, 日本数学会特別講演 (於慶應義塾大学), 2001 年 3 月.

15. 小林貞一, 牧春夫, 吉田敏男, *Stable extendibility of vector bundles*, 日本数学会 (於早稲田大学), 2000 年 3 月.

16. 中山裕道, 非特異流の微分から誘導される流について, 日本数学会 (於大阪大学), 1998 年 9 月.

17. 中山裕道, *Invariant fiber measures of angular flows*, 葉層構造とその周辺の幾何学, 1999 年 10 月.

18. 中山裕道, ファイバー不変測度と Ruelle 不変量, 日本数学会 (於早稲田大学), 2000 年 3 月.

19. 中山裕道, *Invariant fiber measures of angular flows and the Ruelle invariant*, Foliations: Geometry and Dynamics (at Warszawa), 2000 年 5 月, (稲葉尚志氏との共同研究).

20. 中山裕道, ファイバー不変測度と Ruelle 不変量について, 力学系理論の新しい展開 (於京都大学数理解析研究所), 2000 年 9 月.

研究成果

本研究で得られた主要な結果を以下簡単にまとめる．まず問題の全体的な状況を説明するため、リーマン多様体の局所等長埋め込みに関する一般論を述べた後、本研究で得られた主要結果について個別に述べてゆく．また、この報告書の最後に本研究期間中に発表した論文(予定も含む)の中で特に重要なもの 5 編を収録した．本研究の最終年度にあたる２００１年３月には、日本数学会（幾何学分科会）においてリーマン対称空間の局所等長埋め込みについて特別講演する機会を与えられた．その講演原稿は、本研究のまとめ・リーマン多様体の等長埋め込みの現状を把握するのに最適なものと思われるので、この報告書の末尾にそれも収録した．

M を n 次元リーマン多様体とする．M から $\mathbf{R}^{n+r}$ への埋め込み写像 $f=(f_1,\cdots,f_{n+r})$ が等長埋め込みであるとは、$\mathbf{R}^{n+r}$ の標準計量の f による引き戻しが M の計量 g に一致することである．M の局所座標 $x_1,\cdots,x_n$ を使うとこの条件は偏微分方程式

$$g_{ij}=\sum_{k=1}^{n+r}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

の形に表せる．よく知られているように、任意のリーマン多様体は十分高い次元のユークリッド空間に等長に埋め込むことが可能である．そこで、1 つの自然な基本的問題として、与えられた M に対して M を等長に埋め込むことのできる最小次元のユークリッド空間を決定せよ、ということが考えられる．この問題は大域的な立場から考察することも大切であるが、もともとが上記のような偏微分方程式の可解性の問題であるから、順序としてはまず局所的な埋め込みの可能性について調べ始めるのが適切であろう．本研究ではこのリーマン多様体の局所等長埋め込みの可能性、特に低次元のユークリッド空間に等長に埋め込めるために M の満たすべき条件について考察することを大きな目的とする．

上記の偏微分方程式を 2 回微分することにより、可積分条件としてのガウス方程式

$$R(X,Y,Z,W)=\langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle-\langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle$$

が得られる．ここに K は n 次元線型空間 $V=T_xM$ 上の曲率型テンソルの成す空間 $K=\{R\in\wedge^2V^*\otimes\wedge^2V^*\,|\,\mathfrak{S}_{X,Y,Z}R(X,Y,Z,W)=0\}$、$R\in K$ は $x\in M$ における曲率、$\alpha\in S^2V^*\otimes\mathbf{R}^r$ は同じく x における第 2 基本形式、$\langle\ ,\ \rangle$ は法空間 $\mathbf{R}^r$ の正定値内積を表す．

従って M が $\mathbf{R}^{n+r}$ に等長に埋め込めれば、M の曲率はある α によって上記の形に表されなければならない．逆にいうと、もし R が上記の形に表されなければ(つまりガウス方程式が解を持たなければ) x を含む M の任意の開部分多様体は $\mathbf{R}^{n+r}$ に等長に埋め込めないことが示せたことになる．

1．$p(G/K)$ の値の計算.

