社債データによる業種・格付別倒産確率の期間構造と回収率の推定

刈　屋　武　昭[1]

銀行の貸出ローンはもちろん企業の売上債権などにも信用リスクが内包されている。リスクマネジメントのためには、その適切な評価が必要である。本稿ではその評価の基礎となる信用リスク計測問題を扱う。その計測基礎となる情報を1）社債の価格、2）社債の格付、3）社債発行企業の売上高比率などによる業種ポートフォリオ比率、4）国債の価格の情報、に求め、信用リスクの期間構造を業種と格付けの組み合わせごとに計測するモデルを提案する。このモデルは、社債発行企業が複数の業種に関与していることを前提にして、多くの社債価格から、業種と格付の組合せごとに倒産確率の期間構造と格付毎の回収率を導出するものである。その結果、業種ポートフォリオ比率が異なる社債価格のプライシングはもちろん、貸出ローン、デリバティブのプライシングの基礎となるものである。

さらに、社債を信用リスクの情報源とするアプローチを、格付推移や倒産データなどに基づくアプローチと比較し、社債データに基づく信用リスク情報の重要性を議論する。

1　はじめに

本稿では高度な信用リスク評価モデルを構築することである。このモデルは、金融機関の貸出ポートフォリオのリスク管理、企業の売掛債権のリスク管理、ローン債権や売掛債権、リース債権など多くの債権の証券化の価値評価、社債を担保とする仕組み債の価値評価、社債の価値評価などの多くの金融ビジネスに適用可能となるものである。

1．1　信用リスク理論の視点からの社債モデル

一般に、刈屋（1999）にあるように、無裁定価格理論の立場からみると信用リスク理論は、

1）　金利の期間構造のプロセス

2）　ディフォルト生起のプロセス

3）　回収率のプロセス

から構成される。したがって、信用リスクの評価・計測問題はこれらの要素の定式化に依存する。

しかし信用リスクは、一般的には契約不履行に起因する損失の可能性であるが、契約不履行となる信用事由はきわめて多様性をもち、無裁定価格理論は本質的に非完備な状況に直面しているので、理論からの価格の一意性は一般に保証されていない。また実証分析に関わる場合、1）から3）の要素をどの程度実際的な立場からモデルを構築するかで、結果は大きく異なる。その問題は、実は無裁定価格理論の仮定に抵触する要素を含む。

例えば、1）の金利の期間構造のプロセスは、ゼロクーポン国債の価格プロセスの割引率を表現するものとして表現される。その情報は、基本的に各時点の国債価格全体にある。実際には、多くの国債はクーポン債であり、価格も含めた国債全体の価格の背後にあるイールド全体のプロセスとして表現される。このイールドの導出の仕方も、個別銘柄属性をどの程度考慮するかで、結果は大きく異なる。無裁定価格理論では、個別銘柄の属性を無視し、割引債を前提としてスポットレートモデルやフォワードレートモデルなどの特定なモデルによってモデル化し、可能なら解析的に割引率を導出し、未知パラメータをデータから推定する。前者の代表的なモデルはCIRモデルであり、割引率は微小時間スポットレートの将来の評価時点までの積分に関わる指数の（形式的にリスク中立測度のもとでの）条件付期待値として表現される。後者の代表的なモデルはHJMモデルであり、割引関数は、微小時間フォワードレートの期間構造全体が現在時点で実現するので、評価時点まで

[1] 明治大学グローバル・ビジネス研究科教授。本研究は、京都大学経済研究所・経済学研究科のCOE研究費の補助を受けた。本稿は、刈屋（2001）を発展させたものである。本稿を永年広島大学経済学部で日本の計量経済学をリードしてきた畏友前川功一教授に捧ぐ。

の期間構造の積分に関わる指数そのもので表現される（3節）。

他方、本稿でのモデルは、銘柄属性を積極的に考慮する刈屋（1995）、Kariya and Tsuda（1994）によるモデル化を基礎とする。その結果、個別銘柄の数自体が資産数となり、非完備な状況を最初から設定することになり、リスク中立測度は一意的に存在しないのであるから、実測度のもとでの評価を対象とする。さらに特定なモデルを前提とせずに、個別銘柄属性を考慮したフォワードレートの期間構造表現による割引率を平均値とそこからの乖離に分解し、前者を多項式近似し、乖離の部分には確率的な相関構造を想定して一般化最小二乗法により統計的に処理する。

2）と3）に関して議論する。社債の価格は、国債の場合と同様に将来のキャッシュフローの現在価値となるが、問題は償還期日前にディフォルトが生起すると、キャッシュフローが毀損し、全額償還されない可能性があることを反映していることから、それを表現するモデルが求められる。したがって社債価格モデルでは、金利の期間構造プロセスに加えて、企業のディフォルト生起プロセスと回収率プロセスが関わる。ディフォルト生起プロセスは、企業の事業構造に基づく将来のキャッシュフロープロセスと財務構造に依存する。それゆえ各企業のキャッシュフロープロセスは、企業の事業内容に依存し、それは事業ポートフォリオの業種構造に関係する。その意味では、本質的に非完備な状況にある。回収率プロセスも企業の財務構造や無形資産などの保有状況に依存するので個別性が大きい。

信用リスク評価モデルとしては、その本質的な非完備性に関係して、理論モデル以外にも多様なアプローチがとられている。古くはAltman and Katz（1976）の判別分析、Kaplan and Urwitz（1979）の順序ロジット・プロビット分析がある。日本でも新美（1998）が判別分析、中山・森平（1998）、安川（2002）が順序ロジット・プロビット分析を行っている。

本稿のモデルは植松・刈屋（2000）、刈屋（2001）の拡張である。類似なものとしては、津田（2002）がある。刈屋（2001）は、みずほ第一フィナンシャルテクノロジーで1999年に特許申請した公開結果であるが、承認されなかったのでここに拡張して公表するものである。特徴としては、社債発行企業が複数の業種に関与していて、積極的に格付けの相関構造を考慮している。

1．2　業種概念の問題

本稿では、国債価格データと社債価格データをもとに、各個別業種と各格付の組合せごとに倒産確率の期間構造と格付ごとの回収率を導出するモデルを提案する。「企業の事業は複数業種に属する」ことを前提に、社債価格を情報源として、倒産確率の業種相関と格付間の相関構造を明示的に導入して、業種ごとの倒産確率と回収率を同時に導出する。このモデルでは、大量の国債価格データ（250銘柄程度）と、複数の業種に関わる企業の社債価格データ（2000銘柄程度）とその格付けクロスセクション情報を利用する。そのモデルにより、個別企業毎の倒産確率の期間構造と回収率、社債理論価格をはじめ、社債ポートフォリオの価値評価などを計測することが可能となる。そこで問題となるのが業種概念である。

