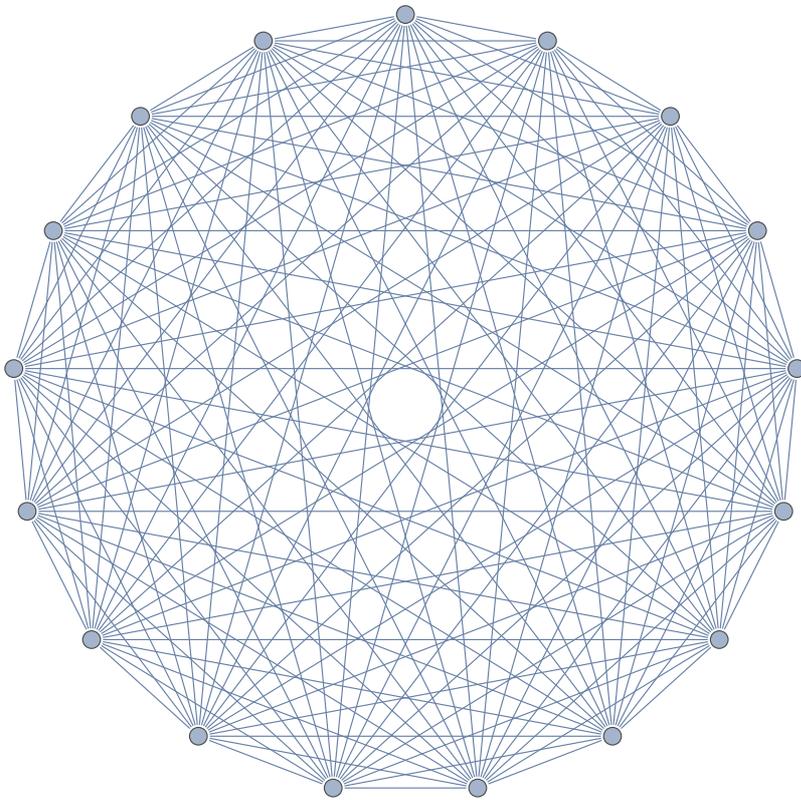


# ラムゼー理論の話題から



寺垣内 政一（広島大学大学院教育学研究科）

## はじめに

離散数学の一分野として、ラムゼー理論とよばれるものがある。そのテーマは、粗っぽくいえば、混沌の規模がある程度大きくなると、その内部にある種の秩序が必然的に現れることを意味する。わずか 26 歳でこの世を去ったイギリスの数学者・哲学者 Frank Ramsey (1903–1930) の研究に因んで名づけられたこの理論は、とてつもなく深遠であり、いわゆるラムゼー数とよばれる値の決定は、グラフ理論における最難関の課題の一つであろう。もっとも単純な問題設定を描写すれば、どんな自然数  $N$  に対しても、ある自然数  $R(N)$  が存在し、 $n > R(N)$  ならば、 $n$  頂点完全グラフ  $K_n$  のすべての辺を赤か青でどのように色づけしても、赤辺だけでできた  $N$  頂点完全グラフ  $K_N$  が青辺だけでできた  $K_N$  が見つかるのである。この  $R(N)$  がラムゼー数とよばれており、Ramsey の定理によってその値の存在は保障されている。しかし、 $R(3) = 6$ ,  $R(4) = 18$  であることを確認するのは困難ではないが、 $R(5)$  の値はいまだ決定されていない。

ラムゼー理論は深遠であるが、その入り口は決して難解ではない。著者は、ラムゼー理論の専門家でもグラフ理論の専門家でもないが、ここ 5 年間ほど、広島大学教育学部数理系コースの卒業研究として、4 年生たちにグラフ理論を提案し、ともにさまざまな話題を楽しんできた。予備知識が比較的少なくて済む点が、このコースの学生たちに適切であると考えからである。

本冊子では、ラムゼー理論の全体像ではなく、主として「単色三角形」に焦点を絞る。まずは、最も著名なラムゼー理論のトピックである 6 頂点完全グラフの辺彩色における単色三角形の存在定理からはじめて、次の 2 つの話題を扱う。

- 完全グラフの 2 色による辺彩色で出現する単色三角形の個数を評価する Goodman の公式とその完全な証明
- 6 頂点完全グラフを部分グラフに含まないにもかかわらず、辺彩色において単色三角形を内蔵する Graham のグラフ

前者については、Goodman の議論よりも簡明な Sauvé の議論を紹介する。後者については、Graham のわずか 1 ページの論文によって世に出たものだが、その論文には記されていない事実も補完してみたい。たとえば、Graham のグラフは 8 頂点をもつが、8 頂点グラフにおいて同様の性質をもつものは他にないことを証明する。

なお、本冊子の内容の一部については、大学院生の田村孝允君、西見博樹君とのセミ

ナーでの議論を基にしている。

グラフ理論の数あるテキストを見れば，ラムゼー理論について章を設けて記述しているものも多い．本冊子の目的の一つは，そのようなテキストではあまり見かけない話題について，論文などのリソースへのアクセスが容易でない人たちに向けて，解説することである．しかし，数学の啓蒙書にときにみられる「数式を使わない」といったような，数学的なごまかしは行わず，厳密に議論を展開する．深遠なものは往々にして難解であるが，この冊子に収録した話題はそれほど難解なものではないと思う．易しいものはより易しく，難しいものは易しく解説しなければ，このような冊子の存在意義はないと考えている．

2011年6月 寺垣内 政一

# 目次

1	単色三角形 . . . . .	1
2	Goodman の公式 . . . . .	6
3	Graham のグラフ . . . . .	13
	参考文献	21

## 1 単色三角形

グラフ理論でいうグラフとは、ラフに述べれば、有限個の頂点とそれらをつなぐ有限個の辺からなるデータの総体である。正確に述べれば、空でない有限集合  $V$  と有限集合  $E$ 、さらに写像  $\varphi: E \rightarrow V \times V$  からなる三つ組  $(V, E, \varphi)$  がグラフである。 $V$  の各要素は頂点とよばれ、 $E$  の各要素は辺とよばれる。写像  $\varphi$  によって、各辺には頂点の対が対応している。たとえば、辺  $e \in E$  に対して、 $\varphi(e) = (a, b)$  ならば、辺  $e$  の端点は頂点  $a$  と  $b$  であるという。このとき、 $e = ab$  と表記することも多い。

この定義によれば、端点が1つの頂点であるような辺が許されるし、異なる2つの辺の端点が集合としては一致してしまうこともありうる。前者のような辺をループ、後者のような辺を多重辺とよぶ。ループも多重辺もないグラフを単純グラフといい、以下では、単純グラフしか扱わない。

このようにグラフというのは、データの総体でしかなく、目に見える対象ではない。しかし、頂点を平面上に異なる点として表現し、辺を端点にあたる頂点をつなぐ曲線、線分として表現すれば、データの総体としての情報を一切失うことなく、平面に描かれた図形としてグラフを視覚化することができる。注意しなければいけないことは、グラフは図形そのものではなく、描かれた図形は、グラフを視覚化するための表象でしかないことである。よって、まったく異なる図形に見えていても、グラフとしては同じであったということが起こる。

さて、本冊子では、 $n$  頂点完全グラフを  $K_n$  であらわす。それは、 $n$  個の頂点をもち、どの2つの頂点間にも1本だけ辺が存在するグラフである。図1に  $K_3$  から  $K_8$  までの図を描いている。

$K_n$  は、 $n(n-1)/2$  本の辺をもつ。各辺を赤か青で塗り分けることを辺彩色<sup>\*1</sup>といい、同色の辺だけからなる三角形を単色三角形とよぶ。(三角形といっても、各辺が線分であることを要求していない。)そして、どんな辺彩色に対しても、少なくとも一つ単色三角形があらわれるグラフを単三内在とよぶことにする。

