

# 巡回群行列のブロック対角化を用いた 回転物体画像の部分空間への投影とその応用

玉木 徹<sup>†</sup> 天野 敏之<sup>††</sup> 金田 和文<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 広島大学大学院工学研究科情報工学専攻 〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1

<sup>††</sup> 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 〒630-0101 奈良県生駒市高山町 8916 番地の 5

E-mail: <sup>†</sup>{tamaki,kin}@hiroshima-u.ac.jp, <sup>††</sup>amano@is.naist.jp

あらまし 本論文では、画像間の補間や姿勢推定に有効であろう線形写像の一つとして、1 軸回転する物体のような巡回する画像列が与えられたときに、画像間の関係を複数の単純な 2 次元平面上での回転で表現できるような部分空間への線形写像を提案する。提案手法は、まず画像列を置換する巡回群を考え、その群を表現する行列をブロック対角化を用いて低ランクの行列の積に分解する。この行列により、画像空間中の画像が部分空間へと投影されるが、その部分空間においては画像間の関係が単純な 2 次元部分空間における 2 次元平面上での回転で表現されることを示す。そしてサンプル画像間を補間する方法と実画像を用いた例を示す。

キーワード 姿勢推定, 巡回群, 回帰, 線形写像, ブロック対角化, パラメトリック固有空間法, 画像生成

## Projecting images of rotating object onto subspace by block diagonalization of the matrix of cyclic group and its application

Toru TAMAKI<sup>†</sup>, Toshiyuki AMANO<sup>††</sup>, and Kazufumi KANEDA<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Department of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hiroshima University  
1-4-1 Kagamiyama, Higashi-hiroshima, Hiroshima, 739-8527 Japan

<sup>††</sup> Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology  
8916-5 Takayama, Ikoma, Nara, 630-0192 Japan

E-mail: <sup>†</sup>{tamaki,kin}@hiroshima-u.ac.jp, <sup>††</sup>amano@is.naist.jp

**Abstract** This paper proposes a linear map that projects images of an rotating object about an axis onto a subspace where the rotation of the object is represented with many simple rotations in two dimensional subspaces. First we consider a cyclic group that permutes the image sequence, then construct a matrix of the cyclic group by multiplication of low rank matrices with block diagonalization. We demonstrate interpolation of the image sequence by rotation in the subspace, and discuss the ability of the proposed linear map onto the subspace.

**Key words** pose estimation, cyclic group, regression, linear map, block diagonalization, parametric eigenspace, view generation

### 1. はじめに

画像に写る物体の姿勢パラメータ推定はコンピュータビジョンの重要な問題として多くの研究がなされている。その多くは既知形状の剛体を仮定し、運動や投影の解析的モデルを採用して最適化問題を解く [1] ものである。それに対して村瀬ら [2], [3] のパラメトリック固有空間法は、物体の形状や 3 次元空間での投影といった幾何学的な撮像過程を仮定せず、連続的に変化するパラメータ列とそれに付随する画像系列を学習セットとし、その画像列が固有空間中に描く軌跡 (多様体) を認識に用いる、

いわばパターン認識的姿勢推定問題を提起した。

多様体を描く非線形性の強い画像列のようなデータを教師なしのデータ解析問題として扱うために、カーネルトリックを利用した非線形主成分分析 (kernel PCA, kPCA) [4], [5] や SVM [6] などの手法や、多様体学習 (manifold learning) [7] が提案されてきている。これらは、固有顔 [8], [9] に代表されるような、主成分分析や判別分析を応用した線形的な認識手法よりも優れた結果を出すことが示されている。

一方、パラメトリック固有空間法のような姿勢推定手法が扱うのは、ある画像とそのときの姿勢パラメータというセットを

学習する教師付き問題であり、すなわちデータのパラメータへの回帰問題に相当する。非線形回帰手法にはカーネルトリックを用いた SVM 回帰 [10] やカーネルリッジ回帰 [11] があり、それらを用いた物体の姿勢推定 [12] が提案されている。また、線形的な手法 [13], [14] も提案されている。

