広島大学附属中・高等学校中等教育研究紀要
〈第51号　2004〉

三角形の３辺上の点を結んでできる三角形の周長の最小値

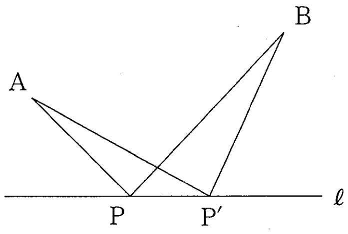
河　野　芳　文

初等幾何において扱われる問題には様々なものがあるが，最大・最小に関するものには興味深いものが多い。ヘロンの問題「２点Ａ，Ｂが直線ℓに関して同じ側にあるとき，ℓ上に点Ｐをとって$AP+PB$を最小にせよ」は特に有名であるが，その１つの一般化として標題の問題を考察し，教材化することを試みる。この問題の考察を通して，子供たちに数学的活動の意義や問題解決の達成感などを感じ取らせることができればと考える。なお，この問題は中学生でも十分扱えると思われるが，「数学Ａ」を学習する高校１年生を対象として実践した。

１．はじめに

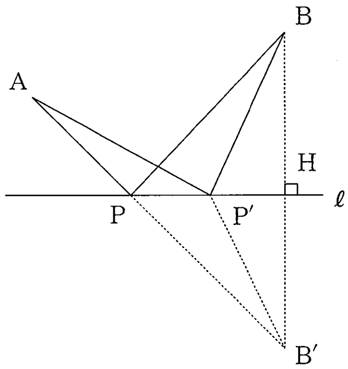
我々が中学生に初等幾何を指導する課程で，最大・最小に関する教材を扱うことがある。

その典型は Heron の問題で，「２点Ａ，Ｂが直線ℓに関して同じ側にあるとき，ℓ上に点Ｐをとり$AP+PB$が最小になるようにしたい。そのような点Ｐを作図し，その理由を述べよ。」



（図１）

というものである。その解法も周知であり，点Ｂの直線ℓに関する対称点Ｂ′をとり，線分ＡＢ′と直線ℓの交点をＰとすれば，これが求める点となる。



（図２）

その理由は，次の通りである。直線ℓ上に任意の点Ｐ′をとり，ＢＢ′と直線ℓの交点をＨとすれば，

$BH=B'H$

$BB'\perp \ell$

であるから，

$\triangle BPH\equiv\triangle B'PH$

$\triangle BP'H\equiv\triangle B'P'H$

であり，これから

$BP=B'P,\ BP'=B'P'$

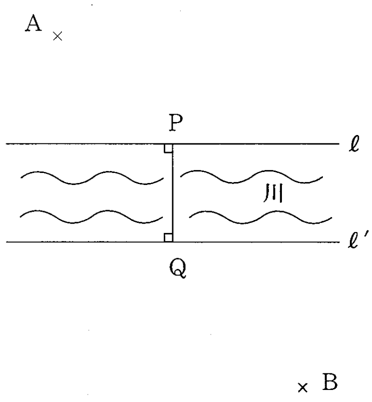
が従う。そこで，$P\neq P'$のとき，$\triangle AB'P'$に着目すれば

$$AP+PB=AP+PB'=AB' < AP'+P'B'=AP'+P'B$$

が成り立つ。したがって，点Ｐは題意をみたす点である。

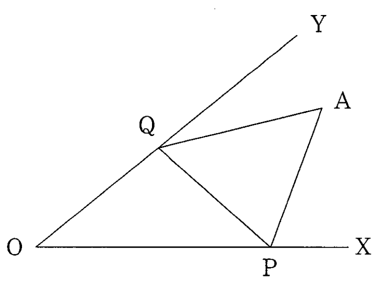
このような解法から，Heron の問題は中学２，３年の発展教材として扱われることも多く，少し難しくした次のような形での扱いも見受けられる。

問題１　右の図のように，平行な２直線ℓ，ℓ'ではさまれた川があり、川をはさんだ２地点Ａ，Ｂがある。この川に垂直に丸太ＰＱを渡し，$AP+PQ+QB$が最小になるようにしたい。点Ｐの位置を求めよ。



（図３）

問題２　下の図のように鋭角ＸＯＹがあり，その角内に点Ａが与えられている。このとき，辺ＯＸ，ＯＹ上にそれぞれ点Ｐ，Ｑをとり，$AP+PQ+QA$が最小になるようにしたい。点Ｐ，Ｑの位置を求めよ。



