広島大学附属中・高等学校研究紀要
〈第 50 号　2003〉

三角関数の n 倍角の公式と $\sin 1^\circ$ の無理数性

河　野　芳　文

三角関数の学習は「数学Ⅰ」の三角比の学習の延長上にあるため，生徒達には全く新しいものを学ぶとの思いは少ないであろう。しかし，加法定理以降の流れは，1つの泉からいくつかの定理や公式が系統的に導かれていく形であり，美しい音楽の調べにも似た趣きはあるが，生徒にはやや無味乾燥との印象を与える。そこで，やや発展的ではあるが，三角比の値の無理数性や帰納法あるいは二項定理，ド・モアブルの定理といった材料を加えて遊びの要素を増し，興味・関心を高めようと試みたものが以下の取り組みである。

1．は　じ　め　に

三角関数の加法定理以降の流れは美しく，加法定理から2倍角の公式，三角関数の合成，和・積の公式，積・和の公式といった結果が順次美事に導かれる様子に感動した人も多いであろう。

しかし，こうした流れはある程度学んだ後に分かることであり，初心の者には公式の洪水としか映らないかも知れない。そこで，我々はそれらの公式の利用法などを例示し，演習させて，一連の公式等の習熟に努めさせるのである。もちろん，一方的な講義でなく，生徒たちに考えてもらうよう配慮しつつではあるが……。

ところで，1989年の6月頃のこと，私が所属する広島市内の数学教師の研究グループで，一人の先生から次のような質問を受けた。「$\sin 1^\circ$ という値は無理数だと思うんですが，これが正しいのかどうかよく分かりません。どなたかお分かりなら教えて欲しいのですが。」出席していた先生方は面白い問題だと興味を持たれたが，私も5分位考えて，無理数であると結論した。

そのとき，まず初めに思ったことは，$\sin 45^\circ$ は無理数であるから，これに帰着できないか。そして，

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$

であり，

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \cdots\cdots (*)$$

であるから，$\sin 5\theta$ が $\sin\theta$ の多項式となることを示せれば問題は解決すると判断したことである。

そこで，先生方に，もし，$\sin 1^\circ$ が有理数であれば，3倍角の公式（$*$）により，$\sin 3^\circ$ は有理数になり，したがってまた，$\sin 9^\circ$ も有理数となる。ところが，

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= \sin(3\theta + 2\theta)\\ &= \sin 3\theta\cos 2\theta + \cos 3\theta \sin 2\theta\\ &= (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)(1 - 2\sin^2\theta)\\ &\quad + (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\times 2\sin\theta\cos\theta\\ &= 3\sin\theta - 10\sin^3\theta + 8\sin^5\theta\\ &\quad + 2\sin\theta(4\cos^4\theta - 3\cos^2\theta)\end{aligned}$$

ここで，$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ であるから

$$= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$$

従って，$\sin 9^\circ$ が有理数なら，$\sin 45^\circ$ も

$$\sin 45^\circ = \sin(5\times 9^\circ)$$

により，有理数でなければなりませんとお話しした。

すると，「分かりました。すると，$\sin 5^\circ$ も無理数になるのでしょうね。」と発言されたので，「無理数の加減乗の結果は，必ずしも無理数ではないので $\sin 1^\circ$ の無理数性は使えませんが，9倍角の公式によるか，

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

より $\sin 15^\circ$ の無理数性を導いておけば3倍角の公式で証明可能です。同じように 1° から 90° までの正弦の値の無理数性や有理数性について考えてみると面白いと思います。」とお答えした。

そして，帰宅した後この問題について考察し，半角の公式や初等整数論的扱いを組み合わせて，一つのささやかな定理とともに一応の解決をみた。

その後，この結果は忘れていたのであったが，たまたま来られた外国の先生に三角関数の授業をお見せすることになり，昔のことを思い起こしつつ，教材化することにした。

それが，以下に述べる考察であり，授業実践の記録である。

Nth-fold Angle Formulas for Trigonometric Function and the Irrationality of sin 1°
Yoshifumi KOHNO

