広島大学附属中・高等学校中等教育研究紀要
〈第51号　2004〉

興味を持たせる有理数の循環節の指導

―― 中学校から高等学校までのスパイラルな指導によって理解を深めさせる ――

井ノ迫　泰　弘

数学科の学習では１つの教材について，学習者の心身の発達や学習の理解の程度に応じて，概念を拡張しながら，スパイラルに学習させる教材が多い。ここでは，無理数の概念を理解させるために，有理数が循環小数になる仕組みやその性質について学習させる例を提示する。数概念の指導について，数学におけるスパイラルな指導の具体例を提示するものである。

1　はじめに

数の概念は，小学校以来，「拡張」が繰り返されるから，スパイラルに学習させることが最も必要とされる。ここでは，分母を素数とする分数の小数表示について考えさせ，数の持っている性質の美しさを感得させる指導案を提示する。具体的には主として中学校３年生から高等学校１年生において，電卓や表計算ソフトを使って，循環小数の循環節を求めさせることによって有理数の理解を深めさせ，数の集合を拡げ無理数の必要性を理解させる指導案である。

数学の学習が不得意であるとか，数学の学習に興味を持てない生徒を引きつけ，授業の中でよみがえらせる1つの方策として，生徒が自分で実験・実測・操作を通じて考察し，それによっていろいろな定理や性質を発見したり，まとめたりする授業をすることが有効であると考え，操作活動となる教具を利用した教材の開発に取り組んできた。この指導では，利用する教具が電卓から始まって，表計算ソフト，さらにプログラムも利用させることで，生徒が自分で実験・実測・操作を通じて考察し，それによっていろいろな性質を発見したりまとめたりする。このような授業の具体例としても提示するものである。

2　具体的な指導展開

Ⅰ　電卓を利用し，有理数の循環節を見つける
－中学３年での指導－

(1) 題目　実数

(2) 時間配当とその主な指導内容

①有理数が表す小数　…………………２時間

・有理数の定義を知らせ，有理数を小数で表すと有限小数か循環小数になることを理解させる。逆に，有限小数，循環小数は分数の形に表されることを理解させる。

・分母がどんな数であるとき，有限小数になるのか，また循環小数になるのかを理解させる。

②有理数の循環節　…………………１時間

この内容が，本稿で提示したものである。

③無理数　…………………………１時間

・有理数を理解させ，数の集合の拡張の必要性を理解させ，無理数を加えて実数としてまとめる。

・無理数をつくらせることによって，無理数の概念を十分に理解させたい。

(3) 指導の場面設定と今後の学習へのつながり

整数・有限小数・分数をまとめて有理数ということや，有理数が$\frac{q}{p}$（pは正の整数，qは整数）の形に表されることは，これまでの学習で終っているとする。平方根の意味や，平方根の中には有理数でない数が存在すること，平方根を含む式の計算などについてもこれまでの指導で終っているとするとしてもよいし，本時の指導後に指導してもよい。ただし，有理数を小数で表すと有限小数または循環小数になることや，その逆も成り立つことなどは，前時までの指導で終っているとする。ここでは，電卓を用いて，有理数の循環節を求めることによって，有理数の理解を深め，無理数の概念への導入とする。

(4) この指導の工夫点

本時の指導の工夫点は以下の通りである。

①電卓を利用して，循環節の桁数が大きくてもその循環節を求めることができる方法を提示するもので，興味を持たせて学習させることができる。

②有理数が循環小数になる理由を巧みに利用しており，有理数や無理数の概念の理解を深めさせるこ

Yasuhiro INOSAKO : How Can We Arouse the Students' Interest in Recurring Decimals of Rational Numbers?
－A Spiral Approach to Deepen the Students' Understanding at the Junior High School and Senior High School Level－

とができる。

(5) 本時の題目　有理数の循環節

①分母が一定の分数では，分母に対して余りに現われる数が順序もこめてきまってくることから，分母が一定で分子をいろいろかえた分数が循環小数になること，またそれらの循環節からできる数の輪は，幾つかのものにわかれることを理解させる。