認識問題については非線形手法の優位性が示されているが、回帰問題についてはあまり議論がされていない。カーネルを用いた回帰自体の性能評価 [11] については議論されているものの、実際の画像の姿勢推定の状況における評価はなされていない。

しかし、画像の姿勢推定問題において本当に非線形手法が必要であろうか。一般の回帰問題と異なり、姿勢推定問題では画像の次元（画素数）が画像の枚数（サンプル数）よりもかなり大きい。つまり、高次元空間中にかなり疎らにサンプル点が存在することになる。そのため、物体の画像が多様体を描いたとしても、膨大なサンプルを集めない限り、実際には高次元空間中の点と点を結び折れ線でしかなく、多様体としての振る舞いを眺めることはできない。

画像の次元がサンプル数よりも大きいという状況においては、単にサンプルが部分空間に収まってしまおうというだけではない。この状況では、線形手法 [13], [14] における推定のための連立方程式の解は、最小ノルム解、であることがすでに指摘されている [15], [16]。つまり、学習サンプルにおいては厳密に方程式が成り立つ解が無数に存在し、その中のノルムが最小である解を 1 つ推定しているに過ぎない。したがって、1 軸回転する物体の画像列の姿勢パラメータを推定するという問題は、画像列を 2 次元平面の単位円周上に等間隔に並ぶ点への投影を実現する（無数の写像のうちの一つの）線形写像を求める問題とみなすことができる [16]。もしサンプル数が画像の次元よりも多い場合でも、非線形に次元を上げてしまえばその条件を満たすため、同様に単なる線形写像の推定になる。

そのため、おそらく姿勢推定に関しては、複雑な非線形手法までは必要ではなく、線形手法による推定でも十分であるといえるであろう、と思われる。ただし汎化性能には違いがあることが予想されるためその評価は必要ではあるが、前述の通りあまり議論されていないのが現状である。

そこで、非線形手法は議論せずに線形手法に焦点をあて、姿勢推定などに有効な画像の線形写像を追求しようというのが本論文の狙いである。どのような線形手法や線形写像が有効なのかという議論は十分になされていないにもかかわらず、線形手法の改良という場合には単にカーネル法を適用して手法を非線形にしてしまうことが多い。しかし画像の次元がサンプル数よりも大きい場合には、検討すべき線形写像が多数存在するはずである。それらを検討した後、有効な線形手法を非線形に拡張することで、画像の姿勢推定という特有の問題に対する手法に拡張できるとと思われる。

本論文では、画像間の補間や姿勢推定に有効であろう線形写像の一つとして、1 軸回転する物体のような巡回する画像列が与えられたときに、画像間の関係を単純な 2 次元平面上での回転を複数用いることで表現できるような部分空間への線形写像を提案する。提案手法は、まず画像列を置換する巡回群を考え、

その群を表現する行列をブロック対角化を用いて低ランク行列の積に分解する。この行列により、画像空間中の画像が部分空間へと投影されるが、その部分空間においては画像間の関係が単純な 2 次元部分空間における 2 次元平面上での回転で表現されることを示す。

本論文の構成は以下の通りである。まず 2. 節において、画像間の遷移を表現する巡回群を定義し、その群を表現する行列を導出する。次にその行列の低ランクの行列の積への分解について 2.5 節で述べ、3. 節で部分空間への投影について議論する。そして 4. 節において、サンプル画像間を補間する方法について説明し、4.2 節で実画像を用いた例を示す。