2. $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ の公式と $\sin n^\circ$ の無理数性

すでにみたように，$\sin\theta$，$\sin 3\theta$，$\sin 5\theta$ はすべて $\sin\theta$ の多項式となるが，$\sin 2\theta$，$\sin 4\theta$ は $\sin\theta$ のみでなく，$\cos\theta$ を必要とする。

したがって，n が自然数であれば，$\sin(2n-1)\theta$ は $\sin\theta$ の多項式となることが予想される。その証明には数学的帰納法が必要であると考えられるが，

$$\sin(2n+1)\theta = \sin(2n-1)\theta\cos 2\theta + \cos(2n-1)\theta\sin 2\theta$$

であるから，$\cos(2n-1)\theta$ とセットで扱う必要があると予想される。

そうして，予想される結果は

「n が自然数のとき，$\sin(2n-1)\theta$，$\cos(2n-1)\theta$ はそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$ の多項式である。」

となるが，その証明で行き詰まる。そこで，$\sin\theta$，$\sin 3\theta$，$\sin 5\theta$ の公式をよくみると，いずれも $\sin\theta$ の多項式ではあるが，$\sin^2\theta$ や $\sin^4\theta$ のような偶数次の項を含まないことに気付く。従って，定理は次のようになる。

定理. n を自然数とするとき，

1) **$\sin(2n-1)\theta$ は $\sin\theta$ の $2n-1$ 次の多項式で，$\sin\theta$ の偶数乗の項を含まない。**

2) **$\cos(2n-1)\theta$ は $\cos\theta$ の $2n-1$ 次の多項式で，$\cos\theta$ の偶数乗の項を含まない。**

なお，**$\sin(2n-1)\theta$** の展開式における $\sin^{2n-1}\theta$ の係数と **$\cos(2n-1)\theta$** の展開式における $\cos^{2n-1}\theta$ の係数をそれぞれ a_n，b_n とおくと，

$$\boldsymbol{b_n > 0,\ a_n = (-1)^{n+1} b_n}$$

が成り立つ。

○ 1)，2) をまとめて証明する。

$n=1$ のとき，

$$\sin(2\times 1-1)\theta = \sin\theta$$
$$\cos(2\times 1-1)\theta = \cos\theta$$

であるから，主張は正しい。

$n=2$ のとき，

$$\sin(2\times 2-1)\theta = \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$\cos(2\times 2-1)\theta = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

であるから，やはり主張は正しい。

そこで，$n=k$ まで正しいとして，$n=k+1$ のときも正しいことを示そう。

$$\begin{aligned}\sin(2k+1)\theta &= \sin\{(2k-1)\theta + 2\theta\}\\ &= \sin(2k-1)\theta\cdot\cos 2\theta + \cos(2k-1)\theta\cdot\sin 2\theta\\ &= \sin(2k-1)\theta\cdot(1-2\sin^2\theta)\\ &\qquad + \cos(2k-1)\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

ここで，

$$\sin(2k-1)\theta = a_k\sin^{2k-1}\theta + a_k'\sin^{2k-3}\theta + \cdots$$
$$\cos(2k-1)\theta = b_k\cos^{2k-1}\theta + b_k'\cos^{2k-3}\theta + \cdots$$

とかけることに注意すると，

$$\begin{aligned}&= (1-2\sin^2\theta)\{a_k\sin^{2k-1}\theta + a_k'\sin^{2k-3}\theta + \cdots\}\\ &\quad + 2\sin\theta\{b_k\cos^{2k}\theta + b_k'\cos^{2k-2}\theta + \cdots\}\\ &= (1-2\sin^2\theta)\{a_k\sin^{2k-1}\theta + a_k'\sin^{2k-3}\theta + \cdots\}\\ &\quad + 2\sin\theta\{b_k(1-\sin^2\theta)^k\\ &\qquad + b_k'(1-\sin^2\theta)^{k-1} + \cdots\}\\ &= \{-2a_k + 2(-1)^k b_k\}\sin^{2k+1}\theta + \cdots\\ &= -4a_k\sin^{2k+1}\theta + \cdots\end{aligned}$$