②①のことから，電卓を使って，循環節の桁数が電卓の表示可能の桁数をこえる場合でも，循環節を求めることができることを理解させる。

＜授業の補足説明＞

(1) 小数表示の桁数を延ばして循環節を求める方法

10桁表示可能な電卓で，例えば $\frac{2}{43}$ の循環節を次のようにして求める。

まず，電卓で2÷43を計算し，

$\frac{2}{43}=0.046511\underline{627}$

とする。分母が2桁の数だから3桁を考え，627の部分に着目し，

$x/43=0.627\cdots\cdots$ となるxを求め，小数部分を延ばしていきたい。そこでこの式から，

$x=0.627\times43=26.961$ より，$x=27$とし，電卓で $27\div43=0.627906976$ と計算し小数表示部分を $\frac{2}{43}=0.046511\underline{627906976}$ と延ばす。

次に，$x/43=0.976\cdots\cdot$ より

$x=0.976\times43=41.968$ から$x=42$ とする。

電卓で $\frac{42}{43}=0.976744186$ として

$\frac{2}{43}=0.046511\underline{627906976}\underline{44186}$　と延ばす。

同じ要領で，$x/43=0.186\cdots\cdot$ より

$x=0.186\times43=7.998$ から$x=8$ とし，

電卓で $\frac{8}{43}=0.1860465116$ として$\frac{2}{43}$は

$\frac{2}{43}=0.046511\underline{627906976441860465116}$

と延ばし，小数部分に重なりが見つかったので，

$\frac{2}{43}=0.\dot{0}46511\underline{627906976441}\dot{8}\dot{6}$

のように，循環小数として表示できる。

(2) 循環節からできる数の輪

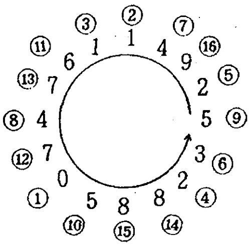
上記指導案にある分母が7や13，31のときの他に，いくつかの分数について，電卓で循環節を求めそれを輪にすると，次のようになる。

ア．$p=17$のとき

右の図で，たとえば，⑯は余りで商9が対応することになり，

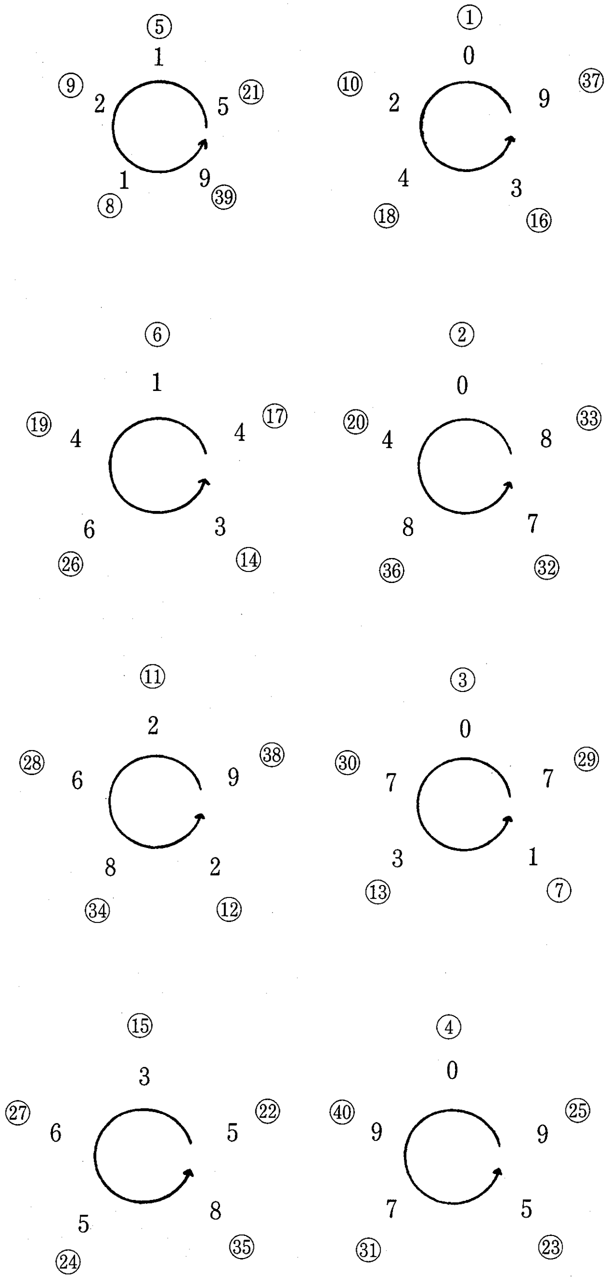
$\frac{16}{17}=0.\dot{9}41167470588235\dot{2}$