## 2. 画像列の巡回群とその行列のブロック対角化

ここでは、 $n$  枚の画像  $x_1, x_2, \dots, x_n$  が与えられたとき、巡回群の行列表現によって画像間の関係を表すことを考える。まず巡回群について説明した後、どのように画像  $x_1$  と  $x_2$  の間を補間して画像（例えば  $x_{1.5}$  など）を生成するかについて述べ、それを応用したサンプル画像間の補間画像の生成方法について述べる。著者らは複素対角化を用いた手法 [17] を提案しているが、本稿ではブロック対角化を用いた手法について述べる。また補間だけでなく姿勢推定にも有効であることを示している ([18] 参照)。

### 2.1 巡回群による画像間の関係

画像  $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jN})^T$  を  $N$  次元ベクトルとし、その画像を表すパラメータを  $\theta_j$  とする。1 軸回転を表す角度などのように、ここでは  $n$  個のパラメータは連続的に  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  と変化し、また  $\theta_1$  に循環して戻すもの考える。したがって、画像も  $x_1, x_2, \dots, x_n$  と変化し、また  $x_1$  に戻るような順番付けがされているとする。さらに実際の状況として  $N > n$ 、つまり画素数は画像数より大きいことを仮定する。

ここで、画像を  $x_1, x_2, \dots$  と変化させるために、以下のような群を考えよう。つまり、画像に左から作用する変換の群  $G_n = \{G, G^2, \dots, G^n\}$  があって、

$$x_2 = Gx_1 \quad (1)$$

$$x_3 = Gx_2 = GGx_1 = G^2x_1 \quad (2)$$

⋮

$$x_n = Gx_{n-1} = \dots = G^{n-1}x_1 \quad (3)$$

$$x_1 = Gx_n = \dots = G^n x_1 \quad (4)$$

ここで、 $G_n$  は  $n$  位の有限巡回群、元  $G$  は群  $G_n$  の生成元と呼ばれる [19]。群の定義から、 $G_n$  には各元の逆元が存在し、また単位元  $I$  が存在する。

$$x_i = Gx_{i-1} = GG^{n-1}x_i = x_i, \quad G^{-1} = G^{n-1} \quad (5)$$

$$x_i = G^n x_i, \quad G^n = I \quad (6)$$

### 2.2 巡回群の行列表現

群自体は抽象的なものであるため、ベクトルとして扱われる画像  $x_i$  を扱うために、群を行列で表現する。これは一般に群の表現論と呼ばれるものであるが、一般論には立ち入らずに、



$$U_1 U_2 = I_n \quad (22)$$

である。したがって、式 (19) から

$$G^n = U_2 D_M^n U_1 = E \Sigma V^T M^n V \Sigma^{-1} E^T \quad (23)$$

と計算できる。

ここで今度は、列置換行列  $M$  を、複素対角行列  $D'_M$  と複素行列  $W'$  を用いて

$$M = W'^{-1} D'_M W' \quad (24)$$

と複素対角化する [21]。ここで複素対角行列  $D'_M$  は対角成分に複素数の固有値を持つ以下のような行列である。

$$D'_M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (25)$$

列置換行列  $M$  の  $n$  乗は明らかに  $n \times n$  単位行列  $I_n$  になるので、

$$M^n = I_n = W'^{-1} D_M^n W' \quad (26)$$

$$D_M^n = W' M^n W'^{-1} = I_n \quad (27)$$

となり、 $D'_M$  も  $n$  乗すると単位行列  $I_n$  になるので、 $\lambda_j^n = 1$  でなければならない。つまり、 $M$  の固有値は  $n$  乗して 1 となる 1 の原始  $n$  乗根になることがわかる。

$$\lambda_j = \sqrt[n]{1} = e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

ブロック対角化  $D_M$  におけるブロック部分  $A_1, \dots, A_s$  と、複素対角化  $D'_M$  における固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  はそれぞれ対応しており、固有値が実数 (つまり  $\pm 1$ ) であれば、それに対応するブロックは  $1 \times 1$  となり、 $\pm 1$  である。