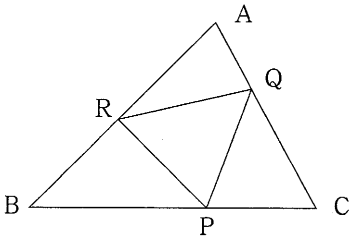
（図４）

いずれも，光の進行に関するフェルマーの原理“光は１点Ａから出て他の１点Ｂに向かう経路のう

Yoshifumi KOHNO : About the Minimum Value of the Perimeter of a Triangle Inscribed in a Given Triangle

ち，通過に要する時間が極小となる路を進む”から解決するものであり，数学的には
“2点A，Bを結ぶ経路のうち最短のものは，線分ＡＢである”
と言える。

そこで，こうした考え方をすすめて，次のような問題を考えてみたい。



(図5)

問題3　△ＡＢＣの3辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの上にそれぞれ点Ｐ，Ｑ，Ｒをとり，△ＰＱＲをつくる。
このとき

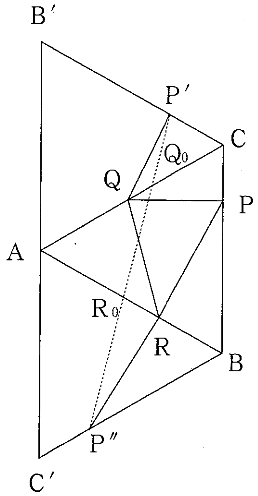
ＰＱ＋ＱＲ＋ＲＰ

が最小となる△ＰＱＲはあるか。また，あれば，そのような△ＰＱＲはどんな三角形か答えよ。

2．問題3についての考察

まず，△ＡＢＣが正三角形である場合について，条件を満たす△ＰＱＲが存在するかどうか，また，あるとすればどのようなものか考えてみよう。

辺ＡＣに関する点Ｂの対称点をＢ′，辺ＡＢに関する点Ｃの対称点をＣ′として，3つの正三角形ＡＣＢ′，ＡＢＣ，ＡＣ′Ｂを考える。



(図6)

△ＡＢＣの3辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡ上にそれぞれＰ，Ｑ，Ｒをとり，ＡＣ，ＡＢに関する点Ｐの対称点をＰ′，Ｐ″とすれば，ＰＱ＋ＱＲ＋ＲＰは折線Ｐ′ＱＲＰ″の長さに等しい。

線分Ｐ′Ｐ″と辺ＡＣ，ＡＢとの交点をそれぞれQ_0，R_0とすれば，

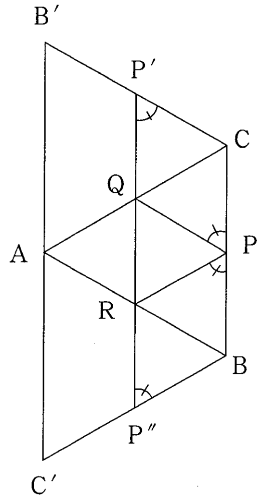
$$
\begin{aligned}
PQ_0+Q_0R_0+R_0P &= P'Q_0+Q_0R_0+R_0P'' \\
&= P'P'' \\
&\leqq P'Q+QR+RP'' \\
&= PQ+QR+RP
\end{aligned}
$$

が成り立つ。したがって，Ｐ，Ｑ，Ｒが条件を満たす点であれば，

$\angle ARQ=\angle BRP$，$\angle BPR=\angle CPQ$

$\angle CQP=\angle AQR$

が成り立たなければならない。



(図7)

したがって，また

$\angle CP'Q=\angle BP''R$

であり，

$P'P''//B'C'$ —①

を得る。

一方，

$CP'=CP=C'P''$

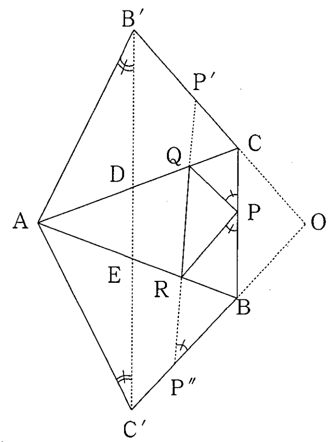
であり，①より

$B'P'=C'P''$

であるから，Ｐ′，Ｐ″はそれぞれ辺Ｂ′Ｃ，Ｃ′Ｂの中点となる。

すなわち，Ｐ，Ｑ，Ｒは△ＡＢＣの各辺の中点でなければならない。

次に，△ＡＢＣがＡＢ＝ＡＣを満たす鋭角二等辺三角形であるとしよう。



(図8)