論文 Y. Agaoka and E. Kaneda, *An estimate on the codimension of local isometric imbeddings of compact Lie groups*, Hiroshima Math. J. **24** (1994), 77–110, において M 上の整数値関数 p_M を次のように定義した．$x \in M$, R を x における曲率, $X \in T_xM$ とし、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X) &= \{W \subset T_xM \mid R(Y,Z)X = 0, \quad {}^\forall Y, Z \in W\}, \\ d(X) &= \max_{W \in \mathcal{N}(X)} \dim W, \\ p_M(x) &= \min_{X \in T_xM} d(X) \end{aligned}$$

とおく．すると M が $\mathbf{R}^{n+r}$ に等長に埋め込めるならば、不等式 $r \geq n - p_M(x)$ が各点 $x \in M$ において成立する．M が等質リーマン多様体 G/K の場合には、この関数は定数となるので、以下それを $p(G/K)$ で表すことにする．特に M が対称空間の場合、この値は次のように Lie 環の言葉で記述できる．$M = G/K$ を既約なコンパクト型リーマン対称空間とし、G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ で表す．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を標準分解、$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$ の極大可換部分代数、そして

$$\begin{gathered} \mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, \mathfrak{a}] = 0\}, \\ \mathcal{N}_M = \{W \subset \mathfrak{m} \mid [W, W] \subset \mathfrak{k}_0\} \end{gathered}$$

とおく．すると $p(G/K)$ の値は $\max_{W \in \mathcal{N}_M} \dim W$ に等しくなる．このとき上の結果より、$M = G/K$ は局所的にも $\mathbf{R}^{2n-p(G/K)-1}$ には等長に埋め込めないことがわかる．

従って $p(G/K)$ は対称空間の基本的な不変量ということができ、この値を決定し、局所等長埋め込みの可能性の評価式を出すことは大切な問題であるといえる．しかしこれは M の曲率に関わるかなり困難な代数的な問題であり、まだすべての対称空間に対して値が確定されていたわけではない．本研究においては、コンパクト Lie 群及び多くのグラスマン多様体に対してこの値を確定する、あるいは上からの評価式を与えることに成功した．その結果、（グラスマン多様体の一部等を除く）ほとんどすべての対称空間について局所等長埋め込み可能なユークリッド空間の次元の order を確定することができた．特に $Sp(m)/U(m)$, $Sp(m)$ については埋め込み可能な最小次元が確定した．(4 元数射影平面 $P^2(\mathbf{H})$ については第 7 項を参照.) これらの具体的な評価式は本報告書の末尾にある学会講演原稿の中に表の形で記載されている．

また、各ルート系の極大強直交系をワイル群の作用のもとで分類することにより、$p(G/K)$ の下からの評価式を統一的な手法で求めることができる．この結果については、現在論文を執筆中である．

（この項の結果は兼田英二氏との共同研究によるものである.）

2．ガウス方程式の almost solution の発見．

5 次元対称空間 $SU(3)/SO(3)$ 及びその非コンパクト双対空間の場合のガウス方程式について、計算機による実験を交えながら詳しく調べた．その結果これらの空間は余次元 5 でガウス方程式の解を持ち、更に余次元 4 で almost solution を持つことが示せた．余次元 5 での解の存在は今までに得られていた評価を 1 次元分改良するものであり、これが現在知られている中で最小余次元の解を与えている．(ただし、余次元 5 のユークリッド空間に $SU(3)/SO(3)$ 及びその非コンパクト双対空間が局所的に等長に埋め込めるか否かは未解決.)