**問題 1.1.**  $n \leq 5$  ならば、 $K_n$  は単三内在ではないことを示せ。

この問題は、 $K_n$  に対して、単色三角形が1つも存在しないような辺彩色を具体的に1つ示すことで解決される。

<sup>\*1</sup> 本冊子では、2色による辺の彩色しか考えない。

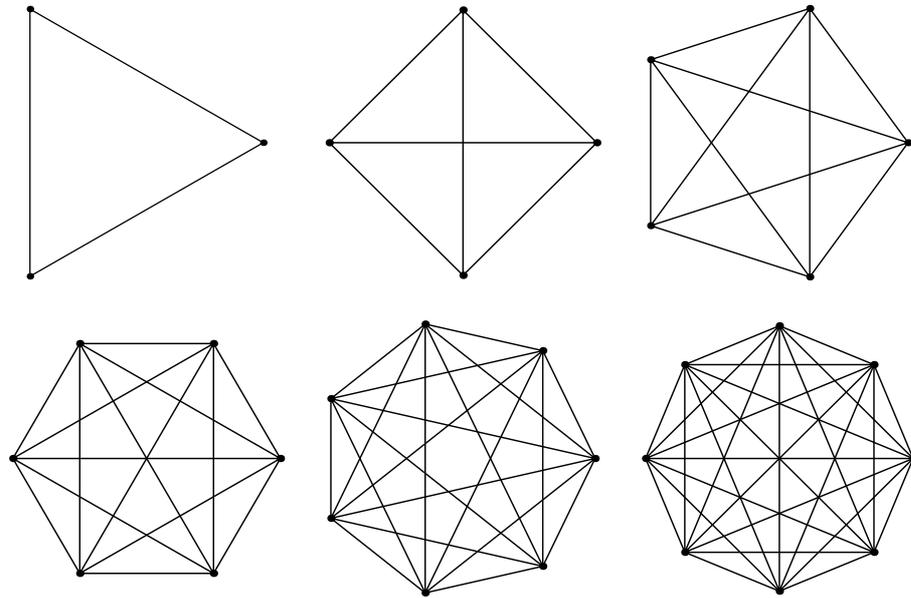


図1  $K_3$  から  $K_8$

ラムゼー理論の入り口ともいべき結果は、次の定理である。

定理 1.1.  $K_6$  は単三内在である。

証明.  $K_6$  の1つの頂点  $x$  に注目する.  $x$  からは5本の辺が出ている. 鳩ノ巣原理によって, それらのうち3本は同じ色をもっている. 仮に, それらを赤辺としてもよい. 3本の赤辺の行先を  $a, b, c$  としよう.

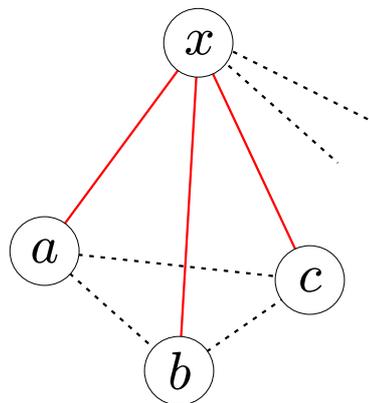


図2  $K_6$

これら 3 つの頂点間にある 3 本の辺のうち, 1 つでも赤辺があれば,  $x$  からの 2 本とあわせて, 赤色三角形が見つかる. 赤辺がないのであれば, そこに青色三角形が見つかる.  $\square$

**問題 1.2.** 定理 1.1 の証明において, 「鳩ノ巣原理」をどう適用したのか, 説明せよ.

したがって,  $n \geq 7$  についても,  $K_n$  が単三内在であることがわかる.

実は,  $K_6$  において, 単色三角形は必ず 2 個は現れる.

**定理 1.2.**  $K_6$  の任意の辺彩色において, 単色三角形は少なくとも 2 個含まれる.

証明. 赤色三角形の個数を  $R$ , 青色三角形の個数を  $B$  とする. さらに, そのどちらでもない混合型の三角形の個数を  $M$  としよう.  $K_6$  に含まれる三角形の総数は 20 だから,

$$R + B + M = 20$$

である. 単色三角形の総数は  $R + B$  だから,  $M \geq 18$  であることを示せば十分である.

さて, 各頂点  $x$  において, 赤辺, 青辺の数をそれぞれ  $r(x)$ ,  $b(x)$  とする. このとき,  $r(x) + b(x) = 5$  である.

各三角形において, 異なる色の辺が出会う角に, マークをつけると, 単色三角形においてはマークはつかず, 混合型三角形においては 2 個ずつマークがつくため,  $K_6$  全体におけるマークの総数は  $2M$  である.

一方,  $K_6$  の各頂点  $x$  に目を向けると, そこに現れるマークの個数は積  $r(x)b(x)$  なので,

$$2M = \sum_{x:\text{頂点}} r(x)b(x) \tag{1.1}$$

となる. 相加相乗平均により,

$$r(x)b(x) \leq \left( \frac{r(x) + b(x)}{2} \right)^2 = \left( \frac{5}{2} \right)^2 = 6.25$$

だから,  $r(x)b(x) \leq 6$  である. こうして,  $2M \leq 36$  となって,  $M \leq 18$ .  $\square$

この議論は, 次のセクションで, 完全グラフ  $K_n$  に対して一般化される.

$K_6$  の辺彩色は,  $2^{15} = 32768$  通り存在する. いうまでもなく, 単色三角形の個数の最大値は 20 である. 最小値が 2 であることは, 図 3 よりわかる.

ちなみに, Harary [7] は  $K_6$  の辺彩色において, 単色三角形がちょうど 2 個であるような場合を決定している.

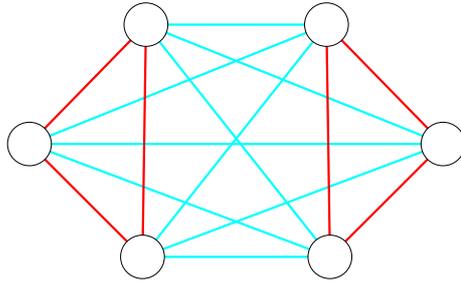


図3 単色三角形が2個の辺彩色

それでは次に、単色三角形の個数としてどのような値が可能だろうか。

定理 1.3.  $K_6$  の辺彩色において、単色三角形の個数を  $\Delta$  とすると、

$$\Delta \in \{2, 3, 4, \dots, 16\} \cup \{20\}. \quad (1.2)$$

証明.  $2 \leq \Delta \leq 20$  はよい. 今, 単色でない三角形が存在したとする. その3辺の色は, 赤2本, 青1本としてよい. その青辺  $e$  に着目する.

$e = xy$  としよう. すると, 定理 1.2 の証明の記号を利用すると,  $r(x), b(x), r(y), b(y)$  のいずれも0ではない. よって,  $r(x)b(x) \geq 4, r(y)b(y) \geq 4$  だから, 定理 1.2 の証明における (1.1) に対して,  $2M \geq 8$  となる. つまり, 混合型三角形が4個は存在することになり,  $\Delta \leq 16$  である.  $\square$

それでは, (1.2) におけるどの値も, 実際に単色三角形の個数として実現できるだろうか. 図4に,  $\Delta = 3, 4, 5$  の場合を示しておく. なお, 赤辺のみを描いているので, 青色三角形の個数も数えることを忘れてはいけない.