業種を考慮する場合、まず注意したい点は、各企業は事業ポートフォリオとして複数の業種に関わる事業を行っている点である。業種概念の重要性は、景気変動では一般に業種ごとの景気が異なり、事業ポートフォリオの異なる企業間では異なる利益キャッシュフロー構造を持つことになり、結果として業種ポートフォリオの保有構造で信用リスクが異なる点にある。それゆえ、社債発行企業を機械的に日経分類等の企業業種で分類していくとことは、分析結果をゆがめることになる。例えば、帝人2003年売上高比率は、合成繊維28%、化成品21%、流通・リーテル29%、医薬医療11%、機械・エンジニアリング5%、IT・新事業6%である。したがって、帝人を単純に繊維業種の企業として信用リスク分析をすることは問題があろう。業種をどのように分類するかも分析結果に影響する。本稿ではこれを考慮し、社債発行企業は複数の業種に属するものとして、業種に関わるウェイトを売上高比率で与える。

一般には日経の分類や野村證券の分類などが多く利用される。多くは、

公益事業，石油等エネルギー，鉄鋼、非鉄金属、鉱業，産業用機械、機器、工作機械，電機、通信機器、精密、光学，自動車，化学、医薬品、

化粧品，繊維、アパレル，紙・パルプ，食料品，出版、放送、印刷，日用品・調度品、耐久消費財，不動産，一般建築・土木、住宅建設・建設資材，大手旅客輸送，運輸，サービス，商社，小売・卸売，大手通信，

などを必要に応じてグループ化できる。

モデルは、金融工学的な視点を踏まえるものの全体としては統計的なアプローチによるものであり、モデル推定においては一般化最小2乗法を駆使する。

1．3　本稿のモデルと利用法

モデルの具体的内容を要約しておく。

利用するデータは、国債及び社債の価格、属性と、社債発行企業の複数の売上高業種比率であり、推定プロセスは次のとおり。

（第1段階）フォワードレートに基づく金利の期間構造の視点に基づいて国債価格から割引率を一般化最小二乗法で推計し、それを社債キャッシュフローの割引率として使用する。

（第2段階）格付けでグループ化された社債とそこでの社債発行企業の業種ウェイトから、格付ごとのグループ内の業種相関パラメータと回収率を一般化最小二乗法で推計する。

（第3段階）格付ごとのグループ内業種相関パラメータと格付け共通な回収率を所与として、社債価格データのすべてを用いて、格付けが異なるグループ間の格付け相関を導入して、格付と業種の組み合わせごとの倒産確率の期間構造を一般化最小二乗法で推計する。

この3段階推定プロセスは、モデルの簡便性と推定結果の安定性を確保するものである。結果として、格付と業種別の組み合わせごとの倒産確率の期間構造、格付ごとの回収率、格付カテゴリーごとの倒産確率の期間構造、業種カテゴリーごとの倒産確率の期間構造、複数の業種に関わる個別企業の倒産確率の期間構造と回収率が推計される。

このモデルは次のような評価問題の基礎として利用可能となる。

* 社債の理論価格や企業の倒産確率の期間構造などが評価可能となる。
* 金融機関や企業は取引先の貸出債権や売掛債権の信用リスク管理を確実に行うため、信用リスクを正しく把握することに利用可能である。
* 取引先の業種の集中から発生する財務ポートフォリオの信用リスク集中を評価し、分散化する計測法の基礎として利用可能である。
* 低格付であるために資金調達が困難な企業に対して信用補完構造を作り、低格付企業が発行した社債を担保として優先劣後構造の下に債券を発行する場合にも、信用リスクを正確に評価することに利用可能である。

実際、これらの評価や計測には、リスクを細分化した企業の倒産確率と倒産した場合の回収率の正確な評価が必須の要件となる。

本稿の構成は以下の通りである。まず2節でこれまでの方法との比較を行う。3節では金利の期間構造と国債モデルを議論し、社債モデルの基礎を扱う。固定クーポン社債モデルは、ディフォルトがない限り、国債モデルと同じであるが、ディフォルトが満期までに生起するとクーポンと元本の毀損がある。4節では3節の議論を基礎に、複数の業種を持つ企業の社債モデルを提案する。そのモデルからディフォルト確率の期間構造と回収率の推定が可能になる。5節でまとめを述べる。

2　従来の方法との比較

本節では、これまでのディフォルト（倒産）確率の推計法を整理し、問題点を議論する。重要な点は、信用リスクの情報源として社債価格データを利用する場合の情報の有効性に関する点である。

従来の倒産確率の推計法に関係する問題点として、次の3点が挙げられる。

1）倒産確率の情報源に関わる問題と計測法の問題

2）倒産発生の企業間の連関性の設定の仕方に関わる問題

3）業種に依存した倒産確率の計測の問題。

倒産確率の情報源に関わる問題と計測法の問題

従来倒産確率や回収率の計測法としては、

* 分析情報として格付会社の提供する格付別累積倒産確率に基づくもの、格付会社の提供する格付推移確率から計測するもの
* 株価データから倒産確率モデルを用いて計

測するもの、株価収益率から格付推移確率を推計するもの

* 信用情報会社などの提供する過去の倒産企業及び非倒産企業のデータから統計モデルを用いて倒産確率を推計するもの

などがある。

一般的にいうと、過去データの平均的な値に基づく分析は、経済構造の加速的な進化・変化などにより、長期的な将来のディフォルト確率の期間構造の評価において一定の限界があろう。またモデルとしては、格付推移マルコフモデルなどを想定することが多いが、それは1年単位に基づくディフォルト生起プロセスにおいても、実証的な支持が得られないであろう。それは景気変動がマルコフではないであろうし、したがって金利のプロセスもマルコフとは考えられない。この点に関してさらにいえば、連続時間を基礎にした金融工学的金利モデルはマルコフモデルを想定するが、これは長期分析においては現実になじまないであろう。Duffie and Kan（1996）などでは、金利自体が独立変数でないことから、状態変数金利モデルを提案している。この点は経済学的に見て合理的であるが、状態変数の変動にマルコフモデルを想定しているので、結果的にマルコフモデルになっている。

社債価格を信用リスク分析で利用する意味：投資家の事前評価の推定

社債は企業の投資家からの借入金の借用証書であり、その返済期限が債券の満期となるので、市場で取引する社債価格の情報は、当該企業の業種ポートフォリオ等の属性と一緒に倒産確率の期間構造と倒産が起きたときの回収率の情報を直接的に内包している。従って、いろいろな満期をもつ多数の社債価格情報に基づく倒産確率の期間構造及び回収率の計測は、投資家がそれらの属性のもとに評価した価格に内在する将来の倒産確率の期間構造と回収率とを計測することになる。このような倒産確率の期間構造と回収率の計測は、社債市場価格体系全体に整合することが要求される。現在まで、クーポン社債（クーポン付き社債）の価格を直接的な情報源として倒産確率の期間構造及び回収率を計測した例は少ない。なお、現存する社債は全てクーポン社債である。