複素数の場合は  $2 \times 2$  のブロックになるが、 $M$  の固有値  $\lambda_j$  場合は 1 の  $n$  乗根であり、対応する  $2 \times 2$  のブロックは 2 次元の回転行列に相当する。回転量  $\theta_j$  は複素数  $\lambda_j$  の偏角に相当し、 $2 \times 2$  の回転行列  $A_j$  は以下のように書くことができる。

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & \sin \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\lambda_j = \cos \theta_j + i \sin \theta_j \quad (30)$$

これは、元の画像を別々の多数の 2 次元部分空間に投影し、それぞれの部分空間において画素を回転させていることに相当する。 $D_M$  における各  $2 \times 2$  ブロックに対応する  $W$  の 2 つの列ベクトルは、画像空間からそれらが張る 2 次元部分空間への投影 (線形写像) を表しており、各ブロックは重複していないため、各 2 次元部分空間は互いに直交しており独立である。ある 2 次元部分空間での回転量は、対応する固有値  $\lambda_j$  の偏角  $\frac{2k\pi}{n}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) に相当する。回転量の倍数を表す  $k$  は、固有値が  $n$  通りあるうちのどの原始  $n$  乗根であるかに依存し、それは元の与えられた画像列  $X_0$  に依存する。

ここで  $G$  を式 (7) による画像  $x_j$  への作用を見てみる。

$$x_{j+1} = G x_j = U_2 D_M U_1 x_j \quad (31)$$

$$U_1 x_{j+1} = D_M U_1 x_j \quad (32)$$

$$x'_{j+1} = D_M x'_j, \quad x'_j = U_1 x_j \quad (33)$$

したがって、行列  $U_1$  は、単に 1 つまたは 2 つの画素を独立に 2 次元平面上で回転させることで画像が  $x'_1, x'_2, \dots$  と次々に移りあうことができる多数の 2 次元部分空間への投影を実現している。

実際には、 $M$  個の固有値は  $n$  個の異なる原始  $n$  乗根となり、 $n$  が偶数のときは対応するブロック行列はすべて  $2 \times 2$  となる ( $\pm 1$  に対応する 2 つの  $1 \times 1$  の部分はあわせて  $2 \times 2$  と考える)。奇数の場合は、固有値 1 に対応する  $1 \times 1$  部分を除いて、他はブロック行列はすべて  $2 \times 2$  となる<sup>(注2)</sup>。したがって、ブロックの数  $s$  は以下ようになる。

$$s = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{If } n \text{ is even} \\ \frac{n-1}{2} + 1 & \text{If } n \text{ is odd} \end{cases} \quad (34)$$

## 4. 新しい中間姿勢の画像の生成

### 4.1 部分空間での回転による中間画像の生成

前節で、画像列  $x_1, x_2, \dots$  の関係を単純な多数の 2 次元部分空間 (平面) での回転で表現できるような部分空間への線形写像を表す行列  $U_1, U_2$  の構成方法について述べた。これにより、 $x_1$  から  $x_2$  へ、また  $x_1$  から  $x_3$  への画像の遷移を、それぞれ  $x_2 = G x_1$  と  $x_3 = G^2 x_1$  という行列  $G$  を用いた形ではなく、 $x_2 = U_2 D_M U_1 x_1$  と  $x_3 = U_2 D_M^2 U_1 x_1$  という行列の積により実現することができる。

ではここで、2 乗すると  $G$  となる行列  $G^{\frac{1}{2}}$  というものを考えてみよう。式 (23) と同様にしてブロック対角行列を  $\frac{1}{2}$  乗する、つまり式 (29) において回転角を  $\frac{\theta_j}{2}$  とした回転行列をブロックとする行列を以下のように構成する<sup>(注3)</sup>。

$$G^{\frac{1}{2}} = U_2 D_M^{\frac{1}{2}} U_1 \quad (35)$$

$$D_M^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{1}{2}}, \dots, A_s^{\frac{1}{2}}) \quad (36)$$