となるということである。

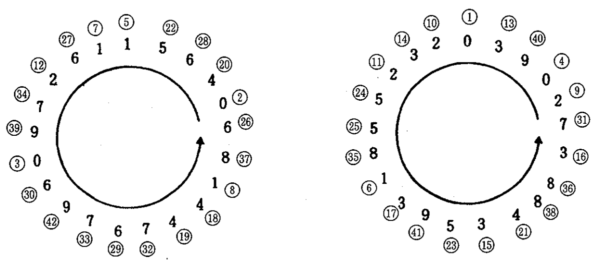


同様にして

イ．p＝41のとき

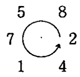


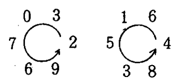
ウ．$p=43$のとき

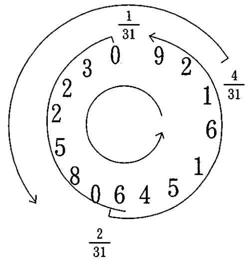


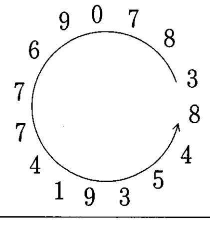
本時の指導過程

学習内容	指　導　過　程　　学　習　活　動	指　導　上　の　留　意　点
（導　入） ●課題の確認	●既約分数$\frac{4}{31}$を小数で表す簡単な方法について考える。（循環節の桁数が大きくなる場合）	●循環節が長いので，電卓で求められないし，筆算では面倒であることが理解できればよい。 $\frac{4}{31}=0.\dot{1}2903225806451\dot{6}$
（展開・課題の解決のために） ・循環節とそれからできる数の輪 ○分母が7である場合	1．分母が7である分数$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \cdots, \frac{6}{7}$を小数で表し，その循環節について，次のように考える。 (1) 上の分数を電卓で計算し，循環節を求める。 (2) 循環節の数を円形にかいて輪をつくると，$\frac{1}{7}$から$\frac{6}{7}$のどれも同じ輪になる。 (3) (2) のようになる理由を考える。	●$\frac{4}{31}$よりも循環節の桁数が小さい分母が7の分数を考えさせる。 (1) 電卓の使い方は指導している。 電卓は小数第10位以下を切り捨て，第9位まで表示される。 (3) $\frac{4}{31}$を例にして，余りの数が →3→2→6→4→5→1→ の順になることから説明させる。
○分母が13である場合	2．分母が13である分数$\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \cdots, \frac{12}{13}$について，1. と同じことを考えてみる。 (1) 電卓を使って循環節を求め，循環節を輪にすると，2種類になることを見つける。 (2) なぜ (1) のようになるのか，13で割ったときの余りに着目して，その理由を考える。	(1) 輪は右図 (2) $\frac{1}{31}, \frac{4}{31}$ を例にして，余りの数が2種に分かれることから説明。 →9→12→13→4→1→10→ →7→5→11→6→8→2→
	3．1，と2．を参考にして，次のように$\frac{4}{31}$を小数で表すことを考える。 (1) もし，$\frac{1}{31}$ と $\frac{4}{31}$ の循環節からできる数の輪が同じものならば，これらの循環節に現われる数は位置がずれているだけである。 (2) したがって，電卓で計算した$\frac{4}{31}$と$\frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \cdots$の小数表示部分に，いくつかの数が順番もこめて同じであるような部分があれば，その部分の前後の数を$\frac{4}{31}$の表示部分につないでの$\frac{4}{31}$小数表示を延ばしていく。 このようにして循環節を見つける。	$\frac{1}{31}=0.032258064\cdots\cdots$① $\frac{2}{31}=0.064516129\cdots\cdots$② $\frac{3}{31}=0.096774193\cdots\cdots$ $\frac{4}{31}=0.129032258\cdots\cdots$③ $\frac{5}{31}=0.161290322\cdots\cdots$ ①,②,③から下の輪ができる。 ①，②，③から右の輪ができる。したがって， $\frac{4}{31}=0.\dot{1}2903225806451\dot{6}$ もう1つの輪は，
（まとめ） 本時の学習内容の確認	無限小数になる既約分数について，分子を分母で割ったとき，余りに現われる数は，順番もこめてきまってくる。このことから，分母が同じ数である分数で，それが循環小数になるときは，循環節からなる数の輪をつくり，循環節が求められたことを確認する。	