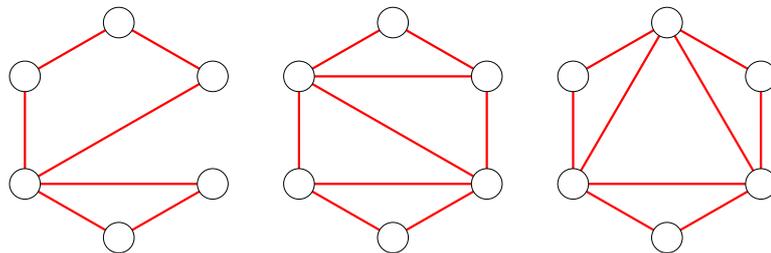


図4 単色三角形が3, 4, 5個の辺彩色

定理 1.4.  $K_6$  の辺彩色において, 単色三角形の個数を  $\Delta$  とする.  $\Delta > 12$  ならば,  $\Delta = 13, 16, 20$ .

証明. すべての辺を同じ色にしたときのみ,  $\Delta = 20$  が実現されることはよい. 以下, 赤辺も青辺もあるとしよう. 定理 1.3 より,  $\Delta \leq 16$  である.

定理 1.2 の証明の記号を利用する.

$$\Delta = 20 - \frac{1}{2} \sum_{x:\text{頂点}} r(x)b(x)$$

であった.  $\Delta > 12$  ならば,  $\sum r(x)b(x) < 16$ . 積  $r(x)b(x)$  のうち, 0 でないものは 4 か 6 だから, 少なくとも 3 つの頂点において, この積は 0 である. これらの頂点を  $x, y, z$  としよう.  $r(x) = r(y) = 0$  として十分である. すると, 必然的に  $r(z) = 0$  となる.

残りの 3 頂点を  $a, b, c$  とすればこれら 3 頂点のはる三角形  $abc$  を除いて, すべて青辺である. 三角形  $abc$  内に赤辺が 1 本だけならば  $\Delta = 16$ , 2 本あれば  $\Delta = 13$ , 3 本あれば  $\Delta = 11$  となる ( $\Delta > 12$  としているので, この場合は起こらない).  $\square$

上記の証明で,  $\Delta = 12$  が起こりえないといっているわけではないことを注意しておく.

**問題 1.3.**  $K_6$  に対して, 実現可能な  $\Delta$  を決定せよ.

このセクションの最後に, 単色四角形についての結果を述べておく. 以下の簡明な議論は [1] による.

**定理 1.5.**  $K_6$  の任意の辺彩色において, 単色四角形が出現する.

証明.  $K_6$  は単三内在なので, 赤色三角形  $\triangle abc$  があるとしてよい. 残りの 3 頂点を  $x_1, x_2, x_3$  としよう. 以下, 単色四角形が存在しないと仮定する.

$x_i$  から,  $\triangle abc$  の頂点にむかって出ている 3 本の辺のうち, 赤辺が 2 本以上あれば, 赤色四角形が見つかる. よって, 各  $x_i$  から  $\triangle abc$  の頂点にむかっては, 高々 1 本ずつしか赤辺は出ない. いいかえれば, 少なくとも 2 本は青辺である.

次に,  $x_i$  から  $\triangle abc$  の頂点にむかって出ている 3 本の辺がすべて青辺だとすると, 他の  $x_j$  から  $\triangle abc$  の頂点にむかって出ている青辺 2 本と合わせて, 青色四角形が見つかる.

以上から, 各  $x_i$  から  $\triangle abc$  の頂点にむかって出ている 3 本の辺のうち, 赤辺は 1 本, 青辺は 2 本である. さらに, 異なる  $x_i$  と  $x_j$  から出る赤辺が  $\triangle abc$  の同じ頂点に接続することはない. なぜなら, 仮に頂点  $b$  に接続するならば, 四角形  $x_i a x_j c$  は青辺のみでできていることになるからである. よって, 必要ならばラベルをつけかえて, 辺  $x_1 a, x_2 b, x_3 c$  が赤辺としてよい (図 5).

すると, 辺  $x_1 x_2, x_2 x_3$  は青辺でなければならず, 四角形  $x_1 x_2 x_3 b$  が青色四角形になっ

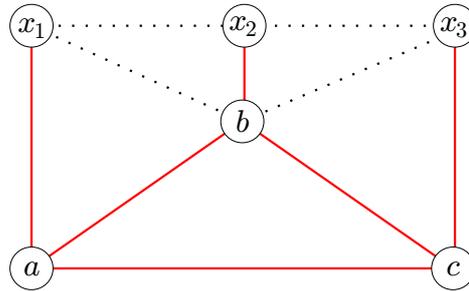


図 5

てしまう。 □

問題 1.4.  $K_6$  の辺彩色において，単色四角形は少なくとも 2 個現れることを証明せよ．  
(Hint: 1 つの単色四角形から始めて，残りの辺の色を考察せよ．)

## 2 Goodman の公式

定理 2.1 (Goodman).  $N \geq 3$  とする． $N$  頂点完全グラフ  $K_N$  の辺を 2 色 (赤, 青) で塗り分ける．そのときに含まれる青三角の個数を  $B$ ，赤三角の個数を  $R$  とするとき，

$$B + R \geq \begin{cases} \frac{1}{3}u(u-1)(u-2) & \text{if } N = 2u, \\ \frac{2}{3}u(u-1)(4u+1) & \text{if } N = 4u+1, \\ \frac{2}{3}u(u+1)(4u-1) & \text{if } N = 4u+3. \end{cases} \quad (2.1)$$

しかも，これらの評価は最良である．

ここでは，Goodman [4] の議論よりも簡単な別証明を与えた Sauvé [9] に添って証明を与える．

証明.  $K_N$  の各頂点  $x$  において，接続する青辺，赤辺の本数をそれぞれ  $b(x)$ ， $r(x)$  とする．このとき， $b(x) + r(x) = N - 1$  である．

さて， $x$  に接続する異なる 2 辺の選び方は， $\binom{N-1}{2}$  通りあるが，2 辺が同色のときには weight 2，異なる色のときには weight  $-1$  を与える．異なる 2 辺の選び方すべてにおいてこの weight の合計を  $w(x)$  とし，頂点全体にわたる  $w(x)$  の和を

$$W = \sum_{x:\text{頂点}} w(x)$$

とする．

一方，単色三角形 1 つにつき，weight 6 が生じ，単色でない三角形からは weight 0 が生じる．よって，

$$W = 6(B + R)$$

が成立する．これより， $W/6$  の最小値を評価すればよいことがわかる．

まず， $w(x)$  を考える．以下，頂点  $x$  において考えているとき，記述を簡単にするため， $b = b(x)$ ， $r = r(x)$  とかく．

$$\begin{aligned} w(x) &= 2 \left( \binom{b}{2} + \binom{r}{2} \right) - br \\ &= b(b-1) + r(r-1) - br \\ &= (b+r)^2 - (b+r) - 3br \\ &= (N-1)(N-2) - 3br. \end{aligned}$$

そして，

$$br = b(N-1-b) = - \left( b - \frac{N-1}{2} \right)^2 + \left( \frac{N-1}{2} \right)^2 \quad (2.2)$$

である．

頂点  $x$  において， $w(x)$  を最小にするには， $br$  を最大にすればよい．そして  $br$  は (2.2) において， $b$  の 2 次関数になっている．

以下， $N$  の偶奇に応じて場合分けを行う．

**Case 1:**  $N$  が偶数のとき． $N = 2u$  とおく．

このとき， $(N-1)/2$  は整数ではないことに注意すると，2 次関数 (2.2) の最大は，

$$\{b, r\} = \left\{ \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} \right\}$$

のときであり，

$$w(x) \geq (N-1)(N-2) - 3 \cdot \frac{N}{2} \left( \frac{N}{2} - 1 \right) = (u-1)(u-2)$$

とわかる．よって，

$$B + R = \frac{W}{6} = \frac{1}{6} \sum_x w(x) \geq \frac{N}{6} (u-1)(u-2) = \frac{1}{3} u(u-1)(u-2).$$