さらに社債価格情報の事前性について議論する。社債価格は市場の効率性を前提にする限り、市場で直接的に信用リスクを評価された結果である。すなわち、現在時点の各社債価格情報は、それぞれの償還期間までの将来の期間にディフォルトの可能性（期間構造）とディフォルトしたときの回収率を投資家が市場直接的に評価した結果の情報である。したがって、「社債価格は、いまだディフォルトしていない複数事業を持つ企業への事前的ディフォルト確率の期間構造と事前的回収率の直接的な情報を提供」している。クロスセクションデータによる社債価格に基づくディフォルト確率の期間構造を推定することの意義は、各時点での投資家の将来に関する事前的な市場の評価の推定している点にある。その意味で、過去の経済構造に依存した平均的な値に基づく事後的な分析を将来に外延するものとは異なるものであることに注意する。

分析情報として倒産データや格付け会社の過去のデータに基づく場合の問題点

格付会社の情報は市場情報と異なり、その専門性に基づく総合的分析による格付判断と業種分類に基づいて、対応した事後的な倒産データに基づいて倒産確率を計測している。従って、格付会社の間で情報に大きな差が生じてしまう可能性がある。

事後的な倒産確率の意味をさらに議論しよう。過去の倒産件数の割合のデータが格付と業種のカテゴリーに関して与えられると、ヒストリカルな意味での倒産割合がカテゴリー毎に与えられる。しかし、その値は過去の経済状態に依存した実現値であること、実際の割合を計算するときに例えば１年間の中での倒産件数、２年間の倒産件数というように時間幅に依存した数値であり、時間幅のとり方で結果がかなり変わること、多くのカテゴリーは標本数が小さく、推計した値が不安定もしくは意味がないこと等の基本的な問題を有している。推計したい値は、現存している企業の将来の各時点における倒産の可能性を示す倒産確率の期間構造（将来の各時点に対して、その時点までに倒産が起こる確率の時間的構造）であるから、その情報源としては過去のデータは必ずしも十分なものではない。また、実際の業種分類は多様性

をもっているし、企業はひとつの業種のみに関与しているわけではない。信用情報会社の提供する過去のデータに基づいた倒産確率の計測は、このような限界を有している。なお一般に、格付会社は格付評価において業種を考慮しているが、倒産確率評価では格付カテゴリーに対して倒産割合の期間構造を提供している。業種は格付に含まれている内容になっている。

分析情報を株価データに基づく場合の問題点

これに対して、現在時点の株価や債券価格の市場価格は、多くの投資家が極めて多様な企業情報（格付会社の情報を含む）のもとに、当該企業の将来の倒産の可能性も意識して価格が形成されている。その意味で、当該企業の倒産可能性の情報は価格の中に内在していることになる。しかし、株式の場合は満期がないため、将来の各時点ごとのディフォルト生起確率についての情報は弱く、また株価は他の多くの情報を包含しているため、そこから直接的に倒産確率を計測するための情報としての利用価値は小さい。実際には、以下で述べるように適当な倒産確率モデルと一緒に、株価の情報を一部利用するのが一般的である。

株価を情報源とする倒産確率の計測法では、いわゆるマートンモデルに基づく米国のKMV社の手法が有名である。その基本は、直接観測できない企業価値が、負債と想定する水準を下回ったときを倒産と認定する方法であり、企業価値の変動プロセス（多くは対数正規プロセス）を定式化して倒産確率を個別企業ごとに推計するものである。負債の将来の値の定式化では財務データならびに金利データを利用する。その企業価値変動プロセスのモデルにおけるパラメータの推計においては、当該企業の株価収益率の変動性（分散）を利用している。この計測法では、倒産確率の計測数値が上記倒産の定義と企業価値の変動プロセスの定式化に依存する部分が大きく、株価情報の利用としてもその変動性を用いるだけで、客観的な倒産確率というよりもモデルで定義した倒産確率という側面が強い。企業の収益可能性に関する個別性が、株価だけに基づくことは情報量としては弱く、事業ポートフォリオの違いによるキャッシュフローの違いなどが反映されない。日本で利用されている倒産確率の計測はこの方法を改良したものが多いが、上記の問題点を内包している。また、業種といった概念は含まれておらず、回収率は計測の対象外となっている。未知パラメータとしてのボラティリティは、株価収益率によるものであるから、景気変動をあまり反映できないし、データは過去のものを用いるのであるから、上で議論した問題がある。もちろん景気変数ファクターを導入した２ファクターモデルも展開されている。しかし必ずしも景気変動構造を十分反映したものでない。

さらに個別企業ごとの評価を複数企業を同時に扱う場合、ディフォルト相関を議論する枠組みを導入しようとすると、便宜的な仮定のもとでも解析的な負担が増える。

格付け推移行列を用いる問題点

過去のデータに基づく単位時間 u（年）（例えば１年）の格付推移確率行列 Q を利用する場合、格付推移確率は時間的に不変であると仮定する。これは斉次（時間不変な）マルコフモデルである。格付推移確率行列 Q の行列要素 q_{ij} は現在格付 i にいる企業が u 年後に格付 j に移る条件付き確率である。格付を高い順に1～I で示し、最も低い格付Iを倒産状態とみなす。このとき、格付 i の企業が単位時間 u 年内に倒産する確率は、格付推移確率行列 Q の行列要素 q_{iI} で直接的に与えられている。従って、格付推移確率行列 Q が与えられていると、格付推移行列の時間的不変性から、nu 年内に倒産する確率は格付推移確率行列 Q の n 乗である“Q^n”の要素(i, I)で計算される。この場合、既に述べた格付推移確率行列 Q の信頼性とその時間的不変性、並びに単位時間 u（年）に関する問題点がある。なお、この議論をクーポンがない割引国債とクーポンがない割引社債の関係と結合させる方法があるが、上述したように現存する社債は全てクーポン社債である。

景気変動とディフォルト相関とクレジットメトリックス

周知のように、不況のときに建設業や金融業が多く倒産したり、ある企業の倒産によりその企業と取引関係にある企業が連鎖倒産したりする。一般には、これは倒産の相関性の問題と呼ばれている。実際は相関係数の意味での相関ではなく、倒

産が生起する確率の連関性若しくは非独立性の問題である。さらにディフォルト相関は一定でない。実際それは景気の下降期に強くなることが知られている。前述したマートン型モデルでの倒産確率の計測法では、個別企業毎に設定したモデルのもとに倒産確率を計測するので、企業間の倒産の連関構造は導入されていない。その1つの理由は、業種等の企業の属性に関する共通要因が無視されていることである。連関性を導入した計測法としては、JPモルガン社のクレジットメトリクス（信用リスク管理装置）の中にある倒産確率の計測法がある。これは格付推移行列を基本情報とし、1年後の格付推移は株式の1年後の基準化収益率の大きさに依存して決まると仮定する。そして、格付 i の企業が1年以内に倒産する確率 q_{it} は与えられているから、基準化収益率は標準正規分布に従うと仮定すると、格付 i をもつ企業の基準化収益率の倒産領域が正規分布の左裾として定まる。収益率の乱数を発生させ、その乱数が正規分布の左裾領域に落ちたときを倒産とみなす。複数企業の倒産の相関は、格付毎の株価収益率の相関係数であるとして、この相関係数をもつ多次元乱数を発生させ、複数企業のいくつかが同時に倒産する同時確率を扱っている。またコピュラ関数などの利用もある。いずれにしても、この扱い方は、相関関係の情報として株価収益率の相関を用いているものの、モデルによる定義の部分が大きく、実際の倒産可能性と格付との間の倒産連関構造を十分に表現していない。その他、過去の倒産の有無と企業の財務情報とに基づく統計モデルもある。