正三角形の場合と同様に考察すれば，右図で

$\angle ARQ=\angle BRP$

$\angle BPR=\angle CPQ$

$\angle CQP=\angle AQR$

でなければならず，したがって，折線Ｐ′ＱＲＰ″は実は線分Ｐ′Ｐ″で，

$\angle OP'P''=\angle OP''P'$

また，$\angle B=\angle C$より

$\angle OCB=\angle OBC$

$\angle AB'C'=\angle A'C'B'$

より，

$\angle OB'C'=\angle OC'B'$

であるから，3つの三角形△ＯＣＢ，△ＯＰ′Ｐ″，△ＯＢ′Ｃ′はすべて相似な二等辺三角形である。

なお，$CP'=C'P''$であるから，Ｐ′，Ｐ″はそれぞれ線分Ｂ′Ｃ，Ｃ′Ｂの中点であることも分かる。

したがって，Ｑ，Ｒはそれぞれ線分ＤＣ，ＥＢの中点である。

ところで，$\angle B=\angle C=x$とおけば

$\angle B'AC'=3(180°-2x)=540°-6x$

$\angle AB'D=\dfrac{1}{2}\{180°-(540°-6x)\}=3x-180°$

であるから，

$\angle B'DC=x$

よって，四角形Ｂ′ＤＢＣはひし形であり，

$BQ\perp AC$

同様に，四角形C′BCEもひし形となるから

CR⊥AB

となる。

こうした考察によれば，正三角形の場合も，３つの頂点から対辺に下ろした垂線の足が求める３点であると捉えられる。

以上の２つの特別な三角形についての考察から，条件を満たすP，Q，Rがあれば，AP，BQ，CRは△ABCの３つの頂点から対辺に下ろした垂線であると予想できる。

そこで，この予想を証明するのであるが，一応その存在について解析的に考察しておきたい。△ABCが鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形であることにより，状況が異なってくると考えられるからである。

定理１． △ABCの３辺BC，CA，AB上（各辺の端点を含む）にそれぞれ点P，Q，Rをとる。このとき，

PQ＋QR＋RP

を最小にするP，Q，Rが存在する。

∵適当な直交座標軸をとり，A，B，Cの座標を$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$とする。このとき，P，Q，Rの座標は

$P(sx_2+(1-s)x_3,\ sy_2+(1-s)y_3)$

$0 \leqq s \leqq 1$

$Q(tx_3+(1-t)x_1,\ ty_3+(1-t)y_1)$

$0 \leqq t \leqq 1$

$R(ux_1+(1-u)x_2,\ uy_1+(1-u)y_2)$

$0 \leqq u \leqq 1$

と表すことができ，s，t，uの値を決めればP，Q，Rが決まり，したがって，PQ＋QR＋RPの値も定まる。すなわち，PQ＋QR＋RPは，s，t，u，の関数であり，これを

PQ＋QR＋RP＝$f(s,t,u)$

とおくことができる。

明らかに，$f(s,t,u)$ は，３次元の閉集合

$D=\{(s,t,u)\}\mid 0 \leqq s,\ t,\ u \leqq 1\}$

で定義された連続関数であり，従ってこの閉集合内の点で最大値，最小値をとる。

（証明終）

しかし，$s=0$，$t=1$とおけば，P＝Q＝Cとなるから，３点P，Q，Rのいずれかが△ABCの頂点にきたり，その２つが一致する可能性がある。

以上の考察を踏まえて，次の定理を証明することにしよう。

定理２． △ABCの３つの辺BC，CA，AB上(各辺の端点を含む)にそれぞれ点P，Q，Rをとり，値

PQ＋QR＋RP

を考える。∠Aを△ABCの最大の内角とするとき，この値を最小にする点P，Q，Rは，

１）0°＜∠A＜90° のとき

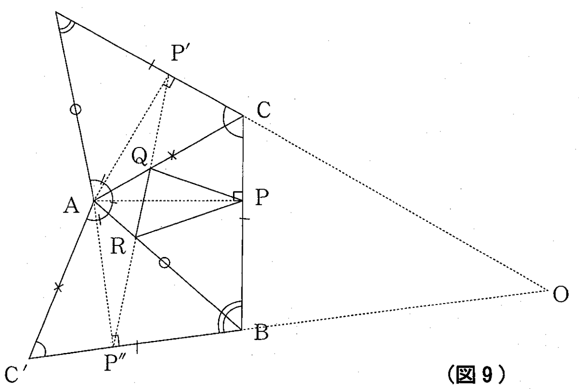
AP，BQ，CQが，３つの頂点A，B，Cから対辺に下ろした垂線となるときの垂線の足P，Q，Rである。