**Case 2:**  $N$  が奇数のとき．さらに， $N$  を 4 でわったときの余りに応じて場合分けする．

(1)  $N = 4u + 1$  のときは, 2 次関数 (2.2) の最大は,

$$b = r = \frac{N-1}{2}$$

のときであり,

$$w(x) \geq (N-1)(N-2) - 3 \left( \frac{N-1}{2} \right)^2 = 4u(u-1)$$

とわかる. よって,

$$B + R = \frac{W}{6} = \frac{1}{6} \sum_x w(x) \geq \frac{N}{6} \cdot 4u(u-1) = \frac{2}{3}u(u-1)(4u+1).$$

(2)  $N = 4u + 3$  のときは, 同様に, 2 次関数 (2.2) の最大は,

$$b = r = \frac{N-1}{2}$$

のときであるが,  $(N-1)/2$  が奇数であるため, すべての頂点において,  $b(x), r(x)$  がそのような値になることはできない. なぜなら, 仮にそうなっているとすると, 青辺だけからなる  $K_N$  の部分グラフをみると, 頂点数は  $N$  であって奇数, そして各頂点における次数は奇数となるが, そのようなグラフは存在しえないからである. (どんなグラフであろうと, 奇数次数の頂点は偶数個である.)

さて,

$$\begin{aligned} W &= \sum_x w(x) = \sum_x ((N-1)(N-2) - 3 \cdot b(x)r(x)) \\ &= N(N-1)(N-2) - 3 \sum_x b(x)r(x) \\ &= N(N-1)(N-2) - 3 \sum_x \left( - \left( b(x) - \frac{N-1}{2} \right)^2 + \left( \frac{N-1}{2} \right)^2 \right) \\ &= N(N-1)(N-2) - 3N \left( \frac{N-1}{2} \right)^2 + 3 \sum_x \left( b(x) - \frac{N-1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

この最後の項が 0 になれないわけだから, 1 つの頂点を除いては  $b(x) = (N-1)/2$  であり, 1 つの頂点においてのみ,  $b(x) = (N-3)/2$  にしておけば, 最後の項が最小になる. こうして,

$$W \geq N(N-1)(N-2) - 3N \left( \frac{N-1}{2} \right)^2 + 3 = \frac{1}{4}(N+1)(N-3)(N-4).$$

以上から,

$$B + R = \frac{W}{6} \geq \frac{2}{3}u(u+1)(4u-1)$$

を得る.

あとは, これらの評価が最良であることの確認である. それは, 実際に  $B + R$  の最小値として実現可能であることを示せばよい.

まず,  $N = 2u$  のとき,  $K_N$  を 2 つの  $K_u$  のジョインとみなす. つまり,  $G_0, G_1$  をともに  $K_u$  と同型なグラフとすれば,  $K_N = G_0 * G_1$  である. 各  $G_i$  の辺はすべて青にぬり,  $G_0$  と  $G_1$  をつなぐ辺はすべて赤にぬる. (図 6 は,  $u = 3$  の場合を示している.) すると, どの頂点  $x$  においても,

$$b(x) = u - 1, r(x) = u$$

となっており, 先の Case 1 でみたように  $B + R$  の最小値を実現する.

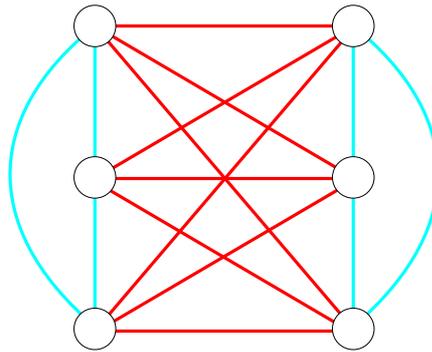


図 6  $u = 3$  の場合

次に,  $N$  が奇数の場合は帰納的に構成する. まず,  $N = 5$  のときは, 図 7 のようにぬれば, 各頂点において,  $b = r = 2$  となっており, Case 2(1) でみたように,  $B + R$  の最小値を実現する.

さて,  $N = 4u + 1$  のときに, 各頂点で  $b = r = 2u$  となるぬりわけが存在したと仮定する.  $K_N$  の頂点を  $P_1, P_2, \dots, P_{4u+1}$  とする. 新たに 2 つの頂点  $P_{4u+2}, P_{4u+3}$  を追加して, 次の手順で辺を入れていく.

- $P_{4u+2}$  から  $P_1, P_3, \dots, P_{4u+1}$  へ青辺 ( $2u + 1$  本) を入れる.
- $P_{4u+2}$  から  $P_2, P_4, \dots, P_{4u}$  へ赤辺 ( $2u$  本) を入れる.
- $P_{4u+3}$  からは, 色をいれかえて同様に辺を入れる.
- $P_{4u+2}$  と  $P_{4u+3}$  の間を赤辺でつなぐ.

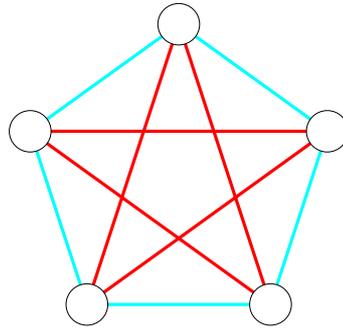
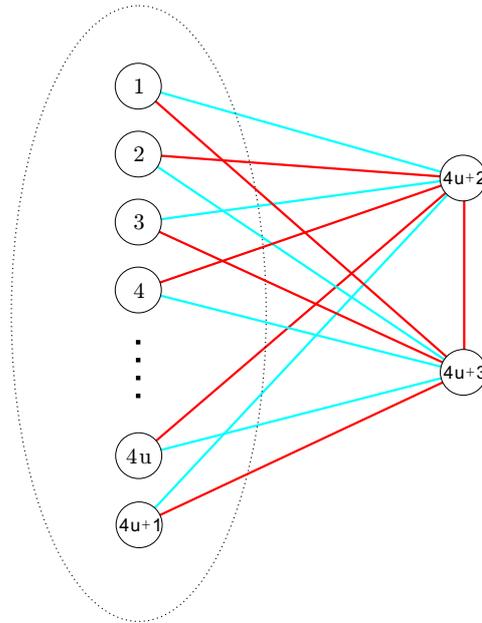
図7  $N = 5$  の場合

図8を参照してほしい.

図8  $4u + 3$  頂点へ拡大

こうして得られたグラフは、頂点数  $4u + 3$  の完全グラフであり、 $P_1, \dots, P_{4u+1}$  及び  $P_{4u+2}$  においては  $b = r = 2u + 1$  であるが、 $P_{4u+3}$  においてのみ  $b = 2u$ ,  $r = 2u + 2$  となっている。これは Case 2(2) の場合で、 $B + R$  の最小値を実現している。

最後に、ここへさらに2頂点  $P_{4u+4}$ ,  $P_{4u+5}$  を追加する。

- $P_{4u+4}$  から  $P_1, P_3, \dots, P_{4u+1}$  へ青辺 ( $2u + 1$  本) を入れる。
- $P_{4u+4}$  から  $P_2, P_4, \dots, P_{4u+2}$  へ赤辺 ( $2u + 1$  本) を入れる。

- $P_{4u+5}$  からは, 色をいれかえて同様に辺を入れる.
- $P_{4u+3}$  と  $P_{4u+4}$ ,  $P_{4u+3}$  と  $P_{4u+5}$  の間に青辺,  $P_{4u+4}$  と  $P_{4u+5}$  の間に赤辺を入れる.