倒産連関の問題にも関係するが、業種が倒産確率の期間構造の要因として大きな影響を与えることはよく知られている。それは、業種ごとに景気変動があることが多いからである。しかし、業種の概念はその定義の仕方にも依存するため、業種の概念を倒産確率の期間構造の計測の対象として組み込んだモデルは少ない。また、企業はその営業形態から複数業種に属していることも一般的である。本稿のモデルは、この点を明示的に導入している。

3　金利の期間構造と国債モデル

本節では、本稿の提案する社債モデルを割り引く金利の期間構造と割引率について記述する。その情報を国債価格に求める。そのため国債価格モデルが必要となるが、それについては刈屋（1995）のCSMモデルを提案する。そのモデルの特徴は、国債の属性情報（クーポンと償還期間）の違いによる価格の違いを考慮する点である。これは、国債価格データから割引率を算出するモデルであり、社債モデルの基礎を作る。国債発行時の満期が5年以上のものは、クーポンつき国債なので以下最初からその定式化を行う。

現在時点を t とする。国債もしくは無リスク確定利付債券は G 個あるとし、第 g 債券の将来のキャッシュフロー発生時点を

(3.1)　$t+s_{gm}\quad (m=1,\cdots,M(g),\ g=1,\cdots,G)$

とする。$t+s_{gM(g)}$ は第 g 債券の満期時点、$s_{gM(g)}$ は満期までの期間である。このとき、第 g 債券が国債であり、そのクーポンを c とすると、第 g 国債のキャッシュフロー関数 $C_{gt}(s)$ は次式で与えられる。

$$
(3.2)\quad C_{gt}(s)=\begin{cases} 0.5c & (s=s_{gm}, m\neq M_g) \\ 100+0.5c & (s=s_{gM_g}) \\ 0 & (s\neq s_{gm}) \end{cases}
$$

しかし、以下の分析モデルは、キャッシュフロー関数は任意でよく、国債のポートフォリオなどもひとつの債券としてよい。

すべての国債を同時に扱うため、各国債のキャッシュフロー発生時点（3.1）を合併して時点が小さいほうから順に次のように並べる。

(3.3)　$t+s_{am}\quad (m=1,\cdots,Ma)\quad (Ma=\max_g M(g))$

この時点表示では、(3.1) の $t+s_{gm}$ は (3.3) の $t+s_{am}$ のいずれかとなり、$t+s_{am}$ が $t+s_{gm}$ のいずれかの場合に限って $C_{gt}(s)$ は正となり、それ以外ではゼロとなる。

国債の価格モデルを金融工学的にスポットレートアプローチでその理論価格を表現すると次のようになる。

$$
(3.4)\quad P_{gt}(1)=\sum_{j=1}^{M(g)} C_{gt}(s_{gj})\overline{\overline{D}}_t(s_{gj})
$$

ただし

$$\overline{\overline{D_t}}(s_{gj}) = E_t[\exp(-\int_0^{s_{gj}} r_{t+s} ds)]$$

は、スポットレートプロセス $\{r_s\}$ のひとつのモデルのもとでの条件付期待値表現の割引率である。ここではリスク中立測度は一意的に決まらないので確率測度はリスク中立測度とみなしてもよいが、実測度である。もし無裁定性理論が正しければ、確率１で（3.4）が成立することになるのであるが、実際にはよく利用されているモデルでは価格との誤差が大きい。この表現で、CIRやVasicekモデルなどのスポットレートプロセスモデルをひとつ与えると、条件付割引関数は解析的な関数として

$$\overline{\overline{D_t}}(s_{gj}) = H(r_t, s_{gj}, \theta)$$

として表現される。この表現で θ はモデルのなかに含まれる未知パラメータ全体である。結局のところ、このようなスポットレート表現国債価格モデルでは、与えられたスポットレートモデルの下で関数 H を特定し、パラメータをデータから推定することに他ならない。パラメータ推定では、実際の価格と理論価格の差の理解の仕方に依存して、単純な最小２乗法や一般化最小２乗法などが利用される。もし、それが推定されると t 時点において将来 $t+s$ 時点でのゼロイールド R_Δ は

$$H(r_t, s, \theta) = \exp(-Rs)$$

より求められる。

他方、特定な国債価格は、その属性としてのクーポンや償還期間に依存しているのでそれに対応した割引率を与える金利プロセスを想定することができる。この考え方は、最近Collin-Dufrense and Solnik（2001），Feldhutter and Lando （2007）に採用され、スワップレートスプレッドのモデル化において明示的にその対象となっている。そこではリスクフリーレートを抽象的を設定し、それぞれの金利関係商品には、流動性プレミアムや担保可能性プレミアムなどコンビニエンスイールドと信用リスクプレミアムが加わったものとして理解する流れにある。ストリップ債のない日本の国債市場の場合には、当然のことながら各国際の割引率を与える金利プロセスは、その属性プレミアム、コンビニエンスイールドを持ったものに対応することになる。すなわち、（3.4）の割引率を銘柄に依存したものとして、

$$\overline{\overline{D_{gt}}}(s_{gj}) = E_t[\exp(-\int_0^{s_{gj}} r_{gt+s} ds)]$$

として表現する。この場合、スポットレートプロセス $\{r_{gs}\}$ は銘柄属性依存スポットレートである。国債の場合、Feldhutter and Lando（2007）に沿えば、それを

$$r_{gs} = x_{1s} + x_{2gs}$$

などと表すことになる。右辺第１項はリスクフリーレート、第２項は当該国債のコンビニエンスイールドである。なお、

（3.4）の価格は、条件付期待値としての現在の価格を表現するものである。他方、瞬間的フォワードレートプロセス $\{f_{ts}\}$ を用いると、期待値をとることなく

$$(3.5)\quad P_{gt}(2) = \sum_{j=1}^{M(g)} C_{gt}(s_{gj}) D_t^*(s_{gj})$$

$$(3.6)\quad D_t^*(s_{gj}) = \exp(-\int_0^{s_{gj}} f_{ts} ds)$$

f_{ts}：フォワードレート

と表現される。この場合、フォワードレートの期間構造 $\{f_{ts}：0<s\}$ は t 時点でその期間構造が実現するので、その実現値は無条件の価格を与える。事前的には、フォワードレートの期間構造の確率的実現の仕方が、価格の確率構造を与える。実際の価格の実現は、右辺のフォワードレートの期間構造全体の実現と同等である。フォワードレートプロセスとしてHJM（Heath-Jarrow-Morton）モデルなどを仮定することも可能であるが、数百とある国債価格に十分な説明力を持たすモデルを先験的に与えるのは困難であると考える。ここではデータからその構造を探る立場をとる。この立場からみると、フォワードレートの期間構造 $\{f_{ts}：0<s\}$ を与えることと確率的な割引率 $D_t^*(s_{gj})$ を与えることは同等である。