したがって，$\sin(2k+1)\theta$ については主張は正しい。

また，

$$\begin{aligned}\cos(2k+1)\theta &= \cos\{(2k-1)\theta + 2\theta\}\\ &= \cos(2k-1)\theta\cdot\cos 2\theta\\ &\qquad - \sin(2k-1)\theta\cdot\sin 2\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\{b_k\cos^{2k-1}\theta\\ &\qquad + b_k'\cos^{2k-3}\theta + \cdots\}\\ &\quad - 2\sin\theta\cos\theta\{a_k\sin^{2k-1}\theta\\ &\qquad + a_k'\sin^{2k-3}\theta + \cdots\}\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\{b_k\cos^{2k-1}\theta\\ &\qquad + b_k'\cos^{2k-3}\theta + \cdots\}\\ &\quad - 2\cos\theta\{a_k\sin^{2k}\theta + a_k'\sin^{2k-2}\theta + \cdots\}\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\{b_k\cos^{2k-1}\theta\\ &\qquad + b_k'\cos^{2k-3}\theta + \cdots\}\\ &\quad - 2\cos\theta\{a_k(1-\cos^2\theta)^k\\ &\qquad + a_k'(1-\cos^2\theta)^{k-1} + \cdots\}\\ &= \{2b_k - 2\cdot(-1)^k a_k\}\cos^{2k+1}\theta + \cdots\\ &= 4b_k\cos^{2k+1}\theta + \cdots\end{aligned}$$

したがって，$\cos(2k+1)\theta$ についても主張は正しい。なお，$\sin(2n-1)\theta$，$\cos(2n-1)\theta$ の展開式における $\sin^{2n-1}\theta$，$\cos^{2n-1}\theta$ の係数 a_n，b_n については，

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = -4a_n$$
$$b_1 = 1,\ b_{n+1} = 4b_n$$

が成り立つから，

$$a_n = (-4)^{n-1},\ b_n = 4^{n-1}$$

したがって，

$$b_n > 0,\ a_n = (-1)^{n-1}b_n = (-1)^{n+1}b_n$$

が成り立つ。

(証明終)

（注） 定理では，$\sin(2n-1)\theta$，$\cos(2n-1)\theta$ のみについて言及したが実は，余弦の場合，

"$\cos n\theta$ は $\cos\theta$ の n 次の多項式で，n が偶数のときには $\cos\theta$ の奇数乗の項を含まず，n が奇数のときには $\cos\theta$ の偶数乗の項を含まない。"

ことが証明できる。

実際，n が偶数 ($n \geqq 2$) のとき

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \cos\{(n-1)\theta + \theta\}\\ &= \cos(n-1)\theta\cdot\cos\theta - \sin(n-1)\theta\cdot\sin\theta\end{aligned}$$

となるが，$\cos(n-1)\theta$，$\sin(n-1)\theta$ が定理の形をしているから，$\cos n\theta$ は $\cos\theta$ の多項式で，$\cos\theta$ の奇数乗の項を含まない。

また，n が偶数のとき，

$$\sin n\theta = \sin\{(n-1)\theta+\theta\}$$
$$= \sin(n-1)\theta\cdot\cos\theta+\cos(n-1)\theta\cdot\sin\theta$$
$$= \sin\theta\cos\theta\cdot\left\{\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos\theta}\right\}$$

と表せるが，$\dfrac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$ は $\sin\theta$ の多項式で $\sin\theta$ の奇数乗の項を含まないこと，また，$\dfrac{\cos(n-1)\theta}{\cos\theta}$ は $\cos\theta$ の多項式で $\cos\theta$ の奇数乗の項を含まないことから，ある x の多項式 $f(x)$，$g(x)$ が存在して，

$$\sin n\theta=\cos\theta\cdot f(\sin\theta)+\sin\theta\cdot g(\cos\theta)$$

の形に表すことができる。

（注：終わり）

（定理の別証）

$$\cos(2n-1)\theta+i\sin(2n-1)\theta$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{2n-1}{}_{2n-1}C_k\cos^{2n-k-1}\theta\cdot(i\sin\theta)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n-1}C_{2k}\cos^{2n-2k-1}\theta\cdot(-1)^k\sin^{2k}\theta$$
$$+i\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n-1}C_{2k+1}\cos^{2n-2k-2}\theta\cdot(-1)^k\cdot\sin^{2k+1}\theta$$