（備考）　生徒各自に1つずつ電卓を用意させる。（実際はCASIO・rx－140を用いた）

＜授業を終えて＞

一般的に，分母p（正の整数）を決めたとき，循環節について

(A)その桁数はいくらか

(B)循環節を輪にするとき，輪の種類は何個か

という２つの疑問が生じてくる。ところが，一般に，分数$\frac{q}{p}$（pは正の整数，qは整数）は小数に表すと，有限小数または循環小数になるが，そのときpが

①２，５だけの素因数をもつとき有限小数となる。

②２，５の素因数をもたないとき，純循環小数（循環節が少数第１位から始まるもの）となる。

③２，５以外の素因数と，２，５のいずれかの素因数をもつとき，混純環小数（循環節が小数第２位以下から始まるもの）となる。

これらの逆も成り立つ。

したがって，分数$\frac{q}{p}$が循環小数になるのは，上の②，③の場合である。ここで，$q>p$ のときは小数点の位置がずれるだけだから，$0<\frac{q}{p}<1$の条件をみたす場合について，上の(A)，(B)の疑問に答える指導を，高校１年で次のように実施してみた。

Ⅱ　表計算ソフトを利用し，有理数の循環節を求める
－高等学校１年での指導－

(1) 題目　実数

(2) 時間配当とその主な指導内容

①有理数と実数　……………………２時間

・具体例を通して，有限小数，無限小数，循環小数について考えさせ，有理数や無理数の概念を理解させ，これらをまとめた数の集合として実数の概念を理解させる。

② 有理数の循環節（発展学習）　……３時間

③ 有理数の循環節（発展学習）　……２時間

この内容が，本稿の提示したいものである。

(3) 指導の場面設定と今後の学習へのつながり

ここでの指導の主目的は，前述の「Ⅰ 電卓を利用し，有理数の循環節を見つける」の学習の結果生じた循環節についての２つの疑問点，

(A)その桁数はいくらか

(B)循環節を輪にするとき，輪の種類は何個か

に答えることである。

○第１時の指導

前述の「「Ⅰ 電卓を利用し，有理数の循環節を見つける」を指導する。

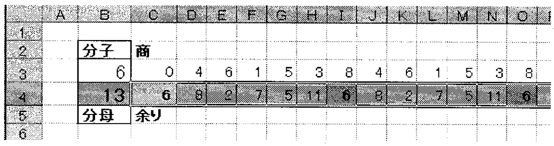
○第２時の指導

有理数の循環節を求める表計算シートの作成

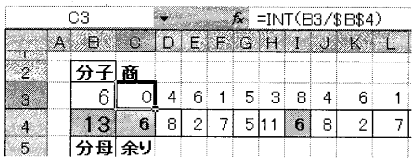
シートの作成は教師が行い，生徒には提示することにして，この指導は削除してもよい。しかし，学習者にとっては自らが作成したシートを利用することが，学習の達成感には必要であろう。