以上によって, 頂点数  $4u + 5$  の完全グラフが得られて, すべての頂点において,  $b = r = 2u + 2$  であることが確認できる. つまり, Case 2(1) の場合で,  $B + R$  の最小値を実現している.  $\square$

問題 2.1. Goodman の結果は,

$$B + R \geq \binom{N}{3} - \left\lfloor \frac{N}{2} \left\lfloor \left( \frac{N-1}{2} \right)^2 \right\rfloor \right\rfloor$$

と表せることを示せ.

Goodman は, 定理 2.1 における最小値を実現する彩色を *external* とよび, その状況において,  $B = 0$  あるいは  $R = 0$  とできるかという問題を提起した. Goodman 自身,  $N$  が偶数の場合を肯定的に解決している. 実際, 先に述べた構成において,  $R = 0$  となっている.  $N$  が奇数のときは, Paul Erdős によって解決され, その議論が [9] に収録されているので紹介したい.

定理 2.2.  $N$  が奇数のとき,  $N > 7$  ならば  $K_N$  の *extremal* な彩色において,  $B$  も  $R$  も 0 にはならない. しかし,  $K_7$  については, 一方を 0 とする *external* な彩色が存在する.

証明.  $N > 7$  を奇数とする.  $K_N$  の *extremal* な彩色において,  $R = 0$  と仮定して矛盾を導けば十分である.

Case 1:  $N = 4u + 1$  のとき.

定理 2.1 の証明においてみたように, *extremal* な彩色においては, 各頂点から赤辺は  $2u$  本出ている. 頂点  $O$  を 1 つ選び,  $O$  と赤辺でつながる頂点を  $P_1, \dots, P_{2u}$  とする. そして,  $O$  と青辺でつながる頂点を  $Q_1, \dots, Q_{2u}$  とする. また,  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{2u}\}$ ,  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_{2u}\}$  とする. 図 9 を参照してほしい.

$R = 0$  だから,  $\mathcal{P}$  の 2 頂点間に赤辺はない. つまり, 各  $P_i$  からは,  $\mathcal{Q}$  の  $2u - 1$  個の頂点にむかって赤辺が出ている. 一方, 各  $Q_j$  においても赤辺は  $2u$  本出ているのだから, 結局,  $\mathcal{Q}$  の 2 頂点をつなぐ赤辺が  $u$  本存在することになる.

今,  $P_1$  は  $Q_1, \dots, Q_{2u-1}$  と赤辺でつながっているとしてよい. すると,  $Q_1, \dots, Q_{2u-1}$  の間に赤辺があってはいけない. よって,  $Q_{2u}$  が  $u$  本の赤辺によって,  $Q_1, \dots, Q_u$  とつながっているとしてよい. しかし,  $Q_{2u}$  から出る赤辺の残りは  $u$  本あって, それらはすべ

て  $\mathcal{P}$  の頂点にむかうことになる．そのうちの 1 つを  $P_2$  としてよい．

$P_2$  からは  $\mathcal{Q}$  の  $2u - 1$  頂点にむかって赤辺が出ているが，ここで  $2u - 1 > u$  であることから， $Q_1, \dots, Q_u$  のうちのいずれかと赤辺でつながることになる．それを  $Q_i$  とおけば， $P_2 Q_i Q_{2u}$  は赤色三角形であり，矛盾．

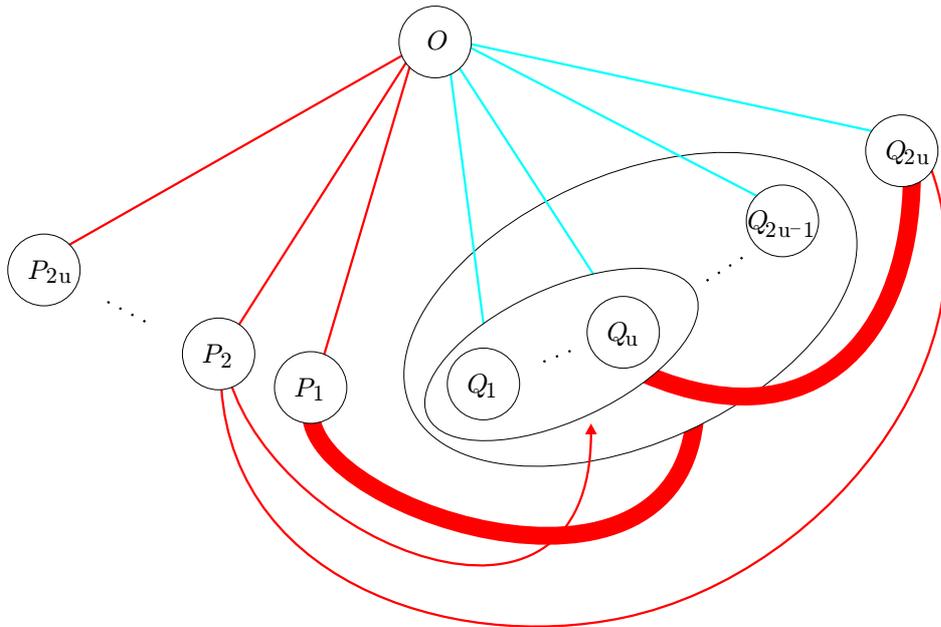


図9  $N = 4u + 1$  の場合

**Case 2:**  $N = 4u + 3$  のとき．

定理 2.1 の証明においてみたように，extremal な彩色においては，ただ 1 つの頂点  $O$  を除いては，各頂点から赤辺は  $2u + 1$  本出ている． $O$  からは  $2u + 2$  本か  $2u$  本の赤辺が出ているので，その本数に応じて場合分けを行う．

(1)  $O$  から出る赤辺が  $2u + 2$  本するとき．

Case 1 と同様に， $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{2u+2}\}$ ， $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_{2u}\}$  として，それぞれ  $O$  と赤辺，青辺でつながっている頂点の集合とする． $R = 0$  なので， $\mathcal{P}$  の 2 頂点間に赤辺はない．よって，各  $P_i$  は  $2u$  本の赤辺で  $\mathcal{Q}$  の頂点とつながる．つまり，各  $P_i$  は  $\mathcal{Q}$  のすべての頂点と赤辺でつながっている．すると，各  $Q_j$  は  $2u + 2$  本の赤辺をもつことになり，矛盾．

(2)  $O$  から出る赤辺が  $2u$  本するとき．

$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{2u}\}$ ， $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_{2u+2}\}$  として，それぞれ  $O$  と赤辺，青辺でつな

がっている頂点の集合とする．各  $P_i$  からは  $2u$  本ずつ， $Q$  にむかって赤辺が出ている．各  $Q_j$  からも赤辺が  $2u + 1$  本ずつ出ていることとあわせると，

$$\frac{1}{2}\{(2u + 2)(2u + 1) - (2u)^2\} = 3u + 1$$

より， $3u + 1$  本の赤辺が  $Q$  の 2 頂点間をつなぐことになる． $u > 1$  より， $3u + 1 > 2u + 2$  なので， $Q$  の中で，ほかの 3 つの頂点と赤辺でつながる頂点が存在する．それを  $Q_1$  とし， $Q_2, Q_3, Q_4$  と赤辺でつながるとしてよい．

もし  $Q_1$  が  $\mathcal{P}$  のいずれかと赤辺でつながると，その頂点からは， $Q_2, Q_3, Q_4$  に赤辺が出せなくなり，各  $P_i$  から  $Q$  に  $2u$  本の赤辺が出ていることに反する．こうして， $Q_1$  から  $\mathcal{P}$  に赤辺は出ない．すると， $Q_1$  から出ている赤辺はすべて  $Q$  にむかっていることになり，それが  $2u + 1$  本であることから，結局， $Q_1$  は  $Q$  の他のすべての頂点と赤辺でつながる．

先に述べたように， $3u + 1$  本の赤辺が  $Q$  の 2 頂点間にあるのだから， $Q_2, \dots, Q_{2u+2}$  のうちの 2 頂点をつなぐ赤辺があるはずであり， $Q_1$  からの赤辺とあわせて，赤色三角形ができてしまう．