２）90°≦∠Aのとき

Q＝R＝Aであり，PはAPが頂点Aから対辺BCに下ろした垂線となるときの垂線の足である。

∵１）0°＜∠A＜90° のとき

△ABCは鋭角三角形である。また∠B≦∠Cとして一般性を失わない。



（図９）

図のように，ACに関する点Bの対称点をB′，ABに関する点Cの対称点をC′とし，頂点Aから３辺BC，B′C，C′Bに下ろした垂線の足をそれぞれP，P′，P″とする。

線分P′P″と２辺AC，ABとの交点をQ，Rとして，この３点P，Q，Rが求める最小値を与える点であることを示そう。

・まず，∠B＋∠C＞90° より

２∠B＋２∠C＞180°

であるから，B′Cの延長とC′Bの延長は１点Oで交わることに注意する。

このとき，AP′＝AP″であるから，△AP″P′は二等辺三角形であり，

∠OP′P″＝90°－∠AP′P″

∠OP″P′＝90°－∠AP″P′

∠OP′P″＝∠OP″P′　∴ OP′＝OP″

なお，

△AQP′≡△AQP，△AP″R≡△APR

であるから，

∠QPA＝∠RPA

∴　∠CPQ＝∠BPR

が成り立つ。

・次に△ABCの３辺BC，CA，AB上に３点S，

T，Uをとり，点Sの辺AC，ABに関する対称点をそれぞれS′，S″とすれば，

$$ST+TU+US=S'T+TU+US''$$
$$\geqq S'S''$$

が成り立つ。

そこで，$OP''=k$，$SP=x$，$\angle P'OP''=\theta$ とおけば，余弦定理より

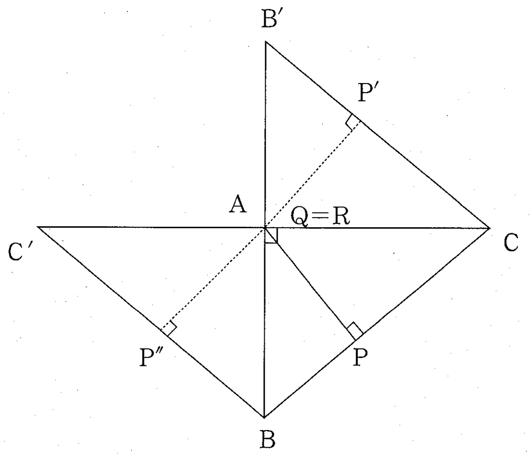
$$(P'P'')^2=k^2+k^2-2k^2\cos\theta$$
$$=2k^2-2k^2\cos\theta$$
$$(S'S'')^2=(k+x)^2+(k-x)^2-2(k^2-x^2)\cos\theta$$
$$=2k^2-2k^2\cos\theta+2x^2(1+\cos\theta)$$