表計算ソフトを利用し，素数を分母とする分数について，その商と余りを表示するシートを作成させる。方法は，以下のようにする。

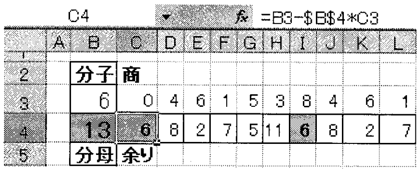
・完成したシート



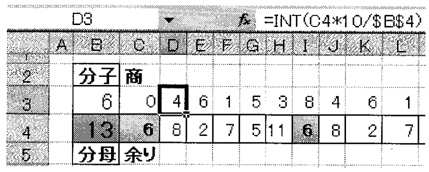
①分母と分子が与えられたとき，最初の商を求める。



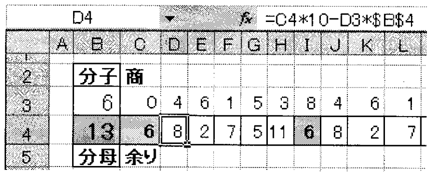
②最初の余りを求める



③②の余りを10倍した数を割られる数として，次の商を求める。

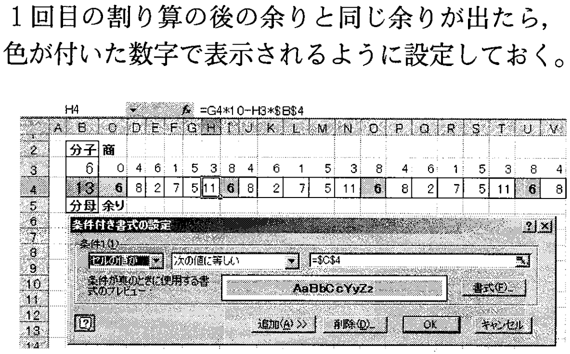


④さらに，次の余りを求める。



⑤その次からの商と余りは，③，④のセルの内容をコピーすればよい。

⑥各セルの「書式設定」で，２回目以降の割り算で，１回目の割り算の後の余りと同じ余りが出たら，色が付いた数字で表示されるように設定しておく。



○第３時の指導

作成した表計算シートを利用し，以下のように指導をする。

(1) 本時の題目：有理数の循環節

－分母が素数である分数の循環節の長さと種類－

(2) 本時の目標

正の整数 p を２，５以外の素数とする。p を分母とする分数で，分子の値を変えて小数表示したとき，

① 循環節の長さと循環節からできる数の輪の個数について，以下のことを発見させ，理解させる。

（循環節の長さ）×（輪の個数）

＝（p で割ったときの余りの個数）

$= p-1$

② 循環節の長さについて，予想（$10^n \equiv 1 \pmod{p}$ となる最小の正数 n に等しい）させる。

(3) 本時の指導過程

<table>
<tr><th>学習内容</th><th>指 導 過 程　　学 習 活 動</th><th>指 導 上 の 留 意 点</th></tr>
<tr><td>（ 導　入 ）
・前時の学習内容の確認</td><td>●前時は，表計算ソフトで，分数を小数表示する方法を学習した。本時はその表を利用して，考えることを確認する。
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th><th>I</th><th>J</th><th>K</th><th>L</th><th>M</th><th>N</th><th>O</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>分子</td><td>商</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>6</td><td>0</td><td>4</td><td>6</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>8</td><td>4</td><td>6</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>13</td><td>6</td><td>8</td><td>2</td><td>7</td><td>5</td><td>11</td><td>6</td><td>8</td><td>2</td><td>7</td><td>5</td><td>11</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>分母</td><td>余り</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>・本日の表は，同じ余りが現れると，そのセルの色が変わるように設定してある。この点がこの授業の工夫点である。</td></tr>
<tr><td>●課題の確認
・本時の課題の確認

（ 展　開 ）
●課題の解決</td><td>●２，５以外の素数 p を分母とする分数について，分子をいろいろ変えたとき，どんな性質が予想・発見されるか，具体例から考えてみる。
① $p=3,7,13,31,\cdots,47$ であるときの循環節の長さと輪の個数を表にまとめてみる。
②表にまとめたこれらの例から，予想される性質について考える。
●予想される性質を，次のようにまとめる。
①素数 p を分母とする分数では，分子を変えても，循環節の長さが等しくなる。
②素数 p を分母とする分数では，１つの余りが決まると，次の余りが決まる。従って，余りがいくつかのグループに分かれ，同じグループの余りの循環節を輪にすると同じ輪になる。
●見つけた性質を次のようにまとめ，確認する。
①分母をきめると分子を変えても循環節の長さは等しい。
②（循環節の長さ）×（輪の個数）
＝（p で割ったときの余りの個数）
$=p-1$</td><td>・下の表のようにまとめさせる。
<table>
<tr><th>分母</th><th>循環節の長さ</th><th>輪の種類</th></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>7</td><td>6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>11</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>13</td><td>6</td><td>2</td></tr>
<tr><td>17</td><td>16</td><td>1</td></tr>
<tr><td>19</td><td>18</td><td>1</td></tr>
<tr><td>23</td><td>22</td><td>1</td></tr>
<tr><td>29</td><td>28</td><td>1</td></tr>
<tr><td>31</td><td>15</td><td>2</td></tr>
<tr><td>37</td><td>18</td><td>2</td></tr>
<tr><td>41</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>43</td><td>21</td><td>2</td></tr>
<tr><td>47</td><td>46</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>・素数 p を分母とする分数では，１つの余りが決まると，次の余りが決まる。
すなわち，余りに現れる数は順番も込めて決まってくることから，説明する。</td></tr>
<tr><td>●学習内容のまとめ</td><td>●本時の学習内容をまとめる。
・循環節の長さについて，予想される性質とそのようになることの説明を課題とする。</td><td>・課題の解答は，後日レポートにまとめ，提出するように指示する。</td></tr>
<tr><td colspan="3">（備考）使用ソフト：Microsoft Excel</td></tr>
</table>