最後に， $K_7$  については，図 10 に示す extremal な彩色において， $B = 4, R = 0$  となっている． □

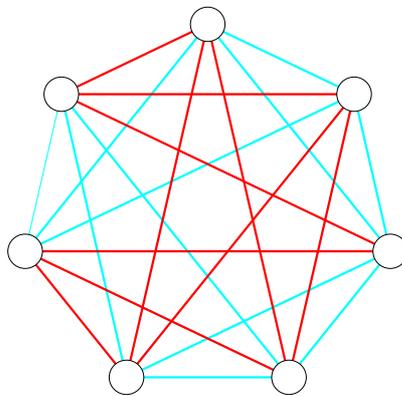


図 10  $B = 4, R = 0$  の  $K_7$  の彩色

### 3 Graham のグラフ

グラフ  $G$  が 6 頂点完全グラフ  $K_6$  を部分グラフに含めば， $G$  が単三内在であることは明らかである．それでは， $K_6$  を部分グラフに含まないようなグラフで単三内在のものは

あるだろうか．これが Erdős と Hajnal によって 1967 年に提起された問題である．それは，Graham [6] によれば，J. H. van Lint によって最初に解決されたそうだ．グラフはいわゆる generalized Petersen graph  $G(7, 2)$  の complement であり，14 頂点，70 辺からなる（図 11）．ただ，それは出版されていない．

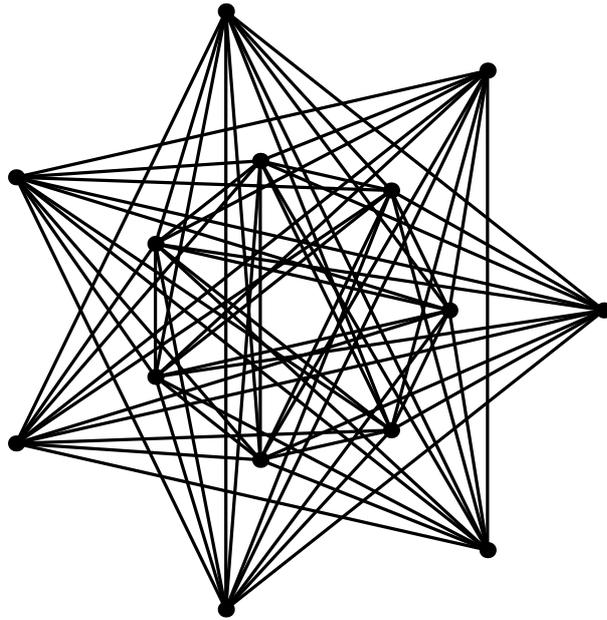


図 11 van Lint のグラフ

ここでは，Graham が構成した 8 頂点のより簡潔なグラフを紹介する．

グラフ  $G$  を図 12 のような 8 頂点グラフとする．これは，3-cycle  $C_3$  と 5-cycle  $C_5$  のジョイン  $C_3 * C_5$  である．つまり， $C_3$  と  $C_5$ ，それらの間をつなぐ 15 本の辺からなる．

**定理 3.1** (Graham 1968 [5]). 図 12 のグラフ  $G$  は， $K_6$  を部分グラフにもたないが，単三内在である．

証明. 図にあるように，頂点を  $v_1, \dots, v_8$  と名づける．もし  $G$  が  $K_6$  を部分グラフとして含むならば，それは  $v_1$  から  $v_5$  のうちの 3 つの頂点を含むことはできない．なぜなら，それらのうちの 2 つは隣接しないからである．よって， $v_1$  から  $v_5$  のうちの高々 2 つしか頂点として使えないため，頂点が足りない．こうして， $G$  は  $K_6$  を部分グラフとして含むことはできない．

次に， $G$  の辺を赤と青で彩色し，単色三角形がなかったと仮定する．赤辺全体の集合を

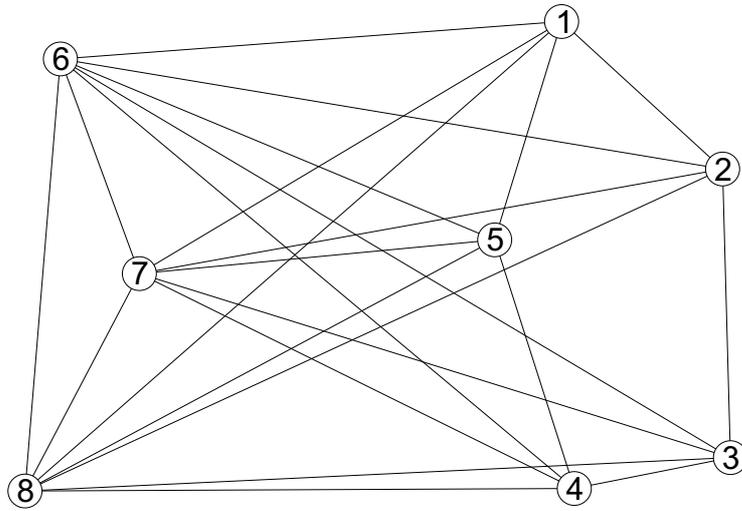


図 12 Graham のグラフ

$R$ , 青辺全体の集合を  $B$  とする. このとき, 辺  $v_6v_7, v_7v_8 \in R, v_6v_8 \in B$  としてよい.

まず,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  に対して,  $v_7v_i \in B$  である. なぜなら,  $v_7v_i \in R$  ならば,  $v_6v_i, v_8v_i \in B$  となり,  $v_6v_8v_i$  が青色三角形になってしまう.

こうして, 5 角形  $v_1v_2v_3v_4v_5$  の辺はすべて  $R$  に属する. すると,  $v_6$  から 5 角形の頂点にむかう 5 本の辺のうち, 赤辺は高々 2 本でなければならない. 同様に  $v_8$  についても同様. つまり,  $v_6$  と  $v_8$  のそれぞれから 5 角形にむかって少なくとも 3 本は青辺が出ている. したがって, 5 角形のある頂点  $v_j$  に対して,  $v_6v_j, v_8v_j \in B$  となっており,  $v_6v_8v_j$  が青色三角形を形成してしまう.  $\square$

すぐに, いくつかの問題が想起される.

- 7 頂点以下のグラフで,  $K_6$  を含まず, 単三内在なものはあるのか.
- 8 頂点が最小とすると, Graham のグラフが唯一のものか.
- Graham のグラフにおいて, 単色三角形の個数はどのような値を実現しうるか.

最初の問題の答えは, 否定的である.