であるから，

$$\cos(2n-1)\theta$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n-1}C_{2k}\cos^{2n-2k-1}\theta\cdot(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k$$
$$=({}_{2n-1}C_0+{}_{2n-1}C_2+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-2})\cos^{2n-1}\theta+\cdots$$

$$\sin(2n-1)\theta$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n-1}C_{2k+1}\cos^{2n-2k-2}\theta\cdot(-1)^k\cdot\sin^{2k+1}\theta$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n-1}C_{2k+1}(-1)^k\cdot\sin^{2k+1}\theta\cdot(1-\sin^2\theta)^{n-k-1}$$
$$=\{{}_{2n-1}C_1\cdot(-1)^{n-1}+{}_{2n-1}C_3\cdot(-1)^{n-1}+\cdots$$
$$+{}_{2n-1}C_{2n-1}\cdot(-1)^{n-1}\}\times\sin^{2n-1}\theta+\cdots$$

ここで，

$$0=(1-1)^{2n-1}=\sum_{k=0}^{2n-1}{}_{2n-1}C_k(-1)^k$$
$$=({}_{2n-1}C_0+{}_{2n-1}C_2+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-2})$$
$$-({}_{2n-1}C_1+{}_{2n-1}C_3+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-1})$$

より，

$${}_{2n-1}C_0+{}_{2n-1}C_2+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-2}$$
$$={}_{2n-1}C_1+{}_{2n-1}C_3+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-1}$$
$$(1+1)^{2n-1}={}_{2n-1}C_0+{}_{2n-1}C_1+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-1}$$

であるから，

$${}_{2n-1}C_0+{}_{2n-1}C_2+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-2}$$
$$={}_{2n-1}C_1+{}_{2n-1}C_3+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-1}=\frac{2^{2n-1}}{2}=4^{n-1}$$

以上により，定理の主張は正しいことが示された。

（証明終）

証明としては，別証の方がすっきりしているが，数学的帰納法による証明には手作りの暖かさが感じられるように思われる。

では，この定理の利用例を示そう。

（例1）$\sin1^\circ$ の無理数性を論ぜよ。

○ $\sin1^\circ$ が有理数であれば，定理より，$\sin3^\circ$，したがって，$\sin9^\circ$ も有理数である。

これより，さらに，

$$\sin45^\circ=\sin(5\times9^\circ)$$

も有理数でなければならないことが示されるが，

$$\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

は無理数である。

この矛盾は，$\sin1^\circ$ が有理数と仮定したことに起因するから，$\sin1^\circ$ は無理数でなければならない。

（証明終）

ここで使われている手法は，与えられた角 θ の奇数倍 $n\theta$ の正弦 $\sin n\theta$ が無理数となることを利用するものであるから，

$\sin1^\circ$，$\sin3^\circ$，$\sin5^\circ$，$\sin9^\circ$，$\sin15^\circ$
$\sin4^\circ$，$\sin12^\circ$，$\sin20^\circ$，