この  $G^{\frac{1}{2}}$  を  $x_1$  や  $x_2$  に作用させると、 $x_{1.5} = G^{\frac{1}{2}} x_1$  や  $x_{2.5} = G^{\frac{1}{2}} x_2$  などという、サンプル間に存在するであろう中間の画像を生成することができないだろうか。

このようにして作成した画像が実際の物体を回転させたときの中間画像に一致すれば、本手法が提案する部分空間の構成方法はまさに有用なものになるはずである。それが本研究の目的であり実際の適用例は後述するが、ここでは生成される中間画像はどのようなものなのであろうか。式 (19) を見ると、 $G$  のもっとも左側に存在する  $E$  はサンプル画像が張る部分空間の基底ベクトルであり、それより右側の行列の積はその部分空間の係数となっている。したがって、中間画像は元のサンプルが張る空間内に存在し、その中でサンプル画像の間を連続的に移動していることを意味している。

(注2): これらのブロック対角化の理論は数学の分野ではよく知られたことであるが、画像認識の分野で語られたことは今までにはない。本論文における議論の精密な導出は [18] を参照。

(注3): 実際には 2 回  $\pi$  だけ回転すると 2 回 0 だけ回転するのとは同じであるので、 $D_M^{\frac{1}{2}}$  のブロック部分の回転角は  $\theta_j/2$  と  $(\theta_j + 2\pi)/2$  の 2 通りある。一般に  $D_M^{\frac{1}{m}}$  の要素の表現は、1 の原始  $m$  乗根の数の  $m$  通り存在する。ここではもっとも直感的な、回転角を  $\frac{1}{m}$  にするものを採用している。

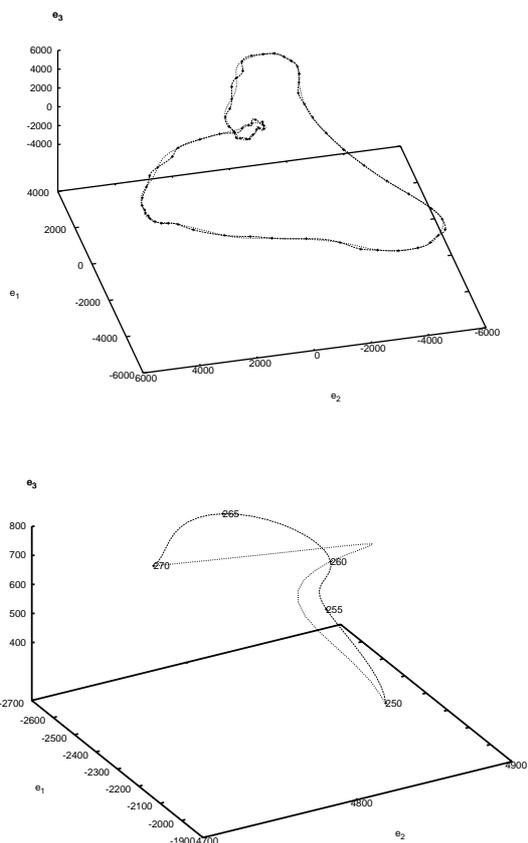


図 1 固有空間における coil-20(obj4) の 72 枚の原画像と生成した補間画像の軌跡。点 (+) は 72 枚の画像の投影点を表す。破線は、72 枚をすべて用いて  $U_1$  を計算し、その間を 10 等分して生成した中間画像を投影した軌跡を表す。点線は、奇数番号に対応する 36 枚 (0, 10, 20, ... 度の画像) を用いて  $U_1$  を計算し、その間を 10 等分して生成した中間画像を投影した軌跡を表す。(上) 72 枚のサンプル画像すべてを補間。(下) 250 ~ 270 度の画像間の補間した部分を拡大したもの。