**定理 3.2.** 7 頂点以下のグラフで,  $K_6$  を部分グラフに含まず, 単三内在なものは存在しない.

証明. まず, 5 頂点以下のグラフでは存在しない. なぜなら, 5 頂点完全グラフ  $K_5$  は, 2 つの Hamilton cycle に分解するが, それらに含まれる辺を赤と青で彩色すれば, 単色三

角形は存在しない．5 頂点以下のどんなグラフも  $K_5$  の部分グラフであるから，そのような彩色を制限することで，単色三角形を含まない彩色が得られてしまう．

次に，6 頂点の場合を考える．図 13 は，6 頂点完全グラフ  $K_6$  から 1 辺を抜いたグラフに対する彩色を示している．

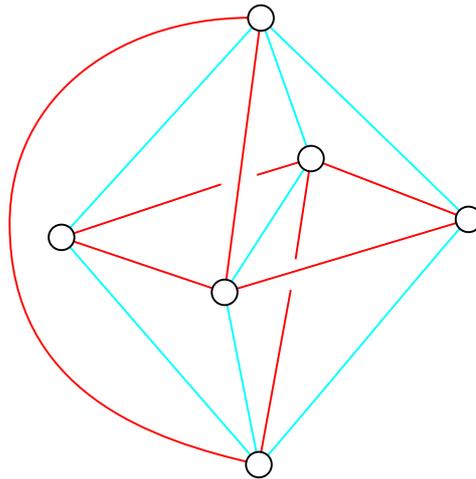


図 13  $K_6 - (\text{edge})$

ここには単色三角形は存在しない．6 頂点のグラフであって， $K_6$  を部分グラフにもたないものは，このグラフの部分グラフであることから，単色三角形を含まない彩色をもつことになる．

最後に，7 頂点の場合を考える．7 頂点完全グラフ  $K_7$  から，端点を共有しない 2 辺を除いたグラフを  $G_1$  としよう (図 14)． $G_1$  が  $K_6$  を部分グラフにもたないことは容易にわかる．

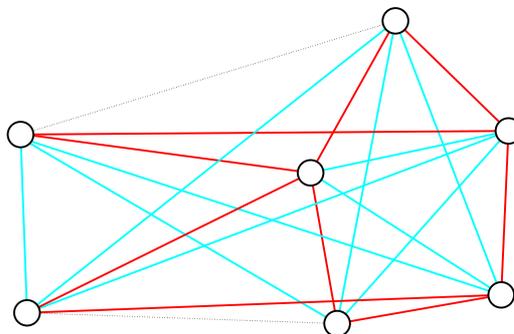


図 14  $G_1 = K_7 - (\text{disjoint 2 edges})$

次に,  $G_2 = K_7 - C_3$  とする (図 15).  $G_1$  と同様に,  $G_2$  も  $K_6$  を部分グラフにもたない.

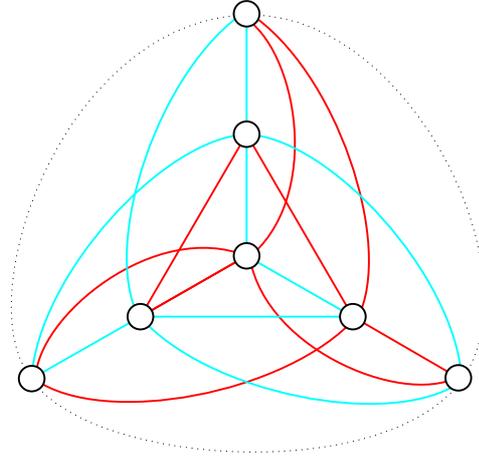


図 15  $G_2 = K_7 - C_3$

主張 3.1. 7 頂点グラフ  $H$  が  $K_6$  を部分グラフにもたないならば,  $G_1$  あるいは  $G_2$  の部分グラフである.

主張 3.1 の証明.  $K_7$  における補グラフに着目する.  $\bar{G}_1$  は端点を共有しない 2 本の辺と 3 つの孤立頂点からなり,  $\bar{G}_2$  は  $C_3$  と 4 つの孤立頂点からなる. このとき,  $\bar{G}_1 \subset \bar{H}$  あるいは  $\bar{G}_2 \subset \bar{H}$  をいえばよい. そこで, これを否定すると, まず  $\bar{H}$  はサイクルを含めないで, forest でなければならない. しかも, 辺のある連結成分はただ 1 つしかない. さらに, その連結成分は star である. こうして,  $\bar{H}$  には互いに独立な 6 個の頂点が含まれるので,  $H$  が  $K_6$  を部分グラフに含んでしまう.  $\square$

$G_1, G_2$  はそれぞれ図 14, 15 に示された彩色において, 単色三角形をもたないことから, 7 頂点の場合の証明が終わる.  $\square$

次に, Graham のグラフは, 1 本でも辺を抜いてしまうと単三内在ではなくなってしまうことを示す.

**定理 3.3.** *Graham* のグラフは, 単三内在という性質に関して, 臨界的である.

証明. Graham のグラフ  $G = C_3 * C_5$  の対称性から, 3 通りの辺の抜き方について考察すれば十分である. つまり,  $C_3, C_5$  あるいは両者をつなぐ部分から 1 辺をぬいて得られる

グラフのそれぞれについて，単色三角形を含まない彩色を与えればよい．

まず， $C_3$  と  $C_5$  の辺のすべて赤，残る辺を青にしておく，単色三角形は  $C_3$  の部分にただ1つしかない．よって，ここで  $C_3$  から1辺除けば，単色三角形のない彩色が得られる．残る2つの場合は，図16に示す彩色において，単色三角形が存在しない．  $\square$

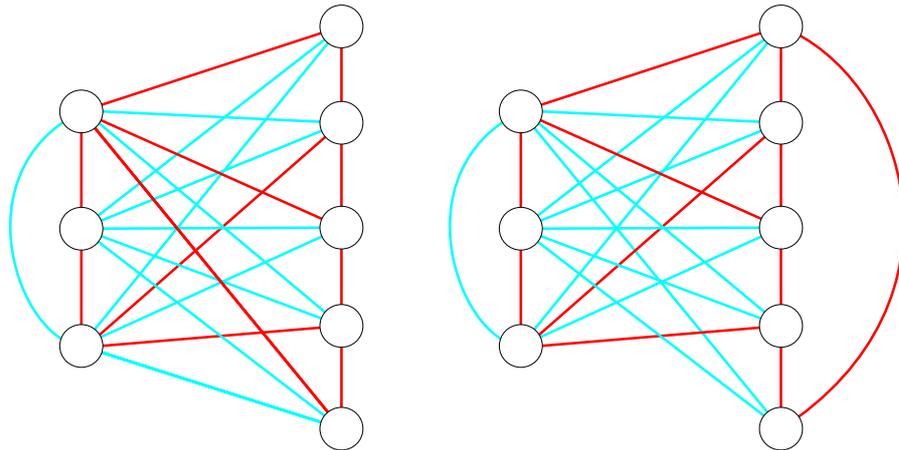


図16 Grahamのグラフから1辺ぬいたもの

次に，Grahamのグラフの一意性を証明する．不思議なことに，Grahamの論文にも，後年の論文においてもその事実が記載されていないようだ．ただ，Grahamほどの数学者であれば，当然，そのことは承知したろうと推測する．証明はそれほど明らかではない．まず，準備を1つおこなう．

**補題 3.1.** 8頂点のグラフ  $G$  について， $K_8$  におけるその補グラフ  $\bar{G}$  が図17に示された  $F_i$  のいずれかを部分グラフとして含むならば， $G$  は単三内在ではない．

**証明.**  $F_i \subset \bar{G}$  ならば， $\bar{F}_i \supset G$  だから，各  $\bar{F}_i$  に対して単色三角形の存在しない彩色を示せば十分である．それは図18に示されている．  $\square$

**定理 3.4.** 8頂点のグラフで， $K_6$  を部分グラフとして含まず，単三内在なものは Graham のグラフに限る．

**証明.**  $G$  を8頂点グラフで， $K_6 \not\subset G$  かつ単三内在とする．以下，補グラフは常に  $K_8$  に対して考える．Grahamのグラフを  $G_0$  とかくと， $\bar{G}_0 = C_5 \cup (3 \text{つの孤立頂点})$  だった．よって， $C_5 \subset \bar{G}$  を示せば， $G \subset G_0$  となり， $G_0$  の臨界性から(定理3.3)から， $G = G_0$  が従う．