などはすべて無理数であることが分かる。

（例2）$\sin10^\circ$ の無理数性を論ぜよ。

○ $t=\sin10^\circ$ とおくと，t は3倍角の公式より

$$3t-4t^3=\sin30^\circ，\text{すなわち}$$
$$8t^3-6t+1=0$$

をみたす。今，t が有理数であるとして，

$$t=\frac{q}{p}\ (p\text{ と }q\text{ は互いに素な自然数})$$

とおくと，

$$8q^3-6p^2q+p^3=0$$
$$\therefore\ 2q(4q^3-3p^2)=-p^3$$

これは，q に素因子があれば p の素因子でもあることを示しており，したがって，

$$q=1$$
$$\therefore\ 2(4-3p^2)=-p^3$$

$-p^3$ は偶数であるから，$p=2k$ とおくと，

$$4-12k^2=-4k^3$$
$$k^3-3k^2+1=0$$

$k\geqq3$ なら，左辺は正となるから，

$$k=1，2$$

でなければならないが，いずれも解とはならない。

この矛盾は，t が有理数としたことに起因するか

ら，t は無理数でなければならない。

（証明終）

ここでの手法は，与えられた角 θ の奇数倍 $n\theta$ の正弦 $\sin n\theta$ が有理数であることを用いて，初等整数論的議論に持ち込むものであるが，

$\sin 6^\circ$ ，$\sin 10^\circ$ ，$\sin 18^\circ$

などに適用できる。したがって，これに（例 1）の手法を適用して，

$\sin 2^\circ$

の無理数であることも分かる。

(例 3) $\sin 36^\circ$ の無理数性を論ぜよ。

◯ まず，$54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$ であるから，$\theta = 18^\circ$ とおくと，$3\theta = 90^\circ - 2\theta$

$\therefore\ \sin 3\theta = \sin(90^\circ - 2\theta) = \cos 2\theta$

$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

$(\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$

$\sin\theta \neq 1$ より，

$4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$\sin\theta > 0$ より

$$\sin\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

よって，$\sin 18^\circ$ は無理数である。

このとき，

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

であるから，$\cos 18^\circ$ も無理数である。

これは，$\sin 72^\circ$ が無理数であることをも意味する。

ここで，半角の公式を用いると，

$$\sin^2 36^\circ = \frac{1 - \cos 72^\circ}{2} = \frac{1 - \sin 18^\circ}{2}$$

であるから，$\sin 36^\circ$ も無理数でなければならない。

（証明終）

ここでの手法は，与えられた角 θ の 2 倍 2θ の余弦 $\cos 2\theta$ が無理数であることを利用して，$\sin\theta$ の無理数性を示すものであるが，この手法により

$\sin 9^\circ$ ，$\sin 40^\circ$ ，$\sin 25^\circ$

の無理数性を示すことができる。

したがって，例 1 の手法により

$\sin 8^\circ$ ，$\sin 24^\circ$ ，$\sin 43^\circ$ ，$\sin 44^\circ$ ，$\sin 42^\circ$

$\sin 40^\circ$ ，

の無理数性を導くこともできる。

(問) 自然数 n が，90 以下であるとき，$\sin n^\circ$ が有理数であるものは $\sin 30^\circ$ ，$\sin 90^\circ$ のみであるといえるか。

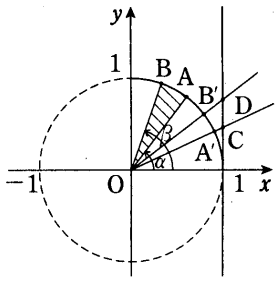
最後に，単位円周上に有理点（x 座標，y 座標ともに有理数である点）がどの程度あるかを考えてみよう。座標軸に関する対称性から，第 1 象限のみについて考えれば充分であるが，$\tan\theta = t$ とおくと，

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^2\theta \cdot \tan\theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$= \frac{2}{1 + \tan^2\theta} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

であり，$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき，$\tan\theta$ の値域が非負の実数全体となることから，円周上に無数の有理点が存在することが示される。



また，円周からどんな短い弧 $\overset{\frown}{AB}$ を切り取っても，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上に無数の有理点が存在することは，次のようにすれば理解できる。

OA，OB が x 軸の正方向となす角をそれぞれ $\alpha, \beta\,(0 < \alpha < \beta < 90^\circ)$ とするとき，動径 OA′，OB′ をそれらが x 軸の正方向となす角がそれぞれ $\dfrac{\alpha}{2}$，$\dfrac{\beta}{2}$ であるようにとり，それらの延長が直線 $x = 1$ と交わる点を C，D とする。このとき，数直線上における有理数の稠密性から，線分 CD 上には有理点 P(1，m) が稠密に分布している。