したがって，S≒Pのとき

$$P'P''<S'S''$$

以上により，上記の3点P，Q，Rが求める点であることが示された。

2）i）∠A＝90°のとき



（図10）

1）と同様にB′，C′，P，P′，P″，Q，Rをとれば，∠A＝90°から，

Q＝R＝Aが従う。

また，S，T，U，S′，S″を同様にとれば

$$S'P'=S''P''$$
$$AP'=AP''$$
$$\angle AP'S'=\angle AP''S''=90^\circ$$

であるから，△AP′S′≡△AP″S″となり，

$$S'S''>P'P''$$

よって，

$$ST+TU+US=S'T+TU+US''$$
$$\geqq S'S''$$
$$>P'P''$$
$$=P'Q+QR+RP''$$
$$=PQ+QR+RP(=2AP)$$

したがって，3点P，Q，Rが求める点である。

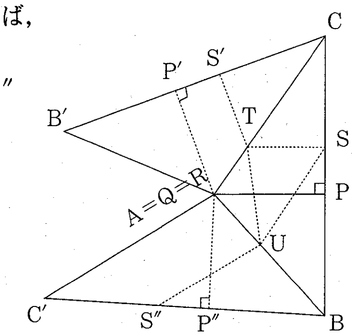
この場合，3点P，Q，Rは三角形をつくらない。

ii）∠A>90°のとき

点B′，C′，P，P′，S，T，U，S′，S″を1）と同様にとれば，

$$ST+TU+US$$
$$=S'T+TU+US''$$
$$\geqq S'U+US''$$

が成り立つ。



（図11）

また，

$$\angle S'AS''$$
$$=2\angle CAB$$
$$>180^\circ$$

であるから

$$S'U+US''$$
$$>S'A+AS''$$

（∵ 線分S′S″の垂直二等分線とS′UまたはUS″の交点をDとすれば

$$S'U+US''$$
$$>S'D+DS''$$

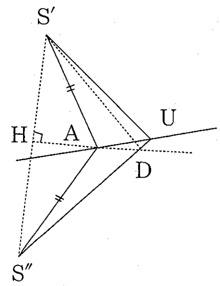
が成り立つ。ここで，

$S'A<S'D$であるから，

$$S'D+DS''>S'A+AS''$$

が成り立つ。したがって，

$$SU'+US''>S'A+AS''\text{）}$$



（図12）

さらに，

$$S'A+AS''>P'A+AP''$$

であるから，

$$ST+TU+US>P'A+AP''$$
$$=P'A+AA+AP''$$
$$=PQ+QR+RP$$

が成り立つ。

すなわち，P，Q，Rが求める点である。

（証明終）

以上で定理の証明が終わった訳であるが，定理の1）の部分の証明を再検討すれば，次のような別証ができる。

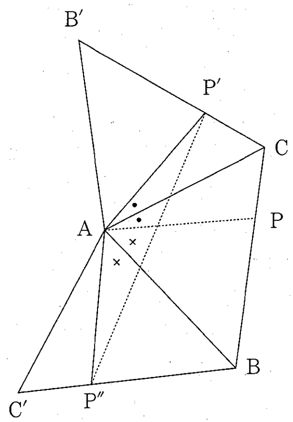
（別証）

まず，辺BC上に点Pをとり，点Pの辺AC，辺ABに関する対称点をそれぞれP′，P″とする。

このとき，常に

∠P′AP″＝2∠A（＝θとおく。）

であり，AP′＝AP″が成り立つことに注意する。



（図13）

1）0°<∠A<90°のとき

直前の注意により，点Pの位置によらず，△AP″P′はすべて相似であるか

ら，ＡＰが最小のとき，すなわち，ＡＰ⊥ＢＣのとき，
Ｐ′Ｐ″が最小となる。

そのとき，Ｐ′Ｐ″と辺ＡＣ，ＡＢの交点をそれぞれＱ，Ｒとする。

辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢ上にＳ，Ｔ，Ｕ，をとり，点Ｓの辺ＡＣ，ＡＢに関する対称点をそれぞれＳ′，Ｓ″とすれば

$$
\begin{aligned}
ST+TU+US &= S'T+TU+US'' \\
&\geqq S'S'' \\
&\geqq P'P'' \\
&= PQ+QR+RP
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって，この３点Ｐ，Ｑ，Ｒが求めるものである。

２）$90^\circ \leqq \angle A$のとき，

辺ＢＣ上に点Ｐをとるとき

$$\angle P'AP'' = 2\angle A = \theta \geqq 180^\circ$$

であるが，ＡＰはＡＰ⊥ＢＣのとき最小となる。

そこで，このように点Ｐをとる。また，３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢ上にそれぞれＳ，Ｔ，Ｕをとり，点Ｓの辺ＡＣ，ＡＢに関する対称点をＳ′，Ｓ″とすると，

$$
\begin{aligned}
&ST+TU+US \\
&= S'T+TU+US'' \\
&\geqq S'U+US''
\end{aligned}
$$