(4) 指導を終えて

$\frac{2}{7}$を小数表示する手順は，右のように計算した後，「割り算をして，余りが出たら10倍し，その数を元の割られる数として，さらに割り算をする。再度余りが出たら，余りを10倍し，再度割り算をしていく……」としてまとめ，十進BASIC[1)]で下記のような一番簡単なプログラムを実行させ，下の画面のように数字が「まだら」になって見え，このことから，循環節の長い小数表示を求めてみようと導入する。

```
    0 2 8 5 7 1 4
7 ) 2
    0
    [2]0
    1 4
      6 0
      5 6
        4 0
        3 5
          5 0
          4 9
            1 0
              7
            3 0
            2 8
            [2]
```

このようなシミュレーションの後，表計算ソフトで，商と余りを求めさせる。

```
input p
input q
10 LET  syo=int(q/p)
   print using"#": syo;
   LET  r=q-syo*p
   if r=0 then goto 20
   LET  q=r*10
30 character input s$
   goto 10
20 END
```

表計算ソフトを利用した授業の斬新な展開例で，「分母を素数とする有理数の循環節の種類とその長さの関係」を発見させ，有理数や無理数への理解を深めることをねらった指導として提示した。

```
0285714285714285714285714
2857142857142857142857142
8571428571428571428571428
5714285714285714285714285
7142857142857142857142857
1428571428571428571428571
4285714285714285714285714
2857142857142857142857142
8571428571428571428571428
5714285714285714285714285
7142857142857142857142857
1428571428571428571428571
4285714285714285714285714
```

指導を終えた後の反省で明らかになったことは，説明に使う用語が生徒に慣れていなくて，授業の導入では説明が理解しにくかったのではないかということ，しかし，追究する内容が明確に理解されてくると，深い思考と発見の知的感動を十分に与える教材で，中学校3年数学，高等学校の数学Aや微分・積分において，学習内容の理解に応じて指導内容を深めることができる教材となるので，このような意味からの指導の具体的展開を研究することが，興味ある今後の課題であるといえよう。

また，本時の学習の結果生ずる新たな疑問については，課題学習として継続的に研究させることも可能な教材である。

Ⅲ 数学Ⅲにおける循環節の性質の指導
－学習のまとめとして－

素数pを分母とする分数を小数表示するとき

(ｱ) 分子をかえても循環節の長さは等しい。

(ｲ) (循環節の長さ)×(輪の個数)

　　＝(余りの個数)　の関係が成り立つ。

　　$=p-1$

の関係が成り立つ。

無限等比級数の考え方を使うと，これらのことは以下の式で証明することができる。

$$
\begin{aligned}
&0.\dot{a}_1a_2\cdots\cdots\dot{a}_n\\
&=0.a_1a_2\cdots\cdots a_na_1a_2\cdots\cdots a_na_1a_2\cdots\cdots a_n\cdots\cdots\\
&=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n}\times\{1+10^{-n}+(10^{-n})^2+(10^{-n})^3+\cdots\cdots\}\\
&=\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_n}{10^n}\times\frac{10^n}{10^n-1}\\
&=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n-1}\\
&=\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_n}{99\cdots\cdots9}
\end{aligned}
$$