このフォワードレート表現モデルに対しても、上で議論したリスクフリーレート、コンビニエンスイールドの考え方を適用すると、フォワードレートを銘柄属性依存型モデルにすることができる。すなわち、（3.5）の確率的な割引率 $D_t^*(s_{gj})$ を

$$D^*_{gt}(s_{gj})=\exp(-\int_0^{s_{gj}} f_{gts}ds)$$

と表現できる。この表現では、確率割引率関数は銘柄属性に依存する。

以下では、フォワードレートモデルを与えるのでなく、直接左辺の割引関数を定式化する。クーポンつき（確定利付き）債券は、将来の金利の不確実性の中で、特定な確定キャッシュフローパターンを保証するので、一般にクーポン効果（コンビニエンスイールドとみなされるイールドスプレッド））と呼ばれる価値が市場価格にあらわれる。例えば金利低下傾向にある中で、現在金利が４％のとき、クーポン６％の３年物とクーポン５％の８年物の選択は、金利の先行きと投資期間などによって、投資家から見た価値は異なる。そこで各国債の属性を考慮した属性依存型確率的割引関数 $D_{it}(s)$ のもとに、(3.5) を次のように拡張する。

(3.7) $P_{gt}=\sum_{m=1}^{M(g)} C_{gt}(s_{gm})D_{gt}(s_{gm})$ あるいは

$$P_{gt}=\sum_{m=1}^{Ma} C_{gt}(s_{am})D_{gt}(s_{am})$$

この表現において属性依存型確率的割引関数 $D_{gt}(s)$ を、その平均値と、平均値からの乖離を表す個別銘柄特有の確率的な部分の２つの部分に分解する。

(3.8) $D_{gt}(s)=\bar{D}_{gt}(s)+\Delta_{gt}(s)$

この式の第１項が平均割引関数、第２項が確率的割引変動部分を表す。すると上式は、

$$\begin{aligned}
&P_{gt}=\sum_{m=1}^{M_a} C_{gt}(s_{am})\bar{D}_{gt}(s_{am})+\eta_{gt}\\
(3.9)\quad &\eta_{gt}=C'_{gt}\Delta_{gt}\\
&C_{gt}=(C_{gt}(s_{a1}),\cdots,C_{gt}(s_{aM_a}))':Ma\times 1\\
&\Delta_{gt}=(\Delta_{gt}(s_{a1}),\cdots,\Delta_{gt}(s_{aM_a}))':Ma\times 1
\end{aligned}$$

となる。

１）属性依存型の平均割引関数 $\bar{D}_{gt}(s)$ の定式化（刈屋（1995），Kariya＝Tsuda（1994））

$\bar{D}_{gt}(s)$ は、s の p 次の多項式で近似されるとして

$$\begin{aligned}
(3.10)\quad \bar{D}_{gt}(s)=1&+(\delta_{11t}z_{g1t}+\delta_{12}z_{g2t})s+\cdots\\
&+(\delta_{pt}z_{gp1t}+\delta_{p2}z_{g2t})s^p
\end{aligned}$$

とする。この多項式の係数が２つの属性 z_{g1t}，z_{g2t} に依存する。この属性の個数は任意でよいが、以下ではそれらはクーポンレートと満期までの期間とする。

２）Δ_{gt} と Δ_{ht} の共分散行列の定式化（刈屋(1995)）

Δ_{gt} と Δ_{ht} の共分散行列構造を定式化するため、

* キャッシュフローの発生時点が近いほどそれらのキャッシュフローを割り引く確率的割引率は相関が高いこと、
* 満期が近い債券価格どうしは相関が大きいこと

と想定する。この点を考慮した Δ_{gt} と Δ_{ht} の共分散行列の構造として

$$\begin{aligned}
&Cov(\Delta_{gt},\Delta_{ht})=\lambda_{ght}\Phi_{ght}\\
&\Phi_{ght}=(\phi_{ght\cdot jr})\\
(3.11)\quad &\phi_{ght\cdot jr}=\exp(-|s_{aj}-s_{ar}|)\\
&\lambda_{ght}=\begin{cases}\sigma^2 & (g=h)\\ \sigma^2\rho b_{ght} & (g\neq h)\end{cases}
\end{aligned}$$

と定式化する。ただし

(3.12) $b_{ght}=\exp(-|s_{gMg}-s_{hMh}|)$

である。この定式化は、第 g 国債と第 h 国債の将来の $t+s_{gj}$ 時点と $t+s_{hr}$ 時点に発生するキャッシュフローの割引率 $D_{gt}(s_{aj})$ と $D_{ht}(s_{ar})$ の共分散が

(3.13) $Cov(D_{gt}(s_{aj}),D_{ht}(s_{ar}))=\lambda_{ght}\phi_{ght\cdot jr}$

であるとするものである。λ_{ght} は第 g 国債と第 h 国債の属性としての満期のみに依存する部分、また $\phi_{ght\cdot jr}$ は第 g 国債と第 h 国債のキャッシュフロー発生時点 $t+s_{gj}$ と $t+s_{hr}$ のみに依存する部分である。このとき、第 g 国債価格と第 h 国債価格の共分散は

$$\begin{aligned}
(3.14)\quad Cov(P_{gt},P_{ht})&=Cov(\eta_{gt},\eta_{ht})\\
&=\lambda_{ght}C'_{gt}\Phi_{ght}C_{ht}\equiv f_{ght}
\end{aligned}$$

と表現される。

以上の仮定のもとに、平均割引率 $\bar{D}_{gt}(s)$ は、国債価格データから次のようにして推定することができる。すなわち、共分散行列に現れる相関パラメータ ρ（λ_{ght} に含まれる）は0以上1未満とし、0.1刻みで各 ρ を与える。そして共分散行列 $F_t=(f_{ght})$ のもとに、一般化最小2乗法により、国債データから未知パラメータ $\{\delta_{ijt}, i=1,2,\cdots,p; j=1,2\}$ を推定する。これより平均割引関数 $\bar{D}_{gt}(s)$ を求めることができる。なお、ρ は相関係数ではないので（$b_{ght}=1$とすれば相関係数）、1以上の値も取りうるが、ここでは0以上1未満（これは上の定式化が共分散行列を与えるための十分条件）と仮定した。

4　社債価格モデル

本節では、N 個の社債価格データから業種と格付ごとのディフォルト確率期間構造、格付ごとの回収率を推定する手法について議論する。N 個の社債の中には、同じ企業の異なる社債価格データが入っていてもよい。モデルとしては、前節で議論したフォワードレート表現の確率的割引率を、平均値とそこからの乖離に分解し、平均的ディフォルト確率の期間構造を多項式で近似する。その多項式の係数を社債データから推定する。理論の自然な展開結果として社債発行企業のディフォルト確率の期間構造は、その企業が関わる複数の業種ポートフォリオ構造と格付に依存する構造を持つ。また、ディフォルト確率の推定と同時に格付ごとの回収率の推定も行うモデルである。なお社債モデルの割引関数は国債の価格モデルから推計したものを利用する。