#### 4.2 画像の生成例

これまでに述べた手法を用いて、実際の画像列における部分空間を構成し、中間画像を生成した結果を示す。画像は COIL-20 [22] の物体 4 (招き猫) を用いた。この画像のサイズは  $N = 128 \times 128$  であり、5 度ずつ 1 軸回転した  $n = 72$  枚の画像サンプルからなる。手法の実装と実ブロック対角化の計算には Scilab-4.1 を用いた。

実際に画像列から部分空間を計算し、生成した中間画像の一部を図 2 に示す。72 枚の学習サンプル画像のうち奇数号の画像 36 枚を使って  $U_1$  を計算し、学習サンプル画像の 0, 10, 20 度に対応する画像  $x_1, x_2, x_3$  の間を 10 等分したときの中間画像  $x_{1.1}, x_{1.2}, \dots$  を計算した。実際には、 $x_1$  に  $G^{\frac{1}{10}}$  を複数回適用して  $x_{1+j \cdot 0.1} = G^{\frac{j}{10}} x_1$  により画像を生成している。

比較のために、図 2 には学習には用いていない 5, 15 度に対応する実際の画像も表示している。生成された中間画像は、サンプル画像と一致する角度においては、生成画像はサンプル画像と一致している。しかし、それらの中間においては、実際の

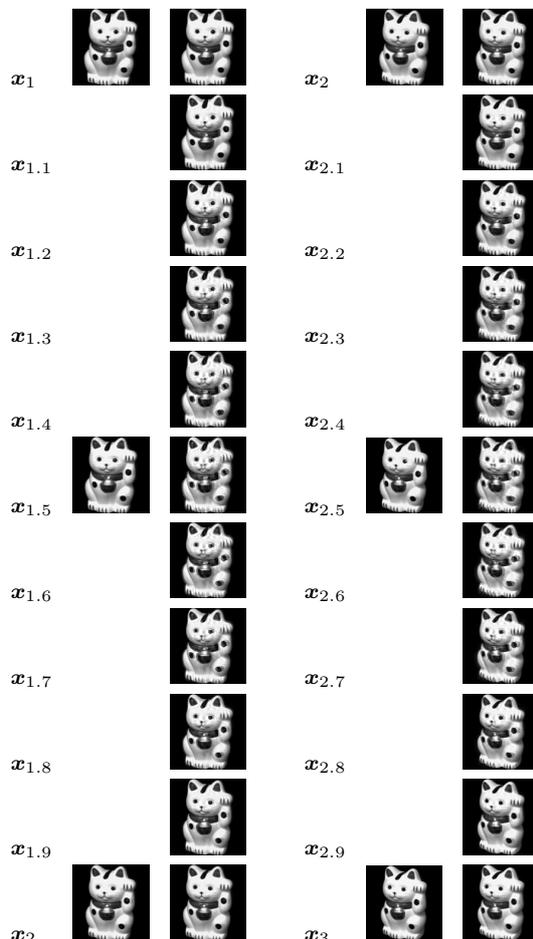


図 2 行列  $G^{\frac{1}{10}}$  を画像へ作用させて作成した補間画像。1 列目は coil-20(obj4) の原画像で、学習に用いた 0, 10, 20 度の画像  $x_1, x_2, x_3$  と、比較のための 5, 15 度の画像を示す。2 列目は学習サンプル間を 10 等分して補間した画像を示す。

物体の見た目に近い画像とはならず、その前後のサンプル画像を重ね合わせたような画像になっている。

このことを確かめるため、中間画像を画像列の固有空間に投影した結果を図 1 に示す。固有空間は 72 枚の画像から生成したもので、各軸の  $e_1, e_2, e_3$  は第 1, 2, 3 固有ベクトルを表す。72 枚の画像の投影点を点 (+) で示している。そして、72 枚すべて用いて  $U_1$  を計算し、各学習サンプル間を 10 等分して生成した中間画像を投影した軌跡を破線で示してある。また点線は、奇数番号に対応する 36 枚を用いて  $U_1$  を計算して生成した中間画像の投影軌跡を示している。