数学Ⅲの授業の中で，前述のⅠ，Ⅱの指導を改めて実施するかまたは振り返り，上記の無限等比級数の考えで説明し，一連の指導をまとめることができる。

[3] 終わりに

例えば，

$$0.\dot{1}4\dot{2}=\frac{142}{999}\ ,\quad 0.\dot{1}42\dot{8}=\frac{1428}{9999}=\frac{476}{3333}$$

$$0.\dot{1}4285\dot{7}=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7}$$

のような具体例から

$$0.\dot{a}_1a_2\cdots\cdots\dot{a}_n=\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_n}{10^n-1}$$

を理解させると，中学校や高校1年でも，素数pを分母とする分数を小数表示するとき

(ｱ) 分子をかえても循環節の長さは等しい。

(ｲ) (循環節の長さ)×(輪の個数)　$=p-1$

の関係を，生徒に理解させることができる。

例えば，$p=7$ のとき，以下のようにする。

考え方　$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7}\times\frac{142857}{142857}$

であるから，分子が最大の6になっても，

$$6\times\frac{1}{7}=\boxed{\frac{6}{7}}\times\frac{142857}{142857}=\frac{857142}{999999}$$

↑
1より小

$$=0.\dot{8}5714\dot{2}$$

となり分子は分母の999999を越えないから，循環節の長さもかわらない。

また，素数pを分母とする分数の循環節の長さは，9を何個か並べてできる数が分母pの倍数となるようにするとき，そのような数の最小の桁数で，このことを，分母が13のときを例にして，以下のように質問して考えさせる。

考え方

$$\frac{1}{13}=\frac{\square}{9},\ \frac{\square}{99},\ \frac{\square}{999},\ \frac{\square}{9999},\ \frac{\square}{99999},\ \frac{\square}{999999}$$

上の式が成り立つのはどの場合か

(ｲ) については，分母が13のときを例にして以下のように考えさせる。

考え方

循環節の長さは，分子が異なっても6であり，循環節のそれぞれの数字に余りが1つずつ対応している。余りは，6個の数からなる2つのグループに分かれる。

余りは順番も考えて

→ 9 → 12 → 3 → 4 → 1 → 10 →

→ 7 → 5 → 11 → 6 → 8 → 2 →

したがって
(循環節の長さ)×(輪の個数)
=(余りの個数)

この指導の大きな目標は無理数を理解させることであり，そのために，有理数のことを詳しく調べてみようということであった。

普通の指導であれば

①有理数を表す小数 → ③無理数

という持導内容になってしまうから，無理数の概念の形式的な理解ができても，無理数の概念の実質的な理解ができないのではなかろうか。

生徒の感想文の中にも，「有理数の中には，実際，目がくらむほど長い循環節を持つものがあることに驚いた」とかいている者もあり，実際に循環節を求めてみることが，有理数を十分理解させるための1つの有効なステップであるように思える。

有理数を十分に理解させることによって，数の概念の拡張の必要性を認識させ，無理数の定義を知らせて，数を実数としてまとめるわけであるが，ただ単に$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，… が循環しない無限小数であるとして，これを無理数の例とするだけでは．無理数の概念を十分理解させることはできないと思う。循環しない無限小数であるという定義に従って，

0.12345678910111213……

0.0100100010000100001……

のように，循環しない無限小数を考えさせると，無理数への理解が大いに深まるであろう。このためにも，有理数の循環節について，先に示した

Ⅰ 電卓を利用し，有理数の循環節を見つける
　－中学3年での指導－

Ⅱ 表計算ソフトを利用し有理数の循環節を考える
　－高等学校1年での指導－

の学習はそれなりの効果があると思う。

これらの指導は，工夫することによって，中学校1年において課題学習としても実施可能になる内容である。また数学Ⅲの無限等比級数の概念を学習させることによって，初めて完全に理解させることができると考えられ，中学校から高等学校までのスパイラルな指導が必要な教材であり，またスパイラルな指導によって，効果的に指導できる格好の教材である。

参考資料

1）文教大学の白石和夫氏が提供のフリーソフトで，http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/ から入手可能

参考にした文献

① Mathematics teaching (Number 80 September 1977.page 42)

② 初等数学講座10「数列と級数」 国枝琢治著・岩崎書店

③ ソビエト教育科学アカデミー版　基礎数学2巻「数と集合Ⅱ」小倉金之助監修　東京国書