モデルを展開するために、第 k 社債のキャッシュフロー（クーポン）の発生時点を

$$t+s_{kl} \qquad (l=1,\cdots,M(k))$$

とする。社債の場合も（2.2）と同様にこれらの時点を合併したものを

$$(4.1)\quad t+s_{am} \qquad (m=1,\cdots,Ma) \quad s_{Ma}=\max s_{kMk}$$

とかく。そしてすべての社債を同時に扱うときは和をとる範囲を（4.1）にする。そして t 時点でのディフォルトがないとしたときの第 k 社債のキャッシュフローを $C_{kt}(s)$ とする。このとき、t 時点で実現する第 k 債券価格 V_{kt} の確率的変動構造として次のように想定できる

$$(4.2)\quad V_{kt}=\sum_{j=1}^{M(k)}\widetilde{C}_{kt}(s_{kj})D_{kt}(s_{kj})$$

ここで確率的割引関数（プロセス） $D_{kt}(s)$ はクーポン、満期日を債券属性として考慮した、(3.4) の国債の割引率に対応するものである。$D_{kt}(s)$ は純粋に将来キャッシュフローを現在価値化するもので、ここにはディフォルトリスクを含んでいない。その意味では、この確率的割引関数は国債と同じものである。$D_{kt}(s)$ は（3.5）のように、平均値とそこからの乖離としての確率的割引率の部分に分解される。

$$(4.3)\quad D_{kt}(s)=\bar{D}_{kt}(s)+\Delta_{kt}(s)$$

平均割引関数 $\bar{D}_{kt}(s)$ は国債のものと同じものとみなされるので、実際の分析では国債から推計された平均割引率を利用する。

他方、社債のキャッシュフロー関数 $\widetilde{C}_{kt}(s_{kj})$ は、刈屋（1998）にあるように、キャッシュフロー発生時点 $\{s_{kj}: j=1,\cdots,J_k\}$ に対して

$$(4.4)\quad \widetilde{C}_{kt}(s_{kj})=C_{kt}(s_{kj})(1-L_{kt+s_{kj}}) \\ +100\gamma(i(k))L_{kt+s_{kj}}(1-L_{kt+s_{kj}-1})$$

と表現される。ここで、L_{kt+s} は第 k 債券が $t+s$ 時点までにディフォルトしているかどうかをみる定義関数としての累積ディフォルトプロセス

$$(4.5)\quad L_{kt+s}=\begin{cases}0 & if \quad J_k>t+s\\ 1 & if \quad J_k\le t+s\end{cases}$$

である。J_k は第 k 債券のディフォルト時間を表す。$\gamma(i(k))$ は格付け $i(k)$ を持つ第 k 債券の回収率で、本稿では一定と仮定する。格付けは上位から順に $i=1,\cdots I$ 個あると仮定する。(4.4) の表現の中に期間 $(t+s_{kj}-1, t+s_{kj}]$ 間にディフォルトが起きたときに回収キャッシュフローは時点 $t+s_{kj}$ でおきることを仮定している（刈屋（1999））。

（4.3）と（4.4）を（4.2）に代入すると第 k 債券の確率的に決まる価格変動構造を表現できる。

しかし、将来のディフォルトの事象の起こり方を直接的に表現した（4.4）の形のキャッシュフローはt時点で未実現であるので、その t 時点期待値表現

$$(4.6)\quad \bar{C}_{kt}(s_{kij})=C_{kt}(s_{kj})[1-p_{kt}(s_{kj}:i(k))] +100\gamma(i(k))[p_{kt}(s_{kj}:i(k)) -p_{kt}(s_{kj-1}:i(k))]\chi_{kt}(s_{kj})$$

で置き換える。ここのモデル導出は、(4.2) で無リスク割引関数とキャッシュフロー関数は無相関であることを前提にしたものであり、近似的である。また平均値からの乖離の部分は、誤差項に一括まとめて考える。その意味で統計モデルになる。

ここで、$p_{kt}(s:i(k))$ は、格付け $i(k)$ をもつ第 k 債券の時点 t における時点 $(t+s)$ ディフォルト確率であるが、それは第 k 債券発行企業の業種ポートフォリオに依存する。ただし $\chi_{kt}(s)$ は、第 k キャッシュフロー発生時点 $\{s_{km}:m=1,\ldots,M(k)\}$ のみの上で１、その他の点では０をとる定義関数である。したがって、$s\neq s_{km}$ のときは $\chi_{kt}(s)=0$,したがって $\bar{C}_{kt}(s)=0$である。(4.6) の右辺第１項は

（クーポン）×［s_{km} 時点までにこの企業が倒産しない確率］

第２項は

（元本）×（回収率）×［この企業が期間 $(t+s_{km-1}, t+s_{km}]$の間に倒産する確率］

である。なお回収率 $\gamma(i(k))$ は格付けごとに一定と仮定する。

他方、$p_{kt}(s:i(k))$は、分析枠組みとして J 個の業種が与えられているので、第 k 債券発行会社がそれらの業種 $J=1,\cdots,J$ へのビジネスウェイト（たとえば売上高比率$w_k(1),\cdots,w_k(J)$）

$$(4.7)\quad w_k(j)\geq 0,\ \sum_{j=1}^{J} w_k(j)=1 \qquad (k=1,\cdots,N)$$

に対して業種ウェイトに依存した表現

$$(4.8)\quad p_{kt}(s:i(k))\equiv\sum_{j=1}^{J} w_k(j)p_t(s:i(k),j)$$

をもつ。ここで、

$$(4.9)\quad p_t(s:i,j)\quad (i=1,\cdots,I, j=1,\cdots,J)$$

は、格付 $(1\sim I)$ と業種 $(1\sim J)$ のペア (i,j) 毎の倒産確率の期間構造であり、時点 t における時点 $(t+s)$ までの（累積）倒産確率である。

われわれの興味は、業種へのかかわり方が異なる多くの企業が発行した N 個の社債価格を利用して、この格付け別、業種別累積ディフォルト確率の期間構造を推計することである。(4.8) の表現を利用する理由は、単一の業種だけでビジネスをしている企業は少ないためである。

ディフォルト確率関数 $p_t(s:i,j)$ の表現としては、s の q 次の多項式

$$(4.10)\quad p_t(s:i,j)=\alpha_{1t}^{ij}s+\alpha_{2t}^{ij}s^2+\cdots+\alpha_{qt}^{ij}s^q$$

で近似されると仮定する。この近似によって、(4.6) の社債のキャッシュフロー関数は係数$\{\alpha_t^{ij}\}$の線形関数となる。

(4.1) の社債モデルにおいて、(4.3) の平均キャッシュフロー関数を代入したモデルは、すべての社債のキャッシュフロー発生時点を合併した表現として

$$(4.11)\quad V_{kt}=\sum_{m=1}^{Ma}\bar{C}_{kt}(s_{am})\overline{D}_t(s_{am})+\varepsilon_{kt}$$

$$(4.12)\quad \varepsilon_{kt}=\sum_{j=1}^{Ma}\bar{C}_{kt}(s_{aj})\Delta_{kt}(s_{aj})$$