また余次元 4 での almost solution の存在を示せたことは新しい現象の発見といってよいものであり、ガウス方程式の可解性を判定することの困難さを如実に表す結果であるともいえる．同様の現象は 3 次元球面 S^3 上のねじれのないアファイン接続の場合にも起こる．この場合、S^3 上にはねじれのない平坦なアファイン接続は存在しないのだが、"ほとんど" 平坦な接続は存在する．これらの結果は、共に多項式写像の像が一般には閉集合になるとは限らないことの幾何学的な反映である．多項式写像のこのような代数的な性質が幾何学的現象として具体的に表れてくる例は今まであまり知られておらず、面白い具体例を発見したといってよいであろう．$SU(3)/SO(3)$ に限らず、より高い次元の対称空間の場合にも同様なことが起こっているのかどうか、更に計算機を用いて調べることは大切な問題で今後の課題といえる．

3．ガウス方程式の定める 2 次写像の階数の計算．

ガウス方程式の可解性を判定する際の基本データとして、ガウス方程式の定める 2 次写像 $\gamma_r : S^2V^* \otimes \mathbf{R}^r \longrightarrow K$,

$$\gamma_r(\alpha)(X,Y,Z,W) = \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle - \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle$$

の (微分の) 階数を知ることは大切なことである．(ただし $\alpha \in S^2V^*\otimes\mathbf{R}^r$, $X,Y,Z,W \in V$．) ガウス方程式は $R = \gamma_r(\alpha)$ と表されるので、階数 $= \dim \mathrm{Im}\, \gamma_r$ の値がわかればガウス方程式が解を持つ (あるいは持たない) 余次元の様子がかなりわかる．

本研究では $\dim M \leq 9$ の場合に、計算機を用いてこの値を確定した．結果として $(n,r) = (4,2)$ のときを除いて $n \leq 9$ の範囲では直交群 $O(r)$ の自然な作用により生ずる核以外の核は出てこないことがわかった．従って特に $(n,r) = (9,14)$ の場合は $\dim \mathrm{Im}\, \gamma_{14} = 539$, $\dim K = 540$ となり、像 $\mathrm{Im}\, \gamma_{14}$ は K の超曲面となる．よってこの超曲面の定義方程式となる K の $GL(9,\mathbf{R})$-不変式はガウス方程式が解を持つための障害として利用することができる．残念ながら、この場合は M の次元がかなり高いため、この不変式を具体的に求めるまでには至らず、これは今後の研究課題といえる．この問題は代数学におけるいわゆる終結式を求めることにあたり、現在計算機上でこのような多項式の計算を実行するソフ

トウェアが種々開発されている．これらを利用すれば我々の求めようとしている不変式を具体的に書き下すことが可能かどうか、検討してみる必要がある．

また、上記の $\dim \mathrm{Im}\, \gamma_r$ の計算により、かなり高い余次元の場合まで、第 2 基本形式は曲率により本質的に一意に決定されることがわかる．従ってガウス方程式及びその高階微分を更に詳しく調べれば、今まで知られていた範囲をかなり越える高い余次元まで (generic な) 部分多様体の剛性が示せる可能性がある．この点に関しても、今後引き続き研究を続けてゆく予定でいる．

4．曲率型テンソル空間上の多項式環, 群作用で不変な variety.

曲率型テンソルの成す空間 K には群 $GL(V)$ が自然に作用しており、これは分割 $\{2^2\}$ に対応する $GL(V)$ の既約表現空間になっている．余次元 r でガウス方程式が可解となる曲率の集合 $(= \mathrm{Im}\, \gamma_r)$ の K における閉包は、この $GL(V)$ の作用で不変な既約な variety となることが知られており、従ってその定義方程式がわかればそれがガウス方程式の可解性を判定する道具として使える．この定義方程式は K 上の多項式環 $\sum_p S^p(K^*)$ を $GL(V)$-既約分解したときのいくつかの既約成分の形として表せる．従って $S^p(K^*)$ の既約分解を求めることはガウス方程式の可解性を判定する問題における重要な 1-step といえるが、残念ながら一般の次数 p の場合の分解公式はまだ得られていない．(これに関しては第 6 項を参照のこと．SYMMETRICA というソフトウェアを使って得られたデータを分析して、曲率の 5 次式まで調べてみたが、既に知られているもの以外、新たな定義方程式を得ることはできなかった．)