そこで，$\tan\theta = m$ とおくと，

$\dfrac{\alpha}{2} < \theta < \dfrac{\beta}{2}$，したがって，$\alpha < 2\theta < \beta$

であるから，点

$$Q\left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \frac{2m}{1 + m^2}\right)$$

は弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上の有理点となる。

なお，関数

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

について，

$$f'(x) = \frac{-2x(1 + x^2) - 2x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{-4x}{(1 + x^2)^2}$$

であるから，$f'(x) = 0$ より，$x = 0$

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

この増減表から分かるように，連続関数 $y = f(x)$ は1対1の単調減少関数で，1から0の間のすべての実数値をとる。従って，m を有理数として点

$$\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right) \quad (0 \leqq m \leqq 1)$$

の全体が第1象限のすべての有理点をカバーしていることも分かるであろう。

以上により，第1象限のどんな弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上にも有理点が存在することが示されたから，結局，単位円周上に無数の有理点が稠密に分布することが分かる。

3. 授業の実践

加法定理の証明と2倍角，3倍角の公式や半角の公式を導出する過程で，教科書にあるような例で公式の使い方や便利さを実感させることは大切である。

しかし，別の問題を創作して，公式の習熟をはかるとともに，その問題の解決にむけて試行錯誤させることのできる数学的に興味深い授業ができないものかとの思いもあり，10余年前に考えた問題を教材化することにした。

まず，加法定理や2倍角の公式，更には3倍角の公式を扱い，それらの使い方のいくつかでも説明してその便利さに言及することにした。その上で，正弦の3倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

が $\sin\theta$ のみで表されること，これから，5倍角の公式も $\sin\theta$ のみの多項式となることを予想させることができないか，また，t が有理数であるとき，有理数係数の x の 多項式 $f(x)$ に $x = t$ を代入して得られる数 $f(t)$ は有理数であることから，$\sin 1^\circ$ の無理数性を発見させることができないかと考えてみた。

初めの問題はあまり難しくはないと思われるが，後半で $\sin 45^\circ$ の無理数性に気付くのはやや無理があると考えられる。したがって，何らかのヒントや助言が必要であろう。

3倍角の公式と $\sin 45^\circ$ の無理数性を使って，まず $\sin 15^\circ$ の無理数性を導いてみせるとか，45倍角の公式を誘導により考えさせるなどが考えられるが，いずれにしても5倍角の公式を避けることはできない。

そこで，5倍角の公式の導出は生徒とともに行うことにして，その後は流れに応じて，臨機応変に対応するのも面白いのではと考え，そのように取りくむことにした。

次に，2003年9月4日に実施した授業の指導案を示す。

本時の題目：三角関数の倍角・半角の公式と $\sin 1^\circ$ の無理数性

本時の目標：１.三角関数の加法定理から倍角の公式を導き，これから半角の公式が導けることを理解させる。

２．3倍角の公式，5倍角の公式から $\sin 1^\circ$ の無理数性を証明できることを理解させる。

本時の指導過程

学習内容	指導過程・学習活動	評価の観点・指導上の留意点
（導　入） 加法定理の復習	・三角関数の加法定理を答えさせる。 $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta), \tan(\alpha+\beta)$ ・これらの公式から，$\sin 15^\circ$ や2直線のなす角が求められたことに触れる。	・加法定理の公式とその簡単な利用法を知っているか。（知識・理解）
（展　開） 倍角の公式と半角の公式	課題1　次の式を $\sin\alpha, \cos\alpha$ を用いて表せ。また，$\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。 1) $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 2) $\sin^2(\frac{\alpha}{2})$，$\cos^2(\frac{\alpha}{2})$	
	・まず，1)を答えさせる。 ・2)が答えにくいときは，$\cos 2\alpha$ を $\sin\alpha$ のみ，$\cos\alpha$ のみで表すよう伝え，それから導くよう投げかける。 ・$\sin 22.5^\circ$ の値については，少し考えさせた後答えさせる。	・$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ $= 1 - 2\sin^2\alpha$ から半角の公式を導けるか。（見方・考え方）