と表現される。ただし、すでに述べたように、この表現では金利、ディフォルト生起の２つの過程は独立とした。現実的にはこの仮定は満たされていないが、わかりやすい結果を得るためにこれを仮定する場合が多い。

この表現において、(4.6) のキャッシュフロー自体にディフォルト確率と回収率が組み込まれ、社債の平均キャッシュフローを表現しているので、割引関数は国債の割引率を利用する。その結果、特定な社債の価格は、

1）国債の価格から導出される割引関数（イールド）と、

2）その発行企業が関係する「業種ポートフォリオ」と格付け会社の公表格付けに依存したディフォルト確率と、

3）確率的評価（誤差）

の合成と見る。結果として、社債 k の現在時点 t での理論価格は、与えられた社債価格から、倒産確率の期間構造、格付け別回収率がその誤差項の相関構造のもとで推定されると

$$(4.13)\quad \overline{V}_{kt}=\sum_{m=1}^{Ma}\bar{C}_{kt}(s_{am})\overline{D}_t(s_{am})$$

となる。ここで $\bar{D}_t(s)$ は国債の平均割引率関数である。

確率誤差項 ε_{kt} に対しては、国債の場合を参考にしてディフォルトがない場合 ($p_{kt}(s)\equiv 0$)) のキャッシュフローのウェイトをもった誤差項

$$(4.14)\quad \varepsilon_{kt}'=\sum_{m=1}^{M}C_{kt}(s_{am})\Delta_{kt}(s_{am})$$

で近似して、一般化最小2乗法での計算を簡便化する。ただし、ここでの $\Delta_{kt}(s_{am})$ は、近似誤差と社債に関係した相関構造を含むものとする。実際、ディフォルトも考慮して、

$$\varepsilon_{kt}=\sum_{m=1}^{M}\bar{C}_{kt}(s_{am})\Delta_{kt}(s_{am})$$

とすると、誤差項の中にディフォルト確率の未知パラメータ $\{\alpha_t^{ij}\}$ が入ってきて、分散共分散構造にも $\{\alpha_t^{ij}\}$ が2次の次数で入り込む。その結果、一般化最小2乗法におけるディフォルト確率の推定プロセスが複雑となってしまう。以下の議論は、この近似を利用した場合である。なお ε_{kt}' を簡単化のために ε_{kt} とかく。

実際の推定では、キャッシュフローの発生時点の確率的割引関数の間の相関構造として、Δ_{gt} と Δ_{ht} の共分散行列の構造を定式化する必要がある。これに関しては、国債の場合と同様に以下のように共分散行列を設定する。まず ε_{kt} の共分散行列として次のような設定をする。企業 k の格付を $i(k)$ とし、企業 l の格付を $i(k)$ とすると、

(4.15)

$$Cov(\varepsilon_{kt},\varepsilon_{lt})=\lambda_{i(k)i(l)t}\phi_{klt}$$

$$\phi_{klt}=\overline{C}'_{kt}\Phi_{klt}\overline{C}_{lt}$$

$$\lambda_{i(k)i(l)t}=\begin{cases}\sigma^2 & (k=l)\\ \sigma^2\rho_{i(k)i(l)}b_{klt} & (k\neq l)\end{cases}$$

$$\rho_{i(k)i(l)}=\begin{cases}\rho^i & (i(k)=i(l)=i)\\ \xi\cdot\exp(-\theta\,|\,i(k)-i(l)\,|) & (i(k)\neq i(l))\end{cases}$$

と仮定する。ここで C_{kt} は当該社債のディフォルトがない場合のキャッシュフローベクトル、Φ_{klt}, b_{klt} は国債の場合と同じだが、$\rho_{i(k)i(l)}$ は同じ格付け内の社債の相関は共通に一定 ρ^i（この値は格付けごとに異なる）であるが、異なる格付け間の相関は格付け距離が大きくなると小さくなる。極端な場合として、格付け間の間には相関がないとした次の定式化 ($\xi=0$) とすることも考えられる。

$$\rho_{i(k)i(l)}=\begin{cases}\rho^i & (i(k)=i(l)=i)\\ 0 & (i(k)\neq i(l))\end{cases}$$

すなわち ρ は、格付ごとに異なる値があり、異なる格付間については無相関とする。実証的には格付けが低くなると、背後にある経済構造の影響が共通に作用する度合いが大きくなり、相関度が高くなることが観察されている。

未知パラメーター $\{\alpha_t^{ij}\}$ と相関 ρ を、上で設定した共分散行列のもとに一般化最小2乗法により推定する。国債の場合と同様に ρ は0.1刻みで与える。すると、格付 i、業種 j の社債のディフォルト確率が求まる。

この推計プロセスは以下のとおり。

1）（第1段階）格付け i の社債のデータを利用して、相関パラメータ $\rho^i=\rho(i)$ 及び回収率 $\gamma^i=\gamma(i)$ を一般化最小2乗法による計算アルゴリズムで計算する。即ち、先ず格付 i を持つ社債の番号を $k_1,\cdots,k_n$ とし、各社債の発行企業の業種属性を $\{w_{k1}(i)\},\cdots,\{w_{kn}(j)\}$ とする。このとき、社債番号 $k_1,\cdots,k_n$ の社債価格 $\{v_{klt};l=1,\cdots,n\}$ に基づいて、一般化最小2乗法により次の方式で未知パラメータ ρ 及び γ を計測する。未知パラメータ ρ 及び γ の刻みとしてそれぞれ [0,1] 区間を100等分し、各 γ^i と ρ^i の組み合わせを与えて、一般化最小2乗法によりパラメータ ρ^i 及び γ^i を計測する。

そして10000個の未知パラメータの組み合わせ (ρ^i,γ^i) の中で、目的関数が最小となる組み合わせ (ρ^i,γ^i) を格付 i の最適解とする。この第1段階でも未知多項式パラメータ $\{\alpha_l^{ij}\}$ が推計されるが、これは利用せず第2段階ですべての社債価格を利用した同時推定のものを最終的な推定値とする

2）この動作を格付 $i=1$ から $i=\mathrm{I}$ まで行なう。このようにして得られた最適解としての格付別相関パラメータ $\rho^i=\rho(i)$ と回収率 $\gamma^i=\gamma(i)$ の計測結果を以下では固定する。

3）（第2段階）第1段階で得られた相関パラメータ及び回収率の最適解 ρ^i、γ^i を固定して全ての格付の価格情報を併合し、2段階目の未知多項式パラメータ $\{\alpha_l^{ij}\}$ と、異なる格付間の相関に関わるパラメータ ξ と θ を一般化最小2乗法により計測する。即ち、パラメータ ξ と θ について [0,1] 区間を100等分し、各刻みのパラメータ ξ と θ の組み合わせ（10000個）に対して一般化最小2乗法を適用して未知パラメータを計測し、目的関数が最小となる多項式パラメータ $\{\alpha_l^{ij}\}$ と相関パラメータ ξ と θ を2段階目の最適解とする。