が成り立つ。また，線分Ｓ′Ｓ″の垂直二等分線とＳ′ＵあるいはＵＳ″の交点をＤとすれば，

$$S'U+US'' \geqq S'D+DS''$$

であり，$\angle S'DS'' > \angle S'AS'' \geqq 180^\circ$であるから，

$$S'D+DS'' \geqq S'A+AS'' \geqq P'A+AP''$$

が成り立つ。

そこで，Ｑ＝Ｒ＝Ａとおけば，

$$
\begin{aligned}
P'A+AP'' &= PA+AA+AP \\
&= PQ+QR+RP
\end{aligned}
$$

であり，したがって，

$$ST+TU+US \geqq PQ+QR+RS$$

が成り立つ。

よって，上記のように点Ｐ，Ｑ，Ｒをとれば，

$$PQ+QR+RP$$

の値は最小となる。ただし，$\angle A \geqq 90^\circ$ のとき，３点Ｐ，Ｑ，Ｒは三角形を作らない。　（証明終）

なお，定理２の１）の証明について，ＡＰ⊥ＢＣは示したが，主張がすべて証明されてはいない。証明が長くなるため省いたのであるが，この点を明らかにしておこう。

そのためには，次の定理を証明すればよい。

定理３　鋭角三角形ＡＢＣの３つの頂点から対辺に下ろした垂線をＡＰ，ＢＱ，ＣＲとすれば，この３点Ｐ，Ｑ，Ｒは，問題３の解を与える。

∵右の図において，

$$\angle BRH = \angle BPH = 90^\circ$$

であるから，四角形ＨＲＢＰは円に内接する。

$$\therefore \angle HPR = \angle HBR$$

また，四角形ＡＢＰＱも円に内接するから，

$$\angle QPA = \angle QBA$$

$$\therefore \angle HPR = \angle HPQ$$

これより，

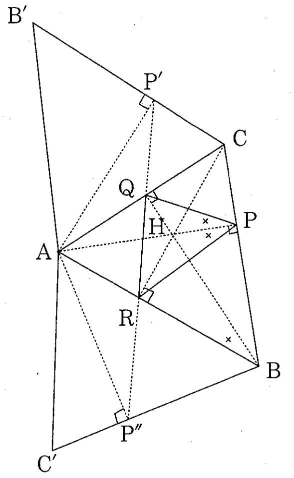
$$\angle BPR = \angle CPQ$$

同様に，

$$\angle CQP = \angle AQP$$

$$\angle ARQ = \angle BRP$$

を得る。



（図15）

したがって，折れ線Ｐ′ＱＲＰ″は線分Ｐ′Ｐ″に一致する。また，定理２.１）の証明において，ＡＰ′⊥Ｂ′Ｃ，ＡＰ″⊥Ｃ′Ｂであったから，Ｐ，Ｐ′，Ｐ″は定理２，１）のものと一致する。線分Ｐ′Ｐ″はただ１つであるから，辺ＡＣ，ＡＢとの交点Ｑ，Ｒも定理２，１）の証明中のＱ，Ｒと一致する。

このことは，定理２，１）における３点Ｐ，Ｑ，Ｒが

$$AP \perp BC,\ BQ \perp CA,\ CR \perp AB$$

をみたすことを示す。　（証明終）

定理３において，Ｐ′，Ｐ″の取り方は定理２.１）と同様であり，点Ｈは△ＡＢＣの垂心である。また，３点Ｐ，Ｑ，Ｒを結んでできる三角形は，△ＡＢＣの**垂足三角形**と呼ばれているものである。

３．授業の実践

今回の授業実践では「ヘロンの問題」が基本的であるが，その本質は「光の進行の性質」すなわちフェルマーの原理と言えるであろう。

そこで，問題３を目標として，「ヘロンの問題」，問題１，問題２，問題３の△ＡＢＣが正三角形の場合についての考察で１時間，問題３の△ＡＢＣが二等辺三角形の場合についての考察，問題３の解決で１～２時間をかける必要があると判断した。

第１時限は，「ヘロンの問題」，問題１，問題２の解決を通して，数学的活動の大切さや光の反射に関するフェルマーの原理の理解を目指すとともに，
問題３の△ＡＢＣが正三角形である場合に，３点ＰＱ，Ｒが存在するか否か，もし存在するとすればＰＱ，Ｒがどのような性質をもつべきかについて試行錯誤をくり返しながら分析，考察してゆくことを期待した。そうした理由は，このような試行錯誤が問題の解析に有効であり，このような活動を通して生

徒達が分析の仕方や結論の予想に向けての数学的思考・考察を押しすすめることができるのではないかと考えたからである。

しかし，△ＡＢＣが正三角形の場合において，３点Ｐ，Ｑ，Ｒが３辺の中点になることだけでは一般の場合に誤った予想に走る恐れがあった。そこで，第２時に改めて△ＡＢＣが鋭角二等辺三角形の場合について同様の考察をさせ，その心配の排除を心がけた。