$\sin(2n-1)\alpha$ の展開と $\sin 1^\circ$ の無理数性	課題 2 1) 次の三角比の値を $\sin\alpha$ のみで表せ。 (i) $\sin 3\alpha$　　(ii) $\sin 5\alpha$ 2) t が有理数のとき，t の多項式で表される数は有理数であることを利用して，$\sin 1^\circ$ が有理数であるか否かを調べよ。	・有理数は加減乗に関して閉じていることを理解しているか。　（知識・理解） ・$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha$
（数学的活動）	・1) は，少し計算させた後，答えさせる。 ・2) については，少し考えさせた後，必要なら $\sin 15\alpha$ が $\sin\alpha$ のみで表せることや $\sin 45^\circ$ が無理数であることをほのめかし，考えさせる。 ・生徒に答えさせながら，$\sin 1^\circ$ が無理数であることを説明する。	・$\sin 15\alpha = 3\sin 5\alpha - 4\sin^2 5\alpha$
	（問）1)（時間があれば）$\cos 1^\circ$ が無理数かどうか調べよ。 2) $\sin(2n-1)\alpha$ が $\sin\alpha$ のみで表せるといえるか。	・一般化できるか。 （$\cos(2n-1)\alpha$ も同時に考察する必要あり。）
（まとめ）	・半角の公式は，倍角の公式から導ける。 ・$\sin 1^\circ$ の無理数性は，$\sin 45\alpha$ が $\sin\alpha$ の多項式で表されることを用いて示すことができる。	
備　考	使用教科書：改訂版　高等学校数学Ⅱ （第一学習社）	

授業では，復習に時間がかかりすぎ，$\sin 5\theta$ の公式の導出や，3 倍角の公式，5 倍角の公式を利用しての $\sin 1^\circ$ の無理数性の証明に十分な時間をとれず，やや慌しい展開となった。

加法定理などの既習事項の復習は，比較的スムーズに流れたが，やや時間を取りすぎた上，5 倍角の公式

$$\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$$

の導出に少し時間がかかってしまった。そのために，$\sin 3\theta$ や $\sin 5\theta$ の公式が $\sin 1^\circ$ の無理数性の証明とどう結びつくのかを十分考えさせられなかったように思う。

したがって，余り順調に行った授業ではなかったが，救いは $\sin 1^\circ$ の無理数性の証明に興味を持ち，その証明のしくみを理解しようと質問に集まった生徒たちである。

また，数学を得意とする何人かの生徒は $\sin(2n-1)\theta$ が $\sin\theta$ の多項式として表されることの証明に取りくみ，不十分ながらもその証明をやりとげていた。ド・モアブルの公式を使って考えてみるようにとの助言にしたがって，これをほぼやり抜いた生徒がいたのも嬉しい。

証明の不十分さは，定理の定式化の不十分さに起因するものであった。

4. 反省と課題

今回の題材には難しさもあり，生徒達にじっくり考えさせるだけの時間をとれなかった事が問題である。

しかし，その問題自体は比較的興味深いものであり，多くの生徒が真剣に取りくんでくれた点では，興味づけはできたと考えている。

こうした反省の上に立って，流れに無理がないよう改善するとともに，もう少し時間をかけて，2 時間程度の授業展開にするのが適当ではないかと思われる。また，加法定理，倍角の公式に関わる別の材料をも加えて，より興味深いものにして行けるのではないかと考えている。

さらに，物理分野との関連をも調べて，総合的な学習教材の開発を行ってゆきたい。

〈参考文献〉

1. 中村芳彦著　新数学シリーズ 4 「三角法」　培風館　昭和 57 年
2. 森口繁一他著 「数学公式Ⅱ」 —級数・フーリエ解析—　岩波全書　1965
3. 那須俊夫・平林一栄他著 「高等学校　数学Ⅱ」　第一学習社　2003