この方法が (原理上はともかくとして) 現実の問題として有効に働かないのは、K における群作用で不変な概念がまだ十分には把握されていないところに原因があるように思われる．添字が 2 個の空間である行列の場合は "階数" という言葉で状況は完全に把握されるが、曲率の場合は添字が 4 個あって、問題は極度に難しくなる．

同様の視点から、本研究の 1 つのモデルとして、添字が曲率より 1 個少ない Lie 環の場合の研究を行ってみた．すると 3 次元、あるいは 4 次元という限定された場合についてではあるが、複素 Lie 環における群作用で不変な variety の分類、群作用で不変な概念をすべて把握することに成功した．またその副産物として、有限個の内在的概念を用いて 3, 4 次元 Lie 環の同型類を判定するアルゴリズムを具体的に与えることができた．4 次元の場合のこの結果はまだプレプリントの段階ではあるが、本研究と方法論上での関連性が非常に高いので、本報告にその全文を掲載した．

これと同様な結果を "曲率" の場合にも得ることが今後望まれる．

5．ガウス方程式とグラスマン代数 (外積代数) との関係.

既述のように、リーマン多様体の曲率 R は K の元である．しかし、今までの記述から

もわかるようにこの K という空間はかなり複雑な構造を持っており、そのためにガウス方程式の解析が困難となる．

$R \in K$ をもとにして $2n$ 次元の空間 $V' = \langle e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n \rangle$ 上の 4-form $\widetilde{R}$ を

$$\widetilde{R} = \sum_{i<j,\, k<l} R_{ijkl}\, e_i^* \wedge e_j^* \wedge f_k^* \wedge f_l^* \in \wedge^4 V'^*$$

で定める．(e_i^* 等は双対基底．) すると $R \in K$ が余次元 r でガウス方程式の解を持てば、この $\widetilde{R}$ はある 2-form $\Phi_1, \cdots, \Phi_r$ により

$$-\widetilde{R} = \Phi_1 \wedge \Phi_1 + \cdots + \Phi_r \wedge \Phi_r$$

と表せる．従って R から構成された $\widetilde{R}$ が上の形に表せないことが示せたら、もとのガウス方程式は余次元 r で解を持たないことが示せたことになる．グラスマン代数 (外積代数) は K よりは扱いよい空間であるから、この見地からガウス方程式の可解性を問うことは 1 つの見通しを与えるように思われる．

本研究では、この立場から特に $r = 1, 2$ の場合について詳しく調べ、例えば余次元が 1 のときのトーマスの不等式の別証明を与え、更にガウス方程式の逆公式を書き下すことにも成功した．$r \geq 3$ の高余次元の場合にはまだ研究が進んでいないが、上述のように K と比較した際の $\wedge^4 V'^*$ の構造の単純さのおかげで、(やや荒くしたものにはなるが) ガウス方程式の可解性について調べる足場ができたように思われる．ただし、この立場からの研究においても、次項で述べる "plethysm" といわれるものの解析は不可欠であることに注意しておく．

6．plethysm について．

第 4 項で述べた $S^p(K^*)$ は plethysm でいうと $\{2^2\} \otimes \{p\}$ にあたる．この分解公式を得るのは上述のように現時点ではかなり難しい問題であるので、ガウス方程式の群論的な状況を単純化した次の方程式を考える．曲率にあたるものとして、線型写像

$$R : \wedge^2 V \longrightarrow \wedge^2 W$$

を考える．(V, W は共に線型空間．) このとき R が $\sum_{i=1}^r L_i \wedge L_i$ ($L_i : V \to W$) と表されるための条件を求めよ、という形に問題を書き換える．(ここで $V = W$, 各 L_i は対称とすればもとのガウス方程式が得られる．)