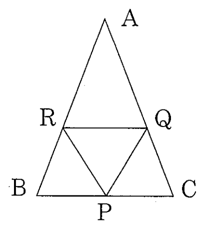
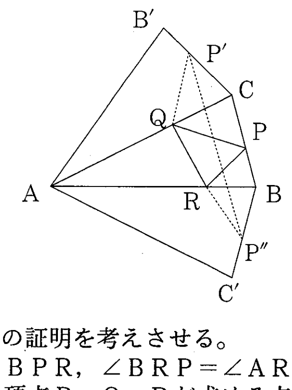
これらをふまえて，△ＡＢＣが鋭角三角形の場合に３点Ｐ，Ｑ，Ｒがどのような点であるか予想させ，その証明に向かうことを目標とした。

しかし，それにも関らず証明の糸口を見い出すのは難しい。場合によっては△ＡＢＣが二等辺三角形である場合の証明を最終目標としたり，∠Ｐ′ＡＰ″＝２∠Ａに気付かせるような投げかけを行い，解決の方向が見い出しやすいよう展開することをも念頭においた。

ただ，授業者としては生徒たち自身が問題解決にむけて試行錯誤し，分析を深めて除々に解決の方向に進んでくれるよう心がけたつもりである。

日　　時　2005年１月11日㈫　２限（９：40〜10：30）
対　　象　高等学校１年４組　40名（男子22名，女子18名）
本時の題目　鋭角三角形の３辺上の点を結んでできる三角形の周長の最小値
本時の目標　１．鋭角二等辺三角形の各辺上に３点を取り，この３点を結んでできる三角形の周長が最小となる点が求められる。
　　２．鋭角二等辺三角形の各辺上の３点を結んでできる三角形の周長を最小にする３点の条件を予想し，その予想の証明ができる。

本時の指導過程

学　習　内　容	指導過程・学習活動	指導上の留意点，評価
（導　入）	・前時の復習 ヘロンの問題の解法について確認する。 ヘロンの問題の解の性質・特徴について確認する。 問題２の解法や解の性質について確認する。	・解法・解の性質・特徴を理解しているか（知識・理解）
（展　開） 課題の提示	課題．右の図のように鋭角二等辺三角形ＡＢＣの３辺上に３点Ｐ，Ｑ，Ｒを取りＰＱ＋ＱＲ＋ＲＰを最小にしたい。Ｐ，Ｑ，Ｒをどのように取れば良いだろうか。  	・問題の意味を理解できているか。 ・意欲的に取り組んでいるか。 （関心・意欲）
ＰＱ＋ＱＲ＋ＲＰの最小値を与える３点の考察 条件を満たす３点Ｐ，Ｑ，Ｒの予想と証明	・しばらく自由に考えさせる ・⊿ＡＢＣを辺ＡＢ，ＡＣに関して対称移動した図で考えられるか，様子を見る。 ・図を描いている生徒がいれば，点Ｐの辺ＡＣ，ＡＢに関する対称点をＰ′，Ｐ″として，∠Ｐ′ＡＰ″の大きさを答えさせる。 ・⊿Ｐ′ＡＰ″において，Ｐ′Ｐ″が最小となるＰの位置はどこか考えさせ，予想を発表させる。  ・予想が正しいことを示すために，その証明を考えさせる。 ・垂足三角形ＰＱＲでは∠ＣＰＱ＝∠ＢＰＲ，∠ＢＲＰ＝∠ＡＲＱなどがが成り立つことから，その頂点Ｐ，Ｑ，Ｒが求める点であることを証明させる。	・必要なら，問題２の考えに注目させる。 ・様子を見て，⊿ＡＢＣの３つの頂点と垂足三角形の３つの頂点のうち，同一円周上にある４点に注目させる。
（まとめ） 宿　題	・∠Ｐ′ＡＰ″＝２∠Ａから，正三角形，鋭角二等辺三角形では，問題３の答が垂足三角形の頂点になる。 ・一般の鋭角三角形でも，この予想が正しいか否かを調べるよう投げかけ，レポート提出を依頼する。	
（備　考）	使用教科書：高等学校「数学Ａ」（第一学習社） 定規，コンパス，プリント	