72 枚の場合の投影軌跡 (破線) は、すべての画像サンプル点を通っており、学習が正しく行われていることがわかる。36 枚の場合の投影軌跡 (点線) でも、学習した一つおきの画像サンプル点は通過している。また未学習の中間の画像に相当する点では、それらの点に近い曲線によって学習サンプル点をつないでおり、画像間の補間という観点では妥当なものだといえる。パラメトリック固有空間法ではこれらのサンプル点を 3 次スプライン曲線で補間しており、また CG におけるモーフィングやワーピングは 2 つの画像の線形補間であるため、サンプル点を直線で結ぶ折れ線近似で補間していることに相当する。本手法

では、サンプル点を通る曲線で補間しているが、この曲線は 72 次元空間における 36 個の 2 次元部分空間での回転により生成されているため、連続曲線である。この曲線は、式 (31) からわかるように、 $G$  の各要素は  $\sin \theta_j, \cos \theta_j$  の和になる、つまり適当な係数を用いて

$$\sum_j^{36} a_j \sin \theta_j + b_j \cos \theta_j = \sum_k^{36} a'_k \sin \frac{2k\pi}{n} + b'_k \cos \frac{2k\pi}{n} \quad (37)$$

と表されるため、36 個の異なる周波数の正弦波の重ね合わせである。

この結果から、画素数がサンプル数より多い場合の線形手法を追求するという点において、本手法の有用性が見出せる。すなわち、これまでは画像列が強い非線形性を持っているために、多様体学習や非線形手法が必要だと思われていたが、本手法では線形手法によって学習サンプル間を滑らかに補間する軌跡を生成することができている。この補間曲線は上述したように正弦波であるが、サンプル点を通る正弦波の推定が目的ではなく、本研究はサンプル間の関係を表す部分空間を構成するという視点に立脚している。そのため、今後本手法により構成した部分空間を用いて、線形手法による画像の姿勢推定が可能であると考えている。

## 5. おわりに

本論文では、1 軸回転する物体のような巡回する画像間の関係を多数の単純な 2 次元空間での回転で表現できるような部分空間への線形写像を提案し、ブロック対角化を用いて低ランク行列の積によりその線形写像行列を構成する方法と、画像補間への応用を示した。

今回は画像補間の応用のみを示したが、姿勢推定への応用も行っている [18]。これは、既知の物体の新たな画像  $x$  が与えられたときに、すでに学習しているサンプル画像  $x_1$  とどれだけ姿勢が変わっているかということがこの部分空間から分かることを利用する。つまり  $x$  と  $x_1$  を部分空間に投影し、その差が行列  $G$  の何乗で表せるか、つまり  $U_1 x = D_M^\alpha U_1 x_1$  を満たす適切な  $\alpha$  を推定する問題に置き換えている。

本手法の問題点は以下のようなものが挙げられる。行列  $G$  の構成において最小ノルム型一般化逆行列を用いているが、その妥当性や他の構成方法がないのかどうかの検討が残っている。本論文では 1 軸回転している物体の画像列についての定式化を行ったが、この定式化のままでは、3 次元で 3 軸回転している画像列にそのままでは適用できない。巡回群とその表現行列をいかにして画像の 3 次元の姿勢推定という認識問題に応用するのが、今後の課題である。

以上のような問題点や検討すべき課題が山積してはいるものの、本手法は線形手法に対する考え方に一石を投じるものである。次元数がサンプル数よりもかなり大きいという条件は、認識問題においては次元の呪いとして知られているが、非線形手法はその条件を利用して高次元空間における線形判別を実現している。本手法が提案するように、その条件は姿勢推定においても有効に利用できるものであり、線形非線形を問わず問題に