このように formulate すると、線型空間を 2 つ使うため作用する群が $GL(V) \times GL(W)$ と分離されて、R の多項式を表す plethysm を計算するのがやや単純化される．つまり

$$\sum_p S^p(\wedge^2 V^* \otimes \wedge^2 W) = \sum_{\lambda, |\lambda|=p} (\{1^2\} \otimes \{\lambda\})(\{1^2\} \otimes \{\lambda\})$$

であるから plethysm $\{1^2\}\otimes\{\lambda\}$ がわかればよいことになる．この立場での分解公式もまだ完全には把握できていないが、一部のものについては分解公式を得ることに成功した．($\{1^2\}\otimes\{p-1,1\}$, $\{1^2\}\otimes\{p-2,2\}$ 等．）この公式にはヤング図形の組合せ的な量が既約成分の重複度として表れ、この公式自体表現論的にみて非常に面白いものだといえる．この立場からの研究もまだ発展途上であるが、まだまだ新たな発見の可能性を秘めており、今後の研究が非常に楽しみである．

またこれらの研究と関連して、plethysm については本研究期間中様々な研究を行い、いくつかの断片的な成果及びいくつかの予想を得ることができた．例えば、一般の plethysm $\{\lambda\}\otimes\{\mu\}$ の分解式において、出現する成分を辞書式順序に並べたとき一番最初と最後に表れる項についての予想をたてることができた．これは報告書 (研究発表 (1) の 6) としてまとめ、多くの関連研究者に配布したが、各地からさまざまな反響が得られ、この中の予想の一部については既に証明され定理になっている (I. G. Macdonald, L. Manivel 氏等．）その重要性に鑑み、本報告書にもその主要部分 (データ以外の部分) を収録した．

更に plethysm $\{m\}\otimes\{3\}$, $\{m\}\otimes\{21\}$, $\{m\}\otimes\{1^3\}$ についても今までに知られていたのとは全く異なる型の分解公式を得ることができ、これらの plethysm に表れる既約成分の個数定理を示すこともできた．

plethysm についてはまだまだ未知のことが多く残されているが、このように問題は次第に切り崩されつつあるわけで、ガウス方程式の可解性とも絡んで今後の発展が大きく期待される．

7．4 元数射影平面についての結果．

まだ論文にはまとめていないが、4 元数射影平面 $P^2(\mathbf{H})$ (実 8 次元のリーマン多様体) は局所的にも 13 次元のユークリッド空間には等長に埋め込めないことを示した．$P^2(\mathbf{H})$ は 14 次元のユークリッド空間に大域的に等長に埋め込めることが知られていたので、これにより $P^2(\mathbf{H})$ の局所等長埋め込み可能な最小次元が確定したことになる．この結果は第 1 項に述べた不変量 $p(G/K)$ を定義する際に出てくる m の部分空間 W の形を詳しく調べることにより得られる．現時点では、相当量の計算をしなければこの事実を示すことはできないが、ルート系を使った議論で証明が簡略化され、更に一般の $P^n(\mathbf{H})$, あるいはケイリー射影平面 $F_4/Spin(9)=P^2(\mathbf{Cay})$ への拡張が可能なように思われ、近々改めて考察してみる予定でいる．

以上、本研究期間中に得られた結果等について簡単にまとめた．かなりの対称空間については等長埋め込みの評価を改良することができ、また一部のものについては最良の結果を得ることができた．しかし、まだ多くの空間に対して最小次元が完全には確定しておら

ず、これらについては今後の研究を待たねばならない．幸い、まだ具体的な成果を生むまでには至れていないというものの、項目 4 ～ 6 にあるような今後の見通しを与える立脚点をこの研究期間中に手にすることができたので、本研究終了後もリーマン多様体の局所等長埋め込みの研究を続け、ガウス方程式に関連する種々の事柄についての理解を深めてゆきたいと思っている．