4．反省と課題

今回の実践ではヘロンの問題が基本的であり，その本質は“光の進み方に関するフェルマーの原理”の数学的解釈といえるであろう。

しかし，ヘロンの問題自体は素早く解いても問題2では解けない生徒が多く，フェルマーの原理や反射の法則に対する理解は余りできていないように思われた。生徒とのやり取りで感じたことは，パターン化された理解であって，原理を踏まえての理解は必ずしもできていないということであった。

また，第1時の後半で感じたことは，もし条件をみたす3点Ｐ，Ｑ，Ｒがあったとして，3点Ｐ，Ｑ，Ｒ，△ＰＱＲがどんな性質を有するかを分析するよう求められても，どうしたらよいか分からない生徒が多いという現実であり，日頃このような考察を余りさせていない私の授業の実態が露呈することになった。折りにふれて，与えられた対象を分析する練習を行うことの大切さを改めて感じさせられた形である。

そこで，Ｐ，Ｒを固定するとき，それに対応するＱを求める問題はヘロンの問題に外ならないと気付かせたり，そのため折れ線Ｐ′ＱＲが線分Ｐ′Ｒになることを気付かせるなどの工夫が必要となった。

こうした考察をさせることに時間がかかったため，第1時では

∠ＢＰＲ＝∠ＣＰＱ，∠ＣＰ′Ｑ＝∠ＢＰ″Ｒ

などに気付かせることが精一杯であった。

こうした流れをうけての第2時の展開では，「∠Ｐ′ＡＰ″はどんな大きさの角になりますか。」との発問の効果もあってか，Ｐ′がＡＰ′⊥ＣＢ′をみたす点であるところまでは比較的スムーズに進んだように思われる。

しかし，ＡＰ⊥ＢＣから2点Ｐ′，Ｐ″が特定できるにしても，Ｐ′Ｐ″と辺ＡＣ，ＡＢとの交点Ｑ，Ｒについて

ＢＱ⊥ＡＣ，ＣＲ⊥ＡＢ

が成り立つことを示すのが難しく，垂足三角形が求める性質を有するものとの判断はできなかった。幸いなことには，ＡＰ⊥ＢＣであるから，多分ＢＱ⊥ＡＣ，ＣＲ⊥ＡＢであろうと，根拠はないが推測してくれた生徒がいたことである。

こうして，やや唐突ではあったが垂足三角形を登場させ，その性質

∠ＢＰＲ＝∠ＣＰＱ，∠ＣＱＰ＝∠ＡＱＲ

などから，折れ線Ｐ′ＱＲＰ″が実は線分であり，Ｐのいかんによらず，△ＡＰ″Ｐ′が常に相似であることなどを理解させることができた。

Ｐ，Ｑ，Ｒの一意性については，ただ1通りしか存在しないこと，垂足三角形の頂点Ｐ，Ｑ，Ｒがそのような解の1つであることを用いて，証明を終える形となったが，生徒たちには見なれない論理と映ったことであろう。

数学的活動は，生徒が新しい知識や概念を獲得する上で極めて有益であり，そうした考えから第1時を設定した。

しかし，第1時の後半および第2時の前半部分がやや重く，生徒たちが興味をもって取り組む教材には必ずしもならなかったように思われる。自由に考えさせることはよいが，生徒たちが過度に負担を覚えず，考える方向が判断しやすいものにすべきであったと思う。

この点，再度検討して，より扱いやすいものに改訂していきたいと考えている。

なお，本問題（問題3）は，筆者が高等学校2年生の折に高校3年生の先輩からいただいた問題集にのっていたものであり，今回ほぼ1週間をかけて解き，吟味したものである。後で把握したところでは有名な問題であり，定理2.1）の定式化と証明はドイツのシュタイナー博士のものと類似しており，別証もコクセター「幾何学入門」，第Ｉ部1．8にファニャーノの問題とその解として提示されているものにほぼ等しい。

いずれの証明もすでに知られているという意味で，新しい証明とはならなかったが，独力で考察し，証明を再発見できたことにより，筆者自身の理解が深まったことで満足したい。

〈参考文献〉

コクセター：「幾何学入門」（銀林浩訳）明治図書　1994年

小林幹雄：「初等幾何学」共立出版　昭和33年

皆川多喜造：「幾何重要800題」数研出版　昭和37年

杉浦光夫：「解析入門Ｉ」東京大学出版会　1994年