適した有効な部分空間を考察することが重要であると思われる。

## 文 献

- [1] Lowe, D. G.: Fitting Parameterized Three-Dimensional Models to Images, *IEEE Trans. PAMI*, Vol. 13, No. 5, pp. 441–450 (1991), online.
- [2] 村瀬洋, シュリーナイヤー: 2 次元照合による 3 次元物体認識パラメトリック固有空間法, 電子情報通信学会論文誌 DII, Vol. J77-D2, No. 11, pp. 2179–2187 (1994), online.
- [3] Murase, H. and Nayar, S. K.: Visual learning and recognition of 3-D objects from appearance, *Intl. J. of Computer Vision*, Vol. 14, No. 1, pp. 5–24 (1995), online.
- [4] Scholkopf, B., Smola, A. and Müller, K.-R.: Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue Problem, *Neural Computation*, Vol. 10, pp. 1299–1319 (1998), online.
- [5] 坂野鋭一: パターン認識における主成分分析 顔画像認識を例として, 統計数理, Vol. 49, No. 1, pp. 23–42 (2001), online.
- [6] Pontil, M. and Verri, A.: Support Vector Machines for 3D Object Recognition, *IEEE Trans. PAMI*, Vol. 20, No. 6, pp. 637–646 (1998), online.
- [7] Law, M.: Manifold Learning, online (accessed 2007.3.20), online.
- [8] Turk, M. A. and Pentland, A. P.: Face recognition using eigenfaces, *CVPR91*, pp. 586–591 (1991), online.
- [9] Pentland, A., Moghaddam, B. and Starner, T.: View-based and modular eigenspaces for face recognition, *CVPR94*, pp. 84–91 (1994), online.
- [10] Smola, A. J. and Schölkopf, B.: A Tutorial on Support Vector Regression, NeuroCOLT Technical Report NC-TR-98-030, Royal Holloway College, University of London, UK (1998), online.
- [11] Cristianini, N. and Shawe-Taylor, J.: サポートベクターマシン入門, 共立出版 (2005), online.
- [12] 安藤慎吾, 草地良規, 鈴木章, 荒川賢一: サポートベクトル回帰を用いた三次元物体の姿勢推定法, 電子情報通信学会論文誌 D, Vol. J89-D, No. 8, pp. 1840–1847 (2006), online.
- [13] Okatani, T. and Deguchi, K.: Yet Another Appearance-Based Method for Pose Estimation Based on a Linear Model, *IAPR Workshop on Machine Vision Applications 2000*, pp. 258–261 (2000).
- [14] 天野敏之, 玉木徹: Estimation-by-Completion: 3 次元物体の線形姿勢推定手法, MIRU2006 画像の認識・理解シンポジウム論文集, pp. 460–465 (2006), online.
- [15] 出口光一郎, 岡谷貴之: 固有空間法はなぜうまく働くか, 情報処理学会コンピュータビジョンとイメージメディア研究会, Vol. 2001, No. 66, pp. 1–8 (2001), online.
- [16] 玉木徹, 天野敏之: マルチポート固有空間法, 部分空間法研究会 2006, pp. 7–15 (2006), online.
- [17] 玉木徹, 天野敏之, 金田和文: 巡回群行列を用いた回転物体画像の複素部分空間への投影とその応用, MIRU2007 画像の認識・理解シンポジウム論文集 (2007), online.
- [18] 玉木徹, 天野敏之, 金田和文: 画像列の遷移行列のブロック対角化による部分空間を用いた物体の姿勢推定, MIRU2007 画像の認識・理解シンポジウム論文集 (2007), online.
- [19] 志賀浩二: 群論への 30 講, 朝倉書店 (1989).
- [20] Menke, W.: 離散インパース理論 — 逆問題とデータ解析, 古今書院 (1997), 柳谷 俊, 塚田 和彦 訳.
- [21] 志賀浩二: 固有値問題 30 講, 朝倉書店 (1991).
- [22] Nene, S. A., Nayar, S. K. and Murase, H.: Columbia Object Image Library (COIL-20), Technical Report CU-CS-005-96, Columbia University (1996), online.