4）このプロセスによって回収率 $\{\gamma^i\}$、相関 $\{\rho^i\}$、倒産確率関数 $p_t(s{:}i,j)$、相関 ξ と θ が計測される。

なお、多項式の次数qについては、上記ステップを q=1から q=8程度まで繰り返して、統計的基準によって最適解を選択する。

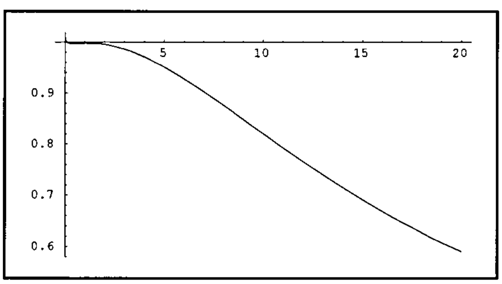


図4-1　国債データ（162銘柄）から割引関数を推定（横軸：残存年数）

図4-1は、1999年11月1日の時点のサンプルデータに対して、簡便的な推計法にもとづいた国債の割引関数である（植松・刈屋（2000））。この分析では、国債の個別属性を考慮していない。多項式では期間 s の4分の1乗の8次の多項式とした。

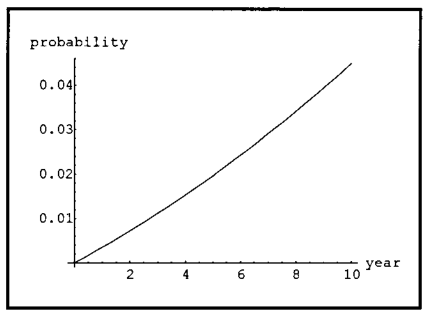
推定された割引関数

$$\bar{D}_t(s)=0.3099*s^{(1/4)}-1.925*s^{(1/2)}+5.127*s^{(3/4)}-7.67*s+6.853*s^{(5/4)}-3.565*s^{(3/2)}+0.9754*s^{(7/4)}-0.1076*s^{2}$$

であり、国債価格残差の標準偏差すなわち

$$\sqrt{\frac{1}{G}\sum_{g=1}^{G}(P_{gt}-\hat{P}_{gt})^2}$$

は0.3279（円）であった。ただし、$\hat{P}_{gt}$ は一般化最小2乗法による第 g 国債価格の推定値である。なおこの標準偏差は、実際の市場価格と理論価格の間のフィットの度合いを示す指標とみなすことができる。銘柄属性を考慮しない場合でも適切な分散行列構造を想定するとフィットがかなりよくなることを示す。



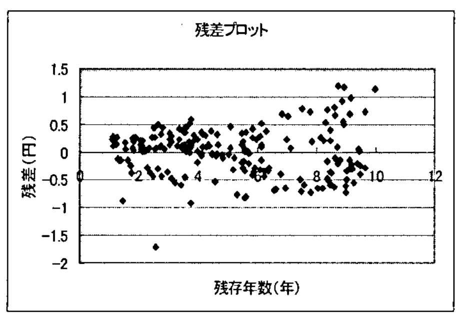


図4-2　AA社債データ（208銘柄）からディフォルト確率を推定。左図は累積ディフォルト確率関数、右図は価格残差をプロットしたもの（横軸：残存年数）。

さらに図4-2では、格付AA格の社債に対して、

業種を区別せずに、回収率をゼロとして、上記社債モデルを簡単化したモデルを用いてディフォルト確率（多項式の次数を２としている）を推定した結果である。これは、回収率をゼロとした、業種区別をしていないAA格付の分析であるので、ここでの結果はイメージに過ぎない。この図では倒産確率の期間構造は次の２次式で与えられる。またその場合の価格誤差の標準偏差は0.416897（円）であり、それなりのフィットを示している。
0.00339865＊s＋0.00010985＊s＾2

5　まとめ

本稿では、刈屋（1995)、刈屋（1999)、植松・刈屋（2000）に基づいて社債モデルを考察した。モデルの特徴として重要な部分は、社債発行企業が複数の業種に属することを前提にしたモデル化であり、そこから格付と業種ごとのディフォルト確率の期間構造を計測可能になる。その結果個別の社債の理論価格や企業の倒産確率の期間構造などが評価可能となる。また金融機関や企業は取引先の貸出債権や売掛債権の信用リスク管理を確実に行うため、信用リスクを正しく把握することに利用できる。さらに、取引先の業種の集中から発生する財務ポートフォリオの信用リスク集中を評価し、分散化する計測法の基礎として利用可能である。加えて、低格付であるために資金調達が困難な企業に対して信用補完構造を作り、低格付企業が発行した社債を担保として優先劣後構造の下に債券を発行する場合にも、信用リスクを正確に評価することに利用可能である。しかしモデルの複雑性のために、今回はこのモデルに沿った推定を行えなかった。

実際の推定問題に関わると、データの限界がある。店頭基準気配値を社債の市場価格のインプットデータとして用いることになるが、これはあくまで店頭取引での参考価格であり、実際に取引が行われる価格ではない。加えて流動性プレミアムを考慮しないとモデルと抽出される信用リスク情報の関係をゆがめることになろう。

参考文献

植松俊一郎・刈屋武昭（2000)「刈屋社債モデルの有効性の検証」IBJ-DL FT資料

刈屋武昭（1995)『債券計量分析の基礎と応用』東洋経済新報社

刈屋武昭（1999)『信用リスク分析の基礎』東洋経済新報社

刈屋武昭（2001)「倒産確率と回収率の計測システム」特開2001-125953

津田博史（2002)「銘柄間の価格連動性を考慮した社債価格モデルに基づく信用リスク乗法の推定」統計数理、50、217-240

新美隆宏（1998)「格付けと財務指標の関係について」ジャフィー・ジャーナル、37-65

中山めぐみ・森平爽一郎（1998)「格付け選択確立の推定と信用リスク量」JAFEE1998夏季大会予稿集210-225

Altman,E.I. and Katz,S. (1976) Statistical bond rating classification using financial and accounting data, *Proceedings of the Ross Institute of Accounting.*

Collin-Dufresne,P. and Solnik,B. (2001) On the term structure of default premia in the swap and LIBOR markets. *Journal of Finance* 56, 1095-1114

Duffie, D. and Kan, R.. (1996) A yield factor model of interest rates. *Mathematical Finance*,6, 379-406.

Feldhutter, P. and Lando, D. (2007) Decomposing swap spreads, Discussion Paper

Kaplan,R.S. and Urwitz,G. (1979) Statistical model of bond rating: A methodological inquiry, *Journal of Business*,52, 231-261.

Kariya,T. And Tsuda, H. (1994) New bond pricing models with applications to Japanese Government Bond, *Financial Engineering and the Japanese Markets*,1,1-20