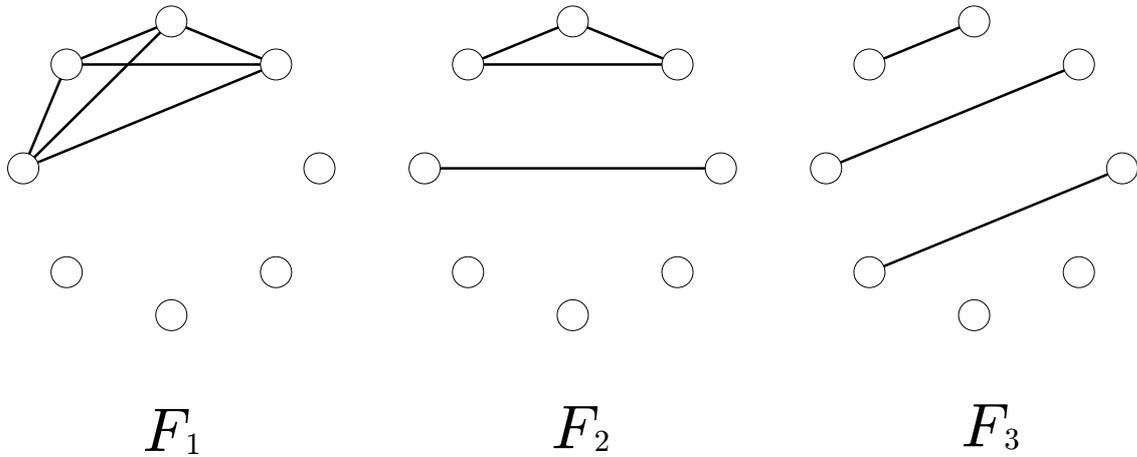


図 17  $F_1, F_2, F_3$

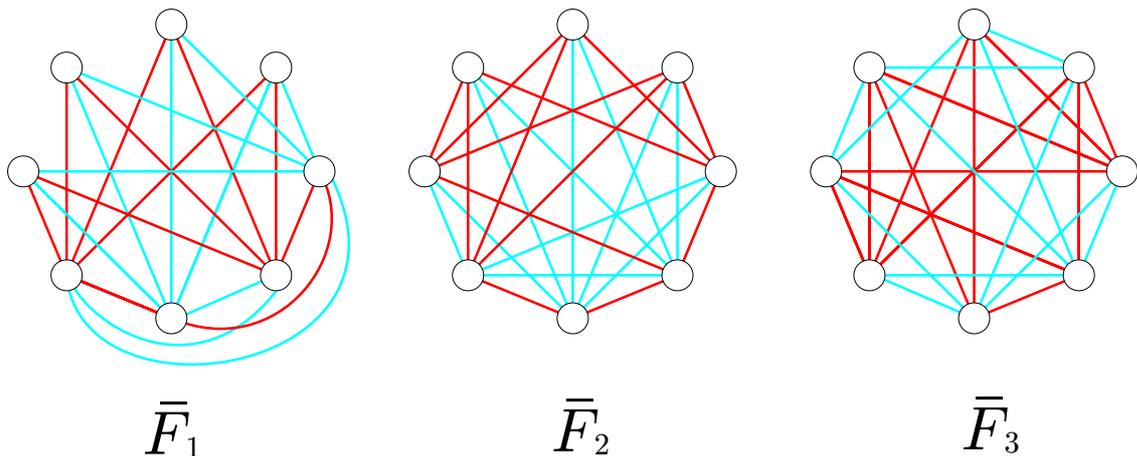


図 18  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  の彩色

まず，補題 3.1 より，図 17 に示された  $F_i$  のいずれも  $\bar{G}$  は含まない．

もし  $\bar{G}$  が長さ 6 以上のサイクルを含めば， $F_3 \subset \bar{G}$  となってしまう． $C_5$  を含むならば終わり．よって， $\bar{G}$  に含まれるサイクルの長さは 4 以下とする．

Case 1:  $\bar{G}$  が長さ 3 のサイクルを含むとき．

(1)  $C_3 \subset \bar{G}$  としよう． $\bar{G}$  に，その  $C_3$  と頂点を共有しない辺があれば， $F_2 \subset \bar{G}$  となってしまう．よって， $\bar{G}$  のすべての辺は， $C_3$  と頂点を共有する． $\bar{G}$  において， $C_3$  に含まれない 5 つの頂点のなす集合を  $U$  とおくと， $U$  は独立頂点集合である．しかし， $\bar{G}$  には 5 個までしか独立頂点は存在できないから， $C_3$  のどの頂点も， $U$  の中のいずれかと隣接し

ている．

- もし， $U$  の頂点で， $C_3$  のすべての頂点と隣接しているものがあれば， $F_1 \subset \bar{G}$  になってしまうので，そういう  $U$  の頂点はない．
- もし， $U$  の頂点  $u$  が， $C_3$  の 2 つの頂点  $x, y$  とだけ隣接しているならば，残る  $C_3$  の頂点から出る辺と，サイクル  $uxy$  によって， $F_2 \subset \bar{G}$  になる．

すると， $C_3$  の 3 つの頂点から出る 3 辺は，端点を共有しないことになり， $F_3 \subset \bar{G}$  になってしまう．

Case 2:  $\bar{G}$  が長さ 3 のサイクルを含まないとき．

このとき， $\bar{G}$  は奇サイクルを含まないから，2 部グラフである．König-Egerváry の定理の帰結として知られた事実は，2 部グラフに対して，独立頂点の最大個数と独立辺の最大本数の和が頂点数に等しいことである．8 頂点の  $\bar{G}$  について，前者は 5 以下であるから，独立辺が 3 本はみつきり， $F_3 \subset \bar{G}$  となってしまう．  $\square$

問題 3.1. *Graham* のグラフに対して，単色三角形がただ 1 つしかないような彩色を見つけよ．

*Graham* のグラフは， $K_6$  を部分グラフに含まないが， $K_5$  は含んでいる．そこで， $K_5$ ，さらには  $K_4$  を部分グラフに含まない単三内在グラフがあるかという問題が提起され，すでに肯定的に解決されている． $K_5$  を含まないものは，15 頂点が最小である．15 頂点の例を最初に発見したのは，Nenov であり，1981 年のことだった．現在では，15 頂点のそのようなグラフはちょうど 659 種類あることまで決定されている [8]．同論文には，最小値 15 に至るまでの歴史が記載されている．また， $K_4$  を含まないものについては，最小の頂点数はわかっていない．2008 年の論文 [2] において，941 頂点以下であることが確認されている．こちらについても，過去に Erdős が賞金を設定したことなど，歴史があつておもしろい．

問題 3.2.  $m$  を 7 以上の奇数とするととき， $C_3 * C_m$  は単三内在であることを示せ．

## 参考文献

- [1] V. Chvátal and F. Harary, *Generalized Ramsey theory for graphs. II. Small diagonal numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), 389–394.
- [2] A. Dudek and V. Rödl, *On the Folkman number  $f(2, 3, 4)$* , Experiment. Math. **17** (2008), 63–67.
- [3] P. Frankl, 前原潤, やさしい幾何学問題ゼミナール, 共立出版社, 1992.
- [4] A. W. Goodman, *On sets of acquaintances and strangers at any party*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 778–783.
- [5] R. L. Graham, *On edgewise 2-colored graphs with monochromatic triangles and containing no complete hexagon*, J. Combinatorial Theory **4**, (1968), 300.
- [6] R. Graham and J. H. Spencer, *On small graphs with forced monochromatic triangles*, Recent trends in graph theory (Proc. Conf., New York, 1970), pp. 137–141. Lecture Notes in Math., Vol. 186. Springer, Berlin, 1971.
- [7] F. Harary, *The two-triangle case of the acquaintance graph*, Math. Mag. **45** (1972), 130–135.
- [8] K. Piwakowski, S. Radziszowski and S. Urbański, *Computation of the Folkman number  $F_e(3, 3; 5)$* , J. Graph Theory **32** (1999), no. 1, 41–49.
- [9] L. Sauvé, *On chromatic graphs*, Amer. Math. Monthly **68** (1961), 107–111.